

CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE CATÉGORIQUES

EDMOND BONAN

Sur les sélections injectives du type fini

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 27, n° 2 (1986), p. 147-150

http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1986__27_2_147_0

© Andrée C. Ehresmann et les auteurs, 1986, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LES SÉLECTIONS INJECTIVES DU TYPE FINI
par Edmond BONAN

A la mémoire de Charles Ehresmann

ABSTRACT. The Wedding Lemma is extended to infinite sets.

Extension du Lemme des Mariages [1] aux ensembles infinis.

Proposition.

Soit \dot{E} et F deux ensembles, G une partie de F , et Φ une application de E dans l'ensemble des parties finies de F telle que:

(i) pour toute partie A de E ,

$$\text{Card}(\Phi(A)) \geq \text{Card}(A), \text{ où } \Phi(A) = \bigcup (\Phi(x), x \in A);$$

(ii) pour toute partie finie B de G ,

$$\text{Card}(B) \leq \text{Card}(\Phi^{-1}(B)) < +\infty \text{ où } \Phi^{-1}(B) = \{x, \Phi(x) \cap B = \emptyset\}.$$

Il existe alors une sélection injective f , subordonnée à Φ telle que $f(E)$ contienne G .

Preuve.

1° Soit Λ l'ensemble ordonné par l'inclusion des parties X de E munies d'une sélection injective $f_X: X \rightarrow F$, subordonnée à Φ , où de plus $f_X(X)$ contient G . Soit T une partie totalement ordonnée de Λ : posons $Z = \bigcup (X, X \in T)$. Pour chaque $X \in T$, soit \tilde{f}_X un prolongement arbitraire de f_X à Z tout entier, subordonné à Φ . Le filet $(\tilde{f}_X, X \in T, \supset)$ prenant ses valeurs dans l'espace produit topologique, compact par le théorème de Tychonoff, de la collection $(\Phi(z), z \in Z)$, admet une valeur d'adhérence, disons $f_Z: Z \rightarrow F$, subordonnée à Φ . Montrons que f_Z est injective: pour deux éléments distincts y et y' de Z , il existe une partie $Y \in T$ les contenant, et il existe de plus une partie X contenant Y , $X \in T$, telle que

$$f_Z(y) = \tilde{f}_X(y) = f_X(y) \quad (\text{resp. } y').$$

Mais puisque f_X est injective,

$$f_Z(y) = f_Z(y').$$

Montrons maintenant que $f^{-1}(Z)$ contient G : pour un élément γ de G , il existe une partie $Y \in \mathcal{T}$ contenant l'ensemble fini non vide

$$Z \cap \Phi^{-1}(Y) = J$$

et il existe de plus une partie X contenant Y , $X \in \mathcal{T}$ telle que

$$f_Z(J) = \tilde{f}_X(J) = f_X(J).$$

Ce dernier contenant γ , puisque $f_X(X)$ contient G . Nous venons de trouver le majorant Z de \mathcal{T} dans Λ qui est donc inductif.

2° Pour une sélection injective $f : X \rightarrow F$ subordonnée à Φ et un élément z de E , n'appartenant pas à X , nous allons établir l'existence d'une sélection injective $g : X \cup \{z\} \rightarrow F$, subordonnée à Φ . Nous poserons

$$(f^{-1}\Phi)^{-1}(z) = \emptyset, \quad (f^{-1}\Phi)^0(z) = \{z\}, \\ (f^{-1}\Phi)^\infty(z) = \cup((f^{-1}\Phi)^\ell(z), \ell \geq 1).$$

Pour l'entier ℓ , tant que $\Phi(f^{-1}\Phi)^\ell(z)$ est contenu dans $f(X)$, nous pouvons définir $(f^{-1}\Phi)^{\ell+1}(z)$: désignons, le cas échéant, par h le plus petit entier pour lequel $\Phi(f^{-1}\Phi)^h(z)$ n'est pas contenu dans $f(X)$. Nous prendrons h infini sinon. La suite

$$((f^{-1}\Phi)^\ell(z), 1 \leq \ell \leq h)$$

est strictement croissante: en effet, pour $1 \leq \ell < h$,

$$\text{Card}((f^{-1}\Phi)^{\ell+1}(z)) = \text{Card}(\Phi(f^{-1}\Phi)^\ell(z)).$$

Mais $\Phi(f^{-1}\Phi)^\ell(z)$ contient $\Phi(z)$ avec $z \notin (f^{-1}\Phi)^\ell(z)$ donc la propriété (i) se traduit ici par

$$\text{Card}(\Phi(f^{-1}\Phi)^\ell(z)) = \text{Card}(\Phi((f^{-1}\Phi)^\ell(z) \cup \{z\})) \geq \text{Card}((f^{-1}\Phi)^\ell(z)) + 1.$$

Ainsi

$$\text{Card}((f^{-1}\Phi)^{\ell+1}(z)) > \text{Card}((f^{-1}\Phi)^\ell(z)).$$

a) Supposons h fini: il existe d'abord un élément α appartenant à $\Phi(f^{-1}\Phi)^h(z)$ mais pas à $\Phi(f^{-1}\Phi)^{h-1}(z)$: nous pouvons définir successivement, en commençant par

$$x_h \in (f^{-1}\Phi)^h(z) \setminus (f^{-1}\Phi)^{h-1}(z), \quad \alpha \in \Phi(x_h),$$

puis si $h > 0$, continuer, pour tout entier i , $0 \leq i < h$, par

$$x_i \in (f^{-1}\Phi)^i(z) \setminus (f^{-1}\Phi)^{i-1}(z), \quad f(x_{i+1}) \in \Phi(x_i),$$

en terminant de toute façon par $x_0 = z$.

La nouvelle fonction $g: X \cup \{z\} \rightarrow F$, définie par

$$g(z) = \alpha \text{ et si } h > 0, \text{ pour tout entier } i, 0 \leq i < h \text{ par } g(x_i) = f(x_{i+1}),$$

coïncidant en outre avec f sur

$$X \setminus \cup(x_i, 0 < i \leq h)$$

est une sélection injective subordonnée à Φ . Si $f(X)$ contient G , il en est de même pour $g(X \cup \{z\})$.

b) Supposons maintenant h infini: il existe pour chaque entier n une construction notée Θ_n du type précédent, soit pour tout entier i tel que $0 \leq i \leq n$,

$$\Theta_n(i) \in (f^{-1}\Phi)^i(z) \setminus (f^{-1}\Phi)^{i-1}(z)$$

et si $0 \leq i < n$,

$$f(\Theta_n(i+1)) \in \Phi(\Theta_n(i)).$$

Prolongeons Θ_n à l'espace \mathbb{N} tout entier par $\tilde{\Theta}_n$ en prenant cependant pour tout entier j , $j > n$, $\tilde{\Theta}_n(j)$ dans

$$(f^{-1}\Phi)^j(z) \setminus (f^{-1}\Phi)^{j-1}(z).$$

La suite $(\tilde{\Theta}_n, n \geq 1)$ prend ses valeurs dans l'espace produit topologique compact de la collection

$$((f^{-1}\Phi)^\ell(z) \setminus (f^{-1}\Phi)^{\ell-1}(z), \ell \geq 0),$$

elle admet donc une valeur d'adhérence, disons Θ : pour tout entier i , il existe un entier $n \geq i+1$ tel que

$$\Theta(i) = \tilde{\Theta}_n(i) = \Theta_n(i) \quad (\text{resp. } (i+1)),$$

donc

$$f(\Theta(i+1)) \in \Phi(\Theta(i))$$

avec toujours $\Theta(0) = z$. La nouvelle fonction

$$g: X \cup \{z\} \rightarrow F \quad \text{définie par} \quad g(\Theta(i)) = f(\Theta(i+1))$$

pour tout $i \geq 0$, coïncidant avec f sur $X \setminus \cup(\Theta(i), i > 0)$, est une sélection injective subordonnée à Φ . Si $f(X)$ contient G , $g(X \cup \{z\})$ aussi.

3° a) Prenons d'abord $G = \emptyset$: il existe par le Lemme de Zorn une sélection injective $f : E \rightarrow F$ subordonnée à Φ , car l'élément maximal de Λ est sûrement E .

b) Lorsque G n'est pas vide, l'application ϕ^{-1} de G dans l'ensemble des parties finies de E vérifie les conditions qui permettent, grâce à 3-a, d'exhiber une sélection injective $e : G \rightarrow E$ subordonnée à ϕ^{-1} , et par suite $e^{-1} : e(G) \rightarrow F$ est déjà une sélection injective subordonnée à Φ telle que $e^{-1}(e(G)) = G$. Maintenant par le Lemme de Zorn, $e(G)$ est contenu dans un élément maximal de Λ , qui est sûrement E : il existe donc une sélection injective $f : E \rightarrow F$ subordonnée à Φ , et en outre $f(E)$ contient G .

1. N. BOURBAKI, Théorie des Ensembles, Chap. III (§3, Exerc. 6). Hermann, Paris.
2. J.L. KELLEY, General Topology, Van Nostrand-Reinhold.

U.E.R. de Mathématiques
33 rue Saint-Leu
80000 AMIENS. FRANCE