CAHIERS DE
TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
CATÉGORIQUES

YVES DIERS

Codisjoncteurs dans les catégories d'algèbres commutatives

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 28, nº 1 (1987), p. 5-28

<http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1987__28_1_5_0>

CAHIERS DE TOPOLOGIE
ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
CATÉGORIQUES

Vol. XXVIII-1(1987)

CODISJONCTEURS DANS LES CATÉGORIES D'ALGÈBRES COMMUTATIVES

by Yves DIERS

ABSTRACT. A thorough study of codisjunctors in the category **Anc** of commutative unitary rings has proved that they exactly describe the rings of fractions, the rings of quotients, and the flat epimorphisms. How may the computation on codisjunctors in **Anc** be extended to categories of commutative unitary algebras of a given type, eventually equipped with a supplementary structure? This question leads to a study of properties of preservation, reflection, creation, etc., of codisjunctors by the forgetful functors and their adjoints. The result is that functors do not behave in the same way with respect to codisjunctors and to limits or colimits.

CONTENTS.

INTRODUCTION.

Dans une catégorie **A**, considérons un couple de morphismes $(g, h): C \rightrightarrows A$. Le couple (g, h) est dit *codisjoint* si tout morphisme $u: A \to X$ qui vérifie (ug, uh) a nécessairement pour but X un objet final. On dit qu'un morphisme $f: A \to B$ codisjoint le couple (g, h) si le couple (fg, fh) est codisjoint. On appelle *codisjoncteur* de (g, h) un morphisme universel qui codisjoint (g, h), c'est-à-dire un morphisme $f: A \to B$ qui codisjoint (g, h), et qui factorise de façon unique tout morphisme qui codisjoint (g, h). Si un tel codisjoncteur existe, le couple (g, h) est dit codisjonctable. On appelle *épimorphisme singulier* un morphisme codisjoncteur d'un couple de morphismes.

Une étude exhaustive des codisjoncteurs dans la catégorie **Anc** des anneaux commutatifs unitaires a été faite dans [3]. Elle a montré que les codisjoncteurs dans **Anc** décrivent précisément les anneaux de fractions, les "anneaux de quotients" et les épimorphismes plats. En identifiant un idéal I d'un anneau A avec le couple de projections (r_1, r_2): $R \rightrightarrows A$ de la relation d'équivalence R modulo I sur A, on étend la terminologie aux idéaux. Les idéaux codisjonctables de A ont été caractérisés, d'une part en termes de projectivité, et d'autre part comme étant les idéaux I tels que l'ensemble

$$D(I) = \{ P \in \mathrm{Spec}(A) \mid I \not\subseteq P \}$$

soit un ouvert affine de Spec(A). Leurs codisjoncteurs ont été construits, d'une part comme morphismes de localisation

$$A \to \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{Hom}_A(I^n, A)$$

pour la topologie de Gabriel I-adique, et d'autre part comme morphismes de restriction $A \to A^\sim(D(I))$ du faisceau structural $A^\sim$ de A sur l'ouvert D(I). Les épimorphismes singuliers de **Anc** ont été caractérisés, d'une part en termes de relations, et d'autre part comme étant les épimorphismes f: $A \to B$ qui font de B une A-algèbre de présentation finie et un A-module plat.

Or le calcul des fractions et des localisations ne se limite pas aux anneaux, mais s'étend à toute sorte d'algèbres. Comment les résultats obtenus dans **Anc** s'étendent-ils aux catégories d'algèbres commutatives unitaires d'un type donné, munies éventuellement d'une structure additionnelle donnée? Comment le calcul des codisjoncteurs dans **Anc** s'étend-il à ces catégories d'algèbres? On se trouve confronté aux problèmes de la préservation, de la réflexion, de la création, etc., des couples codisjoints, des couples codisjonctables et des codisjoncteurs, par les foncteurs d'oubli de structure et leurs adjoints. On s'aperçoit rapidement que le comportement des foncteurs vis-à-vis des codisjoncteurs n'est pas le même que leur comportement vis-à-vis des limites ou des colimites. Ce fait confirme l'originalité et l'indépendance de la notion de codisjoncteur et conduit à une étude des propriétés de préservation des codisjoncteurs.

La préservation des codisjoncteurs implique la préservation des couples codisjoints. Un foncteur qui préserve l'objet final et les coégalisateurs préserve les couples codisjoints, mais la réciproque est inexacte, comme le montrent de nombreux exemples. Pour un foncteur U possédant un adjoint à gauche, les propriétés de préservation et de réflexion des couples codisjoints ou codisjonctables sont reliées à celles de l'adjoint à gauche F et de l'isomorphisme d'adjonction

$$\phi\colon \mathrm{Hom}(F(.),\ -) \to \mathrm{Hom}(.,\ U(-)).$$

Ainsi on a l'implication:

ϕ préserve les couples codisjoints $\Rightarrow$ U préserve les couples codisjoints.

Les trois propriétés suivantes sont équivalentes:

(1) U reflète les couples codisjoints.
(2) ϕ reflète les couples codisjoints.
(3) F préserve les couples codisjoints.

Les deux propriétés suivantes sont équivalentes:

(1) ϕ reflète les couples codisjonctables.
(2) F préserve les couples codisjonctables.

En outre, on a l'implication:

ϕ préserve et reflète les couples codisjoints $\Rightarrow$ F préserve les codisjoncteurs.

Pour toute catégorie **A** et tout objet K de **A**, le calcul des codisjoncteurs dans la catégorie K/**A** des objets de **A** au-dessous de K se ramène au calcul des codisjoncteurs dans **A**, puisque le foncteur projection K/**A** $\to$ **A** préserve et crée les codisjoncteurs. Il en résulte que le calcul des codisjoncteurs dans les catégories d'algèbres commutatives se ramène à celui dans les catégories d'anneaux.

Dans les catégories d'algèbres commutatives, les notions de: couples codisjoints, couples codisjonctables, codisjoncteurs de couples, peuvent s'interpréter en termes d'idéaux. Pour ce faire, nous introduisons la notion de *catégories* **Anc**-*concrètes*: Ce sont des catégories dont chaque objet possède une structure sous-jacente d'anneau, dont l'objet final s'identifie à l'anneau nul, dont les morphismes sont des homomorphismes d'anneaux, et dont les congruences sont définies par des idéaux. Soit **A** une telle catégorie et A un objet de **A**. Un **A**-*idéal* de A est un idéal de l'anneau sous-jacent à A, noyau d'un morphisme *f:* A $\to$ B de **A**. On montre que le treillis des **A**-idéaux de A est isomorphe au treillis des congruences sur A. En identifiant un **A**-idéal avec la congruence qu'il définit, on étend la terminologie: couples codisjoints. couples codisjonctables, codisjoncteurs d'un couple, aux **A**-idéaux. En associant à un couple de morphismes (g, h): $C \rightrightarrows A$ de **A**, le **A**-idéal ${}^{A}I(g, h)$ engendré par l'ensemble des éléments de l'anneau A de la forme $g(x)-h(x)$ où $x \in C$, on ramène l'étude du codisjoncteur de (g, h) à celui du **A**-idéal ${}^{A}I(g, h)$. Il suffit alors d'étudier les **A**-idéaux codisjonctables et leurs codisjoncteurs.

Nous avons choisi d'étudier plus particulièrement les codisjoncteurs dans les catégories d'algèbres ordonnées suivantes, à la suite de certains travaux sur les idéaux, le calcul des fractions et la localisation dans ces algèbres (cf. [1, 2, 5]). Dans ces catégories, tous les objets sont des anneaux commutatifs unitaires et tous les morphismes sont des homomorphismes d'anneaux préservant l'unité.

Anc : anneaux.
AncReg : anneaux réguliers (de von Neumann).
AncRed : anneaux réduits, i.e. satisfaisant l'axiome $x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$.
AncFormRl : anneaux formellement réels, i.e. satisfaisant l'axiome:

$$1 + x_1{}^2 + \ldots + x_n{}^2 \text{ est inversible [6].}$$

AncO: anneaux ordonnables (à carrés positifs ou nuls), i.e. satisfaisant l'axiome:

$$x_1{}^2 + \ldots + x_n{}^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1{}^2 = 0 \text{ (cf. [2], Prop. 1.2.1).}$$

AncOAnnConv : anneaux ordonnables à annulateurs convexes, i.e. satisfaisant l'axiome:

$$(x_1{}^2 + \ldots + x_n{}^2)y = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1{}^2 y = 0 \text{ (cf. [2], Prop. 1.2.1).}$$

AncORed : anneaux ordonnables réduits, i.e. satisfaisant l'axiome:

$$x_1{}^2 + \ldots + x_n{}^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0 \text{ (cf. [2],, Prop. 1.2.1).}$$

AncOFormRl : anneaux ordonnables formellement réels.
AncORedFormRl : anneaux ordonnables réduits formellement réels.
AncOAnnConvFormRl : anneaux ordonnables à annulateurs convexes formellement réels.
AncOrd : anneaux ordonnés (à carrés positifs ou nuls) et homomorphismes croissants (cf. [2], Déf. 1.1).

AncOrdAnnConv : anneaux ordonnés à annulateurs convexes, i.e. anneaux ordonnés satisfaisant l'axiome:

$((x+y)z = 0 \text{ et } x \geqslant 0 \text{ et } y \geqslant 0) \Rightarrow xz = 0$ (cf. [2], Déf. 1.1).

AncOrdRed : anneaux ordonnés réduits (cf. [2], Déf. 1.1).
AncOrdFormRl : anneaux ordonnés formellement réels, i.e. anneaux ordonnés satisfaisant l'axiome:

$$1 \leqslant x \Rightarrow x \text{ est inversible}$$ (cf. [2], Prop. 5.8.4).

Ne pas confondre avec les anneaux qui sont simultanément ordonnés et formellement réels.
AncOrdFormRlAnnConv : anneaux ordonnés formellement réels à annulateurs convexes.
AncOrdFormRlRed : anneaux ordonnés formellement réels réduits.
AncForRet : anneaux fortement réticulés et homomorphismes préservant les bornes supérieures et inférieures, i.e. anneaux réticulés satisfaisant l'axiome:

$$(x \wedge y = 0 \quad \text{et} \quad z \geqslant 0) \Rightarrow x \wedge (yz) = 0$$ (cf. [5], Déf. 5.9).

AncForRetFormRel : anneaux fortement réticulés formellement réels, i.e. anneaux fortement réticulés, formellement réels en tant qu'anneaux ordonnés.

1. CATÉGORIES Anc-CONCRETES.

Pour mieux appréhender les catégories d'algèbres commutatives, nous introduisons des catégories dont chaque objet possède une structure sous-jacente d'anneau, dont l'objet final s'identifie à l'anneau nul, dont les morphismes s'identifient à des homomorphismes d'anneaux et dont les congruences sont définies par des idéaux. Par analogie avec les catégories concrètes (cf. [7], p. 26), nous les appelons les catégories **Anc**-concrètes. Ce sont en fait des catégories **Anc**-concrètes complètes.

1.0. **DÉFINITIONS.** (1) Une *catégorie* **Anc**-*concrète* est un couple $(\mathbf{A}, V_A)$, noté $\mathbf{A}$, constitué d'une catégorie $\mathbf{A}$ et d'un foncteur $V_A: \mathbf{A} \to \mathbf{Anc}$ tel que:

(1) V_A est fidèle,

(2) V_A reflète l'objet final,

(3) **A** est complète,
(4) V_A est continu.

(2) Un *foncteur* ***Anc**-concret* est un triplet $((\mathbf{A}, V_A), (\mathbf{B}, V_B), U)$, noté U, constitué de deux catégories **Anc**-concrètes $(\mathbf{A}, V_A)$ et $(\mathbf{B}, V_B)$, et d'un foncteur $U: \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ continu et vérifiant $V_B U = V_A$.

Considérons une catégorie **Anc**-concrète **A** et un objet A de **A**.

1.1. DÉFINITIONS. (1) Un *idéal de* A est un idéal de l'anneau $V_A(A)$.

(2) Un **A**-*idéal de* A est un idéal de A noyau d'un homomorphisme de la forme $V_A(f)$ où $f: A \to B$ est un morphisme de **A**.

On note Idl(A) l'ensemble des idéaux de A et ${}^{A}\mathrm{Idl}(A)$ l'ensemble des **A**-idéaux de A; L'ensemble Idl(A) est un treillis complet et ${}^{A}\mathrm{Idl}(A)$ est un sous-inf-demi-treillis complet de Idl(A).

1.2. EXEMPLES. Les **AncRed**-idéaux sont les idéaux égaux à leur racine. Les **AncORed**-idéaux sont les idéaux réels ([1], §1, Déf. 1). Les **AncOrd**-idéaux sont les idéaux convexes ([2], Prop. 2.1.). Les **AncOrdRed**-idéaux sont les idéaux convexes égaux à leur racine ([2], 2.5). Les **AncOrdAnnConv**-idéaux sont les idéaux absolument convexes ([2], Cor. 2.5.5). Les **AncForRet**-idéaux sont les idéaux absolument convexes ([5], Déf. 1.8).

Rappelons qu'une congruence sur A est une relation $(r_1, r_2): R \rightrightarrows A$ sur A qui est le couple noyau d'un morphisme $f: A \to B$ ([4], §5).

1.3. *PROPOSITION.* *Le treillis* ${}^{A}\mathrm{Idl}(A)$ *des* **A**-*idéaux de* A *est isomorphe au treillis* Cong(A) *des congruences sur* A.

PREUVE. Notons V le foncteur V_A. Soit $(r_1, r_2): R \rightrightarrows A$ une congruence sur A. Il existe un morphisme $f: A \to B$ tel que (r_1, r_2) soit le couple noyau de f. Alors (Vr_1, Vr_2) est le couple noyau de Vf. Donc (Vr_1, Vr_2) est la congruence sur VA modulo le noyau de Vf. Notons $I(r_1, r_2) = \ker(Vf)$. C'est un **A**-idéal de A. On définit ainsi l'application I: $\mathrm{Cong}(A) \to {}^{A}\mathrm{Idl}(A)$. Soit (s_1, s_2) une autre congruence sur A. Alors (Vs_1, Vs_2) est la congruence modulo $I(s_1, s_2)$ sur VA. Si $(s_1, s_2) \subset (r_1, r_2)$, alors

$$(Vs_1, Vs_2) \subset (Vr_1, Vr_2), \quad \text{donc} \quad I(s_1, s_2) \subset I(r_1, r_2).$$

Réciproquement, supposons $I(s_1, s_2) \subset I(r_1, r_2)$. Alors $(Vs_1, Vs_2) \subset (Vr_1, Vr_2)$. Par suite

$$(Vf)(Vs_1) = (Vf)(Vs_2), \quad \text{soit} \quad V(fs_1) = V(fs_2),$$

et, puisque V est fidèle, $fs_1 = fs_2$. Il suit de là $(s_1, s_2) \subset (r_1, r_2)$. L'application I préserve et reflète donc les relations d'ordre sur Cong(A) et ${}^{\mathbf{A}}$Idl(A) et, par conséquent, elle induit un isomorphisme entre le treillis Cong(A) et son image dans ${}^{\mathbf{A}}$Idl(A). Mais l'application I est aussi surjective puisque, pour tout **A**-idéal I de A, il existe un morphisme $f\colon A \to B$ tel que $I = \ker(Vf)$, et que le couple noyau (r_1, r_2) de f est une congruence sur A telle que $I(r_1, r_2) = I$. Il en résulte que I réalise un isomorphisme entre ${}^{\mathbf{A}}$Idl(A) et Cong(A).

1.4. **NOTATIONS.** L'idéal $V_A(A)$ de A s'appelle *idéal unité de* A. C'est la borne supérieure dans Idl(A) et dans ${}^{\mathbf{A}}$Idl(A). Tout idéal de A distinct de $V_A(A)$ est dit *propre*. Pour tout idéal I de A, l'intersection des **A**-idéaux de A contenant I est un **A**-*idéal* de A dit *engendré* par I et noté ${}^{\mathbf{A}}$I. Pour un couple de morphismes $(g, h)\colon C \rightrightarrows A$ de **A**, l'ensemble

$$\{\, a((V_A g)(x) - (V_A h)(x)) \mid a \in VA \text{ et } x \in VC \,\}$$

est un *idéal* de A dit *défini* par (g, h) et noté $I(g, h)$. Le **A**-idéal engendré par $I(g, h)$, noté ${}^{\mathbf{A}}I(g, h)$, s'appelle le **A**-*idéal défini par* (g, h). En particulier pour une congruence $(r_1, r_2)\colon R \rightrightarrows A$ sur A, couple noyau d'un morphisme $f\colon A \to B$, l'idéal $I(r_1, r_2)$ est le noyau de $V_A f$, donc est un **A**-idéal, et le couple $(V_A r_1, V_A r_2)$ est la congruence modulo $I(r_1, r_2)$ sur $V_A A$. Pour tout **A**-idéal I de A, l'unique congruence sur A définissant l'idéal I (Proposition 1.3) s'appelle *la congruence modulo* I sur A.

On dit qu'un morphisme $f\colon A \to B$ *codisjoint le* **A**-*idéal* I s'il codisjoint la congruence modulo I sur A. De même, on dit qu'un morphisme $f\colon A \to B$ est codisjoncteur de I s'il est codisjoncteur de la congruence modulo I. Le **A**-idéal I est alors dit *codisjonctable dans* **A**. Rappelons que, pour tout couple de morphismes $(g, h)\colon C \rightrightarrows A$, l'intersection des congruences (r_1, r_2) sur A qui factorisent (g, h) est une *congruence* sur A, dite *engendrée par* (g, h).

1.5. ***PROPOSITION.*** *Dans une catégorie* **Anc**-*concrète* **A**, *la congruence engendrée par un couple de morphismes* $(g, h)\colon C \rightrightarrows A$ *est la congruence modulo* ${}^{\mathbf{A}}I(g, h)$.

PREUVE. Posons $V = V_A$ et $I = {}^A I(g, h)$. Soit $(r_1, r_2)\colon R \rightrightarrows A$ une congruence sur A. Montrons que (g, h) se factorise à travers (r_1, r_2) ssi $I \subset I(r_1, r_2)$. Supposons d'abord que (r_1, r_2) factorise (g, h), alors (Vr_1, Vr_2) factorise (Vg, Vh). Donc, pour tout élément x de VC, les deux élements $Vg(x)$ et $Vh(x)$ sont congrus modulo (Vr_1, Vr_2), et par suite, $Vg(x) - Vh(x) \in I(r_1, r_2)$. Cela prouve que $I(g, h)$ est inclus dans $I(r_1, r_2)$. Puisque $I(r_1, r_2)$ est un **A**-idéal, il suit de là que I est contenu dans $I(r_1, r_2)$. Supposons, réciproquement, que (r_1, r_2) soit tel que $I \subset I(r_1, r_2)$. Soit $f\colon A \to B$ un morphisme de **A** dont le couple noyau est (r_1, r_2). Alors (Vr_1, Vr_2) est le couple noyau de Vf. Les relations

$$I(Vg, Vh) = I(g, h) \subset {}^A I(g, h) = I \subset I(r_1, r_2) = \ker(Vf)$$

impliquent l'égalité

$$(Vf)(Vg) = (Vf)(Vh), \qquad \text{soit} \qquad V(fg) = V(fh)$$

et, puisque V est fidèle, $fg = fh$. Le couple (g, h) se factorise alors par (r_1, r_2).

Notons $(m_1, m_2)\colon M \rightrightarrows A$ la congruence modulo I sur A. Alors $I(m_1, m_2) = I$. Donc (g, h) se factorise à travers (m_1, m_2). Soit $(s_1, s_2)\colon S \rightrightarrows A$ une autre congruence sur A qui factorise le couple (g, h). Alors $I \subset I(s_1, s_2)$, donc $I(m_1, m_2) \subset I(s_1, s_2)$. D'après la Proposition 1.3, la congruence (m_1, m_2) factorise la congruence (s_1, s_2). La congruence (m_1, m_2) sur A est donc précisément l'intersection des congruences sur A qui factorisent (g, h). C'est la congruence sur A engendrée par (g, h). •

1.6 ***PROPOSITION.*** *Dans une catégorie* **Anc**-*concrète* **A**, *pour tout couple de morphismes* $(g, h)\colon C \rightrightarrows A$:

(1) (g, h) *est codisjoint* $\Leftrightarrow$ ${}^A I(g, h)$ *est unité.*

(2) (g, h) *est codisjonctable* $\Leftrightarrow$ ${}^A I(g, h)$ *est codisjonctable dans* **A**.

(3) (g, h) *et* ${}^A I(g, h)$ *ont même codisjoncteur dans* **A**.

PREUVE. Posons $V = V_A$. Supposons d'abord que (g, h) soit une congruence sur A. Alors

$${}^A I(g, h) = I(g, h) = I(Vg, Vh).$$

Supposons (g, h) codisjoint. Alors (g, h) est le couple noyau du morphisme $t\colon A \to 1$, donc (g, h) est isomorphe au couple de projections (p_1, p_2): $A \times A \rightrightarrows A$. L'image (Vg, Vh) est alors isomorphe au couple de projections (p_1, p_2): $VA \times VA \rightrightarrows VA$. Par suite $I(Vg, Vh) = I(p_1, p_2)$ est unité. Donc ${}^A I(g, h)$ est unité. Réciproquement, supposons que ${}^A I(g, h)$ soit unité, alors $I(Vg, Vh)$ est l'idéal unité de l'anneau VA. Donc (Vg, Vh) est la congruence modulo VA sur VA, et, par suite, (Vg, Vh) est un couple codisjoint de **Anc**. Puisque le foncteur V reflète l'objet final, il reflète les couples codisjoints (Proposition 3.0), donc le couple (g, h) est codisjoint.

Considérons ensuite un couple de morphismes (g, h): $C \rightrightarrows A$. Notons (r_1, r_2) la congruence modulo ${}^A I(g, h)$ sur A. Alors (r_1, r_2) est la congruence engendrée par (g, h) (Proposition 1.5). D'après la Proposition 1.1 [3], le couple (g, h) est codisjoint ssi le couple (r_1, r_2) est codisjoint. D'après ce qui précède, le couple (r_1, r_2) est codisjoint ssi l'idéal $I(r_1, r_2)$ est unité. Or $I(r_1, r_2) = {}^A I(g, h)$. Donc (g, h) est codisjoint ssi ${}^A I(g, h)$ est unité. On prouve d'une façon analogue, à partir de la Proposition 1.1 [3], que le couple (g, h) est codisjonctable ssi le **A**-idéal ${}^A I(g, h)$ est codisjonctable dans **A**, et que (g, h) et ${}^A I(g, h)$ ont même codisjoncteur dans **A**.

2. PRÉSERVATION DES COUPLES CODISJOINTS.

Un foncteur U: $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$ *préserve l'objet final* (resp. final strict) si l'image par U d'un objet final (resp. final strict) de **A** est un objet final (resp. final strict) de **B**. Il *préserve les couples codisjoints* si l'image par U d'un couple codisjoint de morphismes de **A** est un couple codisjoint de morphismes de **B**.

2.0 ***PROPOSITION.*** *Pour un foncteur* U: $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$,

(1) Si U *préserve les couples codisjoints, alors* U *préserve l'objet final strict,*

(2) Si **A** *possède un objet final strict et* U *préserve l'objet final strict et les coégalisateurs, alors* U *préserve les couples codisjoints.*

PREUVE. Un objet A de **A** est final strict ssi le couple $(1_A, 1_A)$: $A \rightrightarrows A$ est codisjoint. Donc si U préserve les couples codisjoints, U préserve l'objet final strict. Si **A** possède un objet final strict, 1, alors un couple (g, h): $C \rightrightarrows A$,de morphismes de **A** est codisjoint ssi le morphisme t: $A \to 1$ est coégalisateur de (g, h). Donc si U préserve les coégalisateurs et l'objet final strict, alors U préserve les couples codisjoints.

2.1. **APPLICATIONS.** Les foncteurs inclusion

$$\mathbf{AncReg} \to \mathbf{Anc} \quad \text{et} \quad \mathbf{AncFormRl} \to \mathbf{Anc}$$

préservent l'objet final strict et les coégalisateurs, donc ils préservent les couples codisjoints. Le foncteur d'oubli $\mathbf{Algc}(K) \to \mathbf{Anc}$ de la catégorie des K-algèbres commutatives unitaires préserve les couples codisjoints.

Supposons que le foncteur $U: \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ possède un adjoint à gauche $F: \mathbf{B} \to \mathbf{A}$. Si l'on note

$$\phi: \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(F(.), -) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{B}}(., U(-))$$

l'isomorphisme d'adjonction, le triplet (F, U, ϕ), ou la transformation naturelle ϕ, s'appelle l'adjonction définie par U ([7], p. 78). On dit que *l'adjonction ϕ préserve les couples codisjoints* si, pour tout couple codisjoint de $\mathbf{A}$ de la forme (g, h): $FB \rightrightarrows A$, le couple

$$(\phi_{BA}(g), \phi_{BA}(h)): B \rightrightarrows UA$$

est codisjoint dans B.

2.2. ***PROPOSITION.*** *Soit* $U: \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ *un foncteur fidèle possédant un adjoint à gauche* F *et définissant l'adjonction* (F, U, ϕ). *On a l'implication:*

> ϕ *préserve les couples codisjoints* $\Rightarrow$ U *préserve les couples codisjoints.*

PREUVE. Notons $\epsilon: FU \to \mathbf{A}$ le morphisme counité de l'adjonction. Puisque le foncteur U est fidèle, ϵ est un épimorphisme ponctuel. Soit (g, h): $C \rightrightarrows A$ un couple codisjoint de $\mathbf{A}$. Alors le couple $(g\epsilon_C, h\epsilon_C)$ est codisjoint, puisque tout morphisme f: $A \to B$ qui vérifie $fg\epsilon_C = fh\epsilon_C$ vérifie $fg = fh$, donc est tel que B est un objet final. Puisque ϕ préserve les couples codisjoints, il suit que le couple

$$(\phi_{UC,A}(g\epsilon_B), \phi_{UC,A}(h\epsilon_B))$$

est codisjoint. Or il est égal au couple (Ug, Uh). Donc le foncteur U préserve les couples codisjoints.

2.3. ***PROPOSITION.*** *Pour un foncteur* **Anc**-*concret* $U: \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ *possédant un adjoint à gauche et définissant l'adjonction* (F, U, ϕ), *les assertions* *suivantes sont équivalentes:*

(1) ϕ préserve les couples codisjoints.

(2) Pour tout objet A *de* **A** *et tout* B-*idéal* I *de* UA, *on a l'implication:* ${}^{A}I$ *est unité* $\Rightarrow$ I *est unité.*

PREUVE. Prouvons d'abord le lemme suivant:

LEMME 2.3.0. *Pour tout couple de morphismes de* **A** de la forme (g, h): FC $\rightrightarrows$ A, *on a:*

$${}^{A}I(g, h) = {}^{A}I(\phi_{CA}(g), \phi_{CA}(h)).$$

Preuve du Lemme. Notons μ: B $\to$ UF le morphisme unité de l'adjonction. La relation $(\phi_{CA}(g), \phi_{CA}(h)) = (Ug, Uh)\mu_C$ implique l'inclusion

$$I(\phi_{CA}(g), \phi_{CA}(h)) \subset I(Ug, Uh) = I(g, h)$$

et par suite l'inclusion ${}^{A}I(\phi_{CA}(g), \phi_{CA}(h)) \subset {}^{A}I(g, h)$. Soit (m_1, m_2): **M** $\rightrightarrows$ A la congruence modulo ${}^{A}I(\phi_{CA}(g), \phi_{CA}(h))$ sur A. L'inclusion

$$I(\phi_{CA}(g), \phi_{CA}(h)) \subset {}^{A}I(\phi_{CA}(g), \phi_{CA}(h))$$

implique

$${}^{B}I(\phi_{CA}(g), \phi_{CA}(h)) \subset {}^{A}I(\phi_{CA}(g), \phi_{CA}(h)) = I(m_1, m_2) = I(Um_1, Um_2).$$

La congruence (Um_1, Um_2) sur UA factorise donc la congruence modulo ${}^{B}I(\phi_{CA}(g), \phi_{CA}(h))$ (Proposition 1.3) et par suite, elle factorise le couple $(\phi_{CA}(g), \phi_{CA}(h))$ (Proposition 1.5). Il existe donc un morphisme k: C $\to$ UM vérifiant $(\phi_{CA}(g), \phi_{CA}(h)) = (Um_1, Um_2)k$. Le morphisme $\phi^{-1}{}_{CM}(k)$: FC $\to$ **M** détermine alors une factorisation du couple (g, h) à travers le couple (m_1, m_2). Il s'ensuit l'inclusion

$${}^{A}I(g, h) \subset I(m_1, m_2) = {}^{A}I(\phi_{CA}(g), \phi_{CA}(h)).$$

Il en résulte l'égalité ${}^{A}I(g, h) = {}^{A}I(\phi_{CA}(g), \phi_{CA}(h))$.

PREUVE DE LA PROPOSITION 2.3. L'équivalence (1) $\Leftrightarrow$ (2) résulte de l'équivalence:

(g, h) est codisjoint $\Leftrightarrow$ ${}^{A}I(g, h)$ est unité,

de l'équivalence:

$(\phi_{CA}(g), \phi_{CA}(h))$ est codisjoint $\Leftrightarrow$ ${}^{B}I(\phi_{CA}(g), \phi_{CA}(h))$ est unité,

et des égalités:

$${}^{A}I(g, h) = {}^{A}I(\phi_{CA}(g), \phi_{CA}(h)) = {}^{A}({}^{B}I(\phi_{CA}(g), \phi_{CA}(h)).$$

2.4. **APPLICATIONS.**

2.4.0. AncRed $\to$ **Anc**. Le foncteur U inclusion de **AncRed** dans **Anc** est **Anc**-concret et possède un adjoint à gauche. Pour un anneau A de **AncRed**, les **AncRed**-idéaux de A sont les idéaux égaux à leur racine et, pour tout idéal I de A, le **AncRed**-idéal engendré par I est la racine $\sqrt{I}$ de I. Or: $\sqrt{I}$ est unité $\Leftrightarrow$ I est unité. Donc l'adjonction définie par U préserve les couples codisjoints (Proposition 2.3), et par suite, le foncteur U préserve les couples codisjoints (Proposition 2.2).

2.4.1. AncOFormRl $\to$ **Anc**. Le foncteur U inclusion de **AncOFormRl** dans **Anc** est **Anc**-concret et possède un adjoint à gauche. Pour un anneau A $\in$ **AncOFormRl**, les **AncOFormRl**-idéaux de A sont les idéaux I satisfaisant:

$$x_1^2 + \dots + x_n^2 \in I \Rightarrow x_1^2 \in I$$

et le **AncOFormRl**-idéal de A engendré par un idéal I est:

$$^cI = \{ x \mid \exists x_1, \dots, x_n, \ x^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2 \in I \}.$$

Si ^cI = A, alors 1 $\in$ ^cI, donc il existe $x_1, \dots, x_n$ tels que $1+x_1^2+\dots+x_n^2$ soit dans I, et puisque $1+ x_1^2+\dots+x_n^2$ est inversible, on a I = A. L'adjonction définie par U préserve donc les couples codisjoints, et par suite U préserve les couples codisjoints.

2.4.2. AncORedFormRl $\to$ **Anc**. Le foncteur U inclusion de **AncORedFormRl** dans **Anc** est **Anc**-concret et possède un adjoint à gauche. Les **AncORedFormRl**-idéaux sont les idéaux réels ([1], §1, Déf. 1), i.e. les idéaux I satisfaisant:

$$x_1^2 + \dots + x_n^2 \in I \Rightarrow x_1 \in I,$$

et l'idéal réel engendré par un idéal I est:

$$^RI = \{ x \mid \exists n \in \mathbb{N}^*, \exists x_1, \dots, x_p, x^{2n} + x_1^2 + \dots + x_p^2 \in I \}.$$

On a comme précédemment l'implication: ^RI est unité $\Rightarrow$ I est unité. Donc l'adjonction définie par U préserve les couples codisjoints et, par suite, U préserve les couples codisjoints.

2.4.3. AncOAnnConvFormRl $\to$ **Anc**. Le foncteur inclusion U est **Anc**-concret et possède un adjoint à gauche. Les **AncOAnnConvFormRl**-idéaux sont les idéaux I satisfaisant:

$$(x_1{}^2 + \ldots + x_n{}^2)y \in \mathrm{I} \Rightarrow x_1y \in \mathrm{I},$$

et le **AncOAnnConvFormRl**-idéal d'un objet A engendré par un idéal I est ${}^{\mathrm{AC}}\mathrm{I} = \mathrm{U}_{n\in\mathrm{N}}\mathrm{I}_n$ où $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathrm{N}}$ est la suite croissante d'idéaux définie par $\mathrm{I}_0 = \mathrm{I}$ et I_{n+1} est l'idéal engendré par:

$$\{x^2y \mid x \in \mathrm{A},\ y \in \mathrm{A} \text{ et } \exists\ x_1, \ldots, x_n \in \mathrm{A},\ (x^2 + x_1{}^2 + \ldots + x_n{}^2)y \in \mathrm{I}_n\}$$

([2], 2.5). Supposons ${}^{\mathrm{AC}}\mathrm{I} = \mathrm{A}$. Considérons l'idéal réel ${}^{\mathrm{R}}\mathrm{I}$ engendré par I (2.4.2). C'est un **AncOAnnConvFormRl**-idéal qui contient ${}^{\mathrm{AC}}\mathrm{I}$. La relation ${}^{\mathrm{AC}}\mathrm{I} = \mathrm{A}$ implique la relation ${}^{\mathrm{R}}\mathrm{I} = \mathrm{A}$. D'après 2.4.2, il suit I = A. Par conséquent l'adjonction définie par U préserve les couples codisjoints, et par suite, U préserve les couples codisjoints.

2.4.4. AncOrdFormRl → **Anc**. Le foncteur d'oubli U est **Anc**-concret et possède un adjoint à gauche. Les **AncOrdFormRl**-idéaux d'un objet A de **AncOrdFormRl** sont les idéaux convexes ([2], 2.1), i.e. tels que:

$$(x+y \in \mathrm{I} \text{ et } x \geqslant 0 \text{ et } y \geqslant 0) \Rightarrow x \in \mathrm{I}.$$

L'idéal convexe engendré par un idéal I de A est l'enveloppe convexe de I, notée ${}^{\mathrm{C}}\mathrm{I}$, et définie par: ${}^{\mathrm{C}}\mathrm{I} = \mathrm{U}_{n\in\mathrm{N}}\mathrm{I}_n$, où $(\mathrm{I}_n)_{n\in N}$ est la suite croissante d'idéaux définie par: $\mathrm{I}_0 = \mathrm{I}$ et I_{n+1} est l'idéal engendré par

$$\{x \mid \exists\ y \in \mathrm{I}_n,\ 0 \leqslant x \leqslant y\}$$

([2], 2.5). En outre la racine de l'enveloppe convexe de I est:

$$\sqrt{{}^{\mathrm{C}}\mathrm{I}} = \{x \mid \exists\ x_1, \ldots, x_p \in \mathrm{I},\ \exists\ y_1, \ldots, y_p \in \mathrm{A},\ y_1 \geqslant 0, \ldots, y_p \geqslant 0 \text{ et } x^{2n} \leqslant x_1{}^2y_1 + \ldots + x_p{}^2y_p\}$$

([2], 2.2.4). Supposons ${}^{\mathrm{C}}\mathrm{I} = \mathrm{A}$. Alors $\sqrt{{}^{\mathrm{C}}\mathrm{I}} = \mathrm{A}$. Donc il existe $x_1, \ldots, x_p$ dans I et $y_1, \ldots y_p \in \mathrm{A}$ vérifiant $1 \leqslant x_1{}^2y_1 + \ldots + x_p{}^2y_p$. Puisque l'anneau A est ordonné formellement réel, l'élément $x_1{}^2y_1 + \ldots + x_p{}^2y_p$ est inversible. Or il appartient à I. Donc I = A. Il s'en suit que l'adjonction définie par U préserve les couples codisjoints et que U préserve les couples codisjoints.

2.4.5. AncOrdFormRlAnnConv → **Anc**. Le foncteur d'oubli U est **Anc**-concret et possède un adjoint à gauche. Les **AncOrdFormRlAnnConv**-idéaux sont les idéaux absolument convexes ([2], 2.5), i.e. tels que:

$$((x+y)z \in \mathrm{I} \text{ et } x \geqslant 0 \text{ et } y \geqslant 0) \Rightarrow xz \in \mathrm{I}.$$

L'idéal absolument convexe engendré par un idéal I est l'enveloppe absolument convexe de I, notée ${}^{ac}I$, définie par ${}^{ac}I = \cup_{n\in\mathbb{N}} I_n$, où (I_n) est la suite croissante d'idéaux définie par: $I_0 = I$ et I_{n+1} est l'idéal engendré par

$$\{ xy \mid \exists\, z,\ 0 \leqslant x \leqslant z \text{ et } zy \in I_n \}.$$

On montre, comme au 2.4.4, que l'on a l'implication:

$${}^{ac}I \text{ est unité} \Rightarrow I \text{ est unité}.$$

Il s'ensuit que l'adjonction définie par U préserve les couples codisjoints et, par suite, que U préserve les couples codisjoints.

2.4.6. AncOrdFormRlRed→ Anc. Les idéaux adéquats sont les idéaux convexes égaux à leur racine [2]. On montre comme précédemment que le foncteur d'oubli et l'adjonction qu'il définit préservent les couples codisjoints.

2.4.7. AncFortRetFormRl→ Anc. Les idéaux adéquats sont les idéaux absolument convexes [5]. Le foncteur d'oubli et l'adjonction qu'il définit préservent les couples codisjoints.

3. RÉFLEXION DES COUPLES CODISJOINTS.

Un foncteur U: **A** → **B** *reflète l'objet final* (resp. final strict) si tout objet de **A** dont l'image par U est un objet final (resp. final strict) de **B**, est nécessairement un objet final (resp. final strict) de **A**. Il *reflète les couples codisjoints* si tout couple de morphismes (g, h): C $\rightrightarrows$ A de **A** dont l'image par U est un couple codisjoint dans **B** est nécessairement codisjoint dans **A**.

3.0. ***PROPOSITION.*** *(1) Tout foncteur qui reflète l'objet final reflète l'objet final strict.*

(2) Un foncteur reflète les couples codisjoints ssi il reflète l'objet final strict.

(3) Tout foncteur pleinement fidèle reflète les couples codisjoints.

(4) Tout foncteur **Anc**-*concret reflète les couples codisjoints.*

PREUVE. Considérons un foncteur U: **A** → **B**.

(1) Supposons que U reflète l'objet final. Soit A un objet de **A** dont l'image UA est un objet final strict de **B**. Alors A est un objet final de **A**. Si f: A → B est un morphisme de **A**, le morphisme Uf:

UA $\to$ UB est un isomorphisme, donc UB est objet final de **B** et, par suite, B est objet final de **A**, donc f est un isomorphisme. L'objet A est donc final strict dans **A**. Le foncteur U reflète donc l'objet final strict.

(2) Notons d'abord qu'un objet A est final strict ssi le couple $(1_A, 1_A)$: A $\rightrightarrows$ A est codisjoint. Il suit de là que, si U reflète les couples codisjoints, il reflète l'objet final strict. Réciproquement, supposons que U reflète l'objet final strict. Soit (g, h): C $\rightrightarrows$ A un couple de morphismes de **A** dont l'image (Ug, Uh) est un couple codisjoint. Si f: A $\to$ B est un morphisme vérifiant $fg = fh$, le morphisme Uf: UA $\to$ UB vérifie $(Uf)(Ug) = (Uf)(Uh)$, donc UB est un objet final strict de **B**, et par suite, B est un objet final strict de **A**. Le couple (g, h) est donc codisjoint. Le foncteur U reflète donc les couples codisjoints.

(3) Un foncteur pleinement fidèle reflète l'objet final strict, donc reflète les couples codisjoints.

(4) Un foncteur **Anc**-concret reflète l'objet final donc reflète les couples codisjoints.

3.1. **APPLICATIONS.** Tous les foncteurs "oubli de structure" reflètent les couples codisjoints. De même, tous les foncteurs inclusion de sous-catégories pleines reflètent les couples codisjoints.

Supposons que le foncteur U: **A** $\to$ **B** possède un adjoint à gauche F et définisse l'adjonction (F, U, ϕ). On dit que *l'adjonction ϕ reflète les couples codisjoints* si tout couple de morphismes de **A** de la forme (g, h): FC $\rightrightarrows$ A dont l'image $(\phi_{CA}(g), \phi_{CA}(h))$: C $\rightrightarrows$ UA est un couple codisjoint dans **B** est nécessairement codisjoint dans **A**.

3.2. ***PROPOSITION.*** *Pour un foncteur* U *possédant un adjoint à gauche* F *et définissant l'adjonction* (F, U, ϕ), *les assertions suivantes sont équivalentes:*

(1) U *reflète les couples codisjoints.*

(2) ϕ *reflète les couples codisjoints.*

(3) F *préserve les couples codisjoints.*

PREUVE. Notons U: **A** $\to$ **B** le foncteur, μ: **B** $\to$ UF le morphisme unité et ϵ: FU $\to$ **A** le morphisme counité.

(1) $\Rightarrow$ (2). Soit (g, h): FC $\rightrightarrows$ A un couple de morphismes de **A** dont l'image $(\phi_{CA}(g), \phi_{CA}(h))$: C $\rightrightarrows$ UA est un couple codisjoint. La relation $(\phi_{CA}(g), \phi_{CA}(h)) = ((Ug)\mu_C, (Uh)\mu_C)$ implique que le couple (Ug, Uh) est codisjoint. Puisque U reflète les couples codisjoints, le couple (g, h) est codisjoint.

(2) ⇒ (1). Soit (g, h): C $\rightrightarrows$ A un couple de morphismes de **A** dont l'image (Ug, Uh): UC $\rightrightarrows$ UA est un couple codisjoint. Puisque ϕ reflète les couples codisjoints, le couple $(\phi_{UC,A}^{-1}(Ug), \phi_{UC,A}^{-1}(Uh))$ est codisjoint. Or ce couple est égal au couple $(g\varepsilon_C, h\varepsilon_C)$. Donc le couple $(g\varepsilon_C, h\varepsilon_C)$ est codisjoint et par suite, le couple (g, h) est codisjoint.

(2) ⇔ (3). La preuve est analogue à la preuve précédente, en utilisant le foncteur F au lieu du foncteur U.

3.3. APPLICATIONS. La catégorie **AncO** est une sous-catégorie pleine réflexive de **Anc**. Le foncteur inclusion **AncO** → **Anc** reflète les couples codisjoints (Proposition 3.0), et le réflecteur **Anc** → **AncO** préserve les couples codisjoints (Proposition 3.2). De même, le foncteur d'oubli **AncOrd** → **Anc** reflète les couples codisjoints et son adjoint à gauche **Anc** → **AncOrd** les préserve.

4. PRÉSERVATION DES CODISJONCTEURS.

Un foncteur U: **A** → B *préserve les couples disjonctables* si, pour tout couple (g, h): C $\rightrightarrows$ A de morphismes de **A**, on a l'implication:
(g, h) est codisjonctable dans **A** ⇒ (Ug, Uh) est codisjonctable dans B.

Il *préserve les codisjoncteurs* si, pour tout couple (g, h): C $\rightrightarrows$ A de morphismes de **A** et tout morphisme f: A → B on a l'implication:
f est codisjoncteur de (g, h) ⇒ Uf est codisjoncteur de (Ug, Uh).

Un foncteur qui préserve les codisjoncteurs préserve les couples codisjonctables ainsi que les couples codisjoints.

4.0. *PROPOSITION.* *Pour toute catégorie* **A** *possédant un objet final strict et tout objet* K *de* **A**, *le foncteur projection* K/**A** → **A** *de la catégorie des objets de* **A** *au-dessous de* K *préserve les codisjoncteurs et reflète les couples codisjoints.*

PREUVE. Notons 1 l'objet final strict de **A**. Il existe un et un seul objet de K/**A** de la forme $(1, t)$ et il est objet final strict de K/**A**. Le foncteur projection K/**A** → **A** préserve et reflète donc l'objet final strict. Comme il préserve aussi les coégalisateurs, il préserve et reflète les couples codisjoints (Propositions 2.0 et 3.0). Soit (g, h): $(C, c) \rightrightarrows (A, a)$ un couple de morphismes de K/**A** possédant un codisjoncteur f: $(A, a) \to (B, b)$. Alors le morphisme f: A → B codisjoint le couple (g, h): C $\rightrightarrows$ A. Soit m: A $\to$ M un morphisme de **A** qui codisjoint (g, h): C $\rightrightarrows$ A. Alors le morphisme m: (A, a) $\to$ (M, ma) codisjoint le couple (g, h): (C, c) $\rightrightarrows$ (A, a). Donc il existe un unique morphisme n: (B, b) $\to$ (M, ma) vérifiant $nf = m$. Il s'ensuit que f: A $\to$ B est codisjoncteur du couple (g, h): C $\rightrightarrows$ A.

4.1. APPLICATION. Pour tout anneau K $\in$ **Anc**, la catégorie K/**Anc** est isomorphe à la catégorie **Algc**(K) des algèbres commutatives unitaires sur K, et le foncteur projection K/**Anc** $\to$ **Anc** est isomorphe au foncteur oubli de structure **Algc**(K) $\to$ **Anc**. Ce foncteur préserve donc les codisjoncteurs. On prouve de la même façon que les foncteurs oubli de structure des catégories d'algèbres d'un type donné, dans les catégories d'anneaux correspondants, préservent les codisjoncteurs.

4.2. *PROPOSITION.* *Soit* U: **A** $\to$ **B** *un foncteur* **Anc**-*concret. Les deux assertions suivantes sont équivalentes:*

(1) U *préserve les couples codisjonctables.*

(2) Pour tout objet A *de* **A** *et tout* B-*idéal* I *de* UA:

^{A}I *est codisjonctable dans* **A** $\Rightarrow$ I *est codisjonctable dans* B.

Les deux assertions suivantes sont équivalentes:

(3) U *préserve les codisjoncteurs.*

(4) Pour tout objet A *de* **A** *et tout* B-*idéal* I *de* UA:

f *est codisjoncteur de* ^{A}I *dans* **A** $\Rightarrow$ Uf *est codisjoncteur de* I *dans* B.

PREUVE. Soit (g, h): C $\rightrightarrows$ A un couple de morphismes de **A**, ^{A}I(g, h) le **A**-idéal de A défini par (g, h) et (m_1, m_2): M $\rightrightarrows$ A la congruence modulo ^{A}I(g, h) sur A. Alors le couple (Ug, Uh): UC $\rightrightarrows$ UA de morphismes de B définit le B-idéal ^{B}I(Ug, Uh) = ^{B}I(g, h) sur UA, et le couple (Um_1, Um_2)): UM $\rightrightarrows$ UA est la congruence modulo ^{B}I(g, h) sur UA. D'après la Proposition 1.6, on a l'équivalence:

(Ug, Uh) est codisjonctable dans **A** $\Leftrightarrow$ ^{A}I(g, h) est codisjonctable dans **A**,

et, dans ce cas, (g, h) et ^{A}I(g, h) ont même codisjoncteur. De même, on a l'équivalence:

(Ug, Uh) est codisjonctable dans B $\Leftrightarrow$ ^{B}I(Ug, Uh) est codisjonctable dans B,

et dans ce cas, (Ug, Uh) et ^{B}I(Ug, Uh) ont même codisjoncteur. Les deux équivalences (1) $\Leftrightarrow$ (2), (3) $\Leftrightarrow$ (4) résultent alors du fait que le **A**-idéal ^{A}I(g, h) est précisément le **A**-idéal de A engendré par le B-idéal ^{B}I(Ug, Uh) de UA.

4.3. PROPOSITION. *Si* U: **A** → **B** *est un foncteur possédant un adjoint à gauche et définissant* l'adjonction (F, U, ϕ), *on a l'implication:*

ϕ *préserve et reflète les couples codisjoints* ⇒ F *préserve les codisjoncteurs.*

PREUVE. Soit (g, h): B ⇉ C un couple de morphismes de **B** ayant pour codisjoncteur le morphisme d: C → D. Le couple (dg, dh) est alors codisjoint. Puisque le foncteur F préserve les couples codisjoints (Proposition 3.2), le couple $(\mathrm{F}(dg), \mathrm{F}(dh))$ est codisjoint, donc le morphisme Fd codisjoint le couple (Fg, Fh). En outre Fd est un épimorphisme, puisque d en est un et que F préserve les épimorphismes. Soit f: FC → A un morphisme de **A** qui codisjoint le couple (Fg, Fh). Alors le couple $(f(\mathrm{F}g), f(\mathrm{F}h))$ est codisjoint. Donc le couple $(\phi_{\mathrm{BA}}(f(\mathrm{F}g)), \phi_{\mathrm{BA}}(f(\mathrm{F}h)))$ est codisjoint. Or celui-ci est égal au couple $(\phi_{\mathrm{CA}}(f)g, \phi_{\mathrm{CA}}(f)h)$. Donc le morphisme $\phi_{\mathrm{CA}}(f)$ codisjoint le couple (g, h). Puisque d est codisjoncteur de (g, h), il existe un morphisme k: D → UA vérifiant $kd = \phi_{\mathrm{CA}}(f)$. Le morphisme $\phi_{\mathrm{DA}}^{-1}(k)$: FD → A vérifie alors $\phi_{\mathrm{DA}}^{-1}(k)\mathrm{F}d = f$. Il suit de là que le morphisme Fd est codisjoncteur de (Fg, Fh) et, par suite, que le foncteur F préserve les codisjoncteurs.

4.4. APPLICATIONS. Les catégories **AncRed**, **AncOFormRl**, **AncORedFormRl**, **AncOAnnConvFormRl** sont des sous-catégories pleines réflexives de **Anc** définissant des adjonctions qui préservent les couples codisjoints (2.4) et les reflètent (Propositions 3.0 et 3.2). D'après la Proposition 4.3, les réflecteurs associés

Anc → **AncRed**, **Anc** → **AncOFormRl**, **Anc** → **AncORedFormRl**,
Anc → **AncOAnnConvFormRl**

préservent les codisjoncteurs. On prouve de la même façon que les réflecteurs

Anc → **AncReg**, **Anc** → **AncFormRl**

préservent les codisjoncteurs. Les foncteurs d'oubli de structure

AncOrdFormRl → **Anc**, **AncOrdFormRlAnnConv** → **Anc**,
AncOrdFormRlRed → **Anc**, **AncForRetFormRl** → **Anc**

définissent des adjonctions qui préservent et reflètent les couples codisjoints (2.4). Les foncteurs adjoints à gauche associés préservent donc les codisjoncteurs. De la même façon on prouve que les foncteurs adjoints à gauche aux foncteurs d'inclusion ou d'oubli de structure entre toutes les catégories citées ci-dessus préservent les codisjoncteurs. Ainsi par exemple, le foncteur adjoint à gauche au foncteur d'oubli de structure

$$\mathbf{AncOrdFormRl} \to \mathbf{AncOFormRl}$$

préserve les codisjoncteurs. Or ce foncteur s'identifie à l'injection canonique

$$\mathbf{AncOFormRl} \to \mathbf{AncOrdFormRl}$$

qui associe à l'anneau A l'anneau ordonné A muni de l'ordre dont les éléments positifs ou nuls sont les sommes de carrés.

5. RÉFLEXION DES CODISJONCTEURS.

Un foncteur U: $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$ *reflète les couples codisjonctables* si, pour tout couple (g, h): C $\rightrightarrows$ A de morphismes de A, on a l'implication:

(Ug, Uh) est codisjonctable dans B $\Rightarrow$ (g, h) est codisjonctable dans $\mathbf{A}$.

Le foncteur U *reflète les codisjoncteurs* si, pour tout couple (g, h): C $\rightrightarrows$ A de morphismes de $\mathbf{A}$ et tout morphisme f: A $\to$ B, on a l'implication:

Uf est codisjoncteur de (Ug, Uh) $\Rightarrow$ f est codisjoncteur de (g, h).

Si le foncteur U possède un adjoint à gauche F et définit l'adjonction (F, U, ϕ), on dit que *l'adjonction ϕ reflète les couples codisjonctables* si, pour tout couple de morphismes de $\mathbf{A}$ de la forme (g, h): FC $\rightrightarrows$ A, on a l'implication:

$(\phi_{CA}(g), \phi_{CA}(h))$ est codisjonctable dans B $\Rightarrow$ (g, h) est codisjonctable dans $\mathbf{A}$.

5.0. ***PROPOSITION.*** *(1) Tout foncteur qui reflète les codisjoncteurs reflète les couples codisjoints.*

(2) Tout foncteur pleinement fidèle qui préserve les couples codisjoints reflète les codisjoncteurs.

PREUVE. (1) Soit U: $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$ un foncteur qui reflète les codisjoncteurs. Soit (g, h): C $\rightrightarrows$ A un couple de morphismes de $\mathbf{A}$ dont l'image (Ug, Uh)

est un couple codisjoint. Le morphisme $1_{UA} = U(1_A)$ est codisjoncteur de (Ug, Uh). Donc le morphisme 1_A est codisjoncteur de (g, h) et, par suite, le couple (g, h) est codisjoint.

(2) Soit U: **A** → B un foncteur pleinement fidèle qui préserve les couples codisjoints. Soit (g, h): C $\rightrightarrows$ A un couple de morphismes de **A** et f: A → B un morphisme tel que Uf soit codisjoncteur de (Ug, Uh). Le couple

$$((Uf)(Ug),\ (Uf)(Uh)) = (U(fg),\ U(fh))$$

est codisjoint. Puisque le foncteur U reflète les couples codisjoints (Proposition 3.0), le couple (fg, fh) est codisjoint. Le morphisme f codisjoint donc (g, h). Si k: A → X est un morphisme qui codisjoint (g, h), alors Uk codisjoint (Ug, Uh), donc se factorise de façon unique à travers Uf. Puisque U est pleinement fidèle, le morphisme k se factorise de façon unique à travers f. Le morphisme f est donc codisjoncteur de (g, h).

5. 1. **APPLICATIONS.** Les foncteurs inclusion des catégories **AncReg**, **AncRed**, **AncFormRl**, **AncOFormRl**, **AncORedFormRl**, **AncOAnnConvFormRl** dans la catégorie **Anc**, préservent les couples codisjoints (2.1 et 2.4), donc ils reflètent les codisjoncteurs.

5.2. ***PROPOSITION.*** *Si* **A** *et* B *sont deux catégories à sommes amalgamées et* U: **A** → B *est un foncteur possédant un adjoint à gauche* F *et définissant l'adjonction* (F, U, ϕ), *les assertions suivantes sont équivalentes:*

(1) ϕ *reflète les couples codisjonctables.*

(2) F *préserve les couples codisjonctables.*

(3) (Si U *est* **Anc**-*concret). Pour tout objet* A *de* **A** *et tout* B-*idéal* I *de* UA, *on a l'implication:*

I *est codisjonctable dans* B ⇒ ^{A}I *est codisjonctable dans* **A**.

Si U *est fidèle, alors ces assertions impliquent que* U *reflète les couples codisjonctables.*

PREUVE. Notons μ: B → UF le morphisme unité et ϵ: FU → **A** le morphisme counité.

(1) ⇒ (2). Soit (g, h): B $\rightrightarrows$ C un couple codisjonctable dans B, de codisjoncteur d: C → D. Notons $(e$: FUC → E, k: D → E) la somme amalgamée de $(\mu_C$: C → UFC, d: C → D). Le couple (dg, dh) étant codisjoint, le couple $(kdg, kdh) = (e\mu_C g, e\mu_C h)$ est codisjoint. Donc e codisjoint $(\mu_C g, \mu_C h)$. Soit m: UFC → M un morphisme qui codisjoint $(\mu_C g, \mu_C h)$.

Alors $m\mu_C$ codisjoint (g, h). Donc il existe un morphisme $n: D \to M$ vérifiant $nd = m\mu_C$. Par suite, il existe un morphisme

$$p: E \to M \text{ vérifiant } pk = n \text{ et } pe = m.$$

Le morphisme m se factorise donc à travers e, et ceci de façon unique puisque e est épimorphique. Il suite de là que e est codisjoncteur de $(\mu_C g, \mu_C h)$. Le couple $(\mu_C g, \mu_C h)$ est donc codisjonctable. Or il est égal au couple $(\phi_{B,FC}(Fg), \phi_{B,FC}(Fh))$. Donc le couple (Fg, Fh) est codisjonctable.

(2) $\Rightarrow$ (1). Soit (g, h): $FC \rightrightarrows A$ un couple de morphismes de **A** dont l'image $(\phi_{CA}(g), \phi_{CA}(h))$: $C \rightrightarrows UA$ est codisjonctable dans B. Alors le couple $(F(\phi_{CA}(g)), F(\phi_{CA}(h)))$ est codisjonctable dans **A**. Soit d: $FUA \to D$ son codisjoncteur. Si $(k: D \to B, f: A \to B)$ est la somme amalgamée de (d, ϵ_A), on prouve comme précédemment que f est codisjoncteur du couple $(\epsilon_A F(\phi_{CA}(g)), \epsilon_A F(\phi_{CA}(h)))$. Or ce couple est égal au couple (g, h). Donc le couple (g, h) est codisjonctable.

(1) $\Leftrightarrow$ (3). D'après la Proposition 1.6, pour tout couple (g, h): $FC \rightrightarrows A$ on a l'équivalence:

(g, h) est codisjonctable $\Leftrightarrow$ ${}^{A}I(g, h)$ est codisjonctable dans **A**,

ainsi que l'équivalence:

$(\phi_{CA}(g), \phi_{CA}(h))$ est codisjonctable $\Leftrightarrow$ ${}^{B}I(\phi_{CA}(g), \phi_{CA}(h))$ est codis jonctable dans **B**.

D'après le Lemme 2.3.0, on a l'égalité:

$${}^{A}I(g, h) = {}^{A}I(\phi_{CA}(g), \phi_{CA}(h)).$$

L'assertion (1) est donc équivalente à l'implication:

${}^{B}I(\phi_{CA}(g), \phi_{CA}(h))$ est codisjonctable dans B $\Rightarrow$ ${}^{A}I((\phi_{CA}(g), \phi_{CA}(h))$ est codisjonctable dans **A**.

Or tout B-idéal I de UA est de la forme $I = {}^{B}I(\phi_{CA}(g), \phi_{CA}(h))$ où (g, h): $FC \rightrightarrows A$ est le couple $(\phi_{CA}^{-1}(m_1), \phi_{CA}^{-1}(m_2))$ où (m_1, m_2): $C \rightrightarrows UA$ est la congruence modulo I sur UA. Donc l'assertion (1) équivaut à l'assertion (3).

Supposons que U soit un foncteur fidèle satisfaisant (1) ou (2). Soit (g, h): $C \rightrightarrows A$ un couple de morphismes de **A** dont l'image (Ug, Uh) est un couple codisjonctable dans B. L'égalité

$$(\phi_{UC,A}(g\epsilon_C), \phi_{UC,A}(h\epsilon_C)) = (Ug, Uh)$$

implique que le couple $(\phi_{UC,A}(g\epsilon_C), \phi_{UC,A}(h\epsilon_C))$ est codisjonctable dans B. Par suite le couple $(g\epsilon_C, h\epsilon_C)$ est codisjonctable dans **A**. Puisque le foncteur U est fidèle, le morphisme ϵ_c est épimorphique. Il s'ensuit qu'un morphisme f: A → B codisjoint $(g\epsilon_c, h\epsilon_c)$ ssi il codisjoint (g, h) et, par conséquent, que f est codisjoncteur de $(g\epsilon_c, h\epsilon_c)$, ssi f est codisjoncteur de (g, h). Le couple (g, h) est donc codisjonctable. Le foncteur U reflète donc les couples codisjonctables.

5.3. APPLICATIONS.

5.3.0. Le réflecteur **Anc** → **AncFormRl** préserve les codisjoncteurs (4.4), donc les couples codisjonctables. Pour tout A ∈ **AncFormRl** et tout idéal I de A, on a, d'après la Proposition 5.2, l'implication:

I est codisjonctable dans **Anc** ⇒ I est codisjonctable dans **AncFormRl**.

5.3.1. Le réflecteur **Anc** → **AncORedFormRl** préserve les codisjoncteurs (4.4), donc les couples codisjonctables. Pour tout A ∈ **AncORedFormRl** et tout idéal I de A, on a l'implication:

I est codisjonctable dans **Anc** ⇒ l'idéal réel ^{R}I engendré par I est codisjonctable dans **AncORedFormRl**.

5.3.2. Le réflecteur **Anc** → **AncOFormRl** préserve les couples codisjonctables, et, pour tout A ∈ **AnnOFormRl** et tout idéal I de A, on a l'implication:

I est codisjonctable dans **Anc** ⇒ l'idéal ^{c}I est codisjonctable dans **AncOFormRl**.

5.3.3. Le réflecteur **Anc** → **AncOAnnConvFormRl** préserve les couples codisjonctables et, pour tout A ∈ **AncOAnnConvFormRl** et tout idéal I de A, on a l'implication:

I est codisjonctable dans **Anc** ⇒ l'idéal ^{AC}I est codisjonctable dans **AncOAnnConvFormRl**.

5.3.4. Le foncteur adjoint à gauche au foncteur d'oubli **AncOrdFormRl** → **Anc** préserve les codisjoncteurs (4.4) donc les couples codisjonctables. Par suite, pour tout A ∈ **AncOrdFormRl** et tout idéal I de A, on a l'implication:

I est codisjonctable dans **Anc** ⇒ l'idéal convexe ^{c}I engendré par I est codisjonctable dans **AnnOrdFormRl**.

5.3.5. L'adjoint à gauche au foncteur d'oubli

AncOrdFormRlAnnConv → **Anc**

préserve les couples codisjonctables et, par suite, pour tout A dans **AncOrdFormRlAnnConv** et tout idéal I de A, on a l'implication:

I est codisjonctable dans **Anc** $\Rightarrow$ l'idéal absolument convexe ${}^{AC}I$ engendré par I est codisjonctable dans **AncOrdFormRlAnnConv**.

5.3.6. L'adjoint à gauche au foncteur d'oubli **AncForRetFormRl** $\to$ **Anc** préserve les couples codisjonctables et, par suite, pour tout A dans **AncForRetFormRl** et tout idéal I de A, on a l'implication:

I est codisjonctable dans **Anc** $\Rightarrow$ ${}^{AC}I$ est codisjonctable dans **AncForRetFormRl**.

6. CRÉATION DES CODISJONCTEURS.

Un foncteur U: **A** $\to$ **B** *crée les codisjoncteurs* si, pour tout couple (g, h): C $\rightrightarrows$ A de morphismes de **A** dont l'image (Ug, Uh) possède un codisjoncteur d: UA $\to$ D, il existe un morphisme f: A $\to$ B et un seul tel que Uf = d, et ce morphisme f est codisjoncteur de (g, h). Un foncteur qui crée les codisjoncteurs reflète les couples codisjonctables.

6.1. EXEMPLES.

6.1.0. *Le foncteur inclusion* **AncRed** $\to$ **Anc** *crée les codisjoncteurs*. Soit (g, h): C $\rightrightarrows$ A un couple de morphismes de **AncRed** admettant un codisjoncteur dans la catégorie **Anc**. D'après ([3], Théorème 3.0), le codisjoncteur de (g, h) dans **Anc** est le morphisme de restriction ρ_I: A $\to$ $A^{\sim}(D(I))$ du faisceau structural de A sur l'ouvert D(I) de Spec(A), où I est l'idéal de A engendré par l'ensemble

$$\{ g(x)-h(x) \mid x \in C \}.$$

Puisque l'anneau A est réduit, les fibres du faisceau structural de A sont des anneaux réduits, de même que l'anneau des sections $A^{\sim}(D(I))$ est réduit. Il suit de là que le morphisme ρ_I: A $\to$ $A^{\sim}(D(I))$ est un morphisme de la catégorie **AncRed**. Puisque le foncteur inclusion **AncRed** $\to$ **Anc** préserve les couples codisjoints (2.4.0) il reflète les codisjoncteurs (Proposition 5.0), donc ρ_I est un codisjoncteur de (g, h) dans **AncRed**.

6.1.1. *Le foncteur inclusion* **AncReg** $\to$ **Anc** *crée les codisjoncteurs.*

6.2. ***PROPOSITION***. *Pour toute catégorie* **A** *possédant un objet final strict et tout objet* K *de* **A**, *le foncteur projection* K/**A** → **A** *crée les codisjoncteurs.*

PREUVE. D'après la Proposition 4.0, le foncteur projection K/**A** → **A** préserve et reflète les couples codisjoints. Soit (g, h): $(C, c) \rightrightarrows (A, a)$ un couple de morphismes de K/**A** dont l'image (g, h): $C \rightrightarrows A$ dans **A** possède un codisjoncteur f: A → B. Posons $b = fa$. Le morphisme f: $(A, a) \to (B, b)$ est le seul morphisme de K/**A** de source (A, a) dont l'image par le foncteur projection soit f. Ce morphisme codisjoint le couple (g, h): $(C, c) \rightrightarrows (A, a)$ puisque son image par le foncteur projection codisjoint le couple (g, h): $C \rightrightarrows A$. Soit u: $(A, a) \to (X, x)$ un morphisme qui codisjoint le couple (g, h): $(C, c) \rightrightarrows (A, a)$. Alors u: $A \to X$ codisjoint (g, h): $C \rightrightarrows A$, donc u se factorise de façon unique à travers f par un morphisme v: B → X. Par suite le morphisme u: $(A, a) \to (X, x)$ se factorise de façon unique à travers f: $(A, a) \to (B, b)$ par le morphisme v: $(B, b) \to (X, x)$. Il suit de là que f: $(A, a) \to (B, b)$ est codisjoncteur de (g, h): $(C, c) \rightrightarrows (A, a)$.

6.3. ***APPLICATIONS.*** Si K ∈ **Anc**, la catégorie K/**Anc** s'identifie à la catégorie **Alg**(K) des K-algèbres, et le foncteur projection K/**Anc** → **Anc** s'identifie au foncteur d'oubli **Algc**(K) → **Anc**. Ce foncteur crée donc les codisjoncteurs. On sait, par ailleurs, que ce foncteur préserve les codisjoncteurs (Proposition 4.0). Il en résulte que l'existence et le calcul des codisjoncteurs dans **Algc**(K) se ramène immédiatement à l'existence et au calcul des codisjoncteurs dans **Anc**. Ce résultat s'étend aux catégories d'algèbres d'un type donné.

REFERENCES.

1. M. COSTE & M.F. COSTE, Topologies for real algebraic geometry, dans "*Topos theoretic methods for analysis and geometry*", Aarhus, 1979.
2. G.W. BRUMFIEL, *Partially ordered rings and semi-algebraic geometry*, Lecture Notes Series 37, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1979.
3. Y. DIERS, Codisjunctors and singular epimorphisms in the category of commutative rings, *J. Pure App. Algebra* (à paraître).
4. P.A. GRILLET, Regular categories, *Lecture Notes in Mathematics* 236, Springer (1971), p. 154.
5. K. KEIMEL, The representation of lattice-ordered groups and rings by sections in sheaves, *Lecture Notes in Math.* 248, Springer (1971).
6. A. KOCK, *Formally real local rings and infinitesimal stability*, Preprint, Aarhus, 1977.
7. S. MACLANE, *Categories for the working mathematician*, Springer, 1971.

Département de Mathématiques
U.E.R. de Sciences
Université de Valenciennes
59326 VALENCIENNES Cedex, FRANCE