CAHIERS DE
TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
CATÉGORIQUES

YVES DIERS

Catégorie algébriques prégaloisiennes

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 32, n° 4 (1991), p. 279-296

<http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1991__32_4_279_0>

CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE CATÉGORIQUES

VOL. XXXII-4 (1991)

CATEGORIES ALGEBRIQUES PREGALOISIENNES

par Yves DIERS

ABSTRACT. This is a study of the properties of categories of the following type : category of algebraic field extensions of a field, category of integrally dependant integral extensions of an integral domain, category of totally ordered algebraic field extensions of a totally ordered field, category of totally ordered integrally dependant integral extensions of a totally ordered integral domain. An axiomatic description is given which entails the construction of the closure object L, the profinite Galois group G of automorphisms of L, and the Galois correspondance between the closed subgroups of G and the objects of the category.

Introduction. La catégorie $\mathbf{Ext}Alg(k)$ ayant pour objets les corps commutatifs extensions algébriques d'un corps commutatif k et ayant pour morphismes les homomorphismes de corps laissant le corps k fixe, possède des propriétés peu ordinaires. C'est une petite catégorie qui n'est ni finiment complète, ni finiment cocomplète, dont tous les morphismes sont monomorphiques et tous les endomorphismes sont automorphiques. Elle possède un objet "maximum" qui est faiblement final et dont le défaut de finalité se mesure par son groupe d'automorphismes ; c'est la clôture algébrique $\overline{k}$ de k dont le groupe d'automorphismes est le groupe de Galois $G_{\overline{k}/k}$. Ce groupe est un groupe profini dont l'ensemble des sous-groupes fermés est en correspondance de Galois avec les objets de la catégorie. Si $P(X)$ est un polynôme à coefficients dans k, la catégorie $\mathbf{Ext}(P(X)/k)$ ayant pour objets les corps commutatifs extensions de k obtenues en adjoignant à k des zéros de $P(X)$, et ayant pour morphismes les homomorphismes de corps laissant le corps k fixe, possède des propriétés analogues. Il en est de même de la catégorie $\mathbf{Ext}(N/k)$ des corps intermédiaires entre k et une extension normale N de k, de la catégorie $\mathbf{Ext}AlgSep(k)$ des corps commutatifs extensions algébriques séparables de k, de la catégorie $\mathbf{Ext}AlgTotOrd(k)$ des corps commutatifs totalement ordonnés extensions algébriques ordonnées d'un corps commutatif totalement ordonné k, de la catégorie $\mathbb{E}xtInt(R)$ des domaines d'intégrité extensions intégrales d'un domaine d'intégrité R, et de la catégorie $\mathbb{E}xtIntTotOrd(R)$ des domaines d'intégrité totalement ordonnés extensions algébriques ordonnées d'un domaine d'intégrité totalement ordonné R.

Sous le nom de : catégories multialgébriques prégaloisiennes, on donne une description axiomatique des catégories analogues aux catégories précédentes. On construit l'objet maximum L, le groupe profini G des automorphismes de L et on établit une correspondance de Galois entre les sous-groupes fermés de G et les objets de la catégorie.

Une catégorie multialgébrique prégaloisienne est définie comme étant une catégorie ayant un objet initial, des colimites filtrantes et des multicolimites finies [3, définition 1.5.1], possédant un ensemble générateur propre formé d'objets de présentation finie, satisfaisant la propriété d'amalgamation, et dont les objets sont de puissance finie. La propriété d'amalgamation exprime le fait que, pour tout couple de monomorphismes de même source $(f : A \to B, g : A \to C)$, il existe un couple de monomorphismes de même but $(m : B \to D, n : C \to D)$ vérifiant $mf = ng$. Un objet A est dit de puissance finie si, pour tout objet de présentation finie B, l'ensemble $Hom(B, A)$ est fini.

On montre qu'une catégorie multialgébrique prégaloisienne $\mathbf{A}$ est multialgébrique au sens de [4], qu'elle est petite, que ses morphismes sont monomorphiques, que ses endomorphismes sont automorphiques, et qu'elle possède un objet faiblement final $L_{\mathbb{A}}$ unique à isomorphisme près. On montre qu'elle est une catégorie canoniquement enrichie au-dessus de la catégorie $\mathbb{E}spBool$ des espaces topologiques booléens, si bien que le groupe $G_{\mathbb{A}}$ des automorphismes de $L_{\mathbb{A}}$ est un groupe profini. On prouve que le foncteur $Hom_{\mathbb{A}}(-, L_{\mathbb{A}}) : \mathbf{A}^{op} \to \mathbb{E}ns$ se rélève en un foncteur $H_{\mathbb{A}} : \mathbf{A}^{op} \to G_{\mathbb{A}}\text{-}\mathbb{E}spHomSep$ à valeurs dans la catégorie des $G_{\mathbb{A}}$-espaces homogènes séparés. Ce foncteur $H_{\mathbb{A}}$ possède un adjoint à gauche et induit une correspondance de Galois entre les objets de $\mathbf{A}$ et les sous-groupes fermés de $G_{\mathbb{A}}$. En appelant normal, un objet N tel que, pour tout couple de morphismes $(f, g) : N \rightrightarrows L_{\mathbb{A}}$, il existe un automorphisme ν de N vérifiant $f\nu = g$, on montre que la correspondance de Galois précédente induit une correspondance de Galois entre les objets normaux de $\mathbf{A}$ et les sous-groupes fermés normaux de $G_{\mathbb{A}}$.

Si $\mathbf{A}$ est une catégorie multialgébrique prégaloisienne et $\mathbf{L} = (L, \varepsilon, \delta)$ est une comonade universelle sur $\mathbf{A}$, c'est-à-dire une comonade telle que, pour tout morphisme $f : A \to B$, de $\mathbf{A}$, le couple (ε_A, Lf) est produit fibré du couple (f, ε_B), alors la catégorie $\mathbf{A}^{\mathbb{L}}$ des $\mathbb{L}$-coalgébres est multialgébrique prégaloisienne. Par exemple, la catégorie $\mathbb{E}xtAlgSep(k)$ des extensions algébriques séparables de k est la catégorie des coalgébres pour une comonade universelle sur la catégorie $\mathbb{E}xtAlg(k)$ des extensions algébriques de k. Si N est un objet normal de $\mathbf{A}$, la sous-catégorie pleine $\mathbf{A}//N$ des objets de $\mathbf{A}$ faiblement au-dessus de N, est une catégorie de coalgèbres pour une comonade universelle sur $\mathbf{A}$. Notons encore que tout produit fini de catégories multialgébriques prégaloisiennes est une catégorie multialgébrique prégaloisienne.

1. Revue des catégories localement multiprésentables.

La notion de catégories localement présentables introduite par P. Gabriel et F. Ulmer dans [7] fournit une description axiomatique des catégories d'algèbres usuelles. Ces catégories sont nécessairement complètes et cocomplètes. La notion de catégories localement multiprésentables introduite dans [5], permet d'étendre l'étude faite par P. Gabriel et F. Ulmer, pour appréhender des catégories non complètes ni cocomplètes comme celles des corps, des anneaux locaux, des anneaux indécomposables, des espaces préhilbertiens, des ensembles strictement ordonnés, etc..., tout en préservant les résultats essentiels. Cette extension fut rendue possible par l'introduction des multicolimites.

Suivant [3, définition 1.5.1], une *multicolimite* d'un diagramme $(A_i)_{i \in \mathbb{I}}$ d'une catégorie $\mathbf{A}$ est une famille de cônes inductifs de base $(A_i)_{i \in \mathbb{I}}$ indexée par un ensemble J, notée $(\gamma_{ji} : A_i \to B_j)_{(i,j) \in \mathbb{I} \times J}$, telle que, pour tout cône inductif $(\gamma_i : A_i \to B)_{i \in \mathbb{I}}$ de base $(A_i)_{i \in \mathbb{I}}$, il existe un unique couple (j, f) formé d'un élément j de J et d'un morphisme $f : B_j \to B$ vérifiant $f\gamma_{ji} = \gamma_i$ pour tout objet i de $\mathbb{I}$. Lorsque la catégorie $\mathbb{I}$ est discrète i.e. est un ensemble, on obtient une *multisomme*. Lorsque la catégorie $\mathbb{I}$ a trois objets i_0, i_1, i_2 et deux morphismes $i_0 \to i_1, i_0 \to i_2$ autres que les unités, on obtient une *multisomme amalgamée*. La catégorie $\mathbf{A}$ est dite *multicocomplète* (resp. *finiment multicocomplète*) lorsque tout petit diagramme (resp. diagramme fini) de $\mathbf{A}$ admet une multicolimite.

Suivant [5, définition 1.0.] une catégorie est dite localement $\aleph_0$-multiprésentable ou, plus simplement ici, *localement multiprésentable* si

(1) elle est à colimites filtrantes,
(2) elle est finiment multicocomplète,
(3) elle possède un ensemble générateur propre formé d'objets de présentation finie.

Elle est alors multicocomplète. Les catégories multialgébriques étudiées dans [4] sont des catégories localement multiprésentables particulières. Elles sont définies à partir des théories multialgébriques [4, définition 1.1] et sont caractérisées par le fait de satisfaire les trois propriétés suivantes :

(1) elle est à colimites filtrantes, à couples noyaux et ses relations d'équivalence sont effectives,
(2) elle est à multisommes finies,
(3) elle possède un ensemble générateur propre formé d'objets projectifs de présentation finie.

Par exemple, toute catégorie localement multiprésentable monomorphique i.e. dont tous les morphismes sont monomorphiques, est multialgébrique. Ainsi la catégorie **Kc** des corps commutatifs et homomorphismes de corps, est multialgébrique. Il en est de même de la catégorie $\mathbb{E}xt(k)$ des corps commutatifs extensions d'un corps commutatif k, équivalente à la catégorie $k/\mathbf{Kc}$ des objets de **Kc** au-dessous de k [6, proposition 2.2.]. De même, la catégorie $\mathbf{Kc}TotOrd$ des corps commutatifs totalement ordonnés et homomorphismes croissants de corps, ainsi que la catégorie $\mathbb{E}xtTotOrd(k)$ des corps commutatifs extensions totalement ordonnés d'un corps commutatif totalement ordonné k et homomorphismes croissants de corps laissant le corps k fixe, sont des catégories multialgébriques.

2. Catégories localement multiprésentables de coalgèbres pour une comonade.

On utilise la notion de comonade, duale de la notion de monade [10, p.135].

2.0. Définition. Une comonade $\mathbb{L} = (L, \varepsilon, \delta)$ sur une catégorie **A** est *universelle*, si, pour tout morphisme $f : A \to B$ de **A**, le couple $(\varepsilon_A : LA \to A, Lf : LA \to LB)$ est produit fibré du couple $(f : A \to B, \varepsilon_B : LB \to B)$.

2.1. Proposition. *Si* **A** *est une catégorie localement multiprésentable et* $\mathbb{L}$ *est une comonade universelle sur* **A**, *la catégorie* $\mathbf{A}^{\mathbb{L}}$ *des* $\mathbb{L}$*-coalgèbres est localement multiprésentable et ses objets de présentation finie sont précisément les* $\mathbb{L}$*-coalgèbres sur les objets de présentation finie de* **A**.

Preuve. Soient $\mathbb{L} = (L, \varepsilon, \delta), U^{\mathbb{L}} : \mathbf{A}^{\mathbb{L}} \to \mathbf{A}$ le foncteur oubli de structure et $D^{\mathbb{L}} : \mathbf{A} \to \mathbf{A}^{\mathbb{L}}$ son adjoint à droite. Le foncteur $U^{\mathbb{L}}$ crée les colimites, donc la catégorie $\mathbf{A}^{\mathbb{L}}$ possède des colimites filtrantes préservées par $U^{\mathbb{L}}$. Dans la catégorie **A**, les colimites filtrantes commutent aux produits fibrés [5, proposition 5.0.]. De l'universalité de la comonade $\mathbb{L}$, il résulte alors que le foncteur L préserve les colimites filtrantes. Par suite, le foncteur $D^{\mathbf{L}}$ les préserve aussi. Montrons que $U^{\mathbf{L}}$ crée les multicolimites. Soit $(A_i, a_i)_{i\in\mathbf{I}}$ un diagramme de $\mathbf{A}^{\mathbf{L}}$. Soit $(\gamma_{ji} : A_i \to B_j)_{(i,j)\in\mathbf{I}\times J}$ la multicolimite du diagramme $(A_i)_{i\in\mathbf{I}}$ de $\mathbf{A}$. Pour chaque $j \in J$, le cône inductif $(\gamma_{ji} : A_i \to B_j)_{i\in\mathbf{I}}$ de base $(A_i)_{i\in\mathbf{I}}$ et de sommet B_j, se factorise à travers le cône inductif $((L\gamma_{ji})a_i : A_i \to LB_j)_{i\in\mathbf{I}}$ de base $(A_i)_{i\in\mathbf{I}}$ et de sommet LB_j, par le morphisme $\varepsilon_{B_j} : LB_j \to B_j$, puisque $\varepsilon_{B_j}(L\gamma_{ji})a_i = \gamma_{ji}\varepsilon_{A_i}a_i = \gamma_{ji}$. La propriété universelle de la multicolimite implique l'existence d'un unique morphisme $b_j : B_j \to LB_j$ vérifiant $b_j\gamma_{ji} = (L\gamma_{ji})a_i$ pour tout $i \in \mathbf{I}$. Il est immédiat que l'on définit ainsi une $\mathbf{L}$-coalgèbre (B_j, b_j) et un cône inductif $(\gamma_{ji} : (A_i, a_i) \to (B_j, b_j))_{i\in\mathbf{I}}$ de base $(A_i, a_i)_{i\in\mathbf{I}}$ et sommet (B_j, b_j) et que la famille de cônes inductifs $(\gamma_{ji} : (A_i, a_i) \to (B_j, b_j))_{(i,j)\in\mathbf{I}\times J}$ ainsi obtenue est une multicolimite du diagramme $(A_i, a_i)_{i\in\mathbf{I}}$. La catégorie $\mathbf{A}^{\mathbf{L}}$ est donc multicocomplète. Si (A, a) est une $\mathbf{L}$-coalgèbre de présentation finie, le foncteur $Hom_{\mathbf{A}}(A, -) = Hom_{\mathbf{A}}(U^{\mathbf{L}}(A, a), -) \simeq Hom_{\mathbf{A}^{\mathbf{L}}}((A, a), D^{\mathbf{L}}(-))$ préserve les colimites filtrantes et par suite, A est un objet de présentation finie de $\mathbf{A}$. Réciproquement, considérons une $\mathbf{L}$-coalgèbre (A, a) sur un objet de présentation finie de A de $\mathbf{A}$. Soit $(\alpha_i : (X_i, x_i) \to (X, x))_{i\in\mathbf{I}}$ une colimite filtrante dans $\mathbf{A}^{\mathbf{L}}$. Les cônes $(\alpha_i : X_i \to X)_{i\in\mathbf{I}}$ et $(L\alpha_i : LX_i \to LX)_{i\in\mathbf{I}}$ sont des colimites filtrantes dans $\mathbf{A}$. Soit $f : (A, a) \to (X, x)$. Il existe $i \in \mathbf{I}$ et $f_i : A \to X_i$ tels que $f = \alpha_i f_i$. Les relations $(L\alpha_i)x_i f_i = x\alpha_i f_i = xf = (Lf)a = L(\alpha_i f_i)a = (L\alpha_i)(Lf_i)a$ impliquent l'existence d'un morphisme $u : i \to j$ de $\mathbf{L}$ vérifiant $(LX_u)x_i f_i = (LX_u)(Lf_i)a$ donc $x_j X_u f_i = L(X_u f_i)a$. On obtient ainsi un morphisme $X_u f_i : (A, a) \to (X_j, x_j)$ qui factorise le morphisme $f : (A, a) \to (X, x)$ sous la forme $f = \alpha_i(X_u f_i)$. En outre, si $f_i : (A, a) \to (X_i, x_i)$ et $f_j : (A, a) \to (X_j, x_j)$ sont deux morphismes vérifiant $\alpha_i f_i = \alpha_j f_j$, il existe deux morphismes $u : i \to k$ et $v : j \to k$ de $\mathbf{I}$ tels que $X_u f_i = X_v f_j$. Il s'en suit que le foncteur $Hom_{\mathbf{A}^{\mathbf{L}}}((A, a), -)$ préserve les colimites filtrantes, c'est à dire que l'objet (A, a) est de présentation finie dans $\mathbf{A}^{\mathbf{L}}$. Le foncteur $U^{\mathbf{L}}$ préserve et reflète donc les objets de présentation finie. Soit (A, a) un objet quelconque de $\mathbf{A}^{\mathbf{L}}$. Dans la catégorie $\mathbf{A}$, l'objet A est colimite filtrante d'objets de présentation finie : soit $(A, (\alpha_i)) = \varinjlim_{i\in\mathbf{I}} A_i$. Pour chaque objet i de $\mathbf{I}$, le couple $(\varepsilon_{A_i} : LA_i \to A_i, L\alpha_i : LA_i \to LA)$ est produit fibré du couple $(\alpha_i : A_i \to A, \varepsilon_A : LA \to A)$. Le couple de morphismes $(1_{A_i} : A_i \to A_i, a\alpha_i : A_i \to LA)$ vérifie $\varepsilon_A(a\alpha_i) = \alpha_i 1_{A_i}$, donc il détermine un unique morphisme $a_i : A_i \to LA_i$ vérifiant $\varepsilon_{A_i}a_i = 1_{A_i}$ et $(L\alpha_i)a_i = a\alpha_i$. On obtient ainsi une $\mathbf{L}$-coalgèbre (A_i, a_i) et un morphisme de $\mathbf{L}$-coalgèbres $\alpha_i : (A_i, a_i) \to (A, a)$. Ces morphismes définissent un cône inductif $(\alpha_i : (A_i, a_i) \to (A, a))_{i\in\mathbf{I}}$ de base $(A_i, a_i)_{i\in\mathbf{I}}$ et de sommet (A, a).

Ce cône inductif est une colimite filtrante puisque son image par $U^{\mathbb{L}}$ en est une. Il s'en suit que les objets de présentation finie engendrent proprement la catégorie $\mathbf{A}^{\mathbb{L}}$ et que la catégorie $\mathbf{A}^{\mathbb{L}}$ est localement multiprésentable. □

2.2. Exemples.

2.2.0. $\mathbb{E}xtAlg(k)$: catégorie dont les objets sont les corps commutatifs extensions algébriques d'un corps commutatif k et dont les morphismes sont les homomorphismes de corps laissant le corps k fixe.

C'est une sous-catégorie pleine de la catégorie multialgébrique $\mathbb{E}xt(k)$ des corps commutatifs extensions de k. Pour chaque objet K de $\mathbb{E}xt(k)$, notons LK la clôture algébrique de k dans K i.e. l'ensemble des éléments de K algébriques sur k. LK est un sous-corps de K, extension algébrique de k. Chaque morphisme $f : M \to K$ de $\mathbb{E}xt(k)$ induit un morphisme $Lf : LM \to LK$. On définit ainsi un endofoncteur idempotent $L : \mathbb{E}xt(k) \to \mathbb{E}xt(k)$. L'inclusion de LK dans K définit une transformation naturelle $\varepsilon : L \to 1_{\mathbb{E}xt(k)}$ qui munit L d'une structure de comonade idempotente universelle $\mathbb{L}$ sur $\mathbb{E}xt(k)$. La catégorie $\mathbb{E}xt(k)^{\mathbb{L}}$ est équivalente à la catégorie $\mathbb{E}xtAlg(k)$. Celle-ci est donc localement multiprésentable. Etant monomorphique, elle est multialgébrique.

2.2.1. $\mathbb{E}xtAlgSep(k)$: catégorie dont les objets sont les corps commutatifs extensions algébriques séparables d'un corps commutatif k et dont les morphismes sont les homomorphismes de corps laissant le corps k fixe.

Un polynôme $P \in k[X]$ est dit séparable s'il ne possède que des zéros simples dans son corps de décomposition ou, ce qui revient au même, s'il se factorise en polynômes irréductibles distincts dans toute extension algébrique de k. Un élément algébrique d'une extension K de k est dit séparable si son polynôme minimal est séparable. L'extension algébrique K de k est dite séparable si tous ses éléments sont séparables. La catégorie $\mathbb{E}xtAlgSep(k)$ est la sous-catégorie pleine de $\mathbb{E}xtAlg(k)$ ayant pour objets les k-algèbres algébriques séparables. Pour chaque extension algébrique K de k, notons $S(K)$ l'ensemble des éléments séparables de K. C'est un sous-corps de K, extension séparable de k. Chaque morphisme $f : M \to K$ de $\mathbb{E}xtAlg(k)$ induit un morphisme $Sf : SM \to SK$. On définit ainsi un endofoncteur idempotent $S : \mathbb{E}xtAlg(k) \to \mathbb{E}xtAlg(k)$. L'inclusion de SK dans K définit une transformation naturelle $\varepsilon : S \to 1_{\mathbb{E}xtAlg(k)}$ qui munit S d'une structure de comonade idempotente universelle $\mathbb{S}$ sur $\mathbb{E}xtAlg(k)$. La catégorie $\mathbb{E}xtAlg(k)^{\mathbb{S}}$ est équivalente à la catégorie $\mathbb{E}xtAlgSep(k)$. Celle-ci est donc localement multiprésentable. Etant monomorphique, elle est multialgébrique.

2.2.2. $\mathbb{E}xt(P(X)/k)$: catégorie dont les objets sont les corps commutatifs extensions d'un corps commutatif k obtenues en adjoignant à k des zéros d'un polynôme donné $P(X) \in k[X]$, et dont les morphismes sont les homomorphismes de corps laissant le corps k fixe. C'est une sous-catégorie pleine de $\mathbb{E}xtAlg(k)$ équivalente à une catégorie de coalgèbres pour une comonade idempotente universelle sur $\mathbb{E}xtAlg(k)$.

2.2.3. $\mathbb{E}xtInt(R)$: catégorie dont les objets sont les domaines d'intégrité extensions intégrales d'un domaine d'intégrité R et dont les morphismes sont les homomorphismes injectifs d'anneaux laissant le domaine d'intégrité R fixe. La catégorie $\mathbb{D}om$ des domaines d'intégrité et homomorphismes injectifs est multialgébriques [4, exemples 4.1.]. Il s'en suit que la catégorie $\mathbb{E}xt(R)$ des domaines d'intégrité extensions de R, équivalente à la catégorie $R/\mathbb{D}om$, est multialgébrique [6, proposition 2.2.]. On montre comme précédemment que la catégorie $\mathbb{E}xtInt(R)$ est la catégorie des coalgèbres pour une comonade idempotente universelle sur la catégorie $\mathbb{E}xt(R)$. Elle est donc localement multiprésentable et multialgébrique.

2.2.4. $\mathbb{E}xtAlgTotOrd(k)$: catégorie ayant pour objets les corps commutatifs totalement ordonnés extensions algébriques ordonnées d'un corps commutatif totalement ordonné k et ayant pour morphismes les homomorphismes croisssants de corps laissant le corps k fixe. C'est une catégorie multialgébrique de coalgèbres pour une comonade idempotente universelle sur la catégorie multialgébrique $\mathbb{E}xtTotOrd(k)$ des corps commutatifs totalement ordonnés extensions ordonnées de k.

2.2.5. $\mathbb{E}xtIntTotOrd(R)$: catégorie dont les objets sont les domaines d'intégrité totalement ordonnés extensions intégrales ordonnées d'un domaine d'intégrité totalement ordonné R et dont les morphismes sont les homomorphismes strictement croissants d'anneaux laissant l'anneau R fixe. C'est une catégorie multialgébrique de coalgèbres, pour une comonade idempotente universelle sur la catégorie multialgébrique $\mathbb{E}xtTotOrd(R)$ des domaines d'intégrité totalement ordonnés extensions ordonnées de R.

3.Enrichissement topologique des catégories localement multiprésentables.

Rappelons qu'un espace topologique est dit de dimension zéro s'il est séparé et possède une base de topologie constituée d'ouverts fermés. Avec les applications continues, ils constituent la catégorie $\mathbb{E}spZ$. Un espace topologique compact de dimension zéro est un espace booléen. Ceux-ci sont les objets de la sous-catégorie pleine $\mathbb{E}spBool$ de $\mathbb{E}spZ$.

3.0. Proposition. *Toute catégorie localement multiprésentable est canoniquement enrichie [10, p. 181] sur la catégorie $\mathbb{E}spZ$ des espaces topologiques de dimension zéro.*

Preuve. Soit $\mathbf{A}$ une catégorie localement multiprésentable. Considérons deux objets A et B de $\mathbf{A}$ tels que $Hom_{\mathbf{A}}(A,B) \neq \emptyset$. Pour chaque couple de morphismes $(u : X \to A, v : X \to B)$ de $\mathbf{A}$, posons $H_{u,v} = \{f : A \to B : fu = v\}$. Il existe un objet Z appartenant à la famille initiale d'objets de $\mathbf{A}$ tel que $Hom_{\mathbf{A}}(Z,A) \neq \emptyset$. Alors $Hom_{\mathbf{A}}(Z,B) \neq \emptyset$. Si $i_A : Z \to A$ et $i_B : Z \to B$, alors $H_{i_A,i_B} = Hom_{\mathbf{A}}(A,B)$. Soit $(w : Y \to A, t : Y \to B)$ un second couple de morphismes de $\mathbf{A}$ tel que $H_{u,v} \cap H_{w,t} \neq \emptyset$. Alors il existe un morphisme $f : A \to B$ vérifiant $fu = v$ et $fw = t$. Il existe un couple de morphismes $(\gamma : X \to C, \mu : Y \to C)$ appartenant à la multisomme de X et Y, et un morphisme $g : C \to A$ vérifiant $g\gamma = u$ et $g\mu = w$. Le morphisme $h = fg : C \to B$ est l'unique morphisme $h : C \to B$ vérifiant $h\gamma = v$ et $h\mu = t$. Alors $H_{g,h} = H_{u,v} \cap H_{w,t}$. Lorsque (u,v) parcourt l'ensemble des couples de morphismes dont la source commune est un objet de présentation finie de $\mathbf{A}$, les ensembles $H_{u,v}$ définissent une base de topologie sur $Hom_{\mathbf{A}}(A,B)$. Cette topologie est séparée puisque si f et g sont deux morphismes distincts de A dans B, il existe un objet de présentation finie X de $\mathbf{A}$ et un morphisme $u : X \to A$ vérifiant $fu \neq gu$, et alors $f \in H_{u,fu}, g \in H_{u,gu}$ et $H_{u,fu} \cap H_{u,gu} = \emptyset$. Les ensembles $H_{u,v}$ sont fermés pour la topologie puisque, si $f : A \to B \notin H_{u,v}$, alors $f \in H_{u,fu}$ et $H_{u,fu} \cap H_{u,v} = \emptyset$. La topologie est donc de dimension zéro. Si C est un autre objet de $\mathbf{A}$, la composition $\Gamma_{A,B,C} : Hom_{\mathbf{A}}(B,C) \times Hom_{\mathbf{A}}(A,B) \to Hom_{\mathbf{A}}(A,C)$ est continue puisque, pour tout couple $(g : B \to C, f : A \to B)$ et tout ouvert $H_{u,v}$ de $Hom_{\mathbf{A}}(A,C)$ contenant gf, l'ouvert $H_{fu,v}$ de $Hom_{\mathbf{A}}(B,C)$ contient g, l'ouvert $H_{u,fu}$ de $Hom_{\mathbf{A}}(A,B)$ contient f et $\Gamma_{A,B,C}(H_{fu,v} \times H_{u,fu}) \subset H_{u,v}$. Le bifoncteur $Hom_{\mathbf{A}} : \mathbf{A}^{op} \times \mathbf{A} \to \mathbb{E}ns$ se relève donc en un bifoncteur $\mathbf{A}^{op} \times \mathbf{A} \to \mathbb{E}spZ$ qui fait de la catégorie $\mathbf{A}$, une catégorie enrichie sur la catégorie $\mathbb{E}spZ$ [10 p. 181]. □

3.1. Notation. On note $\mathbb{H}om_{\mathbf{A}}(A,B)$ l'ensemble $Hom_{\mathbf{A}}(A,B)$ muni de la topologie précédemment définie et $\mathbb{H}om_{\mathbf{A}} : \mathbf{A}^{op} \times \mathbf{A} \to \mathbb{E}spZ$ le bifoncteur correspondant.

3.2. Définition. Un objet A d'une catégorie localement multiprésentable $\mathbf{A}$ est dit de *puissance finie* si, pour tout objet de présentation finie B de $\mathbf{A}$, l'ensemble $Hom_{\mathbf{A}}(B,A)$ est fini.

3.3. Exemples. Dans les catégories algèbriques au sens de Lawvere, les objets de puissance finie sont précisément les algèbres finies. Il n'en est pas de même dans les catégories multialgébriques. Montrons que, dans les catégories $\mathbb{E}xtAlg(k)$ et $\mathbb{E}xtAlgSep(k)$, tous les objets sont de puissance finie. Les objets de présentation finie de ces catégories sont des corps extensions de degré fini de k. Considérons d'abord une extension algébrique simple de k. Elle est de la forme $k(\alpha) = k[X]/P(X)$ avec $P(X) \neq 0$ et $P(\alpha) = 0$. Tout morphisme $f : k(\alpha) \to K$ est entièrement déterminé par sa valeur en α. Or $P(f(\alpha)) = f(P(\alpha)) = f(0) = 0$. Donc $f(\alpha)$ est zéro de P dans K. Ces zéros étant en nombre fini, les morphismes de $k(\alpha)$ dans K sont en nombre fini. Ce résultat s'étend à toutes les extensions de degré fini de k puisqu'elles sont composées d'un nombre fini d'extensions simples.

3.4. Proposition. *Si A est un objet de puissance finie d'une catégorie localement multiprésentable $\mathbf{A}$, les espaces topologiques $\mathbb{H}om_{\mathbb{A}}(B, A)$ sont booléens et définissent un foncteur $\mathbb{H}om_{\mathbb{A}}(-, A) : \mathbf{A}^{op} \to \mathbb{E}sp\mathbb{B}ool$.*

Preuve. Si B est un objet de présentation finie de $\mathbf{A}$, l'espace topologique $\mathbb{H}om_{\mathbb{A}}(B, A)$ est fini donc booléen. Tout objet C de $\mathbf{A}$ est colimite filtrante des objets de présentation finie au-dessus de lui : soit $C = \varinjlim_{i \in \mathbb{I}} C_i$. D'après la définition de la topologie sur $\mathbb{H}om_{\mathbb{A}}(C, A)$, l'espace topologique $\mathbb{H}om_{\mathbb{A}}(C, A)$ est la limite cofiltrante des espaces topologiques $\mathbb{H}om_{\mathbb{A}}(C_i, A)$, c'est à dire $\mathbb{H}om_{\mathbb{A}}(C, A) = \varprojlim_{i \in \mathbb{I}} \mathbb{H}om_{\mathbb{A}}(C_i, A)$. L'espace $\mathbb{H}om_{\mathbb{A}}(C, A)$ est donc booléen et par suite, le foncteur $\mathbb{H}om_{\mathbb{A}}(-, A) : \mathbf{A}^{op} \to \mathbb{E}spZ$ induit un foncteur $\mathbb{H}om_{\mathbb{A}}(-, A) : \mathbf{A}^{op} \to \mathbb{E}spBool$. □

4. Groupes de Galois.

4.0. Définition. Le *groupe de Galois d'un morphisme* $u : X \to A$ d'une catégorie $\mathbf{A}$ est le groupe G_u des automorphismes σ de A vérifiant $\sigma u = u$.

Si Z est un objet initial de $\mathbf{A}$ ou un objet appartenant à une famille initiale d'objets de $\mathbf{A}$, le groupe de Galois d'un morphisme $u : Z \to A$ est le groupe des automorphismes de A. Il s'appelle le *groupe de Galois de l'objet* A et est noté G_A.

Dans la catégorie $\mathbb{E}xt(k)$ des corps commutatifs extensions d'un corps commutatif k, on retrouve les groupes de Galois classiques.

4.1. Proposition. *Le groupe de Galois d'un objet A d'une catégorie localement multiprésentable est un groupe topologique de dimension zéro* *ayant une base de voisinages ouverts de l'unité formée des groupes de Galois des morphismes de but A dont la source est de présentation finie.*

Preuve. La topologie sur $\mathbb{H}om_{\mathbb{A}}(A, A)$ induit une topologie de dimension zéro sur G_A telle que les deux opérations de composition et d'inversion soient continues, c'est à dire une topologie faisant de G_A un groupe topologique. Une base de voisinage ouverts de l'unité est constituée des ensembles $H_{u,u} \cap G_A = G_u$ où $u : X \to A$ a pour source un objet de présentation finie de $\mathbb{A}$. $\square$

4.2. Proposition. *Le groupe de Galois G_u d'un morphisme $u : X \to A$ d'une catégorie localement multiprésentable, est un sous-groupe fermé du groupe de Galois G_A de l'objet A.*

Preuve. L'objet X est colimite filtrante d'objets de présentation finie de $\mathbb{A}$: soit $(X, (\alpha_i)) = \varinjlim_{i \in \mathbb{I}} X_i$. Alors $G_u = \bigcap_{i \in Ob(\mathbb{I})} G_{u\alpha_i}$ est un sous-groupe fermé de G_A.

4.3. Proposition. *Le groupe de Galois d'un objet de puissance finie d'une catégorie localement multiprésentable est un groupe profini.*

Preuve. Soit A un objet de puissance finie d'une catégorie localement multiprésentable $\mathbb{A}$. Montrons que G_A est une partie fermée de $\mathbb{H}om_{\mathbb{A}}(A, A)$. Soit $f : A \to A$ un morphisme n'appartenant pas à G_A, c'est à dire un endomorphisme non isomorphique. Il existe un objet de présentation finie X tel que l'application $Hom_{\mathbb{A}}(X, f) : Hom_{\mathbb{A}}(X, A) \to Hom_{\mathbb{A}}(X, A)$ ne soit pas bijective. Puisque l'ensemble $Hom_{\mathbb{A}}(X, A)$ est fini, l'application $Hom_{\mathbb{A}}(X, f)$ n'est pas injective. Il existe donc deux morphismes distincts $u : X \to A$ et $v : X \to A$ vérifiant $fu = fv$. L'intersection $H_{u,fu} \cap H_{v,fv}$ est un ouvert de $\mathbb{H}om_{\mathbb{A}}(A, A)$ contenant f et ne rencontrant pas G_A. Par suite G_A est fermé dans $\mathbb{H}om_{\mathbb{A}}(A, A)$. Puisque l'espace topologique $Hom_{\mathbb{A}}(A, A)$ est booléen (proposition 3.4.), l'espace topologique G_A est booléen. Le groupe G_A est donc profini [9, théorème 8.4.1.]. $\square$

5. Définition des catégories multialgébriques prégaloisiennes.

Rappelons qu'une catégorie *satisfait la propriété d'amalgamation* si, pour tout couple de monomorphismes de même source $(f : A \to B, g : A \to C)$, il existe un couple de monomorphismes de même but $(m : B \to D, n : C \to D)$ vérifiant $mf = ng$.

5.0. Définition. Une catégorie est *multialgébrique prégaloisienne* si

(1) elle possède un objet initial et des colimites filtrantes,
(2) elle est finiment multicocomplète,
(3) elle possède un ensemble générateur propre formé d'objets de présentation finie,
(4) elle satisfait la propriété d'amalgamation,
(5) ses objets sont de puissance finie.

5.1. Exemples. La catégorie $\mathbf{E}xtAlg(k)$ est localement multiprésentable (2.2.0.), possède pour objet initial le corps k, satisfait la propriété d'amalgamation d'après la propriété d'amalgamation des corps, et ses objets sont de puissance finie (3.3). Elle est donc multialgébrique prégaloisienne. Il en est de même des catégories $\mathbf{E}xtInt(R), \mathbf{E}xtAlgTotOrd(k)$, $\mathbf{E}xtIntTotOrd(R)$ (2.2.).

5.2. Proposition. *Si* $\mathbf{A}$ *est une catégorie mutialgébrique prégaloisienne et* $\mathbf{L}$ *est une comonade universelle sur* $\mathbf{A}$*, la catégorie* $\mathbf{A}^{\mathbf{L}}$ *des* $\mathbf{L}$*-coalgèbres est multialgébrique prégaloisienne.*

Preuve. Soit $\mathbf{L} = (L, \varepsilon, \delta)$. L'objet initial de $\mathbf{A}$ est muni canoniquemement d'une structure de $\mathbf{L}$-coalgèbre et devient ainsi objet initial de $\mathbf{A}^{\mathbf{L}}$. La catégorie $\mathbf{A}^{\mathbf{L}}$ est localement multiprésentable (proposition 2.1.). Soit $(f : (A,a) \to (B,b), g : (A,a) \to (C,c))$ un couple de monomorphismes de même source de $\mathbf{A}^{\mathbf{L}}$. Il existe un couple de monomorphismes $(m : B \to D, n : C \to D)$ de même but de $\mathbf{A}$ vérifiant $mf = ng$. Les morphismes m et n se factorisent respectivement sous la forme $m = \varepsilon_D \overline{m}$ et $n = \varepsilon_D \overline{n}$ où $\overline{m} : (B,b) \to (LD, \delta_D)$ et $\overline{n} : (C,c) \to (LD, \delta_D)$ sont des monomorphismes de $\mathbf{A}^{\mathbf{L}}$. Les relations $\varepsilon_D \overline{m} f = mf = ng = \varepsilon_D \overline{n} g$ impliquent $\overline{m} f = \overline{n} g$. La propriété d'amalgamation est donc satisfaite dans $\mathbf{A}^{\mathbf{L}}$. Les objets de présentation finie de $\mathbf{A}^{\mathbf{L}}$ étant les $\mathbf{L}$-coalgèbres sur les objets de présentation finie de $\mathbf{A}$ (proposition 2.1.), les objets de $\mathbf{A}^{\mathbf{L}}$ sont de puissance finie comme l'étaient les objets de $\mathbf{A}$. □

5.3. Exemples. La catégorie $\mathbf{E}xtAlgSep(k)$ est une catégorie de coalgèbres pour une comonade universelle sur la catégorie $\mathbf{E}xtAlg(k)$ (exemple 2.2.1.). Elle est donc multialgébrique prégaloisienne. Il est de même de la catégorie $\mathbf{E}xt(P(X)/k)$. (exemple 2.2.2.).

5.4. Proposition. *Tout produit fini de catégories multialgébriques prégaloisiennes est une catégorie multialgébrique prégaloisienne.*

Preuve. Elle est immédiate à partir du fait que tout produit fini de catégories localement multiprésentables est localement multiprésentable [6, proposition 2.0.]. □

5.5. Proposition. *Une catégorie multialgébrique prégaloisienne est une petite catégorie.*

Preuve. Soit $\mathbf{A}$ une catégorie multialgébrique prégaloisienne. C'est une catégorie localement multiprésentable. Elle est donc multicocomplète [5, proposition 5.0.]. Soit $\mathcal{F}$ un ensemble de représentants à isomorphismes près des objets de présentation finie de $\mathbf{A}$. Pour chaque partie I de l'ensemble $\mathcal{F} \times \mathbb{N}$, on considère la famille d'objets $(B)_{(B,n)\in I}$ indexée par I, on choisit une multisomme de cette famille et on note $\mathcal{G}_I$ l'ensemble des objets sommets de l'un des cônes inductifs appartenant à cette multisomme. Montrons que tout objet A de $\mathbf{A}$ est objet quotient régulier d'un objet appartenant à l'un des ensembles $\mathcal{G}_I$. Pour chaque objet $B \in \mathcal{F}$, l'ensemble $Hom_{\mathbf{A}}(B, A)$ est fini. Notons $Hom_{\mathbf{A}}(B, A) = \{f_1, \ldots, f_{n(B)}\}$ avec éventuellement $n(B) = 0$ lorsque $Hom_{\mathbf{A}}(B, A) = \emptyset$. Posons $I_A = \{(B, n) : B \in \mathcal{F} \text{ et } 0 \leq n \leq n(B)\}$. La famille de morphismes $(f_n : B \to A)_{(B,n)\in I_A}$ indexée par I_A se factorise à travers une famille de morphismes appartenant à la multisomme de la famille d'objets $(B)_{(B,n)\in I_A}$ en un morphisme $g : C \to A$. L'objet A étant colimite filtrante des objets de présentation finie au-dessus de lui, la famille de morphismes $(f_n : B \to A)_{(B,n)\in I_A}$ est épimorphique régulière, donc le morphisme g est épimorphique régulier. L'objet A est donc objet quotient régulier de l'objet C de $\mathcal{G}_{I_A}$. Puisque la catégorie $\mathbf{A}$ est à peu d'objets quotients réguliers [5, proposition 5.1.], il s'en suit qu'elle est petite. □

On sait que toute petite catégorie cocomplète est équivalente à la catégorie associée à un ensemble ordonné. En particulier, toute petite catégorie localement présentable équivalente à un ensemble ordonné. Il n'en est pas de même des petites catégories multicocomplètes et en particulier des petites catégories localement multiprésentables. Nous allons montrer que toute petite catégorie localement multiprésentable est monomorphique, c'est à dire que tous ses morphismes sont monomorphiques.

5.6. Proposition. *Toute petite catégorie localement multiprésentable est monomorphique et multialgébrique.*

Preuve. Soit $\mathbf{A}$ une petite catégorie localement multiprésentable. Elle est à limites connexes non vides [5, proposition 5.0.]. On peut supposer que les objets de $\mathbf{A}$ constituent un ensemble. Alors les morphismes de $\mathbf{A}$ forment un ensemble dont le cardinal identifié à un ordinal est noté α. Considérons la catégorie $\mathbf{I}$ dont l'ensemble des objets est l'ensemble

$\alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$ et dont l'ensemble des morphismes non unités est réduit à un unique morphisme $\beta \to \alpha$ pour chaque $\beta \in \alpha$. C'est une catégorie connexe. Considérons un morphisme $f : A \to B$ et supposons qu'il existe deux morphismes distincts $g : C \to A$ et $h : C \to A$ vérifiant $fg = fh$. Définissons le diagramme $D : \mathbb{I} \to \mathbf{A}$ par $D(\beta) = A$ pour $\beta \in \alpha, D(\alpha) = B$, et $D(\beta \to \alpha) = f$ pour $\beta \in \alpha$. C'est un diagramme connexe dont la limite peut être notée $(p_\beta : L \longrightarrow A)_{\beta \in \alpha}$ puisque la projection d'indice α est alors $p_\alpha = fp_\beta : L \longrightarrow B$. Pour chaque partie X de α, on définit un cône projectif $(m_\beta : C \to D(\beta))_{\beta \in \alpha}$ de sommet C et base D en posant $m_\beta = g$ pour $\beta \in X$, et $m_\beta = h$ pour $\beta \notin X$. Il détermine un unique morphisme $m_X : C \to L$ vérifiant $p_\beta m_X = m_\beta$ pour tout $\beta \in \alpha$. D'après la propriété universelle de la limite, l'application $X \longmapsto m_X$ de l'ensemble des parties de α dans l'ensemble $Hom_{\mathbf{A}}(C, L)$ est injective. Cela implique que le cardinal de $Hom_{\mathbf{A}}(C, L)$ est supérieur à α, ce qui est en contradiction avec la définition de α. Il s'en suit la non existence des morphismes g et h et, par suite, le morphisme f est nécessairement monomorphique. La catégorie $\mathbf{A}$ est donc monomorphique et par suite multialgébrique. □

5.7. Corollaire. *Une catégorie multialgébrique prégaloisienne est monomorphique multialgébrique.*

5.8. Proposition. *Dans une catégorie multialgébrique prégaloisienne, tout endomorphisme est un automorphisme.*

Preuve. Soit f un endomorphisme d'un objet A d'une catégorie multialgébrique prégaloisienne $\mathbf{A}$. C'est un monomorphisme. Donc, pour chaque objet de présentation finie X de $\mathbf{A}$, l'application $Hom_{\mathbf{A}}(X, f)$: $Hom_{\mathbf{A}}(X, A) \to Hom_{\mathbf{A}}(X, A)$ est injective. Or l'ensemble $Hom_{\mathbf{A}}(X, A)$ est fini. Donc l'application $Hom_{\mathbf{A}}(X, f)$ est bijective. Puisque les objets de présentation finie de $\mathbf{A}$ engendrent proprement la catégorie, il s'en suit que le morphisme f est un automorphisme. □

Suivant S. Mac Lane [10, page 231], un objet A d'une catégorie $\mathbf{A}$ est dit faiblement final si, pour tout objet B de $\mathbf{A}$, il existe au moins un morphisme de B dans A.

5.9. Théorème. *Une catégorie multialgèbrique prégaloisienne possède un objet faiblement final unique à isomorphisme près.*

Preuve. Soit $\mathbf{A}$ une catégorie multialgébrique prégaloisienne. On peut supposer que les objets de $\mathbf{A}$ forment un ensemble bien ordonné indexé par un ordinal α et noté $\{A_\beta : \beta < \alpha\}$. Par récurrence transfinie, nous allons associer à chaque ordinal $\beta \leq \alpha$, un diagramme de $\mathbf{A}$ indexé par $\beta + 1$ de telle façon que pour $\beta \leq \beta' \leq \alpha$, le diagramme associé à β' prolonge celui qui est associé à β. Ce diagramme, noté $(L_\gamma)_{\gamma\leq\beta}$, est défini de la façon suivante :

a) pour $\beta = 0$, le diagramme $(L_\gamma)_{\gamma\leq 0}$ se réduit à l'objet $L_0 = A_0$ avec le morphisme identité,
b) si β est l'ordinal successeur de l'ordinal δ alors $\beta = \delta+1$ avec $\delta < \alpha$: d'après la propriété d'amalgamation, on peut choisir un couple de morphismes $(m_\delta : A_\delta \to L_{\delta+1}, L_{\delta+1,\delta} : L_\delta \to L_{\delta+1})$ qui permet de prolonger le diagramme $(L_\gamma)_{\gamma\leq\delta}$ en un diagramme $(L_\gamma)_{\gamma\leq\beta}$ en posant $L_{\beta,\gamma} = L_{\delta+1,\delta}L_{\delta,\gamma}$ pour tout $\gamma \leq \delta$,
c) si β est un ordinal limite, alors $\beta = sup\{\gamma : \gamma < \beta\}$; en considérant la colimite filtrante $\varinjlim_{\gamma<\beta} L_\gamma$ notée $(L_{\beta,\gamma} : L_\gamma \to L_\beta)_{\gamma<\beta}$, on prolonge le diagramme $(L_\gamma)_{\gamma<\beta}$ en un diagramme $(L_\gamma)_{\gamma\leq\beta}$.

On obtient alors pour l'ordinal α, un diagramme $(L_\gamma)_{\gamma\leq\alpha}$. L'objet L_α est faiblement final dans $\mathbf{A}$ car, pour tout $\beta < \alpha$, le morphisme $L_{\alpha,\beta+1}m$ a pour source l'objet A_β et pour but l'objet L_α. En outre, si L et M sont deux objets faiblement finaux de $\mathbf{A}$, il existe un morphisme $f : L \to M$ et un morphisme $g : M \to L$ dont les composés fg et gf sont isomorphiques (proposition 5.8.) et par suite f et g sont isomorphiques. □

5.10. Exemples. L'objet faiblement final de la catégorie $\mathbf{E}xtAlg(k)$ est la clôture algébrique de k. L'objet faiblement final de la catégorie $\mathbf{E}xtAlgSep(k)$ est la clôture algébrique séparable de k. Celui de la catégorie $\mathbf{E}xt(P(X)/k)$ est le corps de décomposition de $P(X)$. Les objets faiblement finaux des catégories $\mathbf{E}xtAlgTotOrd(k), \mathbf{E}xtInt(R), \mathbf{E}xtIntTotOrd(R)$ sont, respectivement, la clôture algébrique totalement ordonnée de k, la clôture intégrale de R, la clôture intégrale totalement ordonnée de R.

6. La correspondance de Galois d'une catégorie multialgébrique prégaloisienne.

Soit $\mathbf{A}$ une catégorie multialgébrique prégaloisienne. L'objet faiblement final de $\mathbf{A}$, déterminé à isomorphisme près, est noté $L_\mathbf{A}$ et est appelé *l'objet fondamental* de $\mathbf{A}$. L'ensemble ordonné des sous-objets de $L_\mathbf{A}$, est un ensemble de représentants des objets de $\mathbf{A}$ à isomorphismes près ; il est appelé *l'ensemble ordonné des objets* de $\mathbf{A}$. Le foncteur $Hom_\mathbf{A}(-, L_\mathbf{A}) : \mathbf{A}^{op} \to \mathbf{E}ns$ est appelé *le foncteur fondamental* de $\mathbf{A}$. Le groupe de Galois de l'objet $L_\mathbf{A}$ est appelé le *groupe fondamental* de $\mathbf{A}$ et il est noté $G_\mathbf{A}$. C'est un groupe profini (proposition 4.3.). *La catégorie $G_\mathbf{A}$-$\mathbf{E}spHomSep$ des $G_\mathbf{A}$-espaces* *homogènes séparés* a pour objets, les ensembles sur lesquels le groupe $G_{\mathbb{A}}$ opère transitivement de telle façon que le stabilisateur de chaque élément soit un sous-groupe fermé de $G_{\mathbb{A}}$, et a pour morphismes, les applications qui préservent l'action de $G_{\mathbb{A}}$.

6.0. Théorème. *Le foncteur fondamental* $Hom_{\mathbb{A}}(-, L_{\mathbb{A}}) : \mathbb{A}^{op} \to \mathbb{E}ns$ *d'une catégorie multialgébrique prégaloisienne* $\mathbb{A}$ *se relève en un foncteur* $H_{\mathbb{A}} : \mathbb{A}^{op} \to G_{\mathbb{A}}\text{-}\mathbb{E}spHomSep$ *qui possède un adjoint à gauche et induit une correspondance de Galois entre l'ensemble ordonné des objets de* $\mathbb{A}$ *et l'ensemble ordonné des sous-groupes fermés du groupe fondamental* $G_{\mathbb{A}}$.

Preuve. Pour chaque objet A de $\mathbb{A}$, le groupe $G_{\mathbb{A}}$ opère sur l'ensemble $Hom_{\mathbb{A}}(A, L_{\mathbb{A}})$ par $\sigma \cdot f = \sigma f$. Soit $(f,g) : A \rightrightarrows L_{\mathbb{A}}$. D'après la propriété d'amalgamation, il existe un couple de morphismes $(m,n) : L_{\mathbb{A}} \rightrightarrows B$ vérifiant $mf = ng$. Puisque l'objet $L_{\mathbb{A}}$ est faiblement final, il existe un morphisme $r : B \to L_{\mathbb{A}}$. Le morphisme $rm : L_{\mathbb{A}} \to L_{\mathbb{A}}$ est nécessairement isomorphique (proposition 5.8.). Alors $(rm)^{-1}rng = (rm)^{-1}rmf = f$. L'action de $G_{\mathbb{A}}$ sur $Hom_{\mathbb{A}}(A, L_{\mathbb{A}})$ est donc transitive. D'après la proposition 4.2., le stabilisateur G_f d'un élément f de $Hom_{\mathbb{A}}(A, L_{\mathbb{A}})$ est un sous-groupe fermé de $G_{\mathbb{A}}$. Le foncteur fondamental $Hom_{\mathbb{A}}(-, L_{\mathbb{A}}) : \mathbb{A}^{op} \to \mathbb{E}ns$ se relève donc en un foncteur $H_{\mathbb{A}} : \mathbb{A}^{op} \to G_{\mathbb{A}}\text{-}\mathbb{E}spHomSep$. Le groupe $G_{\mathbb{A}}$ opérant sur lui-même est un objet de $G_{\mathbb{A}}\text{-}\mathbb{E}spHomSep$, de même que l'espace homogène $G_{\mathbb{A}}/H$ des classes d'équivalence à gauche de $G_{\mathbb{A}}$ modulo un sous-groupe fermé quelconque H de $G_{\mathbb{A}}$, est un objet de $G_{\mathbb{A}}\text{-}\mathbb{E}spHomSep$. Il est immédiat que tout objet de $G_{\mathbb{A}}\text{-}\mathbb{E}spHomSep$ est isomorphe à un et un seul objet de la forme $G_{\mathbb{A}}/H$. Soit H un sous-groupe fermé de $G_{\mathbb{A}}$. Notons $f_H : Fix(H) \to L_{\mathbb{A}}$ l'égalisateur simultané de l'ensemble des morphismes appartenant à H et notons $n_H : G_{\mathbb{A}}/H \to H_{\mathbb{A}}(Fix(H))$ le morphisme de $G_{\mathbb{A}}$-espaces défini par $n_H(\sigma H) = \sigma f_H$. Soit A un objet de $\mathbb{A}$. Pour tout morphisme de $G_{\mathbb{A}}$-espaces $g : G_{\mathbb{A}}/H \to H_{\mathbb{A}}(A)$, le morphisme $g(H) : A \to L_{\mathbb{A}}$ de $\mathbb{A}$ est un élément de $H_{\mathbb{A}}(A)$ fixé par H, donc il vérifie $\sigma g(H) = g(H)$ pour tout $\sigma \in H$, et par suite, il se factorise à travers le morphisme f_H en un morphisme $f : A \to Fix(H)$ tel que $H_{\mathbb{A}}(f) \circ n_H = g$. En outre, tout morphisme $f : A \to Fix(H)$ vérifiant $H_{\mathbb{A}}(f) \circ n_H = g$ doit vérifier $f_H f = Hom_{\mathbb{A}}(f, L_{\mathbb{A}})(f_H) = Hom_{\mathbb{A}}(f, L_{\mathbb{A}}) \circ n_H)(H) = g(H)$ donc est uniquememnt déterminé. Il s'en suit que le morphisme $n_H : G_{\mathbb{A}}/H \to H_{\mathbb{A}}(Fix(H))$ est un morphisme universel de l'objet $G_{\mathbb{A}}/H$ vers le foncteur $H_{\mathbb{A}}$. Le foncteur $H_{\mathbb{A}}$ possède donc un adjoint à gauche $F_{\mathbb{A}}$ défini par $F_{\mathbb{A}}(G_{\mathbb{A}}/H) = Fix(H)$. L'image de l'objet $L_{\mathbb{A}}$ par le foncteur $H_{\mathbb{A}}$ étant l'objet $G_{\mathbb{A}}$, le foncteur $H_{\mathbb{A}}$ induit un foncteur $(\mathbb{A}/L_{\mathbb{A}})^{op} \to G_{\mathbb{A}}/G_{\mathbb{A}}\text{-}\mathbb{E}spHomSep$ de la duale de la catégorie des objets de

$\mathbf{A}$ au-dessus de $L_{\mathbb{A}}$, dans la catégorie des objets de $G_{\mathbb{A}}$-$\mathbf{Esp}HomSep$ au-dessous de $G_{\mathbb{A}}$. Or la catégorie $\mathbf{A}/L_{\mathbb{A}}$ est équivalente à l'ensemble ordonné $Ob(\mathbf{A})$ des objets de $\mathbf{A}$ et la catégorie $G_{\mathbb{A}}/G_{\mathbb{A}}$-$\mathbf{Esp}HomSep$ est équivalente à l'ensemble ordonné $SgFer(G_{\mathbb{A}})$ des sous-groupes fermés de $G_{\mathbb{A}}$. Le foncteur $H_{\mathbb{A}}$ induit donc une application croissante $H_{\mathbb{A}} : Ob(\mathbf{A})^{op} \to SgFer(G_{\mathbb{A}})$. De la même façon, l'image de l'objet $G_{\mathbb{A}}$ par le foncteur $F_{\mathbb{A}}$ est l'objet $F_{\mathbb{A}}(G_{\mathbb{A}}) = F_{\mathbb{A}}(G_{\mathbb{A}}/\{1_{\mathbb{A}}\}) = Fix(\{1_{\mathbb{A}}\}) = G_{\mathbb{A}}$. Donc le foncteur $F_{\mathbb{A}}$ induit un foncteur $G_{\mathbb{A}}/G_{\mathbb{A}}$-$\mathbf{Esp}HomSep \to (\mathbf{A}/L_{\mathbb{A}})^{op}$ adjoint à gauche au foncteur induit par $H_{\mathbb{A}}$ et par conséquent, il induit une application croissante $F_{\mathbb{A}} : SgFer(G_{\mathbb{A}}) \to Ob(\mathbf{A})^{op}$ adjointe à gauche à l'application $H_{\mathbb{A}}$. L'adjonction ainsi obtenue est précisément une correspondance de Galois entre l'ensemble ordonné $Ob(\mathbf{A})$ et l'ensemble ordonné $SgFer(G_{\mathbb{A}})$ [10, page 93]. □

6.1. Exemples. La correspondance de Galois de la catégorie $\mathbf{Ext}Alg(k)$ (resp. $\mathbf{Ext}AlgSep(k)$) est la correspondance de Galois entre l'ensemble ordonné des corps extensions algébriques (resp. séparables) de k et l'ensemble ordonné des sous-groupes fermés du groupe de Galois de la closure algébrique (resp. séparable) de k.

7. Objets normaux.

7.0. Définition. [1] Un objet N d'une catégorie multialgébrique prégaloisienne $\mathbf{A}$ est dit *normal* si, pour tout couple de morphismes $(f,g) : N \rightrightarrows L_{\mathbb{A}}$ il existe un automorphisme ν de N vérifiant $f\nu = g$.

7.1. Exemples. Les objets normaux de $\mathbf{Ext}Alg(k)$ (resp. $\mathbf{Ext}AlgSep(k)$) sont précisément les extensions algébriques (resp. séparables) normales de k

7.2. Proposition. *La correspondance de Galois d'une catégorie multialgébrique prégaloisienne* $\mathbf{A}$ *induit une correspondance de Galois entre l'ensemble ordonné des objets normaux de* $\mathbf{A}$ *et l'ensemble ordonné des sous-groupes fermés normaux de* $G_{\mathbb{A}}$.

Preuve. Soient N un objet normal de $\mathbf{A}$ et f un morphisme de N dans $L_{\mathbb{A}}$. Soit $\sigma \in G_{\mathbb{A}}$. Pour tout $\tau \in G_{\mathbb{A}}$, on a : $\tau \in G_{\sigma f} \Leftrightarrow \tau\sigma f = \sigma f \Leftrightarrow \sigma^{-1}\tau\sigma f = f \Leftrightarrow \sigma^{-1}\tau\sigma \in G_f \Leftrightarrow \tau \in \sigma G_f\sigma^{-1}$. Par suite $G_{\sigma f} = \sigma G_f \sigma^{-1}$. Il existe un automorphisme ν de N vérifiant $\sigma f = f\nu$. Alors $\sigma G_f \sigma^{-1} = G_{\sigma f} = G_{f\nu}$. Or $\tau \in G_{f\nu} \Leftrightarrow \tau f\nu = f\nu \Leftrightarrow \tau f = f \Leftrightarrow \tau \in G_f$. Donc $G_{f\nu} = G_f$ et par suite $\sigma G_f \sigma^{-1} = G_f$, c'est à dire que G_f est un sous-groupe normal de $G_{\mathbb{A}}$. En outre $G_{\sigma f} = G_f$ ce qui implique que le groupe de Galois G_f ne dépend pas du choix du morphisme f mais uniquement de l'objet normal N. L'application croissante $H_{\mathbf{A}} : Ob(\mathbf{A})^{op} \to SgFer(G_{\mathbf{A}})$ (cf. preuve du théorème 6.0.) induit alors une application décroissante de l'ensemble ordonné des objets normaux de $\mathbf{A}$ dans l'ensemble ordonné des sous-groupes fermés normaux de $G_{\mathbf{A}}$. Considérons maintenant un sous-groupe fermé normal H de $G_{\mathbf{A}}$. La correspondance de Galois de $\mathbf{A}$, associe à H, le sous-objet $f_H : Fix(H) \to L_{\mathbf{A}}$ dont le groupe de Galois G_{f_H} contient le groupe H. Tout morphisme $g : Fix(H) \to L_{\mathbf{A}}$ est nécessairement de la forme $g = \sigma f_H$ et par suite $G_g = G_{\sigma f_H} = \sigma G_{f_H} = \sigma G_{f_H} \sigma^{-1} \supset \sigma H \sigma^{-1} = H$. Le morphisme g se factorise donc à travers le morphisme f_H en un morphisme nécessairement isomorphique. Il s'en suit que l'objet $Fix(H)$ est normal. La correspondance de Galois de $\mathbf{A}$ induit donc une correspondance de Galois entre l'ensemble ordonné des objets normaux de $\mathbf{A}$ et l'ensemble ordonné des sous-groupes fermés normaux de $G_{\mathbf{A}}$. □

Si N est un objet de $\mathbf{A}$, on note $\mathbf{A}//N$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{A}$ ayant pour objets, les objets faiblement au-dessus de N, c'est à dire les objets A tels que $Hom_{\mathbf{A}}(A, N) \neq \emptyset$.

7.3. Proposition. *Si* $\mathbf{A}$ *est une catégorie multialgébrique prégaloisienne et* N *est un objet normal de* $\mathbf{A}$*, la catégorie* $\mathbf{A}//N$ *des objets de* $\mathbf{A}$ *faiblement au dessus de* N *est multialgébrique prégaloisienne.*

Preuve. Pour chaque objet A de $\mathbf{A}$, choisissons un morphisme $f_A : A \to L_{\mathbf{A}}$ et notons $(\varepsilon_A : DA \to A, u_A : DA \to N)$ le produit fibré de $(f_A : A \to L_{\mathbf{A}}, f_N : N \to L_{\mathbf{A}})$. Pour tout objet B de $\mathbf{A}//N$ et tout morphisme $f : B \to A$, il existe un morphisme $u_B : B \to N$ et un automorphisme σ de $L_{\mathbf{A}}$ vérifiant $\sigma f_N u_B = f_A f$. L'objet N étant normal, il existe un automorphisme ν de N vérifiant $\sigma f_N = f_N \nu$. Les relations $f_A f = \sigma f_N u_B = f_N \nu u_B$ impliquent l'existence d'un morphisme $g : B \to DA$ vérifiant $\varepsilon_A g = f$ et $u_A g = \nu u_B$. Il s'en suit que le morphisme $\varepsilon_A : DA \to A$ est un morphisme universel de la sous-catégorie $\mathbf{A}//N$ vers l'objet A. La catégorie $\mathbf{A}//N$ est donc une sous-catégorie coréflexive de $\mathbf{A}$. C'est une catégorie de coalgèbres pour une comonade universelle sur $\mathbf{A}$. Elle est donc multialgébrique prégaloisienne (proposition 5.2.).

7.4. Exemples. Si N est un corps extension algébrique normale d'un corps commutatif k, la catégorie $\mathbf{ExtAlg}(k)//N$ est la catégorie $\mathbf{Ext}(N/k)$ des corps intermédiaires entre k et N. Si $P(X)$ est un polynôme de $k[X]$, le corps de décomposition N de $P(X)$ est une extension algébrique normale N de k et la catégorie $\mathbf{ExtAlg}(k)//N$ est la catégorie $\mathbf{Ext}(P(X)/k)$ (2.2.2.).

REFERENCES

[1] M. Barr, *Abstract Galois Theory*, J. Pure Appl. Algebra **19**, (1980), 21-42.

[2] M. Barr, *Abstract Galois Theory II*, J. Pure Appl. Algebra **25** (1982), 227 -247.

[3] Y. Diers, *Familles universelles de morphismes*, Ann. Sco. Sc. Bruxelles **tome 93, III** (1979), 175-195.

[4] Y. Diers, *Catégories multialgébriques*, Arch. Math. **34** (1980), 193-209.

[5] Y. Diers, *Catégories localement multiprésentables*, Arch. Math. **34** (1980), 344-356.

[6] Y. Diers, *Quelques constructions de catégories localement multiprésentables*, Ann. Sc. Math. Québec **IV, n°2,** (1980), 79-101.

[7] P. Gabriel et F. Ulmer, *Local präsentierbare Kategorien*, Lecture Notes in Mathematics 221, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1971.

[8] A. Grothendieck, *Revêtements étales et groupe fondamental*, S.G.A. 1, Lecture Notes in Mathematics 224, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1971.

[9] P.T. Johnstone, *Topos Theory*, Academic Press, London/New York/ San Francisco, 1977.

[10] S. Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1971.

Université de Valenciennes
Département de Mathématique
B.P. 311
F-59304 VALENCIENNES CEDEX
FRANCE