CAHIERS DE
TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
CATÉGORIQUES

RENÉ GUITART

L'unité de la théorie des modèles et de l'algèbre homologique

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 30, n° 4 (1989), p. 281-293

<http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1989__30_4_281_0>

CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE CATÉGORIQUES — *VOL. XXX-4 (1989)*

L'UNITÉ DE LA THÉORIE DES MODÈLES ET DE L'ALGÈBRE HOMOLOGIQUE

par René GUITART[1]

ABSTRACT. Exact squares and satellites, figurative algebras and dialectics, sketches and homotopy types have been studied by the author in preceding papers. The present paper emphasizes that they are but different aspects of a unique geometrical theory of algorithms. Their unification relies on the ubiquity of bimodules which intervene both in (abelian or non-abelian) cohomology, theories (as figurations) and algorithms. It requires some new notions: the bimodule of bimodules, variable calculus in figurations, natural extensions, and a universal presentation of bicategories of bimodules.

0. INTRODUCTION.

Les articles que j'ai publiés ces dernières années portent sur, d'une part les carrés exacts et la satellisation, d'autre part sur les algèbres figuratives et dialectiques, et enfin sur les esquisses et les types d'homotopie de théories. En réalité ces travaux sont divers aspects d'une seule et même "théorie géométrique des algorithmes". Le but de cette Note n'est pas de fournir une vue d'ensemble de ces questions, ce qui serait prématuré, mais seulement d'indiquer un fil conducteur, à savoir l'ubiquité des bimodules qui expriment aussi bien les notions de cohomologies (abéliennes ou non) et d'espaces, que de théories (comme figurations) et d'algorithmes.

Et chemin faisant on introduit ici quatre points nouveaux: le bimodule des bimodules, le calcul des variables dans les figurations, la notion d'extension naturelle, et une présentation universelle des bicatégories de bimodules.

Ainsi le thème

Logique = Algèbre Homologique

élaboré dans "Qu'est-ce que la Logique dans une catégorie?" (ces "*Cahiers*", Volume XXIII, 1982) est éclairé de nouvelles façons.

[1] Summer Meeting on Category Theory, Louvain-la-Neuve, July 1987

1. SUR LA COHOMOLOGIE NON-ABÉLIENNE.

1.1. Considérons qu'il existe des objets géométriques idéaux, disons des types d'homotopie, et que l'on veut décrire le calcul combinatoire - avec des présentations effectives - du collage de ces objets. Pour la partie 1-dimensionnelle de ces objets le Théorème de Van Kampen pour le groupoïde fondamental permet effectivement les recollements. Pour les dimensions supérieures, une approche géométrique élémentaire directe est possible, comme le montrent les travaux sur les n-groupoïdes (Brown, Higgins, Loday), ou, d'un point de vue différent, les travaux sur les n-catégories et torseurs (Duskin, Glenn, Bourn), ou d'un point de vue encore différent les travaux sur les limites homotopiques et la cohérence (Bousfield, Kan, Vogt, Cordier).

Si l'on considère seulement la contrepartie abélienne des types d'homotopie, c'est-à-dire le calcul des types de cohomologie classique, on a, en chaque dimension, une méthode de recollement (excision, suite exacte de Mayer-Vietoris), les outils algébriques étant ici l'algèbre homologique dans les catégories abéliennes, avec comme ingrédients les suites exactes, les foncteurs satellites, les injectifs, les catégories dérivées.

Actuellement la nature des bons modèles algébriques pour les types d'homotopie est encore discutée, et probablement non unique, divers topos (ensembles simpliciaux, cubiques, cycliques) pouvant jouer le rôle d'univers. A noter aussi, dans une veine distincte, des objets comme les A_∞-structures (Stasheff, Prouté). On désire donc à la fois des bons modèles - ou une théorie axiomatique de ces modèles, et, avec cela, le calcul de leur recollement comme extension géométrique complète au niveau de ces objets du calcul abélien connu.

1.2. Revoyons le calcul usuel des foncteurs dérivés (à la façon de Grothendieck et de Quillen). Si $F: \underline{C} \to \underline{C}'$ est un foncteur entre catégories de modèles au sens de Quillen, W et W' les classes des équivalences d'homotopie faibles de $\underline{C}$ et $\underline{C}'$, $p: \underline{C} \to \underline{C}[W^{-1}]$ et $p': \underline{C}' \to \underline{C}'[W'^{-1}]$ les foncteurs canoniques de passage aux catégories de fractions, alors le dérivé à gauche de F est un foncteur LF muni d'une transformation naturelle $u: LF \cdot p \to p' \cdot F$ universelle.

Soit $\underline{A}$ une catégorie abélienne, cc$\underline{A}$ la catégorie des complexes de chaînes dans $\underline{A}$, et cch$\underline{A}$ le quotient de cc$\underline{A}$ par la relation d'homotopie: c'est une catégorie de modèles au sens de Quillen avec $W = Q_{is}$ la classe des quasi-isomorphismes, i.e. des morphismes qui sont des isomorphismes en cohomologie. Soit

$$D(\underline{A}) = \mathrm{cch}\underline{A}\,[Q_{is}^{-1}].$$

Alors le dérivé à gauche de $U : \underline{A} \to \underline{B}$ sera $\mathrm{Lch}U : D(\underline{A}) \to D(\underline{B})$, noté $D(U)$. Pour un type de diagramme I et $\varinjlim : \underline{A}^I \to \underline{A}$, $D(\varinjlim)$ définit le "recollement cohomologique" (son calcul nécessite - et traduit - l'usage de Q_{is}, soit la cohomologie), qui se comporte mieux que $\varinjlim$ vis-à-vis des types d'homotopie, et est un candidat au rôle d'opérateur de recollement géométrique.

Grothendieck dans son manuscrit "Pursuing stacks" cherche à affermir ce type d'idée sur le recollement. Il y a ici une alternative fondamentale à souligner: il est loisible de chercher à déterminer les lim (= limites inductives) et en particulier les sommes fibrées dans *Cat* qui, par le foncteur Nerf, passent aux ensembles simpliciaux, ou aux types d'homotopie (en suivant par exemple Dwyer et Thomason), ou bien de chercher à déformer lim en un nouvel opérateur de recollement naturellement "plus géométrique", comme holim ou D(lim).

1.3. On adopte le programme suivant:

A - Construire une théorie purement *algébrique* des foncteurs satellites et dérivés pour des catégories non-abéliennes comme *Cat*.

B - Construire des catégories de présentations algébriques des objets géométriques.

C - Etablir dans le langage élaboré en A la description du recollement *géométrique* des présentations données en B.

Je ne sais actuellement donner une réponse substantielle qu'à la question A, et je vais l'exprimer en 1.4, 1.5, 1.6. Le §1.7 ne donnera qu'une petite remarque relative à la question B, et rien ne sera dit ici de la question C. On revient sur B en 2.4.

1.4. La théorie A est développée par Guitart & Van den Bril dans [7] sur la base de la définition que voici:

Soit E un bimodule de $\underline{A}$ vers $\underline{B}$, pour $\underline{A}$ et $\underline{B}$ des catégories, c'est-à-dire un foncteur $E : \underline{A}^{op} \times \underline{B} \to$ *Ens*, et soit $F : \underline{B} \to \underline{C}$ un foncteur; alors le *satellite de* F *par rapport à* E est un foncteur $G : \underline{A} \to \underline{C}$ muni d'un $e : F \otimes E \to G$ universel. Si $P : \underline{K} \to \underline{B}$ et $Q : \underline{K} \to \underline{A}$ sont des foncteurs et si $E = P \otimes Q^0$ avec

$$P(K,B) = \mathrm{Hom}_{\underline{B}}(P(K),B) \text{ et } Q^0(A,K) = \mathrm{Hom}_{\underline{A}}(A,Q(K)),$$

alors $F \cdot P \to G \cdot Q$ est universel.

Si $\underline{A} = \underline{B}$ est une catégorie additive et si $\underline{K}$ est la catégorie ayant pour objets les

$$A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C$$

dans $\underline{A}$ avec $\mathrm{im}\,u = \ker v$, et pour morphismes les diagrammes

$$(*)\qquad \begin{tikzcd} \ker u \arrow[r, tail] \arrow[d, tail] & A \arrow[r, "u"] \arrow[d] & B \arrow[r, "v"] \arrow[d] & C \arrow[r, two heads] \arrow[d] & \operatorname{coker} v \arrow[d, two heads] \\ \ker u' \arrow[r, tail] & A' \arrow[r, "u'"] & B' \arrow[r, "v'"] & C' \arrow[r, two heads] & \operatorname{coker} v' \end{tikzcd}$$

et si

$$\tilde{P}(u,v) = A, \quad \tilde{Q}(u,v) = C \quad \text{et} \quad \tilde{P}\otimes\tilde{Q} = \mathrm{EXT}^{\sim},$$

alors les $\mathrm{EXT}^{\sim}(C,A)$ sont des monoïdes abéliens. Ainsi on voit que $\mathrm{EXT}^{\sim}(C,0)$ est le monoïde des sous-objets de C, avec comme addition l'intersection. En fait le groupe abélien des éléments inversibles du monoïde $\mathrm{EXT}^{\sim}(C,A)$ est EXT(C,A).

Pour $F:\underline{A}\to\underline{C}$, le satellite de F par rapport à EXT est le premier satellite (au sens classique) de F, à gauche, noté LF.

Les moyens de calculer EXT et les satellites (par résolutions injectives, contractiles, acycliques, cônes) sont simplement les divers

$$\underline{A} \xleftarrow{\ P\ } \underline{K} \xrightarrow{\ Q\ } \underline{A}$$

tels que $P\otimes Q^0 = \mathrm{EXT}$. Ainsi si $\underline{K}$ est $\mathrm{EXA}_M(\mathrm{cc}\mathit{Ab})$ la sous-catégorie pleine de EXA constituée des (*) où $\ker u = \operatorname{coker} v = 0$ et où $B \in M$, on a $P\otimes Q^0 = \mathrm{EXT}$ si M est la classe des injectifs, des contractiles, des acycliques ou des cônes.

Dans le cas de *Cat* voici un bimodule de *Cat* à *Cat* pouvant remplacer EXT dans le yoga homologique. Il s'agit de $\mathrm{BIM} = J\otimes K^0$ avec *BIM* la 2-catégorie ayant pour objets les bimodules $E:\underline{Y}^{op}\times\underline{X}\to \mathit{Ens}$, et pour morphismes les $(U,V{:}a)$ où

$$U:\underline{Y}\to\underline{Y}', \quad V:\underline{X}\to\underline{X}', \quad a:E\to F\cdot(U^{op}\times V),$$

avec

$$\mathit{Cat} \xleftarrow{\ J\ } \mathit{BIM} \xrightarrow{\ K\ } \mathit{Cat}$$

les deux foncteurs tels que J(E) soit le milieu d'une factorisation minimale de E sous la forme $E = i^0\otimes j$ avec

$$\underline{X} \xrightarrow{\ i\ } J(E) \xleftarrow{\ j\ } \underline{Y}$$

et que K(E) soit le milieu d'une factorisation maximale de E sous la forme $E = p\otimes q^0$ avec

$$\underline{X} \xleftarrow{\ p\ } K(E) \xrightarrow{\ q\ } \underline{Y}.$$

On appelle BIM le *bimodule des bimodules.*

1.5. Avec le processus d'algébraisation-abélianisation

$$Ens^{\Delta^{op}} \xrightarrow{\text{Libre}} Ab^{\Delta^{op}} \xrightarrow{\Sigma(-1)^i d_i} \mathrm{cc}Ab$$

il est possible d'établir un bon lien entre les lim ordinaires et le recollement cohomologique, sous la forme du Théorème de Mayer-Vietoris. L'outil central dans la preuve est la subdivision barycentrique, c'est-à-dire le foncteur

$$\mathrm{Sd}\colon Ens^{\Delta^{op}} \to Ens^{\Delta^{op}} \text{ défini par } \mathrm{Sd} = \mathrm{Nerf}\cdot \mathrm{G}$$

avec $i \to c \cdot \mathrm{Yon}$ et $g \to \mathrm{G}\cdot\mathrm{Yon}$ universels, c adjoint à gauche à Nerf, $\mathrm{Yon}\colon \Delta \to Ens^{\Delta^{op}}$, $i\colon \Delta \to Cat$ et $g\colon \Delta \to Cat$ donnés par

$$\mathrm{Yon}(n) = \mathrm{Hom}(-,n),\ i(n) = [n],\ g(n) = (\Delta/n)^{op}.$$

Dans l'approche évoquée en 1.4 de la description des satellites (i.e. des recollements), le problème de la désabélianisation de l'algèbre homologique revient à comparer les différents endo-bimodules que l'on sait construire aux divers étages de la tour suivante, où $\mathrm{E}\colon \underline{\mathrm{Y}} \,+\!\!\!\!\to \underline{\mathrm{X}}$ désigne un bimodule de $\underline{\mathrm{Y}}$ à $\underline{\mathrm{X}}$.

$$\begin{tikzcd}
Ab & Ab \arrow[l, "\mathrm{EXT}"', "|" marking] \\
Gr \arrow[u, hook] \arrow[d] & Gr \arrow[u, hook] \arrow[d] \\
Cat \arrow[d, "\mathrm{Nerf}"'] & Cat \arrow[l, "\mathrm{BIM}"', "|" marking] \arrow[d, "\mathrm{Nerf}"] \\
Ens^{\Delta^{op}} \arrow[d, "\mathrm{Libre}"'] & Ens^{\Delta^{op}} \arrow[d, "\mathrm{Libre}"] \\
Ab^{\Delta^{op}} \arrow[d, "\Sigma"'] & Ab^{\Delta^{op}} \arrow[d, "\Sigma"] \\
\mathrm{cc}Ab & \mathrm{cc}\,Ab \arrow[l, "\mathrm{EXT}"', "|" marking]
\end{tikzcd}$$

On remarquera que l'algèbre homologique abélienne *classique* dans une catégorie abélienne de la forme $Ab^{\underline{\mathrm{X}}^{op}\times\underline{\mathrm{X}}}$ permettra à l'étage $\underline{\mathrm{X}}$ fixé de comparer entre eux les bimodules de $\underline{\mathrm{X}}$ à $\underline{\mathrm{X}}$, et donnera donc des informations sur les diverses théories non-abéliennes possibles pour les objets de $\underline{\mathrm{X}}$.

1.6. Le point de vue de 1.5 est donc qu'*une* théorie algébrique de satellisation est juste *un* bimodule, la théorie principale abélienne étant donnée par EXT, et la théorie principale non-abélienne étant celle donnée par BIM le bimodule dont les éléments sont les bimodules décrit à la fin de 1.4. Le calcul effectif des satellites repose sur le jeu des carrés exacts de foncteurs, et la description de BIM est en fait liée aussi à la notion de carré exact. Ce double rôle interne et externe de l'exactitude est déjà à remarquer dans la théorie abélienne, où les suites exactes permettent de manipuler *et* de définir EXT.

1.7. Les bimodules envisagés ci-dessus comme théories de satellisation, i.e. de recollement, peuvent aussi, si l'on songe à la question B du §1.3, être envisagés comme modèles algébriques d'"espaces topologiques". Ainsi un bimodule E de $\underline{P}$ vers $\underline{O}$ (i. e. un foncteur $\underline{O}^{op}\times\underline{P}\to$ *Ens*) s'interprète comme un espace, un espace topologique usuel étant un ensemble $\underline{P}$ de points et un ensemble ordonné d'ouverts $\underline{O}$, liés par

$$E(O,x) = \begin{cases} \{\varnothing\} & \text{si } x\in O \\ \varnothing & \text{si } x\notin O \end{cases}$$

On forme une catégorie *SPA* des "espaces" et "applications continues" en prenant pour objets les bimodules et pour morphismes de E vers E' les couples (f,g) où $f\colon \underline{P}\to\underline{P'}$ et $g\colon \underline{O'}\to\underline{O}$ sont des foncteurs tels que $g^{0}\otimes E = E'\otimes f$.

On observe donc qu'ici la topologie et l'algèbre fusionnent et deviennent indiscernables, leur rapport tendant à devenir tautologique, puisque l'espace comme notion de continuité et déplacements et l'algèbre (cohomologique) comme méthode de recollement sont présentés de façons identiques, comme bimodules.

2. FIGURATIONS, EXTENSIONS NATURELLES, ESQUISSES ET ALGORITHMES.

2.1. Une *figuration* est une donnée $u\colon D\to P$ d'une transformation naturelle où

$$D\colon \underline{F}^{op}\times\underline{S}\to Ens \quad \text{et} \quad P\colon \underline{F}^{op}\times\underline{S}\to Ens$$

sont des foncteurs, avec $\underline{F}$ et $\underline{S}$ deux catégories fixées.

Une *u-algèbre* est un couple (S,A) où $S\in\underline{S}_0$ et où A: $P(-,S)\to D(-,S)$ est une transformation naturelle telle que, pour tout $F\in\underline{F}_0$,

$$A_F\cdot u_{(F,S)} = \mathrm{Id}_{D(F,S)}.$$

Un *calcul de lois pour u* est une figuration $i\colon \mathrm{Hom}_{\underline{F}} \to L$, avec L: $\underline{F}^{op} \times \underline{F} \to$ *Ens* un foncteur, telle que $P \approx D \otimes L$ et que u soit induite par i. Si un tel calcul existe, alors une u-algèbre consiste en un "support" S et pour chaque "loi" $c \in L(F,F')$ une réalisation $A(c)_S\colon D(F',S) \to D(F,S)$ de c sur S.

Soit $V\colon \underline{F}^{op} \to$ *Ens* affectant à chaque figure F un ensemble V(F) de variables susceptibles de désigner F, et $V \otimes L = T$ le foncteur des termes. Si $S \in \underline{S}_0$ est fixé, une *assignation de valeurs dans* S *aux variables* est une transformation naturelle v: $V \to D(-,S)$.

Si (S,A) est une u-algèbre, alors, avec $V \otimes i = j$, les deux données

$$x = v \otimes L\colon T = V \otimes L \longrightarrow P(-,S) = D(-,S) \otimes L \ \text{ et } \ A\colon P(-,S) \to D(-,S)$$

déterminent $w = A \cdot x\colon T \to D(-,S)$, interprétation des termes dans S, telle que $w \cdot j = v$. Inversement si pour tout V et tout v est donné un w tel que $w \cdot j = v$, alors est déterminée une u-algèbre (S,A) obtenue pour $V = D(-,S)$ et $v = \mathrm{Id}_V$.

En général si la donnée de l'opérateur $v \mapsto w$ pour un V fixé suffit à déterminer chaque A, on dit que (i,V) est un *calcul de lois et variables pour la figuration u*.

Du point de vue des algèbres figuratives les variables "sont" simplement les figures, et le calcul de lois et variables est inutile à la description des modèles (ou algèbres) des figurations. Son utilité traditionnelle est de commencer à analyser les propriétés syntaxiques de la figuration; mais nous préfèrerons l'analyse en termes d'extensions naturelles et d'extensions universelles, qui livre aisément les propriétés de complétude des catégories de modèles. Il s'agit seulement d'analyser les foncteurs D(F,-) comme limites inductives de foncteurs représentables, et alors les algèbres de figurations s'identifient à des modèles d'esquisses. Une figuration, où les arités ou figures sont sorties de la catégorie des supports, est la description d'une théorie comme une comparaison u entre deux bimodules P et D, soit un morphisme particulier de la catégorie *BIM* introduite au §1.4.

Que les arités (objets de $\underline{F}$) soient elles-mêmes des espaces, cela permet d'internaliser dans la géométrie de ces espaces une partie (par exemple du premier ordre) de la syntaxe de la théorie, la partie visible restante étant algébrique, i.e. décrite par des compatibilités équationnelles $(A \cdot u = 1)$. Ceci suggère que, à côté des exemples déjà utilisés pour $\underline{F}$ (e.g. *Cat*, *Graph*, *Top*), il y a certainement une catégorie de figures plus fondamentale semblable à *BIM* du §1.4 ou à *SPA* du §1.7. Sur les figurations et les esquisses, voir [8].

2.2. Soit $F: \underline{A} \to \underline{B}$ et $G: \underline{A} \to \underline{C}$ deux foncteurs, soit $L: \underline{C} \to \underline{B}$ un foncteur, $k: F \to L \cdot G$ une transformation narturelle; pour tout foncteur $M: \underline{C} \to \underline{B}$, on suppose donnée pour chaque $v: F \to M \cdot G$ naturelle une transformation naturelle

$$e_M(v): L \to M \text{ telle que } (e_M(v)G) \cdot k = v;$$

on suppose enfin que e_M est naturelle, c'est-à-dire que pour tout $h: M \to N$ et $v: F \to M \cdot G$, on a

$$e_N(hG \cdot v) = h \cdot e_{M(v)}.$$

On dit alors que (L, k, e) est une *extension naturelle* de F le long de G, au-dessus de $\underline{B}$.

S'il existe une extension universelle E de F le long de G déterminée par un $u: F \to E \cdot G$, alors les extensions naturelles de F le long de G s'identifient aux données (L, p, q) avec $p: E \to L$ et $q: L \to E$ des transformations naturelles telles que $q \cdot p = Id_E$. Avec $p \cdot q = f$ on a donc que L est le noyau (ou bien aussi le conoyau) de la paire (f, Id_E), et qu'une extension naturelle est, à isomorphisme près, déterminée par la donnée d'un idempotent $f: L \to L$ dont le (co)noyau soit une extension universelle. Par conséquent, si $\underline{B}$ est cocomplète et $\underline{A}$ et $\underline{C}$ petites, le calcul des extensions naturelles se réduit à celui des extensions universelles, et celui-ci se réduit au seul calcul des cônes universels (cas $\underline{B} = 1$) ou limites. Mais ces réductions ne fonctionnent pas si $\underline{B}$ n'est pas cocomplète, par exemple si $\underline{B}$ est la catégorie d'homotopie *Hotop*.

2.3. Une *esquisse* est constituée d'une catégorie $\underline{B}$, d'une famille P de cônes projectifs distingués au-dessus de $\underline{B}$, d'une famille Y de cônes inductifs au-dessus de $\underline{B}$: et si $(\underline{B}, P, Y) = S$ est une esquisse, une *réalisation* ou un *modèle* de S dans une catégorie $\underline{X}$ est un foncteur $R: \underline{B} \to \underline{X}$ tel que, pour tout $p \in P$ (resp. $y \in Y$) le cône Rp (resp. Ry) soit dans $\underline{X}$ un cône limite projective (resp. inductive).

Les transformations naturelles entre réalisations de S dans $\underline{X}$ sont les morphismes d'une catégorie $Mod(S, \underline{X})$.

Si $\underline{X}$ est complète et cocomplète (e.g. si $\underline{X} = Ens$ ou si $\underline{X} = Top$), on peut penser que les esquisses sont une bonne syntaxe pour décrire et étudier les modèles dans $\underline{X}$ de théories algébriques ou du premier ordre par exemple. Mais si $\underline{X}$ n'est pas cocomplète, et en particulier si dans $\underline{X}$ les idempotents ne se scindent pas) (ce qui, il est vrai, ne peut se produire si $\underline{X} = Mod(S, Ens)$), la spécification d'extensions naturelles serait probablement meilleure.

Une catégorie $\underline{X}$ est équivalente à une catégorie de la forme Mod(S, *Ens*) avec S une esquisse petite où les cônes projectifs sont d'indexation $<\alpha$ (α un ordinal régulier) et où les cônes inductifs sont discrets, ssi : $\underline{X}$ est localement petite et possède les lim d'indexations petites et α-filtrantes, $\underline{X}$ possède une sous-catégorie $\underline{G}$ pleine, petite et dense constituée d'objets α-présentables de $\underline{X}$ et possédant les familles lolim (localement lim) d'indexations $<\alpha$, et l'inclusion $\underline{G} \hookrightarrow \underline{X}$ commute aux lolim.

Ce résultat, qui utilise l'étude du cas algébrique (i.e. sans cônes inductifs) de Gabriel-Ulmer [14] et la thèse de Diers sur les catégories localisables [1], est publié dans Guitart & Lair [6] (la partie directe est le Théorème 1.1 page 16, la réciproque est l'application 5.2 page 58, qui repose sur les remarques 5.1 et donc sur les Corollaires 4.2 page 55 et Théorème 4.2 page 53). Il repose donc sur le Théorème d'existence de diagramme localement libre donné en [6], formulation catégorique du résultat de Lowenheim-Skolem; ce théorème affirme que, si $S=(\underline{B},P,Y)$ est une esquisse petite quelconque et si K est un foncteur de $\underline{B}$ dans *Ens*, alors, par une succession (en général transfinie) de *choix*, K engendre un petit diagramme dans Mod(S,*Ens*) noté $(L_iK)_{i\in I}$ tel que

$$\mathrm{Hom}_{Ens^{\underline{B}}}(K,R) = \lim_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}(S,Ens)}(L_iK,R)$$

pour toute réalisation R de S.

2.4. Le Théorème d'existence de diagramme localement libre est utilisé en [9] pour décrire un type d'homotopie gS associé à une esquisse S. Ce gS est discret si les cônes inductifs de S sont discrets, et sinon il décrit l'ambiguité dans le processus de choix en jeu dans la construction du diagramme localement libre de modèles de S engendré par $\emptyset : \underline{B} \to Ens$. Les invariants cohomologiques de gS sont donc des mesures algébriques de cette ambiguité, et comme cette ambiguité relève du caractère non-algébrique de S, ces invariants mesurent l'impossibilité d'éliminer les $\neg, \vee$ et $\exists$ de la théorie décrite par S.

On voit donc ici un usage plausible de l'homologie (abélienne ou non) dans l'étude des théories, usage qui commencera à devenir effectif lorsque la description des anneaux de cohomologie $H^*(gS,A)$ sera formulée directement en termes algébriques élémentaires à partir de S seule, en évitant toute la construction par récurrence transfinie de gS à l'intérieur de B(Mod(S,*Ens*)).

D'autre part, si l'on pense à S comme à une présentation algébrique du type d'homotopie t si l'on a $gS = t$, on peut revenir à la question B du §1.3 et fournir la catégorie algébrique des esquisses, soit *ESQ*, comme catégorie des présentations algébriques des objets géométriques.

Entre la "solution" *ESQ* et la "solution" *SPA* (donnée au §1.7) la différence de nature est la suivante: les objets de *ESQ* sont des "espaces combinatoires", tandis que les objets de *SPA* sont des "espaces topologiques généraux".

2.5. Un *schéma de programme* consiste en une liste de types d'objets et d'opérations, soit un graphe orienté, d'abord; puis la donnée de certaines opérations composées, ce qui par générateurs et relations engendre une catégorie; puis la donnée de cônes projectifs dans cette catégorie (ce qui décrit les liens géométriques entre les divers types d'objets); enfin la donnée de cônes inductifs dans cette catégorie (ce qui décrit les tests qui, dans le programme, doivent intervenir entre les opérations). Autrement dit, c'est une esquisse S dans laquelle deux parties sont distinguées : l'espace I "liste" des fonctions de l'ordinateur que l'on va utiliser, et l'esquisse O "liste" des fonctions à calculer.

Un schéma de programme est ainsi un couple (U,V) de morphismes d'esquisses avec

$$I \xrightarrow{\;U\;} S \xleftarrow{\;V\;} O.$$

Soit alors $IN: I \to Ens$ une réalisation de I décrivant les valeurs concrètes dans l'ordinateur des symboles opératoires indiqués sur le "clavier" I, ainsi que les valeurs des paramètres initiaux du programme. Supposons, ce qui n'est pas toujours le cas, que IN possède une extension universelle $R: S \to Ens$ (i.e. un modèle R de S équippé d'une transformation naturelle $u: IN \to R \cdot I$ universelle); alors $R \cdot V =: OUT$ décrit les valeurs concrètes des fonctions que l'on voulait calculer.

En fait un véritable programme (par exemple sous la forme d'un schéma de Herbrand) est un tel couple (U,V) ayant des propriétés supplémentaires. D'abord I, S et O sont des esquisses finies. Ensuite U et V sont injectifs, et les objets de S sont tous déterminés en un nombre fini d'étapes à partir de ceux de U(I) par spécifications de cônes inductifs ou projectifs; par suite U a la propriété que, à un isomorphisme près, toute réalisation $R: S \to Ens$ est déterminée par $R \cdot U$, et si IN admet une extension universelle R, alors u est un isomorphisme. Enfin si le programme est déterministe les cônes inductifs nouveaux par rapport à I dans S sont tous discrets, et en fait *Ens* est à remplacer par Ens_f, catégorie des ensembles finis.

Mais indépendamment de ces "précisions", on peut affirmer qu'un programme, quitte à agrandir O pour y faire figurer les cônes de S, calcule ainsi: à partir de la donnée IN, on prend $E = U^0 \otimes V$ et K le satellite de IN par rapport à E (au sens du §1.4), qui est un foncteur de $\underline{O}$ vers *Ens* (avec $O = (\underline{O}, P, Y)$); d'après le Théorème d'existence de diagramme localement libre (rappelé au §2.3), K engendre $(L_i K_i)_{i \in I}$. Et sous les "précisions" ci-avant on aura $I = \{1\}$ ou $I = \emptyset$, selon que le programme termine ou pas, avec dans le premier cas $L_1 K = OUT$.

L'action du programme, ce qu'il calcule, fait d'abord intervenir le bimodule $U^0 \otimes V$, objet de *SPA*; et la géométrie combinatoire du programme est donnée par S, objet de *ESQ*, présentation de gS. On pense donc à unifier les deux "solutions" *SPA* et *ESQ* au problème B du §1.3 en la catégorie *PRO* dont les objets sont les programmes au sens ci-dessus. On peut considérer ces objets comme des présentations de bimodules internes à *ESQ*, la composition $E \otimes F$ de ces bimodules, correspondant à la succession des programmes E puis F, déterminant sur PRO_0 une structure de bicatégorie.

2.6. Dans l'état actuel de l'art, je ne prétends pas que *PRO* est bien définitivement ce que l'on veut. Néanmoins il semble acquis que la catégorie voulue doit avoir comme objets les morphismes d'une certaine bicatégorie algébrique au-dessus de la bicatégorie cospan(*ESQ*) dont les objets sont les esquisses, et les morphismes sont les cospans

$$I \xrightarrow{\quad U \quad} S \xleftarrow{\quad V \quad} O$$

dans *ESQ* (que l'on compose par sommes fibrées). En vue de modélisations futures en ce sens, qui auraient (vu ce que nous avons exposé dans cette Note) l'avantage de rendre consubstantiels les programmes, les théories, les espaces et les calculs de satellites non abéliens, je terminerai par une description précise de la construction des bicatégories algébriques.

Soit $E = (\underline{E}, \otimes, \ldots.)$ une catégorie monoïdale (e.g. Ens = (*Ens*, $\times, \ldots$)) et $T = (\underline{T}, a, m, D)$ une monade monoïdale cohérente sur E telle que la catégorie $\underline{E}^T$ des T-algèbres soit à conoyaux (e.g. sur Ens une théorie commutative avec rang). Alors il existe sur $\underline{E}^T$ un bifoncteur $\hat{\otimes}$, classifiant les T-bimorphismes, et faisant de $\underline{E}^T$ une catégorie monoïdale. De plus, si E est symétrique fermée à noyaux et T symétrique, alors $(\underline{E}^T, \hat{\otimes}, \ldots.)$ est symétrique fermée. Ce résultat est établi dans Guitart [5]; en recopiant la preuve, on montre, sous les "mêmes" conditions, ce que voici.

Soit *Moncat* et *Bicat* les 2-catégories des catégories monoïdales et des bicatégories. Alors une monade monoïdale cohérente sur E est une monade T dans la 2-catégorie *Moncat*, et si $\underline{E}^T$ est à conoyaux, alors $(\underline{E}^T, \hat{\otimes}, \ldots)$ ci-avant est *l'objet* (dans *Moncat*) *des algèbres de* T, noté simplement E^T. Si maintenant T est une monade dans la 2-catégorie *Bicat*, on note E^T l'*objet* (dans *Bicat*) *des algèbres* de T, avec E la bicatégorie support de la monade T.

Explicitement, une monade T dans *Bicat* consiste en:

- Une bicatégorie E, où la composition est notée $\otimes$,
- Pour chaque $X \in E_0$, un objet $TX \in E_0$,
- Pour chaque $f: X \to Y \in E$, une transformation $T_{X,Y} f: TX \to TY$ dans E,
- Pour chaque 2-cellule $t: f \Rightarrow g: X \to Y$, une 2-cellule

$$T_{X,Y} t: T_{X,Y} f \Rightarrow T_{X,Y} g: TX \to TY,$$

- Pour chaque $f: X \to Y$ et $g: Y \to Z$, un

$$D_{f,g}: T_{Y,Z} g \otimes T_{X,Y} f \to T_{X,Z}(g \otimes f)$$

ces données devant satisfaire à des conditions de cohérence.

L'exemple typique est le suivant: soit $E = \mathrm{Span}(Cat)$ la bicatégorie dont les objets sont les catégories, les morphismes les spans

$$X \xleftarrow{\ M\ } K \xrightarrow{\ N\ } Y$$

(que l'on compose par produits fibrés), et où les 2-cellules sont les

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, equal] & K \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d, equal] \\ X & K \arrow[l] \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

On équipe E de T définie par

$T(M,N) =$ la bifibration universellement engendrée par (M,N).

La bicatégorie E^T construite dans ce cas est la *bicatégorie des bimodules entre catégories.* On obtient de même la bicatégorie des bimodules entre anneaux. etc.

On dit que la bicatégorie B est *algébrique sur* E s'il existe une monade T dans *Bicat* sur E avec $E^T = B$.

RÉFÉRENCES.

1. Y. DIERS, Catégories localisables, Thèse, Université Paris VII, 1977.
2. C. EHRESMANN, Esquisses et types de structures algébriques, Bul. Inst. Polit. Iasi (1968); reproduit dans *Charles Ehresmann: Œuvres complètes et commentées*, IV-1, Amiens 1982.
3. R. FRITSCH & D. LATCH, Homotopy inverses for Nerve, *Bull. A.M.S.* 1-19 (1979), 258-262.
4. A. GROTHENDIECK, Pursuing stacks, Manuscrit (environ 500 pages), mis en circulation en 1983.
5. R. GUITART, Tenseurs et machines, *Cahiers Top. et Géom. Diff.* XXI-1 (1980), 5-62.
6. R. GUITART & C. LAIR, Calcul syntaxique des modèles et calcul des formules internes, *Diagrammes* 4 (1980), 106 p.
7. R. GUITART & L. VAN DEN BRIL, Calcul des satellites et présentations des bimodules à l'aide des carrés exacts, Parties I et 2, *Cahiers Top. et Géom. Diff.* XXIV-3 et 4 (1983), 299-330 et 333-369.
8. R. GUITART, Introduction à l'analyse algébrique I et II, *Math. Sci. Hum.* 96 (1986), 49-63; 97 (1987), 19-45.
9. R. GUITART, On the geometry of computations, *Cahiers Top. et Géom. Diff.* XXVII-4 (1986), 107-136.
10. R. HARTSHORNE, Residue and duality, *Lecture Notes in Math.* 20, Springer 1966.
11. D.M. KAN, On functors involving css complexes, *Trans. A. M.S.* 87 (1958), 330-346.
12. D. QUILLEN, Homotopical algebra, *Lecture Notes in Math.* 43, Springer (1967).
13. R.W. THOMASON, *Cat* as a closed model category, *Cahiers Top. et Géom. Diff.* XXI-3 (1980), 305-324.
14. F. ULMER, Locally presentable and locally generated categories, *Lecture Notes in Math.* 195, Springer (1971).
15. J.-L. VERDIER. Catégories dérivées, *I.H.E.S.* 1967.

U.F.R. de Mathématiques
Tours 45-55, 5ème étage
Université PARIS VII
2, Place Jussieu
75005 PARIS. FRANCE