CAHIERS DE
TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
CATÉGORIQUES

ALBERT BURRONI

Récursivité graphique (1e partie) : catégorie des fonctions récursives primitives formelles

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 27, nº 1 (1986), p. 49-79

<http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1986__27_1_49_0>

CAHIERS DE TOPOLOGIE
ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
CATÉGORIQUES

Vol. XXVII-1 (1986)

RECURSIVITE GRAPHIQUE (1^e partie): CATÉGORIE DES FONCTIONS RÉCURSIVES PRIMITIVES FORMELLES

par Albert BURRONI

ABSTRACT. The categories of Peano-Lawvere (or PL) are categories which admit Kan extensions along the homomorphism of graphs : $(.) \to (.\circlearrowleft)$. This paper gives an inductive description, in the language of graphs, of the free PL category generated by the graph $(.)$, denoted P. It is proved that the generator object is final, that there exist cartesian products and that any integer $1 \to \mathrm{N}$ in P is standard. This category, of a syntaxical nature has a surjective quotient $\mathbf{P} = P/R$, which is the category of primitive recursive functions. R is a non-recursive congruence (in particular, it is not trivial).

SOMMAIRE.

0. INTRODUCTION.

Cet article est consacré à la description d'une catégorie P, appelée *catégorie des fonctions récursives primitives formelles*. La construction de cette catégorie est de nature syntaxique et se distingue de constructions analogues, d'une part, par la réduction des hypothèses à un unique "axiome de l'infini" et, d'autre part, par le caractère "graphique" de sa description.

L'"axiome de l'infini", quand il est énoncé dans un topos E, prend la forme de l'"axiome de Peano-Lawvere". Cet axiome affirme l'existence d'un "objet des entiers naturels" (en abrégé : un NNO) et qui est en fait la donnée d'un diagramme de la forme :

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "z"] & \mathrm{N} \arrow[loop right, "s"] \end{tikzcd}$$

où 1 est l'objet final de E , et qui a la propriété universelle suivante : pour tout diagramme de cette forme

$$1 \xrightarrow{f} X \circlearrowleft g$$

il existe un et un seul morphisme m: $N \to X$ tel que

$$m \circ z = f, \qquad m \circ s = g \circ m.$$

Bien entendu, cet axiome n'acquière toute son efficacité pour décrire dans l' "univers mathématique" E toutes les constructions usuelles qui relèvent de l'infini, que grâce à la collaboration des autres axiomes qui font de E un topos, même si ceux-ci n'expriment a priori rien sur l'infini. Déjà, dans sa formulation même, cet axiome présuppose que la catégorie E est munie d'un objet final.

Or il nous semble qu'il y a de bonnes raisons qui rendent intéressant de pouvoir formuler un (ou des) axiome(s) de l'infini, sous une forme ou une autre, dans une catégorie E sur laquelle on ne ferait aucune autre hypothèse, ou bien sur laquelle on serait libre de choisir des hypothèses supplémentaires a priori quelconques. Une des raisons de cette attitude est que les notions d'entier, de récursivité, de programme, de machine, etc... sont des notions qui ont un caractère "concret" et qui doivent pouvoir se développer de manière uniforme dans tout "univers mathématique" E , sans qu'aucune hypothèque ne soit faite sur les propriétés de E lorsque celles-ci n'ont pas de signification infinitaire. Nous autoriserons seulement que E soit une catégorie. Une autre raison, et qui va dans le même sens, est qu'il existe de nombreux exemples de catégories E qui sont très loin d'être des topos et qui cependant satisfont l'axiome de Peano-Lawvere - ou plutôt une forme de cet axiome adaptée à l'absence d'hypothèses sur l'existence d'objet final et de produits cartésiens dans E, et que nous allons définir ci-dessous. Parmi ces exemples il y a notamment toutes les catégories "concrètes" (ou disons plus simplement : toutes les catégories qui admettent des coproduits dénombrables). Un autre exemple très éloigné des topos est celui des catégories de la forme E^{op}, lorsque E est un topos (élémentaire) admettant un NNO. Bien que souvent dans ces exemples de catégories PL il existe, entre autres, un objet final et des produits cartésiens, ceux-ci ne sont pas significatifs, comme on peut le constater facilement sur l'exemple cité ci-dessus de la duale d'un topos.

Donc voici comment nous proposons d'énoncer l'axiome de Peano-Lawvere dans une catégorie quelconque E : pour tout objet X de E il existe un diagramme de la forme

$$X \xrightarrow{zX} NX \circlearrowleft sX$$

qui a la propriété universelle attendue que, pour tout diagramme de la forme

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[loop right, "g"] \end{tikzcd}$$

il existe un unique morphisme m : $NX \to Y$ tel que

$$m \circ z = f \quad \text{et} \quad m \circ s = g \circ m.$$

On dira alors que E est une *catégorie de Peano-Lawvere* (en abrégé : catégorie PL).

On constate alors facilement que les catégories PL sont de nature algèbrique (Section 1) et qu'il existe ainsi des catégories PL libres engendrées, par exemple par des graphes. La catégorie P se définit alors justement comme étant la catégorie PL libre engendrée par un objet, i.e. par le graphe (.) réduit à un objet. On démontre alors que P possède certaines propriétés qui ne sont généralement pas vérifiées dans les catégories PL — même quand elles sont libres — à savoir l'existence d'un objet final (qui est l'objet générateur) et l'existence de produits cartésiens. Cependant cet objet final et ces produits n'ont pas le caractère "libre" qu'ils auraient eu si on les avait introduits dans les hypothèses, et qui aurait donné une construction plus compliquée que P.

Si maintenant on considère la véritable catégorie $\mathbf{P}$ des fonctions récursives $f : \mathbf{N}^p \to \mathbf{N}^q$ ($p, q \in \mathbf{N}$), c'est évidemment une sous-catégorie de la catégorie des ensembles <u>Ens</u>. On a un unique homomorphisme de catégories PL : $P \to \mathbf{P}$, où $\mathbf{P}$ apparaît comme une catégorie PL quotient de P par une congruence PL. Cependant cet homomorphisme $P \to \mathbf{P}$ n'est pas un isomorphisme et, étant donné le caractère syntaxique finitaire (ou récursif) de P, cela n'est pas étonnant. Nous avons choisi de démontrer ce fait en utilisant le théorème de Matisajevic sur la réponse négative au "10ème problème de Hilbert" parce que techniquement c'était la manière la plus frappante de le constater (Section 6) et que cela nous permettait de développer certains concepts qui nous seront utiles ultérieurement. Mais bien entendu il faut s'attendre à trouver dans P des inégalités beaucoup plus grossières que celles fournies par ce théorème qui, lui, utilise toutes les ressources de l'Arithmétique du premier ordre. Cela reste cependant un problème ouvert.

Ce travail est extrait d'une série de conférences que nous avons présentées en Novembre 1983, puis sous leur forme actuelle au printemps 1984, au Séminaire de Catégories de Paris VII dirigé par MM. Coppey et Lair. Il est à l'origine de travaux de la part de ces auteurs qui les ont publiés dans leur revue "Diagrammes" (Volumes 12 et 13). Nous avons également présenté ce travail au Congrès International de Catégories à Löwenberg (Suisse) en Juillet 1984.

1. CATÉGORIES DE PEANO-LAWVERE.

On dit qu'une catégorie E est une *catégorie de Peano-Lawvere* (ou en abrégé : une catégorie PL) si elle admet des extensions de Kan le long de l'homomorphisme de graphes

$$(\cdot) \longrightarrow (\cdot \circlearrowleft)$$

ou, ce qui revient au même, si elle admet des extensions de Kan le long du foncteur

$$L(\cdot) \longrightarrow L(\cdot \circlearrowleft)$$

(la notations L(D) désigne la catégorie libre engendrée par le graphe D).

Proposition 1. *Pour que E soit une catégorie PL, il faut et il suffit que le foncteur d'oubli*

$$E^{\circlearrowleft} \longrightarrow E$$

admette un adjoint à gauche.

Preuve. La catégorie $E^{\circlearrowleft}$ est la catégorie qui a pour objets les diagrammes de la forme

$$(\cdot \circlearrowleft) \longrightarrow E$$

et pour flèches les transformations naturelles entre ces diagrammes. La preuve est un exercice facile. ◊

Un tel adjoint s'appelle un foncteur NNO ; on démontre facilement que cela donne une extension de Kan le long de : $(\cdot) \to (\cdot \circlearrowleft_E)$ et engendrée par l'objet id_E dans la catégorie des endofoncteurs E^E. (La réciproque n'a pas de raison d'être vraie.)

Pour construire des catégories PL libres on est amené à modifier ces définitions de façon inessentielle en remplaçant l'expression "admet des extensions de Kan" par "est munie d'extensions de Kan". Il est facile de se convaincre alors de l'existence de catégories PL libres engendrées par exemple par des graphes (ou aussi bien par des catégories). Mais pour être plus précis, nous pouvons énoncer :

Proposition 2. *Les catégories PL sont des algèbres semi-graphiques.*

Preuve. Par "algèbre graphique" il faut entendre la donnée d'un graphe muni d'une structure équationnelle sur les graphes, c'est-à-dire par un système d'opérations et d'équations graphiques (voir "Algèbres graphiques", dans Cahiers Top. et Géom. Diff. XXII-3, 1981, 249-265). Par "algèbre semi-graphique" il faut entendre ce même type de données mais où en plus des équations on peut avoir des semi-équations graphiques, c'est-à-dire des axiomes de la forme $e \Rightarrow e'$, où e et e' sont des équations de même arité. Une connaissance précise de ces notions n'est pas nécessaire, le texte les illustrera suffisamment par lui-même.

Donc soit E une catégorie PL, nous allons dégager sur elle des opérations, équations et semi-équations qui la déterminent entièrement (toujours au sens de l'équivalence large qui a été évoquée plus haut). Il y a d'abord les opérations et les équations qui font de E une catégorie :

(1) A tout objet est associé un diagramme de la forme

$$\begin{tikzcd} X \arrow[loop right, "\mathrm{id}\ X"] \end{tikzcd}$$

(2) A tout chemin $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z$ de E est associé un morphisme $v \circ u : X \to Z$:

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[dr, "v"] & \\ X \arrow[ur, "u"] \arrow[rr, "v \circ u"'] & & Z \end{tikzcd}$$

La présentation de ces morphismes incluant les habituelles équations dites "de position" :

$$a\,(\mathrm{id}\ X) = X = b(\mathrm{id}\ X)$$

(a et b sont les applications source et but de graphe E, ce sont des opérations particulières).

Nous n'explicitons pas les traditionnelles équations d' "élément neutre" et d' "associativité" qui complètent la définition de catégorie.

Maintenant venons-en aux données supplémentaires qu'il faut pour l'axiome PL :

(3) A tout objet X est associé un diagramme de la forme

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "zX"] & NX \arrow[loop right, "s\,X"] \end{tikzcd}$$

(4) A tout diagramme de la forme

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[loop right, "g"] \end{tikzcd}$$

est associé un morphisme $r\,(f, g) : NX \to Y$.

Outre les équations "de position" implicitement écrites dans ces données (i.e. $a\,(zX) = X$, etc...) il faut ajouter les équations et semi-équations suivantes :

(5) Pour les données de (4) :

$$r(f, g) \circ z\,X = f, \qquad r(f, g) \circ s\,X = g \circ r(f, g)$$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "zX"] \arrow[dr, "f"'] & NX \arrow[loop right, "sX"] \arrow[d, "r(f,\ g)"] \\
& Y \arrow[loop right, "g"]
\end{tikzcd}$$

(6) Pour tout diagramme de la forme

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[loop above, "g"] \arrow[r, "m"] & Y' \arrow[loop above, "g'"]
\end{tikzcd}$$

on a la semi-équation :

$$m \circ g = g' \circ m \quad \Rightarrow \quad m \circ r(f,\ g) = r(m \circ\ f,\ g').$$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "zX"] \arrow[dr, "f"] \arrow[ddr, "m\ \circ\ f"'] & & NX \arrow[dl] \arrow[ddl, "r(m\ \circ\ f,\ g')"] \\
& Y \arrow[loop right, "g"] \arrow[d, "m"] & \\
& Y' \arrow[loop right, "g'"] &
\end{tikzcd}$$

(7) Pour tout objet X :

$$r\ (zX,\ sX) = \mathrm{id}\ NX\ .$$

Le seul point qu'il faut vérifier pour constater que toutes ces données font de E une catégorie PL est le suivant : Pour tout diagramme de la forme

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "zX"] \arrow[dr, "f"'] & NX \arrow[loop right, "sX"] \arrow[d, "m"] \\
& Y \arrow[loop right, "g"]
\end{tikzcd}$$

tel que

$$m \circ\ zX = f, \qquad m \circ\ sX = g \circ m,$$

on a

$$m = r(f,\ g).$$

C'est bien le cas puisque

$$m = m\ \circ \mathrm{id}\ NX \underset{(7)}{=} m \circ r(zX,\ sX) \underset{(6)}{=} r(m\ \circ zX,\ sX) = r(f,\ sX). \qquad \lozenge$$

Comme l'indique la proposition suivante, on a de très nombreux exemples de catégories PL.

Proposition 3. *Toute catégorie cocomplète (ou même simplement qui admet des coproduits dénombrables) est une catégorie PL.*

Preuve. Il suffit évidemment de prendre

$$NX = \coprod_{\mathbf{N}} X, \qquad z\,X = i_0 : X \to NX, \quad s\,X = [\,i_{n+1}]_{n\in\mathbf{N}} : NX \to NX$$

où $i_n : X \to NX$ est l'injection canonique d'indice $n \in \mathbf{N}$ et où la notation $[\ ]$ exprime un *crochet de coproduit*, i.e. X est caractérisé par

$$sX \circ i_n = i_{n+1}$$

ce qui donne d'ailleurs

$$i_n = (\overset{n}{\bigcirc}\, sX) \circ zX$$

où $\overset{n}{\bigcirc}$ désigne la composition de n copies). Le reste de la preuve est sans problème. ◊

Les morphismes de la forme $r(f,\ g)$ seront appelés *crochets récursifs.*

Ces exemples, où $NX = \coprod_{\mathbf{N}} X$, seront appelés *standards.* Ils signifient que les extensions de Kan le long du foncteur : $L(.) \to L(.\circlearrowleft)$ se "calculent point par point". A côté de ces exemples il existe de nombreux exemples "non standards", en particulier la catégorie *P* qui sera construite plus loin et qui est la catégorie PL libre engendrée par le graphe (.). La proposition suivante nous donne également d'autres exemples pour des topos qui ne sont pas des topos de Grothendieck.

Proposition 4. *Tout topos E admettant un NNO*

$$1 \xrightarrow{\ z\ } N \circlearrowleft s$$

est une catégorie PL, où de plus

$$NX = N \times X, \qquad z\,X = z \times X, \qquad s\,X = s \times X$$

pour tout objet X de E.

Preuve. D'après l'hypothèse de fermeture cartésienne sur E, pour tout objet X le foncteur changement de base $(\varepsilon X)^* : E \to E/X$ est un adjoint à gauche et donc commute avec les limites inductives. En fait, il est facile de généraliser ce résultat : *les adjoints à gauche commutent avec les extensions de Kan.* Cela entraîne que E est une catégorie PL. ◊

Cette proposition nous donne bien des exemples non standards :

il suffit de considérer un topos dénombrable avec NNO (par exemple le topos-avec-NNO initial dans la catégorie des topos avec morphismes logiques). Un argument de cardinalité montre qu'un tel topos a un NNO non standard puisque, sinon, chaque fonction $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ dans <u>Ens</u> donnerait un crochet de coproduits

$$[i_{f(n)}]_{n \in \mathbf{N}} : N \to N$$

dans le topos dénombrable, et ces crochets sont tous distincts, si le topos est non dégénéré. Donc le cardinal Hom(N, N) serait égal à celui de $\mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ qui n'est pas dénombrable.

Il faut noter également que même si une catégorie PL admet des produits cartésiens, la relation

$$NX = N1 \times X = N \times X$$

est loin d'être générale. Par exemple la catégorie <u>Ab</u> des groupes abéliens est PL et son objet final est $0 = 1$, et celui-ci admet pour NNO le diagramme trivial

$$0 \longrightarrow 0 \circlearrowleft$$

Mais nous avons également l'exemple donné dans la proposition suivante, qui fournit d'autres exemples non standards :

Proposition 5. *La catégorie duale E^{op} d'un topos avec NNO E est une catégorie PL. De plus pour qu'un topos E soit muni d'un NNO, il faut et il suffit que E^{op} soit une catégorie PL.*

Preuve. Pour tout objet X de E le foncteur exponentiel $X^{(-)} : E \to E^{op}$ est un adjoint à gauche de $(X^{(-)})^{op} : E^{op} \to E$, donc — comme on l'a déjà signalé — il commute aux extensions de Kan. Il en résulte que le diagramme :

$$X \xrightarrow{X^z} X^N \circlearrowleft X^s$$

donne une coextension de Kan dans E et donc une extension de Kan dans E^{op} qui est donc une catégorie PL.

Pour la deuxième affirmation, il suffit d'imiter le théorème de Paré : *tout topos admet des limites inductives finies.* Voici comment on procède : par hypothèse E^{op} est une catégorie PL, donc E admet des coextensions de Kan le long de $(.) \to (.\circlearrowleft)$. Or on démontre facilement qu'un foncteur triplable — qui, on le sait, crée les limites projectives — crée également les coextensions de Kan. Dans le théorème de Paré, on démontre justement que le foncteur $\Omega^{(-)} : E^{op} \to E$, où Ω est l'objet classifiant de E, est triplable, cela entraîne que E^{op} va admettre des coextensions de Kan. Finalement cela veut dire que E a les extensions de Kan demandées et donc qu'elle est une catégorie PL. ◊

Dans E^{op} l'objet NNO existe donc, mais il est trivial et la relation NX = NxX est fausse dans E^{op} puisque dans E elle se traduit au second membre par $0 \amalg X \simeq X$. Ces exemples illustrent suffisamment pourquoi la donnée d'un objet NNO — même en ajoutant des conditions d'existence de produits cartésiens — est insuffisante et qu'il faut généraliser l'axiome de Peano-Lawvere par l'existence d'un foncteur NNO. Enfin j'ajoute que la Proposition 4 m'a été suggérée par une question posée par Jacques Penon : "peut-on dans un topos exprimer un axiome de l'infini par des adjonctions à droite, comme c'est le cas des autres données du topos ?". La réponse est donc positive.

Pour terminer cette section, je voudrais dire un mot sur une éventuelle amélioration de la Proposition 2 : *les catégories PL sont-elles des algèbres graphiques ?*

En posant cette question dans mes premiers exposés au Séminaire de Catégories de Paris VII dirigé par MM. Coppey et Lair — et où je définissais pour la première fois les catégories PL sous la forme donnée dans la Proposition 2 — je signalais que — au vu de nombreuses tentatives de démonstrations infructueuses — mon opinion était que la réponse me paraissait devoir être négative. J'indiquais également que cette question ne me paraissait pas particulièrement intéressante sous cette forme trop restrictive et qu'il fallait lui donner la forme suivante : *Quels seraient les systèmes d'hypothèses minimales qu'il conviendrait d'ajouter aux catégories PL pour obtenir des algèbres graphiques ?* Par exemple : les catégories admettant des extensions de Kan le long de tous les homomorphismes de graphes finis (et donc admettant des colimites finies) sont-elles des algèbres graphiques ? ou encore : les catégories PL qui sont de plus cartésiennes fermées sont-elles des algèbres graphiques ? La seule réponse connue en ce sens est la suivante : les topos avec NNO sont des algèbres graphiques.

2. CATÉGORIE P DES FONCTIONS RÉCURSIVES PRIMITIVES FORMELLES.

Les semi-algèbres graphiques admettent des structures libres sur les graphes, donc en particulier les catégories PL. On notera P la catégorie PL libre engendrée par le graphe (.) réduit à un objet. On appellera P la *catégorie des fonctions récursives primitives formelles.* On note 1 l'objet image de l'homomorphisme canonique $(.) \to P$. (Cette notation anticipe sur un résultat de la Section 4.) Donc, pour toute catégorie PL E et tout objet X de E on a un unique homomorphisme

$$\check{X} : P \to E \qquad \text{tel que} \qquad \tilde{X}(1) = X.$$

Précisons la terminologie sur ce diagramme :

$$\begin{tikzcd} (.) \arrow[r, "(1)"] \arrow[dr, "(X)"'] & P \arrow[d, "\tilde{X}"] \\ & E \end{tikzcd}$$

Nous adoptons les notations

$$\mathrm{N}^0 = 1, \quad \mathrm{N}^{p+1} = \mathrm{N}\mathrm{N}^p \quad (p \in \mathbf{N})$$

et

$$\mathrm{N} = \mathrm{N}1 = \mathrm{N}^1\,, \qquad z = z\,1, \qquad s = s\,1$$

où on évite quelques parenthèses en écrivant NX au lieu de N(X). On écrira $\overset{n}{\underset{i=1}{\bigcirc}} f_i$ au lieu de $f_1 \circ f_2 \circ \dots f_n$ et $\overset{n}{\bigcirc} f$ au lieu de $f \circ f \circ \dots f$ $(n \geq 1)$.

Les seuls objets de P sont évidemment les N^p $(p \geq 0)$. (On le vérifie en notant que la sous-catégorie pleine qu'ils engendrent vérifie la même propriété universelle que P).

Pour étudier P nous aurons besoin de quelques notions très simples et que nous allons maintenant présenter. (On notera que ces notions s'étendent en fait à toute notion de structure libre.)

Pour tout sous-graphe Σ de P, on note $S(\Sigma)$ le plus petit sous-graphe de P tel que $\Sigma \subset S(\Sigma)$ et qui a les propriétés suivantes :

(i) Si X est un objet de Σ, la flèche id $X : X \to X$ est dans $S(\Sigma)$.

(ii) Si $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z$ est dans Σ, la flèche $v \circ u : X \to Z$ est dans $S(\Sigma)$.

(iii) pour tout objet X de Σ le diagramme

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "zX"] & \mathrm{N}X \arrow[loop right, "sX"] \end{tikzcd}$$

est dans $S(\Sigma)$.

(iv) pour tout diagramme

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[loop right, "g"] \end{tikzcd}$$

dans Σ, alors $r(f, g) : \mathrm{N}X \to Y$ est dans $S(\Sigma)$.

Définissons alors une suite de sous-graphes de P par induction :

$$P_0 = \text{sous-graphe réduit à l'objet } 1 \text{ de } P,$$

$$P_{n+1} = S(P_n) \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Il est clair que les P_n sont finis et que leur réunion est égale à P.

Pour tout objet X de P on pose :

$$\| X \| = \inf\{ n \in \mathbf{N} \mid X \in \mathrm{Ob}(P_n) \}$$

donc en fait $\| N^p \| = p$ pour tout $p \in \mathbf{N}$.

Pour tout morphisme $f : X \to Y$ de P on pose de même

$$\| f \| = \inf\{ n \in \mathbf{N} \mid f \in \mathrm{Fl}(P_n) \} \ .$$

On appellera cette fonction, la *fonction rang,* ou *norme*.

Par exemple toutes les flèches de P de norme $\leqq 2$ sont les suivantes :

$$\| \mathrm{id}\, 1 \| = \| z \| = \| s \| = 1,$$
$$\| \mathrm{id}\, N \| = \| r(\mathrm{id}\, 1, \mathrm{id}1) \| = \| s \circ z \| = \| z N \| = \| s\ N \| = 2.$$

Nous aurons également besoin de l'outil technique suivant :

Lemme 1. *Toute flèche de P a au moins une (mais pas nécessairement une seule) des propriétés suivantes :*

(i) $f = \mathrm{id}\, N^p$ *pour un* $p \in \mathbf{N}$,

(ii) $f = f_1 \circ f_2$ *où* f_1, f_2 *sont des morphismes de P tels que*

$$\| f_1 \| \ , \ \| f_2 \| < \| f \|.$$

(iii) $f = zN^p$ *pour un* $p \in \mathbf{N}$

(iv) $f = sN^p$ *pour un* $p \in \mathbf{N}$,

(v) $f = r(f', f'')$ *pour des morphismes* f', f'' *de P tels que*

$$\| f' \|, \ \| f'' \| < \| f \|.$$

Preuve. Immédiat. ◊

On dira alors que :

- f est une *identité* si (i),
- f est *décomposable* si (ii);
- f est une *z-flèche* si (iii),
- f est une *s-flèche* si (iv),
- f est une *r-flèche* si (v).

Dans ces trois derniers cas, on dira que f est *simple* (cela n'interdit pas évidemment que la flèche puisse être également une identité ou décomposable).

Terminons cette section par une illustration d'un usage possible de la fonction norme : on redémontre un résultat classique dans la proposition ci-dessous. Ce résultat n'étant pas utilisé par la suite, nous nous permettons d'anticiper légèrement sur la terminologie et des faits mineurs établis par la suite — ceux-ci étant au demeurant faciles à admettre et à comprendre.

***Proposition 2.** Il existe une fonction récursive totale non récursive primitive.*

Preuve. A tout entier $p \in \mathbf{N}$ est associé un morphisme $\bar{p} : 1 \to N$ de P défini par $\bar{p} = (\overset{p}{O}s) \circ z$. On définit une fonction $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ en posant :

$$f(p) = \mu q (\|\bar{p}\| + 1 < \|\bar{q}\|)$$

où "μ" signifie "minimum" et où q parcourt $\mathbf{N}$. On va montrer que cette fonction n'est pas récursive primitive. $f(p)$ est donc le plus petit entier q tel que $\|\bar{p}\| + 1 < \|\bar{q}\|$ et donc en particulier

(1) $$\|\bar{p}\| + 1 < \|\overline{f(p)}\|$$

Supposons alors qu'il existe un morphisme $\bar{f} : N \to N$ de P tel que, pour tout $p \in \mathbf{N}$ on ait $\bar{f} \circ \bar{p} = \overline{f(p)}$, on a alors la relation évidente :

$$\|\overline{f(p)}\| = \|\bar{f} \circ \bar{p}\| \leqq \max(\|\bar{f}\|, \|\bar{p}\|) + 1 = \max(\|\bar{f}\| + 1, \|\bar{p}\| + 1).$$

Or chaque P_n étant fini et les morphismes $\bar{p}$ étant tous distincts et infinis, la fonction f est bien définie (totale) et donc il existe un entier p tel que

$$\|\bar{f}\| \leqq \|\bar{p}\|.$$

Dans ce cas l'inégalité précédente devient :

(2) $$\|\overline{f(p)}\| \leqq \|\bar{p}\| + 1$$

et elle est en contradiction avec l'inégalité (1). Donc $\bar{f} : N \to N$ ne peut pas exister. Or à la Section 6 nous verrons que toutes les fonctions récursives primitives f sont obtenues de cette manière à partir d'un morphisme $\bar{f}$. Cela veut donc dire que f n'est pas récursive primitive (elle est évidemment récursive). ◊

3. TOUT ENTIER DANS P EST STANDARD.

Un *entier* dans P est un morphisme de la forme $a : 1 \to N$. On dit que a est *standard* s'il peut sécrire

$$a = (\overset{n}{O}s) \circ z$$

pour un entier $n \in \mathbf{N}$ ($\overset{0}{O}s = \mathrm{id}\, N$). Dans ce cas on écrit simplement : $a = n$.

Plus généralement pour $p \in \mathbf{N}$, on appelle *p-uplet d'entiers* un morphisme $\bar{a} : 1 \to N^p$. On dit que $\bar{a}$ est *standard* s'il est égal à un composé de z-flèches et de s-flèches (y compris le cas id $1 : 1 \to 1$, $p = 0$).

Lemme 1. *Tout p-uplet d'entiers standards $\bar{a} : 1 \to N^p$ se décompose d'une et une seule façon sous la forme :*

$$\bar{a} = \mathop{\bigcirc}_{i=0}^{p-1} \left(\left(\mathop{\bigcirc}^{n_i} sN^i\right) \circ zN^i\right)$$

et on l'écrit alors

$$\bar{a} = (n_{p-1}, n_{p-2}, \dots, n_1, n_0).$$

Preuve. Dire que $\bar{a}$ est standard signifie qu'il est dans la sous-catégorie de P engendrée par le sous-graphe :

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "z"] & N \arrow[r, "zN"] \arrow[loop above, "s"] & N^2 \arrow[r, "zN^2"] \arrow[loop above, "sN"] & N^3 \arrow[loop above, "sN^2"] \; \dots & N^{p-1} \arrow[r, "zN^{p-1}"] \arrow[loop above, "sN^{p-2}"] & N^p \arrow[loop above, "sN^{p-1}"] \end{tikzcd}$$

On constate que les composés qui vont de 1 à N^p ont la forme proposée. L'homomorphisme canonique $\tilde{1} : P \to \underline{\text{Ens}}$ les transforme en véritables p-uplet d'entiers, tous distincts bien sûr, de la forme justement

$$(n_{p-1}, \dots, n_0).$$ ◊

Remarque. On a donc un seul 0-uplet standard égal à id $1 : 1 \to 1$.

Lemme 2. *Toute flèche $f : N^p \to N^q$ dans P transforme tout p-uplet standard $\bar{a} : 1 \to N^p$ en un q-uplet standard $f \circ \bar{a} : 1 \to N^q$. On note encore ce dernier $f(\bar{a}) = f \circ \bar{a}$.*

Preuve. Elle se fait par induction sur $\| f \|$:

- Si f est une identité, c'est immédiat.
- Si f est décomposable, c'est vrai par induction puisque

$$f = f_1 \circ f_2 \quad \text{avec} \quad \| f_1 \|, \ \| f_2 \| < \| f \|.$$

- Si f est une z-flèche ou une s-flèche, c'est vrai par définition.
- Reste le cas où f est une r-flèche. On a

$$f = r(g, h) \quad \text{avec} \quad \| g \| < \| f \|, \ \| h \| < \| f \|.$$

$\bar{a}$ étant standard, on peut l'écrire

$$\bar{a} = \left(\mathop{\bigcirc}^{k} sN^{p-1}\right) \circ zN^{p-1} \circ \bar{a}'$$

avec $\bar{a}' : 1 \to N^{p-1}$ lui-même standard (le cas $p = 0$ est impossible car il n'y a pas de r-flèche de source 1). On a alors

$$f(\bar{a}) = f \circ (\overset{k}{\bigcirc}\, sN^{p-1}) \circ zN^{p-1} \circ \bar{a}' = (\overset{k}{\bigcirc}\, h) \circ f \circ zN^{p-1} \circ \bar{a}' = (\overset{k}{\bigcirc}\, h) \circ g \circ \bar{a}' .$$

$$\begin{tikzcd}
N^p \arrow[loop left, "sN^{p-1}"] \arrow[rr, "f"] & & N^q \arrow[loop right, "h"] \\
N \arrow[u, "zN^{p-1}"] \arrow[urr, "g"] & & \\
1 \arrow[u, "\bar{a}'"] \arrow[uurr, bend right, "f(\bar{a})"'] & &
\end{tikzcd}$$

La conclusion résulte alors de l'hypothèse d'induction appliquée à g et à k fois h. ◊

Remarque. Ce résultat exprime l'idée banale que les fonctions récursives primitives sont "calculables".

Théorème 3. *Tout entier dans P est standard. De même tout p-uplet d'entiers est standard.*

Preuve. Soit $\bar{a} : 1 \to N^p$. Faisons l'hypothèse de récurrence suivante : tout q-uplet d'entiers $\bar{b}: 1 \to N^q$ tel que $\|\bar{b}\| < \|\bar{a}\|$ est standard.

Si $\bar{a}$ est une identité on a nécessairement $\bar{a} = \mathrm{id}\ 1$, donc $\bar{a}$ est standard. Si $\bar{a}$ est une z-flèche on a nécessairement $\bar{a} = z$ donc $\bar{a}$ est également standard. Un entier ne peut être ni une s-flèche ni une r-flèche, donc reste à examiner le cas où $\bar{a}$ est décomposable : on a $\bar{a} = f(\bar{b})$ pour un $\bar{b}$ tel que $\|\bar{b}\| < \|\bar{a}\|$ il ne reste alors qu'à appliquer l'hypothèse de récurrence et le Lemme 2. ◊

4. *P* ADMET UN OBJET FINAL.

La donnée d'un objet final 1 dans une catégorie E est équivalente à la donnée d'un adjoint à droite au foncteur canonique $E \to \mathbf{1}$, où $\mathbf{1}$ est la catégorie finale. Il revient alors au même de se donner un objet 1 de E et une transformation naturelle $\varepsilon : \mathrm{id}_E \to c_1$ où $c_1 : E \to E$ est le foncteur constant sur l'objet 1 ($c_1(X) = 1$, $c_1(f) = \mathrm{id}\ 1$ pour tout objet X et tout morphisme f de E). Et de plus on demande que $\varepsilon\, 1 = \mathrm{id}\ 1$.

Lemme 1. *Si E est une catégorie PL et X un objet de E, la catégorie E/X des objets au-dessus de X est une catégorie PL.*

Preuve. Résultat élémentaire. Précisons seulement les notations en mettant parfois en indice les catégories concernées par les opérations graphiques en jeu : Soit $p : Y \to X$ un objet de E/X, on a

$$N_{E/X}\, p = r_E\,(\mathrm{id}\ X, p) : N_E Y \to X,$$

$$z_{E/X}\, p = z_E Y : p \to Np, \quad s_{E/X}\, p = s_E\ Y : Np \to Np.$$

Pour tout diagramme dans E/X de la forme

$$\begin{tikzcd} p \arrow[r, "f"] & q \arrow[loop right, "g"] \end{tikzcd}$$

c'est-à-dire dans E un diagramme

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "f"] \arrow[d, "p"'] & & Z \arrow[loop right, "g"] \arrow[dll, "q"] \\ X & & \end{tikzcd}$$

avec

$$q \circ f = p, \qquad q \circ g = q,$$

on a

$$r_{E/X}(f, g) = r_E(f, g)$$

ce qui se vérifie sur le diagramme :

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "zY"] \arrow[rr, bend left, "f"] \arrow[d, "p"'] & NY \arrow[loop above, "sY"] \arrow[r] \arrow[dl, "Np"] & Z \arrow[loop right, "g"] \arrow[dll, "q"] \\ X & & \end{tikzcd}$$

◊

Proposition 2. *La catégorie P admet un objet final. Celui-ci est égal à 1 (dont la notation était jusqu'ici une anticipation).*

Nous allons donner de ce fait deux preuves. La première est dûe à Yves Laffont : elle s'inspire de façon très élégante des techniques de "glueing" de Freyd.

Première preuve. D'après le Lemme 1, on sait que la catégorie $P/1$ (catégorie des objets au-dessus de 1) est une catégorie PL. Le foncteur "source" $s : P/1 \to P$ est un homomorphisme de catégorie PL, comme cela a été indiqué de façon générale par la preuve du Lemme 1. Par ailleurs la donnée de l'objet id 1 de $P/1$ permet d'obtenir un unique homomorphisme de catégorie PL , à savoir $\widetilde{\mathrm{id}\ 1} : P \to P/1$, qui transforme 1 en id 1. En composant, on obtient

$$P \xrightarrow{\widetilde{\mathrm{id}\ 1}} P/1 \xrightarrow{s} P = P \xrightarrow{\mathrm{id}_P} P$$

et ceci grâce à la propriété universelle de P puisque id $P(1) = 1$ et que, évidemment, id^P est un morphisme PL.

Posons pour tout $p \in \mathbf{N}$:

$$\varepsilon_p = \widetilde{\mathrm{id}}\,1(\mathrm{N}^p) : \mathrm{N}^p \to 1$$

où la source est calculée par la relation $s\,\widetilde{\mathrm{id}}\,1 = \mathrm{id}^P$. Alors pour tout $f : \mathrm{N}^p \to \mathrm{N}^q$ on a un triangle commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathrm{N}^p \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\varepsilon_p"'] & & \mathrm{N}^q \arrow[dl, "\varepsilon_q"] \\ & 1 & \end{tikzcd}$$

Ceci nous donne la transformation naturelle $\varepsilon : \mathrm{id}_P \to c_1$. Puis enfin, par définition de $\widetilde{\mathrm{id}}\,1$, on a

$$\varepsilon_0 = \widetilde{\mathrm{id}}\,1(1) = \mathrm{id}\ 1. \qquad \Diamond$$

Deuxième preuve. Définissons par induction :

$$\varepsilon_0 = \mathrm{id}\ 1, \qquad \varepsilon_{p+1} = r(\varepsilon_p, \mathrm{id}\ 1)$$

pour tout $p \in \mathbf{N}$. On a donc

$$\varepsilon_{p+1} \circ z\mathrm{N}^p = \varepsilon_p, \quad \varepsilon_{p+1} \circ s\,\mathrm{N}^p = \varepsilon_{p+1}$$

On va montrer que cela définit la transformation naturelle $\varepsilon : \mathrm{id}_P \to c_1$ (avec $\varepsilon(\mathrm{N}^p) = \varepsilon_p$), c'est-à-dire que pour tout $f : \mathrm{N}^p \to \mathrm{N}^q$ on doit avoir

$$\varepsilon_q \circ f = \varepsilon_p$$

On raisonne par induction : on suppose que cela est vrai pour tout g tel que $\| g \| < \| f \|$.

- Si f est une identité, c'est évident.
- Si f est décomposable, cela résulte de l'hypothèse d'induction.
- Si f est une z-flèche, alors $p = q - 1$ et ça résulte de la définition de ε_q.
- Si f est une s-flèche, alors $p = q$ et c'est encore vrai par définition.
- Reste le cas où f est une r-flèche :

$$f = r(g, h) \qquad \text{avec } \| g \| < \| f \| \text{ et } \| h \| < \| f \|.$$

On a forcément $p \geqq 1$. Il suffit alors de vérifier que $\varepsilon_q \circ f$ satisfait les deux égalités qui caractérisent ε_p comme crochet récursif :

$$\begin{tikzcd}
N^p \arrow[loop left, "sN^{p-1}"] \arrow[r, "f"] \arrow[dd, bend right=60, "\varepsilon_p"'] & N^q \arrow[loop right, "h"] \arrow[ddl, bend left, "\varepsilon_q"] \\
N^{p-1} \arrow[u, "zN^{p-1}"] \arrow[ur, "g"'] \arrow[d, "\varepsilon_{p-1}"'] & \\
1 &
\end{tikzcd}$$

$$(\varepsilon_q \circ f) \circ zN^{p-1} = \varepsilon_q \circ (f \circ zN^{p-1}) = \varepsilon_q \circ g \underset{\text{ind.}}{=} \varepsilon_{p-1}$$

$$(\varepsilon_q \circ f) \circ sN^{p-1} = \varepsilon_q \circ (f \circ sN^{p-1}) = \varepsilon_q \circ (h \circ f) = (\varepsilon_q \circ h) \circ f \underset{\text{ind.}}{=} \varepsilon_q \circ f \quad .\lozenge$$

5. *P* ADMET DES PRODUITS FINIS.

En général, les catégories PL — même quand elles sont libres — n'ont ni objet final, ni produits cartésiens. Pourtant nous allons voir que *P* possède de telles structures. (Si *P* était isomorphe à la sous-catégorie de <u>Ens</u> formée des fonctions récursives primitives, ceci serait tout à fait trivial, mais, comme on le verra dans la section suivante, ce n'est pas le cas.)

Lemme 1. *Pour toute catégorie PL E et toute catégorie* C, *la catégorie des foncteurs E^{C} est une catégorie PL.*

Preuve. Résultat encore tout à fait élémentaire : contentons-nous de préciser la définition des opérations dans E^{C}.

Pour tout objet F de E^{C} et tout objet I de C on a

$$NF(I) = N(F(I)), \quad zF(I) = z(F(I)), \quad sF(I) = s(F(I)).$$

(Pour être tout à fait explicite la première égalité par exemple pourrait s'écrire :

$$(N_{E^{\mathrm{C}}}(F))(I) = N_E(F(I)) \;).$$

Et pour tout morphisme $i : I \to I'$ de C' on a un diagramme

$$\begin{tikzcd}
F(I) \arrow[r, "zF(I)"] \arrow[d, "F(i)"'] & NF(I) \arrow[loop right, "sF(I)"] \arrow[d, "NF(i)"] \\
F(I') \arrow[r, "zF(I')"] & NF(I') \arrow[loop right, "sF(I')"]
\end{tikzcd}$$

où

$$NF(i) = r\,(F(I) \circ F(i), s\,F(I)).$$

Enfin, pour tout diagramme

$$F \xrightarrow{f} F' \circlearrowleft g$$

de E^C on a

$$r\,(f,\ g)(I) = r\,(f(I),\ g(I)).$$

On constate que pour tout foncteur $\Phi : C' \to C$, le foncteur induit $E^{\Phi} : E^C \to E^{C'}$ est un homomorphisme de catégories PL et donc en particulier tous les foncteurs d'évaluation $E^C \to E$ sont des homomorphismes PL, ce que signifie l'expression de "calcul point par point.". ◊

Donc, en appliquant ce lemme au cas particulier où $E = P$ et $C = P$, on voit que la catégorie des endofoncteurs P^P est une catégorie PL. Alors l'objet $\mathrm{id}P$ de P^P détermine un unique homomorphisme $\widetilde{\mathrm{id}}_P : P \to P^P$. Cet homomorphisme étant un foncteur, grâce à la propriété de fermeture de Cat (la catégorie des catégories) on en déduit un deuxième foncteur $\times : P \times P \to P$, i.e. $\times(X, Y) = (\widetilde{\mathrm{id}_P}(X))(Y)$. C'est ce deuxième foncteur qui va se révéler être un foncteur produit.
C'est ce deuxième foncteur qui va se révéler être un foncteur produit.

Cette dernière remarque devrait nous conduire à adopter la notation traditionnelle $X \times Y = \times(X, Y)$ pour X, Y objets de P. Pourtant nous utiliserons de préférence une autre notation, celle-ci :

$$XY = \times(X, Y) \quad \text{pour} \quad X, Y \in \mathrm{Ob}(P),$$
$$fg = \times(f, g) \quad \text{pour} \quad f, g \in \mathrm{Fl}(P).$$

On pourrait ne voir dans ce choix que des raisons pratiques de meilleure lisibilité des calculs (la notation adoptée supportant mieux l'absence de parenthèses), mais elle est surtout d'ordre théorique. En effet on verra que dans des catégories plus riches que P — et qui seront décrites ultérieurement dans une deuxième partie — ces deux notions toutes deux utiles deviennent distinctes, de sorte que la notation actuelle continuera à coexister avec la notation classique des produits. Mais même pour nous limiter au cas de P indiquons par exemple que si on ajoutait librement des produits à P, ceux-ci ne coïncideraient pas avec les produits actuels. D'ailleurs dans la plupart des catégories PL (la duale d'un topos par exemple) on n'a pas d'isomorphisme entre NN et N×N. La situation est tout à fait analogue au cas bien connu de la catégorie à coproduits binaires libre engendrée par (.) (qui est équivalente d'ailleurs à la catégorie des ensembles finis).

Nous conviendrons de noter fY au lieu de $f(\mathrm{id}\ Y)$ et Xg au lieu de $(\mathrm{id}\ X)g$. Pour faciliter la compréhension des calculs qui vont suivre, rappelons la formule dite "règle de Godement" : pour tout

$$X \xrightarrow{f} X' \xrightarrow{f'} X'', \qquad Y \xrightarrow{g} Y' \xrightarrow{g'} Y''$$

dans P on a

$$(f' \circ f)(g' \circ g) = f'g' \circ fg$$

et en particulier pour $f : X \to X'$, $g : Y \to Y'$,

$$fg = fY' \circ Xg = X'g \circ fY \, .$$

Comme on peut le constater sur ces exemples, on a adopté une convention de "priorité" de l'opération produit sur l'opération de composition qui permet de supprimer les parenthèses.

Ce produit est associatif et l'objet 1 est "élément neutre". En effet pour tout objet X de P et respectivement pour toute flèche $f : X \to X'$, on a un unique homomorphisme $\tilde{X} : P \to P$ et une unique transformation naturelle $\tilde{f} : \tilde{X} \to \tilde{X}'$ caractérisés par les relations $\tilde{X}(1) = X$, $\tilde{f}(1) = f$. Alors, par unicité, pour tous objets X, Y de P : $\widetilde{\tilde{Y}(X)} = \tilde{Y}\tilde{X}$, comme on le constate en appliquant cette égalité à l'objet 1. Egalement pour tout $f : X \to X'$, $g : Y \to Y'$ dans P on a $\widetilde{\tilde{Y}(f)} = \tilde{Y}\tilde{f}$, $\widetilde{\tilde{g}(X)} = \tilde{g}\tilde{X}$. Par ailleurs les $\tilde{X}$ et $\tilde{f}$ sont obtenus par composition de $id_P : P \to P^P$ avec les homomorphismes PL d'évaluation, donc $XY = \tilde{Y}(X)$, $Xg = \tilde{g}(X)$, $fY = \tilde{Y}(f)$, d'où on tire pour $h : Z \to Z'$: $(fY)Z = f(YZ)$, $(Xg)Z = X(gZ)$, $(XY)h = X(Yh)$, d'où l'associativité $(fg)h = f(gh)$ par la "règle de Godement". De même, $f\tilde{1} = f = 1f$ car $\tilde{id}_P = \tilde{\tilde{1}}$.

Reste quand même à régler un risque possible de conflit entre la notation des opérations de Peano-Lawvere NX, zX, sX pour un objet X de P avec la notation identique des produits cartésiens de N, z, s (i.e. N1, z1, s1, dont in comprend mieux maintenant l'élimination du 1) avec X. En fait il ne peut y avoir conflit, car le calcul "point par point" de Lemme 1 nous indique que ces notions sont identiques. Il en est de même de la notation N^p ($p \in \mathbf{N}$) puisque celle-ci désigne aussi bien une itération qu'une puissance cartésienne. Tout ceci vient d'ailleurs renforcer le choix qui a été fait de la notation des produits.

Proposition 2. *P admet des produits cartésiens et ceux-ci sont donnés par le foncteur* $\times : P \times P \to P$.

Preuve. Rappelons qu'un foncteur $\times : P \times P \to P$ est appelé un foncteur produit (cartésien) si ce foncteur est un adjoint à droite du foncteur "diagonal" $\Delta : P \to P \times P$, i.e. $\Delta(X) = (X, X)$ pour un objet X de P. Dans notre travail sur les algèbres graphiques on a montré que cela revient en plus du foncteur $\times : P^2 \to P$ à la donnée de trois transformations naturelles

$$\pi : \times \to pr, \quad \pi' : \times \to pr', \quad \delta : idP \to \times\Delta$$

où pr, pr' : $P \times P \to P$ sont les projections canoniques, et ces données doivent satisfaire, pour tous objets X, Y, Z de P , les équations

$$(*) \qquad \pi(X, X) \circ \delta X = \mathrm{id}\, X, \quad \pi'(X, X) \circ \delta X = \mathrm{id}\, X,$$
$$(\pi(Y, Z) \times \pi'(Y, Z)) \circ \delta(Y \times Z) = \mathrm{id}(Y \times Z)$$

(on note ici plutôt YZ au lieu de YxZ)

$$\begin{tikzcd}
X \times X \arrow[d, bend right=60, "\pi(X,X)"'] \arrow[d, bend left=60, "\pi'(X,X)"] \\
X \arrow[u, "\delta X"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & (Y\times Z)\times(Y\times Z) & \\
 & Y\times Z \arrow[u, "\delta(Y\times Z)"'] \arrow[u, bend left=60, "\pi(Y,Z)\times\pi'(Y,Z)"] \arrow[dl, "\pi(Y,Z)"'] \arrow[dr, "\pi'(Y,Z)"] & \\
Y & & Z
\end{tikzcd}$$

qui se résument donc par $\Delta \dashv \times$.

Construisons d'abord les transformations naturelles π, π' . Pour cela rappelons que, dans une catégorie cartésienne E les projections π, π' peuvent s'expliciter à partir de la transformation naturelle ε : $\mathrm{id}\, E \to c_1$(définie à la section précédente) par les relations (à isomorphismes près) :

$$\pi(Y, Z) = Y \times \varepsilon Z, \qquad \pi'(Y, Z) = \varepsilon Y \times Z$$

(Nous devrions écrire par exemple id $Y \times \varepsilon Z$ au lieu de $Y \times \varepsilon Z$). Cela nous suggère de poser dans P:

$$\pi_{p,q} = \pi(N^p, N^q) = N^p \varepsilon_q\,, \quad \pi'_{p,q} = \pi'(N^p, N^q) = \varepsilon_p N^q.$$

On va d'abord montrer la naturalité de ces flèches, i.e. pour tout f: $N^p \to N^{p'}$ et g : $N^q \to N^{q'}$ on doit avoir

$$\pi_{p',q'} \circ (fg) = f \circ \pi_{p,q}\ , \quad \pi_{p',q'} \circ (fg) = g \circ \pi_{p,q}\ .$$

Cela se constate sur le diagramme commutatif ci-dessous, par bifonc-

$$\begin{tikzcd}
N^p \arrow[d, "f"'] & N^{p+q} \arrow[l, "N^p\varepsilon_q"'] \arrow[r, "\varepsilon_p N^q"] \arrow[d, "fg"] & N^q \arrow[d, "g"] \\
N^{p'} & N^{p'+q'} \arrow[l, "N^{p'}\varepsilon_{q'}"'] \arrow[r, "\varepsilon_{p'} N^{q'}"] & N^{q'}
\end{tikzcd}$$

torialité d'un produit x , et naturalité de ε.

On définit maintenant δ par récurrence :

$$\delta_0 = \delta 1 = \mathrm{id}\ 1, \qquad \delta_{p+1} = \delta N^{p+1} = r((zN^p)^2 \circ \delta_p,\ (sN^p)^2)$$

$$\begin{tikzcd} N^{2p} \arrow[r, "(zN^p)^2"] & N^{2(p+1)} \arrow[loop right, "(sN^p)^2"] \\ N^p \arrow[u, "\delta_p"] \arrow[r, "zN^p"] & N^{p+1} \arrow[u] \arrow[loop right, "sN^p"] \end{tikzcd}$$

c'est-à-dire que

$$\delta_{p+1} \circ zN^p = (zN^p)^2 \circ \delta_p \ , \quad \delta_{p+1} \circ sN^p = (sN^p)^2 \circ \delta_{p+1}$$

(on constate facilement que les δ_p se réalisent bien sur les diagonales dans les ensembles par $\tilde{1} : P \to \underline{\mathrm{Ens}}$).

Montrons la naturalité des δ_p, c'est-à-dire que pour tout $f : N^p \to N^q$ on a

$$f^2 \circ \delta_p = \delta_q \circ f$$

$$\begin{tikzcd} N^{2p} \arrow[r, "f^2"] & N^{2q} \\ N^p \arrow[u, "\delta_p"] \arrow[r, "f"] & N^q \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Cette fois nous allons raisonner par induction sur $\| f \|$:

- Si f est une identité, pas de problème.
- Si f est décomposable, même chose par l'hypothèse d'induction.
- Si f est une z -flèche ou une s-flèche, c'est alors simplement ce qui a été écrit plus haut dans la définition des δ.
- Reste le cas où f est une r -flèche :

$$f = r(g, g') \quad \text{avec} \quad \| g \| < \| f \|, \quad \| g' \| < \| f \| .$$

On se trouve devant le diagramme (en trait plein, complété par les flèches en pointillé pour le calcul) de la page suivante.

On veut montrer que

$$\delta_p \circ f = f^2 \circ \delta_p .$$

Il suffit de vérifier que les deux membres de cette égalité vérifient les mêmes équations caractéristiques que le morphisme

$$\begin{tikzcd}
& N^{2p} \arrow[loop above, "(sN^{p-1})^2"] \arrow[r, "f^2"] & N^{2q} \arrow[loop right, "g'^2"] \\
N^{2(p-1)} \arrow[ur, dashed, "(zN^{p-1})^2"] \arrow[urr, dashed, "g^2"'] & & \\
& N^p \arrow[loop left, "sN^{p-1}"] \arrow[uu, "\delta_p"'] \arrow[r, "f"] & N^q \arrow[loop right, "g'"] \arrow[uu, "\delta_q"'] \\
N^{p-1} \arrow[uu, dashed, "\delta_{p-1}"] \arrow[ur, "zN^{p-1}"] \arrow[urr, "g"'] & &
\end{tikzcd}$$

$$r(\delta_q \circ g,\ g'^2) = r(g^2 \circ \delta_{p-1},\ g'^2)$$

où l'égalité $\delta_q \circ g = g^2 \circ \delta_{p-1}$ résulte de l'hypothèse d'induction. Autrement dit on doit vérifier que si $r = \delta_q \circ f$ ou $r = f^2 \circ \delta_p$, dans les deux cas ce morphisme satisfait les équations :

$$r \circ z\,N^{p-1} = g^2 \circ \delta_{p-1}, \qquad r \circ sN^{p-1} = g'^2 \circ r\ .$$

Les détails de ce calcul sont les suivants :

$$(\delta_q \circ f) \circ zN^{p-1} = \delta_q \circ g = g^2 \circ \delta_{p-1},$$

$$(f^2 \circ \delta_p) \circ zN^{p-1} \underset{\text{déf.}}{=} f^2 \circ (zN^{p-1})^2 \circ \delta_{p-1} = g^2 \circ \delta_{p-1},$$

$$(\delta_q \circ f) \circ s\,N^{p-1} = \delta_q \circ g' \circ f \underset{\text{ind.}}{=} g'^2 \circ (\delta_q \circ f),$$

$$(f^2 \circ \delta_p) \circ s\,N^{p-1} = f^2 \circ (sN^{p-1})^2 \circ \delta_p \underset{\text{fonct.}}{=} (f \circ sN^{p-1})^2 \circ \delta_p =$$

$$= (g' \circ f)^2 \circ \delta_p = g'^2 \circ (f^2 \circ \delta_p).$$

On a maintenant construit tous les ingrédients. Il reste à vérifier les équations (*) écrites plus haut, qu'on réécrit :

$$(*) \qquad \varepsilon_p N^p \circ \delta_p = \mathrm{id}\ N^p, \qquad N^p \varepsilon_p \circ \delta_p = \mathrm{id}\ N^p,$$

$$(N^p \varepsilon_q)(\varepsilon_p N^q) \circ \delta_{p+q} = \mathrm{id}\ N^{p+q}\ .$$

On démontre les deux premiers par récurrence sur p : C'est évident pour $p = 0$ (1 est objet final) et le passage de p -1 à p se suit sur le diagramme de la page suivante.

On doit simplement vérifier que les flèches fermées $\varepsilon_p N^p \circ \delta_p$ et $N^p \varepsilon_p \circ \delta_p$ satisfont les propriétés caractéristiques de

$$r(zN^{p-1},\ sN^{p-1}) = \mathrm{id}\ N^p\ .$$

$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=large]
N^{2(p-1)} \arrow[r, "(zN^{p-1})^2"] \arrow[d, shift right, swap, "N^{p-1}\varepsilon_{p-1}"] \arrow[d, bend left=60, "\varepsilon_{p-1}N^{p-1}"] & N^{2p} \arrow[loop right, "(sN^{p-1})^2"] \arrow[d, shift right, swap, "N^{p}\varepsilon_{p}"] \arrow[d, bend left=60, "\varepsilon_{p}N^{p}"] \\
N^{p-1} \arrow[u, shift right, swap, "\delta_{p-1}"] \arrow[r, "zN^{p-1}"] & N^{p} \arrow[u, shift right, swap, "\delta_{p}"] \arrow[loop right, "sN^{p-1}"]
\end{tikzcd}
$$

Faisons-le par exemple pour la première de ces flèches :

$$(\varepsilon_p N^p \circ \delta_p) \circ zN^{p-1} \underset{\text{Nat.}}{=} \varepsilon_p N^p \circ (zN^{p-1})^2 \circ \delta_{p-1}$$

$$\underset{\text{Nat.}}{=} zN^{p-1} \circ \varepsilon_{p-1} N^{p-1} \circ \delta_{p-1} \underset{\text{Ind}}{=} zN^{p-1},$$

et

$$(\varepsilon_p N^p \circ \delta_p) \circ sN^{p-1} \underset{\text{Nat}}{=} \varepsilon_p N^p \circ (sN^{p-1})^2 \circ \delta_p = sN^{p-1} \circ (\varepsilon_p N^p \circ \delta_p)$$

où cette dernière égalité exprime la naturalité des projections de produit. (Noter que l'hypothèse d'induction n'est intervenue que sur la première équation.)

Reste à démontrer la troisème équation qui s'écrit :

$$(N^p \varepsilon_q)(\varepsilon_p N^q) \circ \delta_{p+1} = \mathrm{id}\, N^{p+q}$$

pour tout p, $q \in \mathbf{N}$.

q étant fixé on va le démontrer par récurrence sur p .

- Pour $p = 0$ la relation se réduit à

$$\varepsilon_q N^q \circ \delta_q = \mathrm{id}\, N^q,$$

ce qui est justement l'une des égalités démontrées plus haut.

- Supposons-le vrai pour p -1 et démontrons-le pour p . Pour cela il suffit de démontrer que le premier membre $(N^p \varepsilon_q \varepsilon_p N^q) \circ \delta_{p+q}$ satisfait les propriétés caractéristiques du crochet récursif

$$r\,(zN^{p+q}, sN^{p+q}) = \mathrm{id}\, N^{p+q},$$

c'est-à-dire qu'on doit démontrer les deux équations

$$(N^p \varepsilon_q \varepsilon_p N^q \circ \delta_{p+q}) \circ zN^{p+q-1} = zN^{p+q-1},$$

$$(N^p \varepsilon_q \varepsilon_p N^q \circ \delta_{p+q}) \circ sN^{p+q-1} = sN^{p+q-1} \circ (N^p \varepsilon_q \varepsilon_p N^q \circ \delta_{p+q}).$$

Traitons la première :

$$(N^p \varepsilon_q \varepsilon_p N^q \circ \delta_{p+q}) \circ zN^{p+q-1} \underset{\text{Déf.}\delta}{=} N^p \varepsilon_q \varepsilon_p N^q \underset{\gamma}{\circ} (zN^{p+q-1})^2 \circ \delta_{p+q-1} = zN^{p+q-1}.$$

Cette dernière égalité étant obtenue par le calcul suivant :

$$\begin{tikzcd}
N^{2(p+q-1)} \arrow[rr, "(zN^{p+q-1})^2"] \arrow[d, shift left, "N^{p-1}\varepsilon_q"] & & N^{2(p+q)} \arrow[loop right, "(sN^{p+q-1})^2"] \arrow[d, shift left, "N^p\varepsilon_q\varepsilon_p N^q"] \\
N^{p+q-1} \arrow[rr, "zN^{p+q-1}"] \arrow[u, shift left, "\delta_{p+q-1}"] & & N^{p+q} \arrow[loop right, "sN^{p+q-1}"] \arrow[u, shift left, "\delta_{p+q}"]
\end{tikzcd}$$

$$N^p\,\varepsilon_q\varepsilon_p N^q \circ (zN^{p+q-1})^2 = N^p\varepsilon_q\varepsilon_p N^q \circ zN^{p+q-1}zN^{p+q-1}$$

par bifonctorialité des produits
$$\overset{=}{} (N^p \circ zN^{p-1})(\varepsilon_p\varepsilon_q \circ N^q zN^{p-1})(N^q \circ N^q) =$$

$$= (zN^{p-1})(\varepsilon_{p+q-1})(N^q) =$$

$$= (zN^{p-1} \circ N^{p-1}) \circ (1 \circ \varepsilon_q\varepsilon_{p-1})(N^q \circ N^q) =$$

$$= (zN^{p-1})(1)(N^q) \circ (N^{p-1})(\varepsilon_q\varepsilon_{p-1})(N^q) = zN^{p+q-1} \circ N^{p-1}\varepsilon_q\varepsilon_{p-1}N^q.$$

Donc

$$N^p\,\varepsilon_q\varepsilon_p N^q\ (zN^{p+q-1})^2 \circ \delta_{p+q-1} = zN^{p+q-1} \circ N^{p-1}\,\varepsilon_q\varepsilon_{p-1}N^q \circ \delta_{p+q-1} = zN^{p+q-1}.$$

Traitons maintenant la seconde :

$$N^p\varepsilon_q\varepsilon_p N^q \circ \delta_{p+q} \circ sN^{p+q-1} \overset{=}{\text{Déf.}\delta}$$

$$= N^p\,\varepsilon_q\varepsilon_p N^q \circ (sN^{p+q-1})^2 \circ \delta_{p+q} = sN^{p+q-1} \circ N^p\varepsilon_q\varepsilon_p N^q \circ \delta_{p+q}.$$

où cette dernière égalité est obtenue par le calcul suivant :

$$N^p\,\varepsilon_q\varepsilon_p N^q \circ (sN^{p+q-1})^2 = N^p\varepsilon_q\varepsilon_p N^q \circ sN^{p+q-1}\,sN^{p+q-1} =$$

$$(N^p \circ sN^{p-1})(\varepsilon_q \circ N^q)(\varepsilon_q \circ sN^{p-1})(N^q \circ N^q) = (sN^{p-1})(\varepsilon_q)(\varepsilon_q)(N^q) =$$

$$= (sN^{p-1} \circ N^p)(1 \circ \varepsilon_q\varepsilon_p)(N^q \circ N^q) = (sN^{p-1})(1)(N^q) \circ (N^p\varepsilon_q\varepsilon_p N^q) =$$

$$= sN^{p+q-1} \circ N^p\varepsilon_q\varepsilon_p N^q.$$

D'où la conclusion. Et ceci achève la preuve. ◊

Théorème 3. *P est cartésienne.*

Remarque. Comme nous l'avons déjà indiqué dans l'introduction, *P* n'est pas la catégorie PL cartésienne libre ... Mais peut-être le devient-elle si on ajoute des conditions de commutation de ces produits, par exemple avec les extensions de Kan le long de

$$\begin{tikzcd} (\cdot) \arrow[r] & (\cdot \arrow[loop right]) \end{tikzcd}.$$

6. $\acute{P}$ N'EST PAS ISOMORPHE A LA CATÉGORIE DES FONCTIONS RÉCURSIVES PRIMITIVES.

La catégorie des ensembles $\underline{\text{Ens}}$ est évidemment une catégorie PL, l'ensemble final 1 fournit un unique homomorphisme de catégories PL :

$$\begin{tikzcd}
(\cdot) \arrow[r, "(1)"] \arrow[dr, "(1)"'] & P \arrow[d, "\tilde{1}"] \\
& \underline{\text{Ens}}
\end{tikzcd}$$

Comme on va le voir le graphe image de cet homomorphisme $\tilde{1} : P \to \underline{\text{Ens}}$ n'est autre que la catégorie $\mathbf{P}$ des fonctions récursives primitives. Cela donne un homomorphisme $\tilde{1} : P \to \mathbf{P}$. Si celui-ci était un isomorphisme, les propriétés de P obtenues aux sections précédentes seraient trivialement conséquences de cet isomorphisme, puisque $\mathbf{P}$ satisfait évidemment ces propriétés. Mais nous allons voir que $\tilde{1}$ n'est pas un isomorphisme — et ce fait est général, toute autre catégorie formelle analogue à P , définie par une axiomatisation récursive, ne peut pas décrire une catégorie isomorphe à $\mathbf{P}$. Pour faire cette démonstration nous allons nous appuyer sur un théorème d'incomplétude, précisément nous utiliserons le théorème de Matisajevic (ou Matisajevic-Robinson-Davis- Putnam) qui donne une réponse négative au "10^e problème de Hilbert". Comme les méthodes de travail nous intéressent ici au moins autant que le résultat lui-même, nous ne chercherons pas nécessairement la manière la plus brève de le montrer et nous donnerons des démonstrations détaillées.

Lemme 1. *Le graphe image de l'homomorphisme $\tilde{1} : P \to \underline{\text{Ens}}$ est une sous-catégorie PL de $\underline{\text{Ens}}$. On la notera $\mathbf{P}$, ses objets sont les ensembles $\mathbf{N}^p$ ($p \in \mathbf{N}$), et ses morphismes sont les applications $f : \mathbf{N}^p \to \mathbf{N}^q$ ($p, q \in \mathbf{N}$) formées des q-uplets $f = (f_0, f_1, \ldots, f_{q-1})$ de fonctions récursives primitives.*

Preuve. La seule chose à démontrer est un fait qui concerne les fonctions récursives primitives : il faut montrer que dans la définition de ces fonctions il y a équivalence entre le "schéma de récursion simultanée" (qui est la forme que prend l'axiome de Peano-Lawvere dans $\underline{\text{Ens}}$ limité aux applications $f : \mathbf{N}^p \to \mathbf{N}^q$) et le "schéma de récursion primitive". Précisons :

- Le "schéma de récursion simultanée" a la forme suivante : si $f : \mathbf{N}^p \to \mathbf{N}^q$ et $g : \mathbf{N}^q \to \mathbf{N}^p$ sont récursives primitives, alors la fonction $h : \mathbf{N}^{p+1} \to \mathbf{N}^q$ définie par :

$$\begin{cases} h_i(0, x) = f_i(x), \\ h_i(n+1, x) = g_i(h_1(n, x), \ldots, h_q(n, x)) \end{cases}$$

pour tout $n \in \mathbf{N}$, $x \in \mathbf{N}^p$ et $0 \leqq i < q-1$ en posant $h = (h_0, h_1, \ldots, h_q)$, est récursive primitive.

- Le "schéma de récursion primitive" a la forme suivante : si $f : \mathbf{N}^p \to \mathbf{N}^q$ et $g : \mathbf{N}^{p+q+1} \to \mathbf{N}^q$ sont récursives primitives, alors la fonction $h : \mathbf{N}^{p+1} \to \mathbf{N}^q$ définie par

$$\begin{cases} h_i(0, x) = f_i(x) \\ h_i(n+1, x) = g_i(n, x, h_1(n, x), \ldots, h_q(n, x)) \end{cases}$$

pour tout $n \in \mathbf{N}$, $x \in \mathbf{N}^p$ et $0 \leqq i \leqq q$ est récursive primitive.

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{N}^{p+1} \arrow[loop left, "s\times\mathbf{N}^p"] \arrow[dr, "h"] & \\
\mathbf{N}^p \arrow[u, "z\times\mathbf{N}^p"] \arrow[r, "f"'] & \mathbf{N}^q \arrow[loop right, "g"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbf{N}^{p+1} \arrow[loop left, "s\times\mathbf{N}^p"] \arrow[r, "{[\mathrm{id}\,\mathbf{N}^{p+1}, h]}"] \arrow[dr, "h"'] & \mathbf{N}^{p+q+1} \arrow[d, "g"] \\
\mathbf{N}^p \arrow[u, "z\times\mathbf{N}^p"] \arrow[r, "f"'] & \mathbf{N}^q
\end{tikzcd}$$

Ce deuxième schéma n'est énoncé habituellement que pour $q = 1$, mais il n'y a aucune difficulté à l'entendre. Le premier schéma n'est alors qu'un cas particulier du deuxième. Enfin on démontre que le premier entraîne le second par des techniques standards des fonctions récursives primitives (exemple : "Fonctions récursives" de Grzegorczyk, page 39).

Le seul point qui reste à vérifier est que le foncteur $\tilde{I} : P \to \underline{\mathrm{Ens}}$ transforme bien les structures cartésiennes π, π', δ de P dans les structures homologues canoniques de $\underline{\mathrm{Ens}}$, ces structures étant constituées de fonctions récursives primitives. ◊

Remarque. En fait nous aurions pu démontrer le "schéma de récurrence primitive" évoqué dans la preuve, non pas dans $\underline{\mathrm{Ens}}$ mais dans la catégorie syntaxique P directement. Notre but ici n'étant pas de faire des constructions exhaustives dans P , nous avons reporté cette construction à un travail ultérieur.

Le reste de cette section est maintenant consacré à la démonstration du résultat suivant :

Théorème 2. *L'homomorphisme canonique* $\tilde{I} : P \to \mathrm{P}$ *n'est pas un isomorphisme.*

Mais on a bien sûr :

Lemme 3. *Cet homomorphisme est bijectif sur les objets et surjectif sur les flèches.*

Cette remarque — qui redonne une définition naturelle des fonctions récursives primitives — est utile à la description de la congruence nucléaire associée à cet homomorphisme.

Avant de commencer la preuve de ce théorème, indiquons-en la nature générale. Elle est basée sur un résultat sur les fonctions récursives :

> Il n'existe pas d'algorithme (uniforme) qui permette de décider, quand on se donne un couple $f, g : \mathbf{N} \rightrightarrows \mathbf{N}$ de fonctions récursives primitives, si on a $f = g$ ou non.

On conservera au mot "algorithme" son sens intuitif : il suffit d'accepter que ceux qui seront proposés en sont bien, ce qui ne sera pas difficile à admettre. Par contre le mot "fonctions" est, dans ce dernier énoncé, ambigü. En fait il s'agit de "programme de calcul récursif primitif" qui, eux, sont des objets de nature "concrète" (ou finis) et dont on peut donner une liste. Et c'est à leur propos qu'on peut se demander s'ils définissent ou non la même fonction. De toute façon nous allons préciser :

Pour cela nous allons nous donner une structure graphique qui va justement décrire ces "programmes". D'abord voici une définition :

On appelle *précatégorie* PL la donnée d'un graphe muni d'opérations et d'équations de positions de la forme (1) à (4) (Section 1). Nous les reproduisons ici pour la commodité de la lecture :

(1) $\begin{tikzcd} X \arrow[loop right, "\mathrm{id}\,X"] \end{tikzcd}$,

(2) $\begin{tikzcd} & Y \arrow[dr, "v"] & \\ X \arrow[ur, "u"] \arrow[rr, "v \circ u"'] & & Z \end{tikzcd}$,

(3) $\begin{tikzcd} X \arrow[r, "zX"] & NX \arrow[loop right, "sX"] \end{tikzcd}$,

(4) $\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "f"'] & NX \arrow[d, "r(f,\, g)"] \\ & Y \arrow[loop right, "g"] \end{tikzcd}$

Nous supprimons donc le reste de la définition des catégories PL. Un tel objet est évidemment une "algèbre graphique" et les catégories PL sont bien sûr des précatégories PL. On notera enfin que les précatégories PL ne sont pas en général des catégories.

On définit alors la précatégorie PL libre P' engendrée par le graphe (.) et on l'appelle *la précatégorie des programmes récursifs primitifs*. Il est bien clair que ses flèches correspondent bien à des "programmes" au sens souhaité et pourraient se décrire par des arbres finis. Les notations dans P' seront tout à fait semblables à celles de P (N, N^2, ..., z, s, ...) et par l'homomorphisme canonique

$$\begin{tikzcd} (.) \arrow[r, "(1)"] \arrow[dr, "(1)"'] & P \arrow[d, "\tilde{I}"] \\ & P \end{tikzcd}$$

On notera souvent par la même lettre un objet ou une flèche (un "programme") de P' et son image dans P .

Lemme 4. *Cet homomorphisme $\tilde{1} : P' \to P$ est bijectif sur les objets et surjectif sur les flèches.*

On a d'ailleurs un diagramme commutatif plus complet, avec les abus de notations que nous avons adoptés :

$$\begin{tikzcd}
(\cdot) \arrow[rr, "(1)"] \arrow[drr, "(1)"] \arrow[ddrr, bend right, "(1)"'] & & P' \arrow[d, "\tilde{1}"] \arrow[dd, bend left] \\
& & P \arrow[d, "\tilde{1}"] \\
& & \mathbf{P}
\end{tikzcd}$$

On a alors des congruences nucléaires :

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d] & P' \arrow[r, "\tilde{1}"] \arrow[d, "\mathrm{id}\, P'"] & P \arrow[d, "\tilde{1}"] \\
\overline{C} \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & P' \arrow[r, "\tilde{1}"] & \mathbf{P}
\end{tikzcd}$$

et ces deux congruences $C, \overline{C}$ sont deux sous-précatégories PL de la précatégorie PL $P' \times_{\mathbf{N}} P'$, c'est-à-dire la précatégorie PL qui a pour objets les N^p ($p \in \mathbf{N}$) de P' et pour flèches les couples de flèches "parallèles" de P' ,

$$f,\ g : \mathrm{N}^p \rightrightarrows \mathrm{N}^q .$$

La nature des opérations graphiques est telle que $P' \times_{\mathbf{N}} P'$ est de façon évidente munie d'une structure de précatégorie PL. (C'est en fait une sous-précatégorie PL de $P' \times P'$.)

Le diagramme ci-dessus se résume alors par : $C \subset \overline{C}$.

Preuve du Théorème. Dire que $P \simeq \mathbf{P}$ signifie la même chose que $C = \overline{C}$. Nous allons donc montrer que cette dernière égalité est en contradiction avec le résultat de récursivité énoncé plus haut. Nous pouvons même lui donner une forme plus spectaculaire qui nous évitera d'entrer dans la justification de la notion de "programme". Cette forme est le résultat de Matisajevic évoqué plus haut :

> Il n'existe pas d'algorithme (uniforme) qui permette de décider, étant donné deux polynômes $\mathrm{P}, \mathrm{Q} : \mathbf{N}^p \rightrightarrows \mathbf{N}$ à p variables et à coefficients dans $\mathbf{N}$, si oui ou non l'équation polynomiale $\mathrm{P}(\bar{n}) = \mathrm{Q}(\bar{n})$ a ou non des solutions $\bar{n} \in \mathbf{N}$.

Une fonction polynomiale étant déterminée par une suite finie de coefficients il est facile d'associer (uniformément) à chacune de ces fonctions un "programme polynomial" qui la calcule. Pour cela il suffit de définir des programmes qui calculent l'addition et la multiplication, l'addition est calculée par le programme (id NX, sX), tandis que pour la multiplication on commence par montrer que $1 \xrightarrow{Z} N \xleftarrow{S} N$ est un coproduit.

Ce résultat de Matisajevic entraîne aussitôt le résultat négatif sur les fonctions récursives primitives énoncé dans notre théorème. En effet considérons la fonction "diagonale" $\Delta : \mathbf{N}^2 \to \mathbf{N}$ définie pour tout $p, q \in \mathbf{N}$ par

$$\Delta(p, q) = \begin{cases} 0 & \text{si } p = q \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Elle est récursive primitive et dire que $P(\bar{n}) = Q(\bar{n})$ n'a pas de solution revient à dire que la fonction récursive primitive $\Delta(P, Q) : \mathbf{N}^p \to \mathbf{N}$ est identique à la fonction récursive primitive constante $1 : \mathbf{N}^p \to \mathbf{N}$. En fait on ramène facilement toutes ces questions sur des fonctions à des questions sur des programmes qu'on peut leur associer uniformément dans P'.

Enfin passons aux idées essentielles qui vont fermer le raisonnement : si $C = \overline{C}$ on va montrer qu'on peut obtenir un algorithme pour décider si deux flèches $f, g : N^p \rightrightarrows N$ de P', donc deux programmes, ont pour image dans **P** deux fonctions égales ou non. Précisément on va montrer qu'on a un premier algorithme qui, lorsque

$$(f, g) \in P' \times_{\mathbf{N}} P' - \overline{C}$$

se termine par une réponse positive. Ensuite on va montrer qu'on a un deuxième algorithme qui, lorsque $(f, g) \in C$ se termine par une réponse positive. Donc si on avait $C = \overline{C}$ la combinaison des deux algorithmes fonctionnant simultanément va décider si oui ou non $(f, g) \in \overline{C}$, donc si oui ou non les fonctions associées dans **P** sont égales ou non.

Reste à préciser les algorithmes :

- Le cas de $(f, g) \in P' \times_{\mathbf{N}} P' - \overline{C}$ est le plus rapide à décrire : pour obtenir une réponse positive à la question $f \neq g$ dans **P**, il suffit de tester pour toutes les valeurs $\bar{n} \in \mathbf{N}$ énumérées dans un ordre, par exemple dans le cas à une variable $p = 1$, les énoncés

$$f(0) = g(0), \quad f(1) = g(1), \quad \dots \text{ etc } \dots$$

Si $f \neq g$ l'une de ces égalités sera fausse, et le calcul s'arrêtera.

- Le cas de $(f, g) \in C$ est un peu plus long à décrire, mais il se fait par des méthodes standards d'énumération. Plutôt que d'en donner une description précise sans intérêt, indiquons la méthode : une liste de tous les éléments de Fl(C) s'établit de la même façon qu'on établit par exemple la liste de tous les théorèmes d'une théorie récursive (i.e. dont on a un algorithme pour décider si une formule est ou non un axiome). Ici les "formules" sont les éléments de Fl(P') et les "théorèmes" sont les éléments de Fl(C). Quant au "système d'axiomes", il est constitué par des "schémas d'axiomes", dont voici la liste :

(1) Pour tout $\cdot \xrightarrow{u} \cdot$ dans P' on a

$$\cdot \;\underset{u}{\overset{u \circ id(a(u))}{\underset{\longrightarrow}{\overset{\longrightarrow}{///}}}}\; \cdot \qquad\qquad \cdot \;\underset{u}{\overset{id(b(u)) \circ u}{\underset{\longrightarrow}{\overset{\longrightarrow}{///}}}}\; \cdot$$

où l'écriture $\cdot \;\underset{y}{\overset{x}{\underset{\longrightarrow}{\overset{\longrightarrow}{///}}}}\; \cdot$ signifie $(x, y) \in$ Fl(C) et est l'analogue de "$\vdash (x, y)$".

(2) Pour tout $\cdot \xrightarrow{u} \cdot \xrightarrow{v} \cdot \xrightarrow{w} \cdot$ dans P':

$$\cdot \;\underset{(w \circ v) \circ u}{\overset{w \circ (v \circ u)}{\underset{\longrightarrow}{\overset{\longrightarrow}{///}}}}\; \cdot$$

(3) Pour tout objet X de P' :

$$\cdot \;\underset{r(zX,\ sX)}{\overset{id\ NX}{\underset{\longrightarrow}{\overset{\longrightarrow}{///}}}}\; \cdot$$

(4) Pour tout

$$X \xrightarrow{f} Y \circlearrowleft g$$

dans P':

$$\cdot \;\underset{f}{\overset{r(f,\ g) \circ zX}{\underset{\longrightarrow}{\overset{\longrightarrow}{///}}}}\; \cdot \qquad\qquad \cdot \;\underset{g \circ r(f,\ g)}{\overset{r(f,\ g) \circ sX}{\underset{\longrightarrow}{\overset{\longrightarrow}{///}}}}\; \cdot$$

Enfin des "règles d'inférence", d'abord celle qui correspond à la semi-équation :

(5) Pour tout

$$\cdot \xrightarrow{f} \cdot \overset{g}{\circlearrowleft} \xrightarrow{m} \cdot \circlearrowleft g'$$

$$\dfrac{\cdot \;\underset{m \circ g}{\overset{g' \circ m}{\underset{\longrightarrow}{\overset{\longrightarrow}{///}}}}\; \cdot}{\cdot \;\underset{r(m \circ f,\ g')}{\overset{m \circ r(f,\ g)}{\underset{\longrightarrow}{\overset{\longrightarrow}{///}}}}\; \cdot}$$

Et pour terminer, les règles d'inférence qui font de C une relation d'équivalence (alors que, jusqu'ici, on en a fait une sous-structure):

(6) Pour tout $\bullet \xrightarrow{u} \bullet$,

$$\bullet \;\substack{\xrightarrow{u} \\ /// \\ \xrightarrow[u]{}}\; \bullet$$

(7) Pour tout $\bullet \;\substack{\xrightarrow{u} \\ /// \\ \xrightarrow[v]{}}\; \bullet$,

$$\frac{\bullet \;\substack{\xrightarrow{u} \\ /// \\ \xrightarrow[v]{}}\; \bullet}{\bullet \;\substack{\xrightarrow{v} \\ /// \\ \xrightarrow[u]{}}\; \bullet}$$

(8) Pour tout $\bullet \;\substack{\xrightarrow{u} \\ \xrightarrow{v} \\ \xrightarrow{w}}\; \bullet$,

$$\frac{\bullet \;\substack{\xrightarrow{u} \\ /// \\ \xrightarrow[v]{}}\; \bullet \quad \text{et} \quad \bullet \;\substack{\xrightarrow{v} \\ /// \\ \xrightarrow[w]{}}\; \bullet}{\bullet \;\substack{\xrightarrow{u} \\ /// \\ \xrightarrow[w]{}}\; \bullet}$$

◊

Remarques. 1. Malgré l'usage de guillemets dans les expressions telles que : "axiomes", "théorème", etc... il s'agit réellement d'une théorie du premier ordre qu'on pourrait appeler "théorie arithmétique récursive primitive", chaque écriture

$$\bullet \;\substack{\xrightarrow{u} \\ /// \\ \xrightarrow[v]{}}\; \bullet$$

étant une formule "$u = v$ ".

(2) Bien que dans le topos initial E_0 (i.e. topos libre avec NNO engendré par $\emptyset$) un fait analogue subsiste, l'homomorphisme $\tilde{I} : P \to E_0$ n'est pas non plus fidèle. Il en est de même si E_0 est de plus le topos booléien libre avec NNO engendré par $\emptyset$, etc...

U.E.R. de Mathématiques
Université Paris VII
Tour 45-55, 5e étage
2 Place Jussieu
75005 PARIS