Cahiers de
topologie et géométrie différentielle
catégoriques

R. Ayala

Une présentation axiomatique des théories de cobordisme sur les polyèdres euclidiens

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 28, nº 1 (1987), p. 57-75

<http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1987__28_1_57_0>

© Andrée C. Ehresmann et les auteurs, 1987, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

CAHIERS DE TOPOLOGIE
ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
CATÉGORIQUES

Vol. XXVIII-1(1987)

UNE PRÉSENTATION AXIOMATIQUE DES THÉORIES DE COBORDISME SUR LES POLYÈDRES EUCLIDIENS

by R. AYALA

ABSTRACT. The notions of colimit and mock-bundle are used to give an axiomatic exposition of cobordism theories in euclidean polyedra.

INTRODUCTION ET NOTATIONS.

Rourke-Sanderson [2], comme généralisation de leur théorie des block-fibrés, ont défini des objets géométriques appelés mock-fibrés, et ils ont démontré que ces objets donnent lieu à une théorie de cohomologie généralisée, dans laquelle les cocycles se décrivent géométriquement. Puisque cette théorie est associée à un spectre classifiant, on peut l'étendre algébriquement aux CW-complexes. Récemment, Dominguez [4] a obtenu une extension directe de cette théorie (PL-cobordisme) aux polyèdres euclidiens, mais le problème de trouver une notion géométrique de cocycle sur les espaces topologiques reste encore ouvert.

Il y a d'autres théories de cobordisme, obtenues en utilisant des mock-fibrés construits avec des objets distincts des PL-variétés, appelés modèles de la théorie. Parmi les exemples de catégories de modèles, citons les pseudo-variétés [3], les Z_2-complexes [15], les HML-variétés [8], ou les L-variétés [2].

L'importance des théories de cobordisme réside dans le fait qu'elles permettent de présenter de façon géométrique très simple les produits usuels, et les théorèmes de dualité. De plus, toutes ces théories sont données par un spectre, construit d'une façon analogue à celui du PL-cobordisme. Pour cela, de manière pratique il est intéressant de connaître les propriétés qui permettent d'obtenir géométriquement des théories de cohomologie généralisées, et c'est le but du présent travail. On y développe une axiomatique, suggérée dans [12], donnant les conditions que doit satisfaire une catégorie de modèles pour construire sur eux une théorie de cobordisme sur les polyèdres euclidiens.

Donner une axiomatique du cobordisme revient à traduire dans le langage des catégories les propriétés géométriques essentielles des modèles usuels. A cet effet, pour que la relation de cobordisme soit une équivalence, il faut que l'on puisse définir pour les modèles considérés des notions de cylindre, bord, recollement et orientation. En vertu de l'existence de coproduits, l'ensemble des classes de cobordisme est un groupe abélien. Enfin, la notion d'objet final rend possible l'amalgamation et la subdivision des mock-fibrés.

Si C est une catégorie, notons $O(C)$ la classe de ses objets, et $F_C(X, Y)$ l'ensemble des morphismes de X dans Y. On écrira $X \simeq Y$ si X et Y sont des objets isomorphes, et on notera IsC la sous-catégorie formée par les objets de C et les isomorphismes entre eux. On dit qu'une catégorie C est petite si $O(C)$ est un ensemble, et que la sous-catégorie C' de C est pleine si pour tout couple d'objets X, Y ϵ $O(C')$ on a $F_C(X, Y) = F_{C'}(X, Y)$. La sous-catégorie C' est dite fermée pour les isomorphismes si chaque objet isomorphe à un objet de C' est un objet de C'. Un objet 0 ϵ $O(C)$ s'appelle objet initial si pour tout X ϵ $O(C)$ l'ensemble $F_C(X, Y)$ contient un seul élément.

Si X, Y ϵ $O(C)$, un diagramme coproduit de X et Y est un triplet $(Z; f, g)$, où $Z \in O(C)$, $f \in F_C(X, Z)$ et $g \in F_C(Y, Z)$, tel que soit vérifiée la propriété universelle suivante:

quels que soient les morphismes $\lambda_1 : X \to V$ et $\lambda_2 : Y \to V$, il existe un et un seul morphisme $h = \lambda_1 + \lambda_2 : Z \to V$ tel que

$$\lambda_1 = h \circ f \quad \text{et} \quad \lambda_2 = h \circ g.$$

L'objet Z est unique à isomorphisme près, et on notera X+Y l'un quelconque des objets coproduits isomorphes. Lorsqu'aucune confusion n'est à craindre, le diagramme coproduit sera noté

$$f\colon X \longrightarrow X+Y \longleftarrow Y :g, \quad \text{ou simplement} \quad X \to X+Y \leftarrow Y.$$

De façon analogue, on définit le diagramme coproduit d'une famille quelconque d'objets de C.

Si $(Z; f, g)$ et $(Z'; f', g')$ sont des diagrammes coproduits de X et Y, et de X' et Y' respectivement, étant donné les morphismes $h_1 : X \to X'$ et $h_2 : Y \to Y'$, il existe un unique morphisme $h: Z \to Z'$ qui "recolle" h_1 et h_2; on l'appelle morphisme du diagramme $(Z; f, g)$ dans le diagramme $(Z'; f', g')$. On dira qu'un foncteur $G: C \to D$ conserve les coproduits si G transforme le coproduit $f\colon X \to X+Y \leftarrow Y : g$ dans le coproduit

$$G(f)\colon G(X) \longrightarrow G(X+Y) \longleftarrow G(Y) : G(g).$$

Un diagramme push-out du diagramme $X \xleftarrow{f} Z \xrightarrow{g} Y$ est un triplet $(W;\ l,\ m)$ tel que $l\circ f = m\circ g$, et vérifiant la propriété universelle suivante: étant donné les morphismes $i\colon X \to V$ et $j\colon Y \to V$ tels que $i\circ f = j\circ g$, il existe un et un seul morphisme $h\colon W \to V$, noté $i \cup j$, tel que $h\circ l = i$ et $h\circ m = j$. L'objet W s'appelle objet push-out, et il est unique à isomorphisme près. Lorsqu'aucune confusion n'est à craindre, on désignera par $X\cup Y$ l'un quelconque des objets push-outs isomorphes.

Au cours de ce travail on utilisera les techniques habituelles en Topologie polyédrale [13]. Si σ est une PL-boule, on notera σ° et $\dot\sigma$ son intérieur et son bord, respectivement. Si τ et σ sont des PL-boules telles que $\tau \subset \dot\sigma$, on dira que τ est une face de σ, et on écrira $\tau < \sigma$. Comme dans [4], un complexe de boules (orienté) K sera un ensemble localement fini de PL-boules (orientées) et contenues dans un certain espace euclidien, tel que

(1) Si $\sigma,\ \tau \in K$ et $\sigma \neq \tau$, alors $\sigma\cap\tau = \dot\sigma\cap\dot\tau$;

(2) Si $\sigma \in K$, alors $\dot\sigma$ est une réunion d'éléments de K.

Tout complexe de boules K peut être considéré comme une catégorie dont les objets sont les boules de K et les morphismes les inclusions entre elles. On a les notions naturelles d'isomorphisme et de subdivision d'un complexe de boules.

Soit K un complexe de boules orienté, et $\tau,\ \sigma \in K$ telles que

$$\dim \sigma = n, \quad \dim \tau = n-1 \quad \text{et} \quad \tau < \sigma.$$

On définit l'orientation induite par σ sur τ comme dans [2], page 82; c'est-à-dire en considérant le vecteur normal à τ rentrant dans σ, ajouté à la fin de l'orientation de τ. On dira que le nombre d'incidence $[\sigma\colon \tau]$ est +1 ou −1, selon que l'orientation de τ et celle induite par σ coïncident ou non. En notant $I = [0,1]$, on considère $\sigma\times I \in K\times I$ muni de l'orientation telle que $[\sigma\times I\colon \sigma\times 0] = +1$. D'après cette convention, on a

$$[\sigma\times I\colon \sigma\times I] = -1 \quad \text{et} \quad [\sigma\times I\colon \tau\times I] = -[\sigma\colon \tau].$$

1. CATÉGORIES DE MODÈLES.

1.1. DÉFINITION. Une *catégorie orientée de modèles* est la donnée de $\mathcal{M} = (\mathcal{M}, \mathcal{M}_n, \delta, \theta, u, I)$, où:

(1) $\mathcal{M}$ est une catégorie qui possède un objet initial 0, et pour chaque $n \in \mathbb{N}\cup\{-1\}$, $\mathcal{M}_n$ est une sous-catégorie petite, pleine, fermée pour les isomorphismes, et qui admet des coproduits finis.

(2) $O(\mathcal{M}) = \bigcup O(\mathcal{M}_n)$ et $\{0\} = O(\mathcal{M}^{-1}) = \bigcap O(\mathcal{M}_n)$;

(3) δ: Is$\mathcal{M} \to$ Is$\mathcal{M}$ est un foncteur covariant tel que

i) $\delta(0) = 0$.

ii) Pour $n \geqslant 0$, $\delta(\mathrm{Is}\mathcal{M}_n) \subset \mathrm{Is}\mathcal{M}_{n-1}$ et δ: $\mathrm{Is}\mathcal{M}_n \to \mathrm{Is}\mathcal{M}_{n-1}$ conserve les coproduits.

iii) Pour chaque $M \in O(\mathcal{M})$, on a $\delta(\delta(M)) = 0$.

4) θ: $\mathcal{M} \to \mathcal{M}$ est un foncteur covariant tel que:

i) $\theta(0) = 0$, $\theta^2 = \mathrm{Id}$ et $\delta\theta(M) = \theta\delta(M)$.

ii) θ conserve les graduations et θ: $\mathcal{M}_n \to \mathcal{M}_n$ conserve les coproduits.

5) u est une transformation naturelle entre les foncteurs δ, Id: Is$\mathcal{M} \to$ Is$\mathcal{M}$ telle que $u(\theta(M)) = \theta(u(M))$.

6) $I = ((I_n), u_0, u_1, c)$ est un 4-uple, où

i) I_n: $\mathcal{M}_n \to \mathcal{M}_{n+1}$ est un foncteur covariant, qu'on appellera foncteur cylindre, qui préserve les coproduits et commute avec le foncteur θ. On notera $I_n(M)$ par $M\otimes I$.

ii) j: $\mathrm{Is}\mathcal{M}_n \to \mathcal{M}_n$ étant l'inclusion canonique, u_0 est une transformation naturelle entre les foncteurs j, $j\circ\delta\circ I_n$: $\mathrm{Is}\mathcal{M}_n \to \mathcal{M}_n$, et u_1 une transformation naturelle entre $\theta\circ j$, $j\circ\delta\circ I_n$: $\mathrm{Is}\mathcal{M}_n \to \mathcal{M}_n$, telles que, pour chaque $M \in O(\mathcal{M}_n)$ avec $\delta M = 0$, il existe un diagramme coproduit

$$u_0\colon M \longrightarrow \delta(M\otimes I) \longleftarrow \theta M \ : u_1(M).$$

On notera α_i la composition $u\circ u_i$.

iii) c est une transformation naturelle entre les foncteurs $\theta\circ I_{n-1}\circ j\circ\delta$, $j\circ\delta\circ I_n$: $\mathrm{Is}\mathcal{M}_n \to \mathcal{M}_n$.

Si $\mathcal{M}$ est une catégorie orientée de modèles telle que $\theta = \mathrm{Id}$, on dira que $\mathcal{M}$ est une Z_2-*catégorie de modèles*.

1.2. REMARQUE. Dans les diagrammes qui suivent, et si aucune confusion n'est à craindre, nous n'utiliserons aucune notation pour les morphismes définis dans 1.1.

1.3. EXEMPLES. a) Les catégories suivantes sont des exemples de Z_2-catégories de modèles (les objets seront les espaces compacts, et les morphismes les PL-applications): i) Pseudovariétés [3]; ii) HML-variétés, ou variétés d'homologie [9]; iii) TRI-variétés [5]; iv) PL-variétés [2]; v) Z_2-complexes [15]; vi) L-variétés, ou modèles avec singularités [2].

Puisque dans tous les cas on a une notion naturelle d'orientation, si nous considérons leurs modèles orientés et si θ est le foncteur qui consiste à changer l'orientation, on obtient des exemples de catégories orientées de modèles. Il faut remarquer que, puisque toute L-variété admet un collier, les exemples i, ii et v ne sont pas inclus dans vi.

b) Une n-variété d'homologie forte (HMLF-variété) est un polyèdre $|K|$ tel que $lk(x; K)$ est une PL-sphère ou boule d'homologie. Si H^3 est la 3-sphère de Poincaré, alors $\Sigma^1 H^3 \times I$ n'est pas une HMLF-variété. Donc ces variétés ne forment pas une catégorie de modèles. Néanmoins, considérons la catégorie $\mathcal{M} = \bigcup \mathcal{M}_n$, où les objets de $\mathcal{M}_n$ sont $\{\emptyset\}$ si $n \leqslant 4$, les HMLF-variétés fermées si $n = 5$, et les HLMF-variétés compactes si $n \geqslant 6$. Dans [11], on démontre que si $M \in O(\mathcal{M})$, alors M est bordante à une PL-variété $M^\sim$, à travers une HMLF-variété W_M dont les singularités sont celles de M. Si on définit $M \otimes I$ comme le recollement de deux copies de W_M le long de $M^\sim$, il en résulte que $\mathcal{M}$ devient une Z_2-catégorie de modèles, dans laquelle le foncteur cylindre n'est pas la multiplication par l'intervalle $[0,1]$.

1.4. DÉFINITIONS. A) Soit $\mathcal{M}^{or}$ une catégorie orientée de modèles telle que $\theta M \neq M$ pour chaque $M \in O(\mathcal{M}^{or})$, $M \neq 0$. (Or il peut arriver que $\theta M \simeq M$ pour un certain $M \in O(\mathcal{M}^{or})$.) Si $\mathcal{M}$ est une Z_2-catégorie de modèles, on dira qu'un foncteur covariant $F\colon \mathcal{M}^{or} \to \mathcal{M}^{or}$ est un *foncteur d'oubli de l'orientation* s'il vérifie:

a) F préserve les coproduits, commute avec les foncteurs I_n et δ, et l'on a $F \circ \theta = F$.

b) $F(u(M)) = u(F(M))$, $F(u_i(M)) = u_i(F(M))$, pour $i = 0, 1$, et $F(c(M)) = c(F(M))$ (voir 1.1.5 et 1.1.6 ii).

c) Pour chaque $M \in O(\mathcal{M})$, il existe $M' \in O(\mathcal{M}^{or})$ tel que $F(M') = M$.

d) Si h_1 et h_2 sont deux morphismes de $\mathcal{M}^{or}$ tels que $F(h_1) = F(h_2)$, alors $h_1 = h_2$ ou $h_1 = \theta h_2$.

e) Si $h \in F_{\mathcal{M}}(F(M), F(M'))$ est un isomorphisme, il existe

$$g \in F_{\mathcal{M}^{or}}(M,M') \cup F_{\mathcal{M}^{or}}(M,\theta M') \text{ tel que } F(g) = h.$$

B) Si $F: \mathcal{M}^{or} \to \mathcal{M}$ est un foncteur d'oubli de l'orientation, soit $\mathcal{M}^{\sim}$ la catégorie définie par:

$$O(\mathcal{M}^{\sim}) = O(\mathcal{M}^{or}) \quad \text{et} \quad F_{\mathcal{M}^{\sim}}(M,N) = \{M\}\times\{N\}\times F_{\mathcal{M}}(F(M),F(N)).$$

La composition de (M, N, f) et (N, P, g) est $(M, P, f\circ g)$. On dira que $\mathcal{M}^{\sim}$ est la *catégorie de modèles orientés associée à F.*

C) Si $M, N \in O(\mathcal{M}^{\sim})$ et $h \in F_{\mathcal{M}^{\sim}}(N,M)$, l'incidence de h, notée $[M:N]_h$, est définie de la façon suivante:

i) $[M:N]_h = (-1)^i$ si $M, N \in O(\mathcal{M}^{\sim}_n)$ et s'il existe

$$h^{\hat{}} \in F_{\mathcal{M}^{or}}(\theta^i M, N) \text{ tel que } F(h^{\hat{}}) = h.$$

ii) $[M:N]_h = [\delta M:N]_g$ si $N \in O(\mathcal{M}^{\sim}_{n-1})$ et s'il existe

$$g \in F_{\mathcal{M}^{\sim}}(N,\delta M) \text{ tel que } h = u\circ g.$$

iii) $[M:N]_h = 0$ dans les autres cas.

Etant donné $[M:N]_f$, $[P:M]_g$ et $[P:N]_{g\circ f}$, il est immédiat de vérifier la relation

$$[P:N]_{g\circ f} = [P:M]_g . [M:N]_f .$$

1.5. EXEMPLE. Soit $\mathcal{M}$ la categorie des PL-variétés compactes orientables et des PL-applications, et $\mathcal{M}^{or}$ la catégorie des PL-variétés compactes orientées et des composés de PL-immersions qui conservent l'orientation. Si l'on considère le foncteur de $\mathcal{M}^{or}$ dans $\mathcal{M}$ qui consiste à oublier l'orientation, alors $\mathcal{M}^{\sim}$ est la catégorie dont les objets sont les PL-variétés compactes orientées et les morphismes les PL-applications.

1.6. REMARQUE. a) La condition $\theta M \neq M$ dans $\mathcal{M}^{or}$ est nécessaire pour que la notion d'incidence soit bien définie.

b) Dans $\mathcal{M}^{\sim}$, on écrira M ≡ N s'il existe un $\mathcal{M}^{\sim}$-isomorphisme de M dans N dont l'incidence est +1, c'est-à-dire, si M est $\mathcal{M}^{or}$-isomorphe à N. Ainsi, dans l'exemple précédent, M ≡ N dans $\mathcal{M}^{\sim}$ s'il existe un PL-homéomorphisme de M dans N qui conserve l'orientation.

1.7. DÉFINITION. Si C est une catégorie, considérons le triplet $S = (A, F, B)$, où A et B sont des sous-classes de $O(C)$, et les éléments de F des morphismes dont le domaine est un élément de A et dont le but est un élément de B.

Si $X \in O(C)$ et si H est une famille de morphismes dont le domaine est un élément de B et dont le but est X, nous dirons que (X, H) est un *objet final* dans C pour le système S si sont vérifiées:

a) Etant donné $A \in A$, $B_i \in B$, $f_i: A \to B_i$ dans F, il existe un unique $h_i: B_i \to X$ dans H, pour $i = 1, 2$, et $h_1 \circ f_1 = h_2 \circ f_2$.

b) Si $(Y, H^{\wedge})$ satisfait la condition précédente, alors il existe un unique $f \in F_C(X, Y)$ tel que $f \circ h_i = h_i^{\wedge}$, où $h_i \in H$ et $h_i^{\wedge} \in H^{\wedge}$.

On peut considérer de façon naturelle une catégorie I associée à S dont les flèches sont en bijection avec les éléments de F et telle que S représente un foncteur covariant de I dans C. Alors il est clair qu'un tel objet final devient une colimite (cf. [10], p. 67).

2. $\mathcal{M}^{\sim}$-MOCKFIBRÉS.

2.1. DÉFINITION. Soit (K, L) une paire de complexes de boules orientés et $\mathcal{M}^{\sim}$ une catégorie de modèles orientés. Un *($\mathcal{M}^{\sim}$, q)-mockfibré de base* (K, L) est un foncteur covariant $E: K \to \mathcal{M}^{\sim}$ tel que:

a) Si $\sigma \in K$ et $\dim \sigma = n$, alors $E(\sigma) = E_\sigma \in O(\mathcal{M}^{\sim}_{n+q})$, et on dira que E_σ est le bloc au-dessus de σ.

b) Pour chaque $\sigma \in L$, on a $E_\sigma = 0$.

c) Si $\dim \sigma = n$, $\dim \tau = n-1$, $\tau < \sigma$ et si $i: \tau \to \sigma$ est l'inclusion canonique, alors $[E_\sigma : E_\tau]_{E(i)} = [\sigma : \tau]_i$.

d) Si $\dim \sigma = n$, pour chaque $\tau < \sigma$ avec $\dim \tau = n-1$ il existe un $\mathcal{M}^{\sim}$-morphisme $j_\tau: E_\tau \to \delta E_\sigma$ tel que $(\delta E_\sigma, \{j_\tau\})$ soit l'objet final pour le système (A, F, B), où

$$A = \{ E_\rho \mid \rho < \sigma \text{ et } \dim \rho < n-1 \},$$
$$B = \{ E_\tau \mid \tau < \sigma \text{ et } \dim \tau = n-1 \} \text{ et } F = \{ E(i) \mid E_\rho \to E_\tau \}.$$

e) Le morphisme $u: \delta E_\sigma \to E_\sigma$ est déterminé par les morphismes $E(i): E_\tau \to E_\sigma$.

Si K_0 est un sous-complexe de K, on notera $E|K_0$ la restriction de E à K_0.

On dira que deux $(\mathcal{M}, q)$-mockfibrés E_0 et E_1 de base K sont isomorphes, et on écrira $E_0 \simeq E_1$, s'il existe une équivalence naturelle $h: E_0 \to E_1$ qui conserve les blocs et les relations d'incidence. On observe que, puisque $\mathcal{M}^{or}_n$ est une catégorie petite, les classes d'isomorphisme de $(\mathcal{M}, q)$-mockfibrés de base K constituent un ensemble.

On dira que deux $(\mathcal{M}, q)$-mockfibrés E_0 et E_1 de base K sont *cobordants*, et on écrira $E_0 \sim E_1$, s'il existe un $(\mathcal{M}, q)$-mockfibré G de base $K \times I$ tel que, pour $i = 0, 1$, $G|K \times i \simeq E_i$.

2.2. DÉFINITION. Soit (K, J) une paire de complexes de boules orientés telle que $(|K|, |J|)$ soit PL-homéomorphe à (B^n, S^{n-1}), de façon que les orientations des boules de K déterminent une orientation de B^n. Si $\mathcal{M}$ est une catégorie de modèles orientés, nous dirons que $\mathcal{M}$ est une *catégorie de cobordisme* si les conditions suivantes sont satisfaites:

1) Si E est un $(\mathcal{M}, q)$-mockfibré de base K, il existe dans $\mathcal{M}$ un objet final $(M(K), \{j_\sigma\})$ pour le système (A, F, B), où

$$A = \{ E_\tau \mid \dim \tau < n \}, \quad B = \{ E_\sigma \mid \dim \sigma = n \}$$

et

$$F = \{ E(i): E_\tau \to E_\sigma \}.$$

2) $$M(K) \in O(\mathcal{M}_{n+q}) \text{ et } [M(K): E_\sigma]_{j_\sigma} = +1.$$

3) $(\delta M(K), \{j_\rho\})$ est un objet final de (A', F', B') où

$$A' = \{ E_\tau \mid \tau \in J \text{ et } \dim \tau < n-1 \},$$
$$B' = \{ E_\rho \mid \rho \in J \text{ et } \dim \rho = n-1 \} \quad \text{et} \quad F' = \{ E(i): E_\tau \to E_\rho \}.$$

De plus, $$[\delta M(K): E_\rho]_{j_\rho} = [K: \rho].$$

4) Le morphisme $u: \delta M(K) \to M(K)$ est déterminé par les composés

$$E_\rho \longrightarrow E_\sigma \xrightarrow[j_\sigma]{} M(K)$$

où $\rho \in J$, $\sigma \in K$ et $\rho < \sigma$.

2.3. REMARQUE. Toutes les catégories $\mathcal{M}$ construites à partir des exemples donnés dans 1.3 sont des catégories de cobordisme. De plus dans tous les cas on vérifie que, si E est un $(\mathcal{M},q)$-mockfibré de base K avec $|K| \in O(\mathcal{M}_n)$, il existe un objet final M(K) pour le système associé aux blocs de E, et on a $M(K) \in O(\mathcal{M}_{n+q})$. Cependant ceci n'arrive pas toujours, comme le montre l'exemple suivant.

2.4. EXEMPLE. Considérons la catégorie $\mathcal{M} = \cup \mathcal{M}_n$, où $O(\mathcal{M}_n)$ est formé des TRI-variétés compactes orientées qui admettent un PL-collier si $n > 6$, des PL-variétés compactes ainsi que les réunions disjointes dénombrables de ces deux classes de variétés si $n = 6$, et des PL-variétés compactes orientées si $n < 6$. Montrons que, si E est un $(\mathcal{M}, q)$-mockfibré de base une PL-boule orientée K, alors il existe un objet final $M(K) \in O(\mathcal{M}_{n+q})$. Il suffit de considérer les cas suivants:

i) Si $n > 0$ et $q+n < 6$, le résultat découle de II.1.2 de [2].

ii) Si $n > 0$ et $q+n = 6$, les blocs qui ne sont pas des PL-variétés correspondent aux simplexes de K de dimension n. Soit

$$K_1 = \cup\{ \sigma \in K \mid E_\sigma \text{ est une PL-variété } \},$$
$$K_2 = \cup\{ \sigma \in K \mid E_\sigma \text{ est une TRI-variété } \}.$$

D'après I.1.2 de [2], il existe $M(K_1) \in \mathcal{M}$, et c'est une PL-variété. Puisque $M(K_2)$ est une réunion disjointe de blocs, on a

$$M(K) = M(K_1) + M(K_2) \in O(\mathcal{M}_{n+q}).$$

iii) Si $n > 0$ et $n+q > 6$, d'après 3.4 de [8] on sait qu'il existe M(K), et que c'est une HML-variété. On prouve aisément qu'il existe un PL-homéomorphisme entre $\mathrm{lk}(x;\ M(K))$ et $c.\mathrm{lk}(x;\ \delta M(K))$ dont la restriction à $\mathrm{lk}(x;\ \delta M(K))$ est l'identité. Il en résulte que $\delta M(K)$ admet un PL-collier. Donc, d'après le théorème de caractérisation de [5], pour démontrer que M(K) est une TRI-variété, il suffit de prouver que $\mathrm{lk}(x;\ M(K))$ (resp. $\mathrm{lk}(x;\ \delta M(K))$) est simplement connexe. Mais si $x \in E_\sigma^\bullet$ et si $D(\sigma;\ K)$ est la cellule duale de σ dans K, on voit facilement que $\mathrm{lk}(x;\ M(K))$ est PL-homémorphe à $\mathrm{lk}(x;\ E_\sigma).\ D(\sigma;\ K)$, et on a le résultat.

Le cas $x \in \delta M(K)$ est analogue, et on a donc démontré que M(K) est une TRI-variété.

Soit G_6 une variété de Glaser (voir [6]). D'après, le théorème de la double suspension (voir [7]),

$$K = \Sigma^2 \delta G_6 = \{v_0,\ v_1\}.\Sigma^1 \delta G_6$$

est une TRI-variété orientée. Considérons le $\mathcal{M}^{\sim}$-mockfibré de base K dont les blocs sont:

$$E_{v_0,\sigma} \text{ et } E_{v_1,\tau} = E_{\sigma} = E_{v_0} = E_{v_1} = \emptyset.$$

Alors $M(K) = \Sigma^1 \delta G_6$ n'est pas une TRI-variété.

2.5. ***PROPOSITION.*** *Soit* $\mathcal{M}^{\sim}$ *une catégorie de cobordisme. Si* $M_1, M_2 \in O(\mathcal{M}^{\sim}_n)$, *il existe dans* $\mathcal{M}^{\sim}_n$ *un diagramme coproduit*

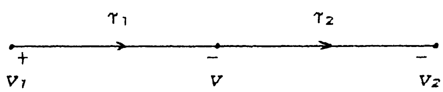
$$j_1 : M_1 \to M_1 + M_2 \to M_2 : j_2$$

tel que

$$[M_1+M_2 : M_i]_{j_i} = 1 \quad \textit{pour } i = 1, 2.$$

De plus, M_1+M_2 *est unique à un* $\mathcal{M}^{\sim or}$*-isomorphisme près.*

DÉMONSTRATION. Soit K le complexe orienté suivant:



et considérons le mockfibré de base K dont les blocs sont

$$E_{\tau_i} = M_i, \quad E_{v_i} = \delta M_i \quad \text{et} \quad E_v = \emptyset, \quad i = 1, 2.$$

D'après 2.2, il existe $(M_1+M_2; j_1, j_2)$. L'unicité découle des propriétés des relations d'incidence.

2.6. **REMARQUE.** Dans ce qui suit, les objets coproduits considérés auront la propriété d'incidence indiquée ci-dessus.

2.7. ***PROPOSITION.*** *Soit* $\mathcal{M}^{\sim}$ *une catégorie de cobordisme. Alors on a les propriétés suivantes:*

a) (Recollement absolu) Etant donné $M_1, M_2 \in O(\mathcal{M}^{\sim}_n)$ *avec* $\delta M_i \equiv M_0 + M'_i$ *pour* $i = 1, 2$, *si on désigne par* w_i *le composé*

$$F(M_0) \longrightarrow F(\delta M_i) \longrightarrow F(M_i)$$

il existe un objet push-out $M_1 \cup M_2 \in O(\mathcal{M}^{\sim}_n)$ du diagramme

$$\theta M_2 \xleftarrow[w_2]{\quad} M_0 \xrightarrow[w_1]{\quad} M_1$$

tel que

$$[M_1 \cup M_2 : \theta^{i+1} M_i] = +1 \qquad et \qquad \delta(M_1 \cup M_2) \equiv M'_1 + \theta M'_2.$$

L'objet $M_1 \cup M_2$ *sera appelé aussi recollement de* M_1 *et* M_2 *le long de* M_0*; il est unique à un* $\mathcal{M}^{or}$*-isomorphisme près.*

b) (Recollement relatif) Soit M_1, $M_2 \in O(\mathcal{M}^{\sim}_n)$ *tels que, pour* i = 1, 2, δM_i *est le recollement*

$$\theta N_i \longleftarrow \delta M_0 + \delta M'_i \longrightarrow M_0 + M'_i.$$

Alors, si γ_i *est le composé*

$$F(M_0) \longrightarrow F(M_0 + M'_i) \longrightarrow F(\delta M_i) \longrightarrow F(M_i),$$

il existe un objet push-out du diagramme

$$\theta M_2 \xleftarrow[\gamma_2]{\quad} M_0 \xrightarrow[\gamma_1]{\quad} M_1$$

tel que

i) $\delta(M_1 \cup M_2)$ *est le recollement du diagramme*

$$\theta(N_1 \cup N_2) \longleftarrow \delta(M'_1 + \theta M'_2) \longrightarrow M'_1 + \theta M'_2.$$

ii) $$F(u(M_1 \cup M_2)) = (v'_1 + v'_2) \cup (w_1 \cup w_2),$$
où v'_i *et* w_i *sont les composés*

$$F(\mathcal{M}^{\sim}_i) \longrightarrow F(M'_i + M_0) \longrightarrow F(\delta M_i) \longrightarrow F(M_i) \longrightarrow F(M_1 \cup M_2),$$

et

$$F(N_i) \longrightarrow F(\delta M_i) \longrightarrow F(M_i) \longrightarrow F(M_1 \cup M_2).$$

c) Si $M \in O(\mathcal{M}^{\sim}_n)$, *on a* $\delta(M \otimes I) \equiv (M + \theta M) \cup \delta M \otimes I$, *et*

$$F(u(M \otimes I)) = F(c(M)) \cup (F(\alpha_0(M)) + F(\alpha_1(M))),$$

où c, α_0 *et* α_1 *sont les transformations naturelles définies dans 1.1.6, ii.*

DÉMONSTRATION. a) Soit K le complexe orienté

$$\overset{+}{v_1} \xrightarrow{\ \tau_1\ } \overset{-}{v} \xrightarrow{\ \tau_2\ } \overset{-}{v_2}$$

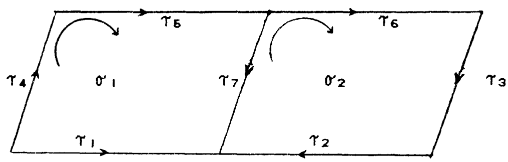
Considérons le $(\mathcal{M}^{\sim}, n-1)$-mockfibré de base K dont les blocs sont

$$E_{\tau_i} = \theta^{i-1} M_i, \quad E_{\nu_i} = \theta^{i-1} M'_i \quad \text{et} \quad E_\nu = M_0$$

avec $i = 1, 2$. Alors il est facile de voir que

$$M(K) \equiv M_1 \cup M_2 \quad \text{et} \quad \delta M(K) \equiv M'_1 + \theta M'_2.$$

b) Soit K le complexe, orienté

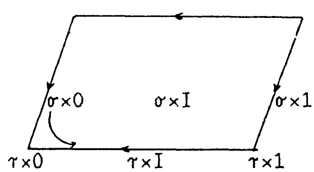


Pour obtenir le résultat il suffit de considérer le mockfibré de base K dont les blocs sont

$$E_{\sigma 1} = M_1, \quad E_{\sigma 2} = \theta M_2, \quad E_{\tau 1} = N_1, \quad E_{\tau 2} = N_2, \quad E_{\tau 3} = \theta M'_2,$$
$$E_{\tau 4} = M'_1, \quad E_{\tau 5} = E_{\tau 6} = 0 \quad \text{et} \quad E_{\tau 7} = M_0,$$

les morphismes entre blocs étant ceux indiqués dans l'énoncé.

c) Etant donné $M \in O(\mathcal{M}^\sim_n)$, soit K le complexe orienté de la figure



Soit E le mockfibré de base K dont les blocs sont

$$E_{\sigma\times j} = M, \quad E_{\tau\times j} = \delta M \quad \text{si} \quad j = 0, 1, \quad E_{\sigma\times I} = M\otimes I, \quad E_{\tau\times I} = \delta M\otimes I.$$

Les morphismes entre blocs sont:

$$F(\alpha_j(\delta M)) : \delta M \longrightarrow \delta M\otimes I, \quad F(\alpha_j(M)) : M \longrightarrow M\otimes I \quad \text{et} \quad F(c(M)) : \delta M\otimes I \longrightarrow M\otimes I.$$

2.8. ***PROPOSITION.*** Si $M^\sim$ *est une catégorie de cobordisme et* (K, L) *une paire de complexes de boules orientées, alors la relation de cobordisme entre les* $(\mathcal{M}^\sim, q)$*-mockfibrés de base* (K, L) *est une relation d'équivalence, et l'ensemble quotient* $\Omega_{M^\sim}^q(K, L)$ *est un groupe abélien.*

DÉMONSTRATION. Si E est un $(M^{\sim}, q)$-mockfibré de base (K, L), soit G le $(M^{\sim}, q)$-mockfibré de base (K, L)×I dont les blocs sont

$$G_{\sigma\times j} = E_\sigma \quad \text{si} \quad j = 0,\ 1 \quad \text{et} \quad G_{\sigma\times I} = E_\sigma \otimes I.$$

Les morphismes entre les blocs de G sont induits par la construction cylindre, et puisque $G_{\sigma\times 0} = G_{\sigma\times 1} = E_\sigma$, on a la réflexivité.

Supposons que G^1 est un cobordisme entre E_0 et E_1, et que G^2 est un cobordisme entre E_1 et E_2. Alors G^1 et G^2 peuvent être considérés comme deux mockfibrés de bases $K\times[0,½]$ et $K\times[½,1]$ respectivement, et le mockfibré G dont les blocs sont

$$G_{\sigma\times 0} = G^1{}_{\sigma\times 0}, \quad G_{\sigma\times 1} = G^2{}_{\sigma\times 1} \quad \text{et} \quad G_{\sigma\times I} = G^1{}_{\sigma\times I} \cup G^2{}_{\sigma\times I}$$

est un cobordisme entre E_0 et E_1.

Si E et F sont deux $(M^{\sim}, q)$-mockfibrés de base K, nous noterons E+F le $(M^{\sim}, q)$-mockfibré dont les blocs sont $(E+F)_\sigma = E_\sigma + F_\sigma$. L'ensemble des classes de cobordisme des mockfibrés de base (K, L), noté $\Omega_{M^{\sim}}^{q}(K, L)$, est muni d'une structure de groupe abélien, induite par l'opération [E]+[F] = [E+F]. Pour cette opération l'élément neutre est le mockfibré qui a tous ses blocs égaux à 0. On a

$$-[E] = [\theta E], \quad \text{où} \quad (\theta E)_\sigma = \theta E_\sigma,$$

et on dira que $\Omega_{M^{\sim}}^{q}(K, L)$ est le *q-ième groupe de $M^{\sim}$-cobordisme orienté de base* (K, L).

2.9. REMARQUE. a) L'inclusion $i\colon L \to K$ induit un morphisme

$$i^*\colon \Omega_{M^{\sim}}^{q}(K) \to \Omega_{M^{\sim}}^{q}(L) \quad \text{défini par} \quad i^*[E] = [E|L].$$

On notera $j^*\colon \Omega_{M^{\sim}}^{q}(K, L) \to \Omega_{M^{\sim}}^{q}(K)$ le morphisme obtenu en considérant un mockfibré de base (K, L) comme un mockfibré de base K.

b) Si $K = K_1 \cup K_2$, l'inclusion $i\colon (K_1, K_1\cap K_2) \to (K, K_2)$ induit un isomorphisme $i^*\colon \Omega_{M^{\sim}}^{q}(K, K_2) \to \Omega_{M^{\sim}}^{q}(K_1, K_1\cap K_2)$, qu'on appellera isomorphisme d'excision.

c) Si K_0 et K_1 représentent deux orientations d'un complexe de boules K, on a un isomorphisme entre $\Omega_{M^{\sim}}^{q}(K_1)$ et $\Omega_{M^{\sim}}^{q}(K_0)$. En effet, si $[E_0] \in \Omega_{M^{\sim}}^{q}(K_0)$, on définit $\psi[E_0] = [E_1]$, où E_1 est donné par

$$E_1(\sigma_1) = \theta^{\alpha(\sigma_0,\sigma_1)} E_0(\sigma_0),$$

σ_0 et σ_1 étant les orientations de σ dans K_0 et K_1 respectivement, et $\alpha(\sigma_0, \sigma_1) = \pm 1$, selon que ces orientations coïncident ou non.

d) La proposition précédente est aussi valable si l'on considère des complexes de boules orientés qui ne sont pas localement finis.

2.10. DÉFINITION. Si K est un complexe de boules orienté, on définit le morphisme

$$s^q\colon \Omega_{\mathcal{M}}^{-q}(K) \longrightarrow \Omega_{\mathcal{M}}^{-q}(K\times I,\ K\times\{0,1\})$$

de la façon suivante: étant donné $[E] \in \Omega_{\mathcal{M}}^{-q}(K)$, soit $s^q E$ le mockfibré dont les blocs sont:

$$s^q E_{\sigma\times I} = \theta^n E \quad \text{si} \quad \dim \sigma = n, \qquad s^q E_{\sigma\times j} = 0 \quad \text{pour} \quad j = 0,\ 1.$$

Alors on pose $s^q[E] = [s^q E]$, et il est facile de voir que s^q est un isomorphisme.

3. $\mathcal{M}$-COBORDISME.

3.1. DÉFINITION. Soit $\mathcal{M}$ une catégorie de cobordisme, K un complexe de boules orienté et K' une subdivision de K telle que, si $\sigma' \subset \sigma$ et $\dim \sigma' = \dim \sigma$, alors σ' possède l'orientation induite par celle de σ. Etant donné un $(\mathcal{M}, q)$-mockfibré de base K' définissons le foncteur Am E: $K \to \mathcal{M}$ de la façon suivante:

i) Am $E(\sigma) = M(\sigma)$ est l'objet final dans $\mathcal{M}$, obtenu en vertu de 2.1.

ii) Si $\tau < \sigma$, alors Am $E(i)\colon M(\tau) \to M(\sigma)$ est le morphisme induit par les composés

$$E_\alpha \longrightarrow E_\beta \longrightarrow M(\sigma),$$

où $\quad \alpha, \beta \in K', \quad \beta \subset \sigma, \alpha \subset \tau, \quad \dim \alpha = \dim \tau, \quad \dim \beta = \dim \sigma.$

Le foncteur Am E est un $(\mathcal{M}, q)$-mockfibré de base K, qu'on appellera *amalgamation de* E sur K. Si G est un cobordisme entre E_0 et E_1, alors Am G est un cobordisme entre Am E_0 et Am E_1. On peut donc définir un morphisme

$$\text{Am}\colon \Omega_{\mathcal{M}}^{-q}(K', L') \longrightarrow \Omega_{\mathcal{M}}^{-q}(K, L) \quad \text{en posant} \quad \text{Am}[E] = [\text{Am } E].$$

Si (K, K_0) est une paire de complexes de boules orientés, on dit que K *collapse élémentairement* à K_0 si $(K-K_0)^-$ est une famille localement finie de boules $\{\sigma_i\}$ telle que $\sigma_i \cap K_0 < \sigma_i$. Un *collapsus* $K \searrow K_0$ est une suite finie de collapsus élémentaires; dans ce cas, l'inclusion e: $K_0 \to K$ est appelée *expansion*.

3.2. ***PROPOSITION.*** *Si* $K \searrow K_0$, *alors* e^*: $\Omega_M^{-q}(K_0) \to \Omega_M^{-q}(K)$ *est un isomorphisme.*

DÉMONSTRATION. Pour démontrer que e^* est surjective, il suffit de considérer le cas

$$K = K_0 \cup \sigma \cup \tau, \text{ où } \sigma < \tau, \ \tau \notin K_0 \text{ et } \tau^\bullet - \sigma = \tau \cap K_0.$$

En vertu de 2.9.c, on peut supposer que pour les boules de dimension supérieure qui forment un bord, les orientations sont compatibles. Etant donné un $(M^\sim, q)$-mockfibré E de base K_0, soit E^-: $K \to M^\sim$ le mockfibré dont les blocs sont:

$$E^-_\tau = M(\tau^\bullet - \sigma)\otimes I, \quad E^-_\mu = E_\mu \text{ si } \mu \in K_0,$$
$$E^-_\sigma = \theta^\alpha M(\tau^\bullet - \sigma) \cup \delta M(\tau^\bullet - \sigma)\otimes I$$
$$\text{où } \alpha = 2 \text{ si } [\tau : \sigma] = 1, \text{ et } \alpha = 1 \text{ si } [\tau : \sigma] = -1.$$

3.3. ***PROPOSITION.*** *Soit* K' *une subdivision de* K *et* E *un* $(M^\sim, q)$*-mockfibré de base* K. *Alors, il existe un* $(M^\sim, q)$*-mockfibré de base* K', *appelé subdivision de* E *et noté* Sd E, *tel que* Am Sd E $\sim$ E.

DÉMONSTRATION. On peut considérer sur chaque boule σ' l'orientation induite par celle de σ. On prouve dans [4] qu'il existe une subdivision K" de K telle que

$$K\times I \cup K''\times 1 \searrow K\times 0.$$

Donc, E admet une extension à $K\times I \cup K''\times 1$, qui sera notée F. Si G est l'amalgamation de F sur $K\times I \cup K'\times 1$, en posant Sd E $= G|K'\times 1$, on obtient le résultat.

Une démonstration analogue à celle de I.2.2 de [2] prouve que Am: $\Omega_M^{-q}(K') \to \Omega_M^{-q}(K)$ est un isomorphisme, dont l'inverse est Sd [E] = [Sd E]. Ce fait permet de définir de façon naturelle le q-ième groupe de $M^\sim$-cobordisme d'une paire de polyèdres euclidiens comme la limite directe des groupes $\Omega_M^{-q}(K, L)$, où (K, L) est une triangulation de (P, Q).

Soit $f\colon K \to L$ une application simpliciale et C_f son cylindre simplicial, orienté de façon naturelle. Puisque $C_f \searrow L$, on peut définir l'homomorphisme $f^*\colon \Omega_M{}^{-q}(L) \to \Omega_M{}^{-q}(K)$ comme le composé

$$\Omega_M{}^{-q}(L) \xrightarrow{\ e^{*-1}\ } \Omega_M{}^{-q}(C_f) \xrightarrow{\ j^*\ } \Omega_M{}^{-q}(K)$$

où e et j sont les inclusions canoniques.

On prouve [1] que, si $f\colon K \to L$ et $g\colon L \to J$ sont des applications simpliciales, alors $(g\circ f)^* = f^*\circ g^*$. De plus, s'il existe une homotopie simpliciale reliant f à g, on a $f^* = g^*$. Donc, étant donné une application continue $f\colon P \to Q$ entre deux polyèdres euclidiens, nous pouvons poser la définition suivantes (voir [1]):

3.4. DÉFINITION. On définit l'opérateur cobord

$$\delta^*: \Omega_M{}^{-q}(L) \longrightarrow \Omega_M{}^{-q-1}(K, L)$$

comme dans I.7 de [2], c'est-à-dire comme le composé

$$\Omega_M{}^{-q}(L) \xrightarrow{\ s^q\ } \Omega_M{}^{-q-1}(L\times I, L\times I^\bullet) \xrightarrow{\ i^{*-1}\ } \Omega_M{}^{-q-1}(W, K\times I \cup L\times 0)$$
$$\xleftarrow{\ e^*\ } \Omega_M{}^{-q-1}(K\times I, K\times 1 \cup L\times 0) \xrightarrow{\ j_0{}^*\ } \Omega_M^{\sim}{}^{-q-1}(K, L)$$

où $W = K\times 1 \cup L\times I$, $j_0(x) = (x, 0)$, $e\colon W \to K\times I$ est l'expansion naturelle et i^* l'isomorphisme d'excision.

Il n'est pas difficile de prouver que la définition précédente coïncide avec celle considérée dans [3]: $N^\bullet(L, K) \to L$ étant le bord d'un voisinage dérivé de L dans K et $r\colon N^\bullet(L, K) \to L$ la restriction de la rétraction naturelle de $N(K, L)$ sur L, on pose $\delta^* = r^*$.

On obtient la suite exacte fonctorielle

$$\longrightarrow \Omega_M{}^{-q}(K) \longrightarrow \Omega_M{}^{-q}(L) \longrightarrow \Omega_M{}^{-q-1}(K, L) \longrightarrow \Omega_M{}^{-q-1}(K) \longrightarrow$$

qui est permutable avec le passage à la limite, ce qui démontre le résultat suivant:

3.6. *THÉORÈME.* *Les foncteurs $\Omega_M{}^{-q}(-, -)$ définissent une théorie de cohomologie généralisée sur la catégorie des polyèdres euclidiens et des applications continues, qu'on appellera théorie de $M^{\sim}$-cobordisme.*

4. SPECTRE CLASSIFIANT DU $\mathcal{M}^{\sim}$-COBORDISME.

On prouve dans [2] que le PL-cobordisme sur les polyèdres compacts est équivalent à la théorie de cohomologie associée à un spectre classifiant. Nous allons voir que ce résultat est aussi valable pour toute théorie de $\mathcal{M}^{\sim}$-cobordisme sur les polyèdres euclidiens. Puisque la démonstration est analogue à celle que l'on donne pour le PL-cobordisme, nous n'en indiquerons qu'une esquisse. On utilisera les définitions et notations habituelles de la théorie des Δ-ensembles (voir [14]).

Soit $\mathcal{S}$ la catégorie dont les objets sont les simplexes canoniques orientés selon l'ordre de leurs sommets et dont les morphismes sont les applications simpliciales injectives qui conservent l'ordre.

4.1. DÉFINITION. Soit $\mathcal{M}^{\sim}$ une catégorie de cobordisme et soit $H_n{}^k$ l'ensemble des $(\mathcal{M}^{\sim}, n)$-mockfibrés de base Δ^k. On définit le Δ-ensemble $H_n \to$ Set de la façon suivante:

i) $H_n(\Delta^k) = H_n{}^k$.

ii) Si λ: $\Delta^s \to \Delta^r$ est un $\mathcal{S}$-morphisme, alors $H_n(\lambda)$ associe à chaque élément de $H_n(\Delta^r)$ sa restriction à $\lambda(\Delta^s)$.

On peut supposer que H_n est à valeurs dans Set_*, si on considère $H_n(\Delta^k)$ pointé par le $(\mathcal{M}^{\sim}, n)$-mockfibré de base Δ^k dont les blocs sont tous égaux à 0.

Si $E \in H_n{}^k$ et si v_{k+1} est le sommet de Δ^{k+1} qui n'appartient pas à Δ^k, soit $e_n{}^k(E) \in H_{n-1}{}^{k+1}$ le mockfibré de base Δ^{k+1} dont les blocs sont:

$$e_n{}^k(E)(\sigma) = 0 \quad \text{si} \quad v_{k+1} \notin \sigma, \qquad e_n{}^k(E)(v_{k+1}) = 0,$$
$$e_n{}^k(E)(\sigma) = E(\sigma') \quad \text{si} \quad \sigma = v_{k+1} \bullet \sigma'.$$

Si $|\ |$ est le foncteur réalisation, on a:

4.2. *PROPOSITION.* $(|H_n|, |e_n|)$ *est un Ω-spectre.*

Si K est un complexe simplicial et si l'on ordonne ses sommets de façon à obtenir dans chaque simplexe un ordre total, on obtient un complexe orienté $K^{\sim}$ qui admet une structure naturelle de Δ-ensemble.

Etant donné une Δ-application f: $K^{\sim} \to H_n$, soit E_f le $(\mathcal{M}^{\sim}, n)$-mockfibré de base K dont les blocs sont $E_f(\sigma) = [\sigma: \sigma^{\sim}] f(\sigma^{\sim})$, où $[\sigma: \sigma^{\sim}] = \pm 1$ selon que les orientations de σ dans $K^{\sim}$ et dans K coïncident ou non. Il est facile de voir que l'application

$$\phi: [K^{\sim}, L^{\sim}; H_q, *] \to \Omega_M{}^{-q}(K, L) \quad \text{définie par} \quad \phi[f] = [E_f]$$

est une transformation naturelle.

Si (P, Q) est une paire de polyèdres euclidiens, considérons le composé

$$\Omega_M{}^{-q}(P, Q) \xleftarrow{\beta} \Omega_M{}^{-q}(K, L) \xleftarrow{\phi} [K^{\sim}, \lambda^{\sim}; H_q, *] \xrightarrow{\alpha} [P, Q; H_q, *]$$

où (K, L) est une triangulation de (P, Q), où β est le morphisme qui définit $\Omega_M{}^{-q}(P, Q)$ comme une limite directe, et où α est l'isomorphisme défini dans [12], §6. On prouve que l'application $\alpha\circ\phi^{-1}\circ\beta^{-1}$ ne dépend pas de la triangulation (K, L) ni de l'ordre choisi pour définir $(K^{\sim}, L^{\sim})$. Si

$$|\ |: [P, Q; H_q, *] \to [P, Q; |H_q|, |*|]$$

est le foncteur réalisation, on a alors:

4.3. ***THÉORÈME.*** *Les morphismes*

$$|\alpha\circ\phi^{-1}\circ\beta^{-1}|: \Omega_M{}^{-q}(P, Q) \to [P, Q; |H_q|, |*|]$$

déterminent une équivalence naturelle.

Comme la démonstration de ce théorème est laborieuse et ne présente que les difficultés techniques habituelles dans ce type de preuves, elle sera omise.

4.4. REMARQUE. Si l'on considère des complexes de boules non orientés, on peut construire directement une théorie de cobordisme à partir d'une Z_2-catégorie de modèles M. Pour cela, il suffit de se passer de la définition des nombres d'incidence et des conditions où ceux-ci interviennent. La théorie de cohomologie obtenue s'appelle une théorie de (M, Z_2)-cobordisme.

REFERENCES.

1. R. AYALA, Morfismo inducido en PL-cobordismo, *Publ. Sem. Mat. "Garcia de Galdeano"*, Sec. 1, 36 (1985).
2. S. BUONCRISTIANO, C. ROURKE & B. SANDERSON, *A geometric approach to homology theory*, Lecture Notes Ser. 18, Cambridge Univ. Press, 1976.
3. E. DOMINGUEZ, Grupos de seudocobordismo, *Rev. Acad. Cien. Madrid* 69 (1975), 121-147.
4. E. DOMINGUEZ, An extension of PL-cobordism, *Publ. Sem. Mat. "Garcia de Galdeano"*, Sec. 1, 25 (1985).
5. D. GALEWSKI & R. STERN, Classification of simplicial triangulations of topological manifolds, *Ann. of Math.* 110 (1980), 1-34.
6. L. GLASER, Uncountably many contractible open manifolds, *Topology* 6 (1967), 37-42.
7. F. LATOUR, Double suspension d'une sphère d'homologie, *Sem. Bourbaki, Lecture Notes in Math.* 710, Springer (1979).
8. N. MARTIN & C. MAUNDER, Homology cobordism bundles, *Topology* 10 (1971), 93-100.
9. C. MAUNDER, *Algebraic Topology*, Van Nostrand, 1970.
10. S. MAC LANE, *Categories for the working mathematician*, Springer, 1971.
11. A. QUINTERO, Un ejemplo de teoria de bordismo singular equivalente al PL-bordismo, *Rev. Acad. Cien. Zaragoza* 38 (1983), 15-20.
12. C. ROURKE, Block structures in geometric and algebraic topology, *Actes Intern. Cong. Math. Nice*, 1970.
13. C. ROURKE & B. SANDERSON, *Introduction to piecewise linear topology*, Springer ,1972.
14. C. ROURKE & B. SANDERSON, Δ-sets, I, II, *Quart. J. Math. Oxford* 2, 22 (1971), 321-338, 465-485.
15. M. TAKAHASHI, Simplicial mockbundles, *Math. Seminar Notes Kobe* (1976), 135-156.

Departamento de Geometria y Topologia
Facultad de Matematicas
C/ Tarfia s/n
41012 SEVILLA, ESPAGNE