

CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE CATÉGORIQUES

PAUL VER EECHE

Sur le groupe fondamental d'un feuilletage

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 25, n° 4 (1984), p. 381-428

http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1984__25_4_381_0

© Andrée C. Ehresmann et les auteurs, 1984, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LE GROUPE FONDAMENTAL D'UN FEUILLETAGE

par Paul VER EECHE

A la chère et vénérée mémoire
de Charles Ehresmann

ABSTRACT. This paper gives complete proofs of results announced in a previous note [10]. As a contribution to recent work on the transverse structure of a foliation [6, 11], the fundamental group $\pi(F)$ of a foliated manifold (V, F) , introduced by van Est [7, 8] in the abstract framework of manifold schemes is here considered from a purely geometrical point of view. A canonical factorization $\pi(V) \xrightarrow{\chi} \pi(F) \xrightarrow{\vartheta} \pi(V/F)$ of $p_* : \pi(V) \rightarrow \pi(V/F)$ is described, where $p : V \rightarrow V/F$ is the canonical map on the space of leaves. χ is an epimorphism, and for F simple, ϑ is an isomorphism. More generally, $\pi(F) \simeq \pi(f^{-1}(F))$ for a surmersion $f : U \rightarrow V$ with connected fibers. For each leaf F of (V, F) there is a natural homomorphism $\eta_F : \text{Hol}(F) \rightarrow \pi(F)$ whose kernel appears to be the holonomy group $\text{Hol}(\tilde{F})$ of every leaf \tilde{F} above F by a suitable covering map $q : \tilde{V} \rightarrow V$, "universal" respecting the fundamental group, i.e. with $\pi(q^{-1}(F))$ trivial.

INTRODUCTION.

La définition du groupe fondamental $\pi(F)$ d'un feuilletage F sur une variété V a été présentée par van Est [7, 8] dans le cadre abstrait des schémas de variété. Or cet invariant global de la structure transverse de F apparaît, on le montre dans cet article, comme le groupe structural d'un groupoïde transitif naturel ayant pour objets les sous-variétés transverses simplement connexes, ou encore comme le groupe structural d'un revêtement galoisien naturel de V , défini à un isomorphisme canonique près. Le procédé est analogue à celui qui fait apparaître l'holonomie $\text{Hol}(F)$ d'une feuille F , invariant local de la structure transverse, comme le groupe structural d'un revêtement galoisien de germes distingués au-dessus de F [2, 4]. On retrouve ainsi, par des voies géométriques directes et assez expéditives, toutes les propriétés essentielles de $\pi(F)$, en faisant l'économie des considérations abstraites sur le schéma de variété associé à F . Telle est la portée de la contribution de cet article parmi d'autres [5, 6, 11] à l'étude de la structure transverse d'un feuilletage.

Les notations non explicitées de cet article, dont l'essentiel a déjà été communiqué dans une Note [10], sont soit les notations usu-

elles, soit celles de [9, 10], hormis qu'on écrira $\varphi\psi$ pour désigner le composé des germes

$$\varphi \in J(U, V), \quad \psi \in J(V, W), \quad \text{où } \beta(\varphi) = \alpha(\psi) ;$$

$J(V, W)$ (resp. $\Pi(V, W)$) désigne l'espace des germes (resp. inversibles) de morphismes de la variété V dans la variété W , muni de la topologie d'espace étalé par l'application source

$$\alpha : J(V, W) \rightarrow V .$$

On désigne par β l'application but.

1. LE GROUPOÏDE $\pi(F)$.

1.1. Dans ce qui suit, (V, F) désignera une variété connexe séparée V , de classe C^r , $1 \leq r \leq \infty$ ou $r = \omega$, munie d'un feuilletage F de classe C^p , $p \geq r$. On désignera par V/F l'espace des feuilles. Toute sous-variété Σ transverse à F , ce qu'on notera aussi $\Sigma \diamond F$, sera supposée connexe et simplement connexe. On désignera par F^\diamond l'ensemble de toutes les sous-variétés transverses, et par F° l'ensemble des sous-variétés pointées transverses à la feuille F , c'est-à-dire les couples

$$(\Sigma, x) \quad \text{où } \Sigma \diamond F \quad \text{et} \quad x \in \Sigma \cap F .$$

Pour $(\Sigma_0, x_0), (\Sigma, x) \in F^\circ$, on désignera par

$$\text{Hol}_{(\Sigma_0, x_0)/(\Sigma, x)}(F)$$

le sous-ensemble de $\Pi_{x_0, x}(\Sigma_0, \Sigma)$ formé des germes d'holonomie [9], où $\Pi_{x_0, x}(\Sigma_0, \Sigma)$ est l'ensemble des $\varphi \in \Pi(\Sigma_0, \Sigma)$ de source x_0 et de but x . Pour $x \in \Sigma_0 \cap \Sigma$, où $\Sigma_0, \Sigma \in F^\diamond$, on désignera par $\bar{x}_{\Sigma_0 \Sigma}$, ou plus simplement par \bar{x} sauf risque de confusion, l'élément de $\text{Hol}_{(\Sigma_0, x)/(\Sigma, x)}(F_x)$ associé à un lacet constant en x de la feuille F_x par ce point ; c'est dire que \bar{x} est l'image de l'élément neutre du groupe $\pi_x(F_x)$ par la surjection naturelle

$$\chi : \pi_x(F_x) \rightarrow \text{Hol}_{(\Sigma_0, x_0)/(\Sigma, x)}(F_x)$$

[9]. Ceci revient encore à dire qu'on a

$$\varphi|_{\Sigma_0} = \bar{x}\varphi|_{\Sigma} \quad \text{dans} \quad \Pi(\Sigma_0, \mathbb{R}^q),$$

où $q = \text{codim } F$, pour tout germe distingué [9] φ de source x .

Etant donné des sous-variétés transverses Σ_0, Σ , on désignera par $\text{Hol}_{\Sigma_0 \Sigma}(F)$ le sous-ensemble

$$y \in \bigcup_{x \in \Sigma_0} \cap_{F_x} \text{Hol}_{(\Sigma_0, \varphi)(\Sigma, y)}(F_x)$$

de $\Pi(\Sigma_0, \Sigma)$. On écrira $\text{Hol}_{\Sigma_0}(F)$ au lieu de $\text{Hol}_{\Sigma_0 \Sigma_0}(F)$. Dire que $\text{Hol}_{\Sigma_0 \Sigma}(F)$ est non vide revient à dire que Σ rencontre l'ouvert saturé

$$\rho(\Sigma_0) = \bigcup_{x \in \Sigma_0} F_x,$$

ou encore que Σ_0 rencontre $\rho(\Sigma)$.

On appellera chaîne d'holonomie de (V, F) un système

$$\Gamma = (\Sigma_0, \varphi_0, \Sigma_1, \dots, \Sigma_{n-1}, \varphi_{n-1}, \Sigma_n),$$

où $\Sigma_i \diamond F$, $i = 0, \dots, n$, et où $\varphi_i \in \text{Hol}_{\Sigma_i \Sigma_{i+1}}(F)$, $i = 0, \dots, n-1$. On dira que Σ_0 et Σ_n sont respectivement l'origine et l'extrémité de Γ . On désignera alors par $\text{Hol}_{\Sigma_0 \Sigma}(F)$ l'ensemble des chaînes d'holonomie d'origine Σ_0 et d'extrémité Σ . On identifiera $\text{Hol}_{\Sigma_0 \Sigma}(F)$, supposé non vide, avec un sous-ensemble de $\overline{\text{Hol}}_{\Sigma_0 \Sigma}(F)$ par l'injection $\varphi \mapsto (\Sigma_0, \varphi, \Sigma)$.

Remarque.

$$\overline{\text{Hol}}_{\Sigma_0 \Sigma}(F) \neq \emptyset.$$

L'énoncé étant évident dans les cas particuliers $V = \rho(\Sigma_0)$, $V = \rho(\Sigma)$, qui entraînent

$$\emptyset \neq \text{Hol}_{\Sigma_0 \Sigma}(F) \subset \overline{\text{Hol}}_{\Sigma_0 \Sigma}(F),$$

considérons le cas général et soit $\gamma: [0, 1] \rightarrow V$ un chemin tel que

$$\gamma(0) \in \Sigma_0, \quad \gamma(1) \in \Sigma.$$

Il existe $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ et des ouverts

$$U_i \supset \gamma([t_i, t_{i+1}]), \quad i = 0, \dots, n-1,$$

connexes et simplement connexes tels que chaque feuilletage induit F_{U_i} , $i = 0, \dots, n-1$, soit trivial [9], ce qui entraîne que U_i est saturé relativement à F_{U_i} par une sous-variété transverse $T_i \subset U_i$. Pour des sous-variétés transverses Σ'_i , $i = 0, \dots, n$, avec

$$\begin{aligned} \gamma(0) \in \Sigma'_0 \subset U_0, \quad \gamma(t_i) \in \Sigma'_i \subset U_{i-1} \cap U_i \text{ pour } i = 1, \dots, n-1, \\ \text{et } \gamma(1) \in \Sigma'_n \subset U_{n-1}, \end{aligned}$$

on a alors

$$\text{Hol}_{\Sigma'_i T_i}(F) \supset \text{Hol}_{\Sigma'_i T_i}(F_{U_i}) \neq \emptyset,$$

$$\text{Hol}_{T_i \Sigma'_{i+1}}(F) \supset \text{Hol}_{T_i \Sigma'_{i+1}}(F_{U_i}) \neq \emptyset$$

et donc

$$\overline{\text{Hol}}_{\Sigma_i \Sigma_{i+1}}(F) \neq \emptyset \quad \text{pour } i = 0, \dots, n-1.$$

D'où $\overline{\text{Hol}}_{\Sigma_0 \Sigma_n}(F) \neq \emptyset$; compte tenu de

$$\overline{\gamma}(0) \in \overline{\text{Hol}}_{\Sigma_0 \Sigma_0}(F) \quad \text{et} \quad \overline{\gamma}(1) \in \overline{\text{Hol}}_{\Sigma_n \Sigma_n}(F),$$

il vient ensuite $\overline{\text{Hol}}_{\Sigma_0 \Sigma_n}(F) \neq \emptyset$.

Etant donné des sous-variétés transverses $\Sigma, \Sigma', \Sigma''$, on peut alors définir une application de $\overline{\text{Hol}}_{\Sigma \Sigma'}(F) \times \overline{\text{Hol}}_{\Sigma' \Sigma''}(F)$ dans $\overline{\text{Hol}}_{\Sigma \Sigma''}(F)$ et qui, à (Γ, Γ') où

$$\begin{aligned} \Gamma &= (\Sigma, \varphi_0, \Sigma_1, \dots, \Sigma_{n-1}, \varphi_{n-1}, \Sigma') \\ \text{et } \Gamma' &= (\Sigma', \psi_0, \Sigma'_1, \dots, \Sigma'_{m-1}, \psi_{m-1}, \Sigma''), \end{aligned}$$

fait correspondre

$$\Gamma * \Gamma' = (\Sigma, \varphi_0, \Sigma_1, \dots, \Sigma_{n-1}, \varphi_{n-1}, \Sigma', \psi_0, \dots, \Sigma'_{m-1}, \psi_{m-1}, \Sigma'').$$

D'où une loi de composition partiellement définie et associative sur l'ensemble des chaînes d'holonomie. On a

$$(\Sigma_0, \varphi_0, \Sigma_1, \dots, \Sigma_{n-1}, \varphi_{n-1}, \Sigma_n) = \varphi_0 * \dots * \varphi_{n-1}$$

dans $\overline{\text{Hol}}_{\Sigma_0 \Sigma_n}(F)$, compte tenu des inclusions

$$\overline{\text{Hol}}_{\Sigma_i \Sigma_{i+1}}(F) \subset \overline{\text{Hol}}_{\Sigma_i \Sigma_{i+1}}(F), \quad i = 0, \dots, n-1.$$

1.2. Reprenant la terminologie de [9] on dira qu'une sous-variété de V transverse à F est absolument transverse si

$$F_x \cap \Sigma = \{x\} \quad \text{pour tout } x \in \Sigma;$$

ce qui revient à dire que l'application canonique $\rho: V \rightarrow V/F$ induit un homéomorphisme de Σ sur un ouvert. On dira que deux sous-variétés absolument transverses Σ et Σ' sont conjuguées si $\rho(\Sigma) = \rho(\Sigma')$; l'application $h: \Sigma \rightarrow \Sigma'$ définie par $h(x) = F_x \cap \Sigma'$ est alors un difféomorphisme dit canonique. On appellera chaîne transverse de (V, F) un système

$$\tau = (\Sigma_0, U_0, \Sigma_1, \dots, U_{n-1}, \Sigma_n),$$

où chaque U_i , $i = 0, \dots, n-1$, est un ouvert connexe et simplement connexe et où Σ_i, Σ_{i+1} sont des sous-variétés absolument transverses conjuguées relativement à $F \cup U_i$. On dira que Σ_0 et Σ_n sont respectivement l'origine et l'extrémité de τ et que $h_\tau = h_{n-1} \circ \dots \circ h_0$, où $h_i: \Sigma_i \rightarrow \Sigma_{i+1}$ est le difféomorphisme canonique relativement à $F \cup U_i$, est le difféomorphisme d'holonomie défini par τ . On appellera difféomorphisme

d'holonomie subordonné à des sous-variétés transverses Σ_0, Σ , un difféomorphisme $h : \Sigma'_0 \rightarrow \Sigma'$ tel qu'il existe une chaîne transverse τ d'origine $\Sigma'_0 \subset \Sigma_0$ et d'extrémité $\Sigma' \subset \Sigma$ avec $h_\tau = h$. L'énoncé de la Proposition II-4 3 de [9] équivaut à dire que $\text{Hol}_{\Sigma_0 \Sigma}(F)$ est un ouvert de $\Pi(\Sigma_0, \Sigma)$ et que sa topologie de sous-espace admet pour base les ouverts, dits élémentaires

$$\{j_x(h) \mid x \in \Sigma'_0\}$$

où $j_x(h)$ est le germe en x d'un difféomorphisme d'holonomie subordonné à Σ_0, Σ et défini dans Σ'_0 . On désignera par $C(\varphi)$ la composante connexe de $\varphi \in \text{Hol}_{\Sigma_0 \Sigma}(F)$ dans l'espace localement connexe $\text{Hol}_{\Sigma_0 \Sigma}(F)$. On dira que la 2-chaîne d'holonomie

$$\Gamma = (\Sigma_0, \varphi_0, \Sigma_1, \varphi_1, \Sigma_2)$$

est réductible à $\psi \in \text{Hol}_{\Sigma_0 \Sigma_2}(F)$, et on écrira $\psi < \Gamma$, s'il existe des germes d'holonomie composables

$$\psi_0 \in C(\varphi_0) \subset \text{Hol}_{\Sigma_0 \Sigma_1}(F) \text{ et } \psi_1 \in C(\varphi_1) \subset \text{Hol}_{\Sigma_1 \Sigma_2}(F)$$

tels que $\psi = \psi_0 \psi_1$. Il est clair, par exemple, qu'on a

$$(1) \quad \varphi < (\Sigma_0, j_{\alpha(\varphi)}(1_{\Sigma_0}), \Sigma_0, \varphi, \Sigma) \text{ pour tout } \varphi \in \text{Hol}_{\Sigma_0 \Sigma}(F).$$

On dira que $\Gamma, \Gamma' \in \overline{\text{Hol}}_{\Sigma_0 \Sigma}(F)$ sont contigus, ce que l'on écrira $\Gamma \sim \Gamma'$, s'il existe des chaînes d'holonomie Γ_2, Γ'_2 et, éventuellement, $\Gamma_i, i = 1, 3$, telles que l'on ait

$$\Gamma = \Gamma_{1*} \Gamma_{2*} \Gamma_3 \quad \text{et} \quad \Gamma' = \Gamma_{1*} \Gamma'_{2*} \Gamma_3 \quad \text{avec} \quad \Gamma_2 < \Gamma'_2 \text{ ou } \Gamma'_2 < \Gamma_2.$$

La relation $\Gamma \approx \Gamma'$ définie sur $\overline{\text{Hol}}_{\Sigma_0 \Sigma}(F)$ par l'existence de

$$\Gamma_i \in \overline{\text{Hol}}_{\Sigma_0 \Sigma}(F), \quad i = 0, \dots, n$$

tels que

$$\Gamma_i \sim \Gamma_{i+1} \quad \text{pour} \quad i = 0, \dots, n-1, \quad \text{avec} \quad \Gamma_n = \Gamma,$$

est une relation d'équivalence, parce que symétrique et transitive par définition, et réflexive compte tenu de (1). On désignera par $\pi_{\Sigma_0 \Sigma}(F)$ le quotient de $\overline{\text{Hol}}_{\Sigma_0 \Sigma}(F)$ par cette relation d'équivalence, et $[\varphi]$ désignera l'image de φ par l'application canonique

$$\zeta : \overline{\text{Hol}}_{\Sigma_0 \Sigma}(F) \rightarrow \pi_{\Sigma_0 \Sigma}(F);$$

on dira que $\Gamma \in \overline{\text{Hol}}_{\Sigma_0 \Sigma}(F)$ est un représentant de $\zeta(\Gamma)$. Pour $x \in \Sigma_0 \cap \Sigma$, on écrira $[x]_{\Sigma_0 \Sigma}$, ou plus simplement $[x]$ sauf risque de confusion au lieu

de $[x_{\Sigma_0 \Sigma}]$. Remarquons déjà que $C(\varphi) = C(\varphi')$ dans $\text{Hol}_{\Sigma_0 \Sigma}(F)$ entraîne $[\varphi] = [\varphi']$. On a en effet

puisque
$$\varphi' = j_{\alpha(\varphi')}(1_{\Sigma_0}) \varphi' < (\Sigma_0, j_{\alpha(\varphi)}(1_{\Sigma_0}), \Sigma_0, \varphi, \Sigma),$$

$$\{ j_x(1_{\Sigma_0}) \mid x \in \Sigma_0 \} \subset \text{Hol}_{\Sigma_0}(F)$$

est connexe ; compte tenu de (1), on a alors $\varphi \approx \varphi'$ c'est-à-dire $[\varphi] = [\varphi']$. Pour des sous-variétés transverses $\Sigma_0 \subset \Sigma$, et $i : \Sigma_0 \rightarrow \Sigma$ désignant l'injection canonique, il vient en particulier $C(j_x(i)) = C(j_{x'}(i))$, c'est-à-dire $C(\bar{x}) = C(\bar{x}')$ et donc $[x] = [x']$ dans $\pi_{\Sigma_0 \Sigma}(F)$; on peut donc définir $e_{\Sigma_0 \Sigma} \in \pi_{\Sigma_0 \Sigma}(F)$ par $e_{\Sigma_0 \Sigma} = [x]$, où $x \in \Sigma_0$. On posera $e_{\Sigma_0} = e_{\Sigma_0 \Sigma_0}$. Si

$\Gamma_1 \approx \Gamma'_1$ dans $\overline{\text{Hol}}_{\Sigma_0 \Sigma_1}(F)$ et $\Gamma_2 \approx \Gamma'_2$ dans $\overline{\text{Hol}}_{\Sigma_0 \Sigma}(F)$, alors on a

$$\Gamma_1 * \Gamma_2 \approx \Gamma_1 * \Gamma'_2 \approx \Gamma'_1 * \Gamma'_2$$

dans $\overline{\text{Hol}}_{\Sigma_0 \Sigma_2}(F)$ et il en résulte que la composition des chaînes d'holonomie

$$\overline{\text{Hol}}_{\Sigma_0 \Sigma_1}(F) \times \overline{\text{Hol}}_{\Sigma_1 \Sigma_2}(F) \rightarrow \overline{\text{Hol}}_{\Sigma_0 \Sigma_2}(F)$$

induit, par passage au quotient, une application

$$(\Phi, \Psi) \rightarrow \Phi * \Psi \text{ de } \pi_{\Sigma_0 \Sigma_1}(F) \times \pi_{\Sigma_1 \Sigma_2}(F) \text{ dans } \pi_{\Sigma_1 \Sigma_2}(F).$$

La loi de composition partiellement définie ainsi sur l'ensemble somme des $\pi_{\Sigma \Sigma'}(F)$, où $\Sigma, \Sigma' \in F \diamond$, est associative. Pour tout représentant

$$\Gamma = (\Sigma_0, \varphi_0, \dots, \varphi_n, \Sigma) \text{ de } \Phi \in \pi_{\Sigma_0 \Sigma}(F),$$

on a $\Gamma = \varphi_0 * \dots * \varphi_n$ et par conséquent

$$(2) \quad \Phi = [\varphi_0] * \dots * [\varphi_n].$$

Pour des germes d'holonomie composables

on a
$$\varphi \in \text{Hol}_{\Sigma_0 \Sigma_1}(F), \quad \varphi' \in \text{Hol}_{\Sigma_1 \Sigma_2}(F),$$

$$\varphi \varphi' \sim (\Sigma_0, \varphi, \Sigma_1, \varphi', \Sigma_2);$$

compte tenu de (2), on a donc

$$(3) \quad [\varphi \varphi'] = [\varphi] * [\varphi'].$$

Pour des sous-variétés transverses $\Sigma_0 \subset \Sigma_1 \subset \Sigma_2$, on a en particulier

$$e_{\Sigma_0 \Sigma_2} = e_{\Sigma_0 \Sigma_1} * e_{\Sigma_1 \Sigma_2}.$$

Proposition. Les applications

$$\pi_{\Sigma, \Sigma'}(F) \times \pi_{\Sigma', \Sigma''}(F) \rightarrow \pi_{\Sigma, \Sigma''}(F), \text{ où } \Sigma, \Sigma', \Sigma'' \in F\Diamond,$$

définissent une loi de composition de groupoïde ayant $F\Diamond$ pour ensemble d'objets et pour lequel e_{Σ} est l'élément neutre associé à $\Sigma \in F\Diamond$.

On sait déjà que cette loi de composition est associative. Vérifions que les $e_{\Sigma}, \Sigma \in F\Diamond$, sont neutres, c'est-à-dire

$$e_{\Sigma_0} * \Phi = \Phi \quad (\text{resp.} \quad \Phi * e_{\Sigma} = \Phi)$$

quels que soient $\Phi \in \pi_{\Sigma_0, \Sigma}(F)$ et $\Sigma_0, \Sigma \in F\Diamond$. Compte tenu de (2) et de l'associativité, on peut supposer $\Phi = [\varphi]$, $\varphi \in \text{Hol}_{\Sigma_0, \Sigma}(F)$. Puisque

$$j_{\alpha(\varphi)}(1_{\Sigma_0})\varphi = \varphi \quad (\text{resp.} \quad \varphi j_{\beta(\varphi)}(1_{\Sigma_1}) = \varphi),$$

il vient alors, compte tenu de (3),

$$e_{\Sigma_0} * [\varphi] = [\varphi] \quad (\text{resp.} \quad [\varphi] * e_{\Sigma} = [\varphi]).$$

Pour montrer enfin que $\Phi \in \pi_{\Sigma_0, \Sigma}(F)$ est inversible, il suffit, compte tenu de (2) et de ce que les $e_{\Sigma}, \Sigma \in F\Diamond$, sont neutres, de montrer qu'on a

$$[\varphi] * [\varphi^{-1}] = e_{\Sigma_0} \quad \text{et} \quad [\varphi^{-1}] * [\varphi] = e_{\Sigma}$$

quels que soient $\varphi \in \text{Hol}_{\Sigma_0, \Sigma}(F)$ et $\Sigma_0, \Sigma \in F\Diamond$. Or, compte tenu de (3), ceci résulte de

$$\varphi\varphi^{-1} = j_{\alpha(\varphi)}(1_{\Sigma_0}) \quad \text{et} \quad \varphi^{-1}\varphi = j_{\beta(\varphi)}(1_{\Sigma}).$$

On posera $e_{\Sigma} \Sigma_{\sigma} = e_{\Sigma_0}^{-1} \Sigma$ pour des sous-variétés $\Sigma_0 \subset \Sigma$.

On dira que le groupoïde de la proposition ci-dessus, noté $\pi(F)$, est le groupoïde fondamental de F et que $\pi_{\Sigma_0}(F) = \pi_{\Sigma_0, \Sigma_0}(F)$ est le groupe fondamental de F en $\Sigma_0 \in F\Diamond$. Le groupoïde $\pi(F)$ est transitif, c'est-à-dire $\pi_{\Sigma_0, \Sigma}(F) \neq \emptyset$, quels que soient $\Sigma_0, \Sigma \in F\Diamond$, d'après la remarque de (1.1). Les $\pi_{\Sigma}(F), \Sigma \in F\Diamond$, étant isomorphes, on peut appeler groupe fondamental de F , et noter aussi $\pi(F)$ sauf risque de confusion, le groupe structural du groupoïde $\pi(F)$. Pour un ouvert connexe $U \subset V$, on observe, compte tenu de $F_U \Diamond \subset F\Diamond$, que

$$\text{Hol}_{\Sigma_0, \Sigma}(F_U) \subset \text{Hol}_{\Sigma_0, \Sigma}(F), \quad \text{où } \Sigma_0, \Sigma \in F_U \Diamond,$$

induit $\overline{\text{Hol}}_{\Sigma_0, \Sigma}(F_U) \subset \overline{\text{Hol}}_{\Sigma_0, \Sigma}(F)$. D'où, par passage au quotient, une application canonique $\pi_{\Sigma_0, \Sigma}(F_U) \rightarrow \pi_{\Sigma_0, \Sigma}(F)$ qui se réduit évidemment à l'identité si $U = V$. On a donc un foncteur canonique $\pi(F_U) \rightarrow \pi(F)$ associé à $F_U \Diamond \subset F\Diamond$. Pour

$x_0 \in \Sigma_0 \cap \Sigma'_0$, $x \in \Sigma \cap \Sigma'$, où $\Sigma_0, \Sigma \in F_U \diamond$ et $\Sigma'_0, \Sigma' \in F \diamond$,

on a plus généralement une application

$$(x_0, x)^\# : \pi_{\Sigma_0 \Sigma}(F_U) \rightarrow \pi_{\Sigma'_0 \Sigma'}(F),$$

obtenue en composant l'application canonique $\pi_{\Sigma_0 \Sigma}(F_U) \rightarrow \pi_{\Sigma_0 \Sigma}(F)$ avec la bijection

$$\Phi \rightarrow [x_0]_{\Sigma'_0 \Sigma_0} * \Phi * [x]_{\Sigma \Sigma'} \text{ de } \pi_{\Sigma_0 \Sigma}(F) \text{ sur } \pi_{\Sigma'_0 \Sigma'}(F).$$

Dans le cas particulier $\Sigma_0 \subset \Sigma'_0$ (resp. $\Sigma \subset \Sigma'$) cette application est indépendante de x_0 (resp. x) et sera notée $x^\#$ (resp. x'_0).

1.3. L'énoncé suivant dans lequel F est simple et V/F simplement connexe est un cas particulier de la Proposition de (4.2) et rend compte de la raison pour laquelle les sous-variétés transverses sont supposées simplement connexes dans cette théorie.

Proposition. *Si la variété feuilletée (V, F) admet une sous-variété absolument transverse Σ saturant V , alors $\pi(F)$ est trivial.*

Il suffit de montrer que $\pi_{\Sigma_0 \Sigma}(F)$ est réduit à un élément, quel que soit $\Sigma_0 \in F \diamond$. Or $h: V \rightarrow \Sigma$ désignant la surmersion définie par

$$\{h(x)\} = F_x \cap \Sigma$$

[9] on a, F étant simple,

$$\text{Hol}_{(\Sigma_0, x) / (\Sigma, h(x))}(F_x) = \{j_x(h/\Sigma_0)\}$$

pour tout $x \in \Sigma_0$. Puisque

$$C(j_x(h/\Sigma_0)) = C(j_{x'}(h/\Sigma_0))$$

dans $\text{Hol}_{\Sigma_0 \Sigma}(F)$ quels que soient $x, x' \in \Sigma_0$, il est clair que

$$[j_x(h/\Sigma_0)] \in \pi_{\Sigma_0 \Sigma}(F)$$

est indépendant de $x \in \Sigma_0$. Il suffira donc, quels que soient

$$(\Sigma_0, \varphi_0, \dots, \varphi_{n-1}, \Sigma) \in \overline{\text{Hol}}_{\Sigma_0 \Sigma}(F), \quad \Sigma_0 \in F \diamond$$

de vérifier

$$(1) \quad [\varphi_0] * \dots * [\varphi_{n-1}] = [j_{x_0}(h/\Sigma_0)]$$

où $x_0 = \alpha(\varphi_0)$. Or ceci est d'abord évident pour $n = 1$, puisqu'on a $\varphi_0 = j_{x_0}(h/\Sigma_0)$ dans $\text{Hol}_{(\Sigma_0, x_0) / (\Sigma, h(x_0))}(F_{x_0})$ réduit à un élément. L'énoncé étant supposé vérifié pour toute $n-1$ chaîne d'holonomie d'extrémité

Σ , on a alors, en vertu de la récurrence

$$(2) \quad [\varphi_1] * \dots * [\varphi_{2-1}] = [j_{x_1}(h/\Sigma_1)]$$

où $x_1 = \alpha(\varphi_1)$. D'autre part, on a aussi

$$j_{x'_0}(h/\Sigma_0) = \varphi_0 j_{x'_0}(h/\Sigma_1) \quad \text{avec } x'_0 = \beta(\varphi_0),$$

d'où

$$j_{x_0}(h/\Sigma_0) = [\varphi_0] * [j_{x'_0}(h/\Sigma_1)] = [\varphi_0] * [j_{x_1}(h/\Sigma_1)]$$

et donc (1), compte tenu de (2).

1.4. Une feuille F de (V, F) étant fixée, on désigne [9] par $\text{Hol}(F)$ le groupoïde d'holonomie de F ayant $F\diamond$ pour ensemble d'objets et dont la loi de composition

$$\text{Hol}_{(\Sigma_0, x_0)(\Sigma_1, x_1)}(F) \times \text{Hol}_{(\Sigma_1, x_1)(\Sigma_2, x_2)}(F) \rightarrow \text{Hol}_{(\Sigma_0, x_0)(\Sigma_2, x_2)}(F)$$

est la restriction de la composition usuelle des germes

$$\Pi_{x_0 x_1}(\Sigma_0, \Sigma_1) \times \Pi_{x_1 x_2}(\Sigma_1, \Sigma_2) \rightarrow \Pi_{x_0 x_2}(\Sigma_0, \Sigma_2);$$

on dit que le groupe structural, noté aussi $\text{Hol}(F)$, de ce groupoïde transitif est le groupe d'holonomie de F . La relation (3) de (1.2) exprime que les applications $(\Sigma, x) \rightarrow \Sigma$ de $F\diamond$ dans $F\diamond$ et

$$\varphi \rightarrow [\varphi] \quad \text{de } \text{Hol}_{(\Sigma_0, x_0)(\Sigma_1, x_1)}(F) \text{ dans } \pi_{\Sigma_0 \Sigma_1}(F),$$

où $(\Sigma_i, x_i) \in F\diamond$, définissent un foncteur

$$\eta_F : \text{Hol}(F) \rightarrow \pi(F)$$

qu'on notera η , sauf risque de confusion. Pour tout $(\Sigma_0, x_0) \in F\diamond$, on a en particulier un homomorphisme de groupes

$$\eta : \text{Hol}_{(\Sigma_0, x_0)}(F) \rightarrow \pi_{\Sigma_0}(F).$$

2. LES REVÊTEMENTS $\pi_{\Sigma_0 S}(F) \rightarrow V$ ET LE FONCTEUR $\pi_{\diamond}(V) \rightarrow \pi(F)$.

2.1. On appellera champ transverse de la variété feuilletée (V, F) une application $S : x \rightarrow \Sigma_x$ de V dans $F\diamond$ vérifiant $x \in \Sigma_x$. Une sous-variété transverse Σ_0 étant fixée, on désignera alors $\pi_{\Sigma_0 S}(F)$ l'ensemble somme des

$$\pi_{\Sigma_0 \Sigma_x}(F) \times \{x\}, \quad x \in V.$$

Le groupoïde $\pi(F)$ étant transitif, on a une surjection évidente: $q : \pi_{\Sigma_0 S}(F) \rightarrow V$. Etant donné $\Sigma_0, \Sigma \in F\diamond$, $\Phi \in \pi_{\Sigma_0 \Sigma}(F)$ et le champ trans-

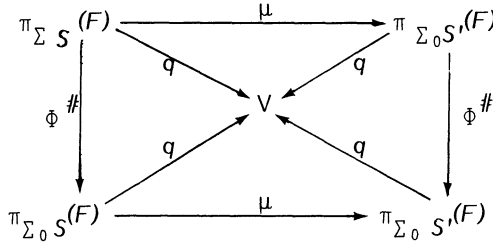
verse S , on désignera par $\Phi^\#$ la bijection

$$(\Psi, x) \rightarrow (\Phi_* \Psi, x) \quad \text{de } \pi_{\Sigma} S(F) \text{ sur } \pi_{\Sigma_0} S(F).$$

Pour $\Sigma_0 = \Sigma$, on observe alors que le groupe $\pi_{\Sigma_0}(F)$ opère à gauche sur $\pi_{\Sigma_0} S(F)$ par $\Phi \rightarrow \Phi^\#$ et que cette action est simplement transitive sur chaque $q^{-1}(x)$, $x \in V$. Etant donné des champs transverses $S: x \rightarrow \Sigma_x$ et $S': x \rightarrow \Sigma'_x$, on observe, $\Sigma_0 \in F \diamond$ étant fixé, que les bijections

$$x^\# : \pi_{\Sigma_0 \Sigma_x}(F) \rightarrow \pi_{\Sigma_0 \Sigma'_x}(F), \quad x \in V,$$

induisent une bijection dite canonique $\mu : \pi_{\Sigma_0} S(F) \rightarrow \pi_{\Sigma_0} S'(F)$. Le diagramme



est commutatif quels que soient $\Sigma_0, \Sigma \in F \diamond$ et $\Phi \in \pi_{\Sigma_0 \Sigma}(F)$.

La sous-variété transverse Σ_0 étant fixée, désignons par A_{Σ_0} l'ensemble des quadruplets $\alpha = (U, \Sigma, \Phi, T)$, où U , appelé le domaine de α , est un ouvert connexe de V tel que $\pi(F \cup U)$ soit trivial, où $\Sigma \in F \cup \diamond$, $\Phi \in \pi_{\Sigma_0 \Sigma}(F)$ et où $T: x \rightarrow T_x$ est un champ transverse de $(U, F \cup U)$. Pour un champ transverse $S: x \rightarrow \Sigma_x$ de (V, F) , on définit alors la bijection α_S de $\pi_{\Sigma_0} S(F) \times U$ sur

$$\pi_{\Sigma_0} S(F) \times U = \bigcup_{x \in U} (\pi_{\Sigma_0 \Sigma_x}(F) \times \{x\})$$

en posant

$$\alpha_S(\Psi, x) = (\Psi_* \Phi_* \Phi_x, x),$$

où $\Phi_x \in \pi_{\Sigma \Sigma_x}(F)$ est l'image par

$$x^\# : \pi_{\Sigma T_x}(F \cup U) \rightarrow \pi_{\Sigma \Sigma_x}(F)$$

de l'unique élément auquel $\pi_{\Sigma T_x}(F)$ est réduit par hypothèse. Posant

$$A_{\Sigma_0} S = \{ \alpha_S \mid \alpha \in A_{\Sigma_0} \},$$

on peut alors énoncer :

Proposition. *Un champ transverse $S: x \rightarrow \Sigma_x$ de (V, F) et une sous-variété transverse Σ_0 étant fixés, il existe sur $\pi_{\Sigma_0} S(F)$ une topologie telle que*

$q : \pi_{\Sigma_0 S}(F) \rightarrow V$ soit un revêtement admettant l'atlas $A_{\Sigma_0 S}$.

Remarquons d'abord que les domaines des $\alpha \in A_{\Sigma_0}$ recouvrent V , puisque tout point de V admet un voisinage ouvert connexe et simplement connexe tel que F_U soit trivial, ce qui entraîne que $\pi(F_U)$ est trivial d'après la proposition (1.3). Pour $\alpha_1, \alpha_2 \in A_{\Sigma_0}$, où

$$\alpha_i = (U_i, \Sigma_i, \Phi_i, S_i) \text{ et } S_i : x \rightarrow \Sigma_{ix},$$

avec $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$, il s'agit de montrer que la bijection

$$\alpha_2^{-1} \circ \alpha_1 : \pi_{\Sigma_0}(F) \times (U_1 \cap U_2) \rightarrow \pi_{\Sigma_0}(F) \times (U_1 \cap U_2),$$

c'est-à-dire, avec les notations ci-dessus,

$$(\Psi, x) \rightarrow (\Psi * \Phi_1 * \Phi_{1x} * \Phi_{2x}^{-1} * \Phi_2^{-1}, x)$$

est continue relativement à la topologie discrète de $\pi_{\Sigma_0}(F)$. Or ceci revient à montrer que l'application

$$x \rightarrow \Phi_{1x} * \Phi_2^{-1} \text{ de } U_1 \cap U_2 \text{ dans } \pi_{\Sigma_1 \Sigma_2}(F)$$

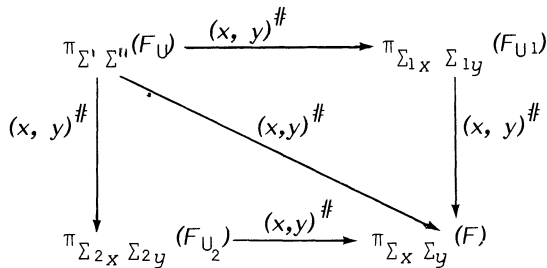
est constante sur tout ouvert connexe $U \subset U_1 \cap U_2$. Pour $x, y \in U$ fixés, il s'agit donc de vérifier

$$\Phi_{1x} * \Phi_2^{-1} = \Phi_{1y} * \Phi_2^{-1}$$

c'est-à-dire

$$(1) \quad \Phi_{1x}^{-1} * \Phi_{1y} = \Phi_{2x}^{-1} * \Phi_{2y}$$

dans $\pi_{\Sigma_x \Sigma_y}(F)$. Des sous-variétés $\Sigma' \ni x, \Sigma'' \ni y$ transverses à F_U étant fixées, on a, compte tenu de $(F_{U_1})_U = F_U = (F_{U_2})_U$, un diagramme commutatif



où $\pi_{\Sigma_i x \Sigma_{iy}}(F_{U_i}), i = 1, 2$, est réduit à un élément par hypothèse. Démontrer (1) revient donc à vérifier, pour $i = 1, 2$, que $\Phi_{ix}^{-1} * \Phi_{iy}$ appartient à l'image de

$$(x, y)^\# : \pi_{\Sigma_{ix} \Sigma_{iy}}(F_{U_i}) \rightarrow \pi_{\Sigma_x \Sigma_y}(F).$$

Or on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 \pi_{\Sigma_{ix} \Sigma_i} (F_{U_i}) \times \pi_{\Sigma_i \Sigma_{iy}} (F_{U_i}) & \longrightarrow & \pi_{\Sigma_{ix} \Sigma_{iy}} (F_{U_i}) \\
 \downarrow x^\# & & \downarrow (x, y)^\# \\
 \pi_{\Sigma_x \Sigma_i} (F) \times \pi_{\Sigma_i \Sigma_y} (F) & \longrightarrow & \pi_{\Sigma_x \Sigma_y} (F)
 \end{array}$$

où les flèches horizontales désignent la loi de composition des groupoïdes $\pi(F_{U_i})$ et $\pi(F)$ et où Φ_{ix}^{-1} (resp. Φ_{iy}) est l'image par $x^\#$ (resp. $y^\#$) de l'unique élément Ψ_i (resp. Ψ'_i) de $\pi_{\Sigma_{ix} \Sigma_i} (F_{U_i})$ (resp. $\pi_{\Sigma_i \Sigma_{iy}} (F_{U_i})$). D'où

$$\Phi_{ix}^{-1} * \Phi_{iy} = x^\#(\Psi_i) * y^\#(\Psi'_i) = (x, y)^\#(\Psi_i * \Psi'_i).$$

Le revêtement $q : \pi_{\Sigma_0 S}(F) \rightarrow V$ dont il sera question dans la suite sera le revêtement déterminé par l'atlas $A_{\Sigma_0 S}$. On montrera plus loin (Corollaire 2 de (2.5)) que $\pi_{\Sigma_0 S}(F)$ est connexe.

Observons que la bijection

$$\Psi^\# : \pi_{\Sigma_1 S}(F) \rightarrow \pi_{\Sigma_0 S}(F)$$

induite par $\Psi \in \pi_{\Sigma_0 \Sigma_1}(F)$ est un isomorphisme de revêtements. En effet, pour tout $\alpha \in A_{\Sigma_0}$, on a un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 \pi_{\Sigma_1}(F) \times U & \xrightarrow{(\alpha^\Psi)_S} & \pi_{\Sigma_1 S}(F) \\
 \downarrow \nu_\Psi \times 1_U & & \downarrow \Psi^\# \\
 \pi_{\Sigma_0}(F) \times U & \xrightarrow{\alpha_S} & \pi_{\Sigma_0 S}(F)
 \end{array}$$

où $\alpha^\Psi \in A_{\Sigma_1}$ est déduit de $\alpha = (U, \Phi, \Sigma, T)$ en posant

$$\alpha^\Psi = (U, \Psi^{-1} * \Phi, \Sigma, T)$$

et où ν_Ψ est l'isomorphisme $\Psi' \rightarrow \Psi * \Psi' * \Psi^{-1}$. Dans le cas particulier $\Sigma_0 = \Sigma_1$, on voit que $\Psi \rightarrow \Psi^\#$ est un isomorphisme de $\pi_{\Sigma_0}(F)$ sur le groupe des automorphismes du revêtement $q : \pi_{\Sigma_0 S}(F) \rightarrow V$, qui est dès lors galoisien puisque $\pi_{\Sigma_0}(F)$ opère transitivement sur chaque fibre. La remarque suivante montre que, pour $\Sigma_0 \diamond F$ fixé, les revêtements $q : \pi_{\Sigma_0 S}(F) \rightarrow V$ sont canoniquement isomorphes, c'est-à-dire indépendants de S .

Remarque. Soit S et S' des champs transverses de (V, F) et soit $\Sigma_0 \diamond F$.

La bijection canonique $\mu : \pi_{\Sigma_0} S(F) \rightarrow \pi_{\Sigma_0} S'(F)$ est un isomorphisme de revêtements.

En effet tout $\alpha \in A_{\Sigma_0}$, de domaine U , induit le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \pi_{\Sigma_0}(F) \times U & \xrightarrow{\alpha_S} & \pi_{\Sigma_0} S(F) \\ & \searrow \alpha_{S'} & \downarrow \mu \\ & & \pi_{\Sigma_0} S'(F) \end{array}$$

2.2. Remarque. Soit Σ_0, Σ des sous-variétés transverses de (V, F) et soit $S : x \rightarrow \Sigma_x$ un champ transverse tel que $\Sigma_x = \Sigma$ pour tout $x \in \Sigma$. L'inclusion

$$j : \pi_{\Sigma_0 \Sigma}(F) \times \Sigma \longrightarrow \pi_{\Sigma_0 S}(F)$$

est alors un homéomorphisme sur le sous-espace $\pi_{\Sigma_0 S}(F)_{\Sigma} = \bar{q}^{-1}(\Sigma)$ relativement à la topologie discrète de $\pi_{\Sigma_0 \Sigma}(F)$.

Il suffit, pour tout $x_0 \in \Sigma$, d'indiquer un voisinage ouvert Σ' de x_0 dans Σ tel que

$$j : \pi_{\Sigma_0 \Sigma}(F) \times \Sigma' \rightarrow \pi_{\Sigma_0 S}(F)_{\Sigma'}$$

soit un homéomorphisme. Soit

$$\alpha \in A_{\Sigma_0} \quad \text{avec} \quad \alpha = (U, \Phi, \Sigma', S'),$$

tel que $x_0 \in \Sigma' \subset \Sigma \cap U$ et tel que $S' : x \rightarrow \Sigma'_x$ vérifie $\Sigma'_x = \Sigma'$ pour tout $x \in \Sigma'$. On observe que

$$j : \pi_{\Sigma_0 \Sigma}(F) \times \Sigma' \rightarrow \pi_{\Sigma_0 S}(F)_{\Sigma'}$$

est induit par l'homéomorphisme composé

$$\pi_{\Sigma_0 \Sigma}(F) \times U \xrightarrow{L_{\Phi} \times 1_U} \pi_{\Sigma_0}(F) \times U \xrightarrow{\alpha_S} \pi_{\Sigma_0 S}(F)_{\Sigma'}$$

où $L_{\Phi} : \pi_{\Sigma_0 \Sigma}(F) \rightarrow \pi_{\Sigma_0}(F)$ est la bijection $\Psi \rightarrow \Psi * e_{\Sigma \Sigma'} * \Phi^{-1}$.

2.3. Etant donné une variété feuilletée (V, F) , on montrera dans ce qui suit que le groupe fondamental $\pi(F)$ est un quotient de $\pi(V)$, au moyen d'un procédé analogue à celui qui décrit l'holonomie d'une feuille $\text{Hol}(F)$ comme un quotient de $\pi(F)$, plus précisément comme le groupe d'automorphismes d'un revêtement galoisien au-dessus de F [1, 2, 4]. Etant donné un champ transverse $S : x \rightarrow \Sigma_x$ de (V, F) , une sous-variété transverse (Σ_0, x_0) et un chemin $\gamma : [a, b] \rightarrow V$ d'origine x_0 , d'extrémité x_1 , on désignera par $(\bar{\gamma}, \gamma)$ le relèvement d'origine

$([x_0]_{\Sigma_0 \Sigma_{x_0}}, x_0)$ de γ relativement au revêtement $q : \pi_{\Sigma_0 S}(F) \rightarrow V$. Si $S' : x \rightarrow \Sigma_{x_0}$ est un autre champ transverse, il est clair, d'après la Remarque de (2.1), que

$$\mu_0(\bar{\gamma}, \gamma) : t \rightarrow (\bar{\gamma}(t) * [\gamma(t)]_{\Sigma_{\gamma(t)} \Sigma'_{\gamma(t)}} , \gamma(t)).$$

est le relèvement de γ d'origine $([x_0]_{\Sigma_0 \Sigma'_{x_0}}, x_0)$ relativement au revêtement $q : \pi_{\Sigma_0 S}(F) \rightarrow V$. Il en résulte que, Σ_0 étant fixé, $\bar{\gamma}(b)$ ne dépend pas de S mais seulement de Σ_{x_1} . Pour des sous-variétés transverses pointées $(\Sigma_0, x_0), (\Sigma_1, x_1)$ et un chemin $\gamma : [a, b] \rightarrow V$ d'origine x_0 , d'extrémité x_1 , on peut donc définir $\hat{\gamma}_{\Sigma_0 \Sigma_1} \in \pi_{\Sigma_0 \Sigma_1}(F)$ par la propriété que $(\hat{\gamma}_{\Sigma_0 \Sigma_1}, x_1)$ est l'extrémité du relèvement d'origine $([x_0]_{\Sigma_0 \Sigma_{x_0}}, x_0)$ de γ relativement à un revêtement $q : \pi_{\Sigma_0 S}(F) \rightarrow V$, où $S : x \rightarrow \Sigma_x$ est quelconque, sauf à vérifier $\Sigma_{x_1} = \Sigma_1$. Puisque $\hat{\gamma}_{\Sigma_0 \Sigma_1}$ ne dépend que de la classe d'homotopie $[\gamma] \in \pi_{x_0 x_1}(V)$ de γ , on a donc une application

$$\chi_F : \pi_{x_0 x_1}(V) \rightarrow \pi_{\Sigma_0 \Sigma_1}(F),$$

qu'on notera souvent χ , définie par $\chi_F([\gamma]) = \hat{\gamma}_{\Sigma_0 \Sigma_1}$. On posera $\hat{\omega}_{\Sigma_0 \Sigma_1} = \chi(\omega)$ (sauf risque de confusion, on écrira plus simplement $\hat{\omega}$). Pour $\Sigma_0 = \Sigma_1$ on pose

$$\hat{\omega}_{\Sigma_0} = \hat{\omega}_{\Sigma_0 \Sigma_0} \quad \text{et} \quad \hat{\gamma}_{\Sigma_0} = \hat{\gamma}_{\Sigma_0 \Sigma_0}$$

On désignera par $\pi_{\diamond}(V)$ le groupoïde ayant pour ensemble d'objets l'ensemble $F \diamond \boxtimes V$ des sous-variétés transverses pointées, et qu'on déduit de façon évidente du groupoïde fondamental $\pi(V)$ au moyen de la surjection

$$(\Sigma, x) \rightarrow x \quad \text{de} \quad F \diamond \boxtimes V \quad \text{sur} \quad V.$$

Proposition. Les applications

$$\chi : \pi_{x_0 x_1}(V) \rightarrow \pi_{\Sigma_0 \Sigma_1}(F), \quad (\Sigma_0, x_0), (\Sigma, x) \in F \diamond \boxtimes V$$

et la projection évidente $F \diamond \boxtimes V \rightarrow F \diamond$ définissent un foncteur de $\pi_{\diamond}(V)$ vers $\pi(F)$.

Pour des sous-variétés transverses pointées $(\Sigma_0, x_0), (\Sigma_1, x_1), (\Sigma_2, x_2)$ et $\omega \in \pi_{x_0 x_1}(V), \omega' \in \pi_{x_1 x_2}(V)$, il s'agit de vérifier

$$\hat{\omega}_{\Sigma_0 \Sigma_1} * \hat{\omega}'_{\Sigma_1 \Sigma_2} = (\hat{\omega} \hat{\omega}')_{\Sigma_0 \Sigma_2},$$

ou encore

$$(1) \quad \hat{\gamma}_{\Sigma_0 \Sigma_1} * \hat{\gamma}'_{\Sigma_1 \Sigma_2} = (\hat{\gamma} \hat{\gamma}')_{\Sigma_0 \Sigma_2}$$

pour des représentants $\gamma : [a, b] \rightarrow V$, $\gamma' : [b, c] \rightarrow V$ de ω, ω' . Soit $S : x \rightarrow \Sigma_x$ et $S' : x \rightarrow \Sigma'_x$ des champs transverses tels que $\Sigma_{x_1} = \Sigma_1$ et $\Sigma_{x'_2} = \Sigma_2$. Le composé

$$\mu \circ (\bar{\gamma}, \gamma) : [a, b] \rightarrow \pi_{\Sigma_0 S}(F)$$

du relèvement $(\bar{\gamma}, \gamma) : [a, b] \rightarrow \pi_{\Sigma_0 S}(F)$ d'origine $([x_0]_{\Sigma_0 \Sigma_{x_0}}, x_0)$ avec l'isomorphisme canonique

$$\mu : \pi_{\Sigma_0 S}(F) \rightarrow \pi_{\Sigma_1 S'}(F)$$

est un relèvement de γ d'origine $([x_0]_{\Sigma_0 \Sigma_{x_0}}, x_0)$ et dont l'extrémité $(\bar{\gamma}(b) * [x_1]_{\Sigma_{x_1} \Sigma'_{x_1}}, x_1)$ coïncide avec l'origine du relèvement

$$\bar{\gamma}(b) \# (\bar{\gamma}', \gamma') : [b, c] \rightarrow \pi_{\Sigma_0 S'}(F)$$

de γ' , obtenu en composant

$$(\bar{\gamma}', \gamma') : [b, c] \rightarrow \pi_{\Sigma_1 S'}(F)$$

avec l'isomorphisme

$$\bar{\gamma}(b) \# : \pi_{\Sigma_1 S'}(F) \rightarrow \pi_{\Sigma_0 S'}(F) \quad \text{défini par } \bar{\gamma}(b) \in \pi_{\Sigma_0 \Sigma_1}(F).$$

Il en résulte que les relèvements

$$(\overline{\bar{\gamma} + \bar{\gamma}'}, \gamma + \gamma') : [a, c] \rightarrow \pi_{\Sigma_0 S'}(F)$$

et

$$\mu \circ (\bar{\gamma}, \gamma) + \bar{\gamma}(b) \# \circ (\bar{\gamma}', \gamma') : [a, c] \rightarrow \pi_{\Sigma_0 S'}(F)$$

d'origine $([x_0]_{\Sigma_0 \Sigma_{x_0}}, x_0)$ coïncident. Compte tenu de $\Sigma_{x'_2} = \Sigma_2$, il vient donc

$$(\widehat{\bar{\gamma} + \bar{\gamma}'})_{\Sigma_0 \Sigma_2} = (\overline{\bar{\gamma} + \bar{\gamma}'})_{\Sigma_0 \Sigma_2}(c) = \bar{\gamma}(b) \# (\bar{\gamma}'(c)) = \widehat{\gamma}_{\Sigma_0 \Sigma_1} * \widehat{\gamma}'_{\Sigma_1 \Sigma_2}$$

c'est-à-dire (1).

2.4. Etant donné des sous-variétés pointées (Σ_0, x_0) , (Σ, x) transverses à la feuille F de (V, F) , on sait [9] qu'à tout chemin γ de F , d'origine x_0 et d'extrémité x , est associé un germe d'holonomie

$$\tilde{\gamma}_{\Sigma_0 \Sigma} \in \text{Hol}_{(\Sigma_0, x_0) / (\Sigma, x)}(F).$$

Remarque. Soit (Σ_0, x_0) une sous-variété pointée transverse à la feuille F de (V, F) , soit S un champ transverse et soit un chemin $\gamma : [a, b] \rightarrow V$ d'origine x_0 . Le relèvement

$$(\bar{\gamma}, \gamma') : [a, b] \rightarrow \pi_{\Sigma_0 S}(F) \quad \gamma' = j \circ \gamma ,$$

où $j : F \rightarrow V$ est l'injection canonique, vérifiée alors

$$\bar{\gamma}(t) = [(\widetilde{\gamma} / [a, t])_{\Sigma_0 \Sigma_{\gamma(t)}}]$$

pour tout $t \in [a, b]$

Il suffit de vérifier la continuité en tout $t_0 \in [a, b]$ de

$$t \rightarrow [(\widetilde{\gamma} / [a, t])_{\Sigma_0 \Sigma_{\gamma(t)}}], \gamma'(t)$$

Or soit $\alpha \in A_{\Sigma_0}$, avec

$$\alpha = (U, (\widetilde{\gamma} / [a, t_0])_{\Sigma_0 \Sigma'_{\gamma(t_0)}}], \Sigma'_{\gamma(t_0)}, S'),$$

où $U \ni \gamma(t_0)$ et où le champ $S' : x \rightarrow \Sigma'_x$ est subordonné à S , c'est-à-dire vérifie $\Sigma'_x \subset \Sigma_x$. Un intervalle $I \subset \gamma'^{-1}(U)$, voisinage de t_0 dans $[a, b]$ étant fixé, il suffira de vérifier qu'on a

$$\alpha_S(e_{\Sigma_0}, \gamma(t)) = ((\widetilde{\gamma} / [a, t])_{\Sigma_0 \Sigma_{\gamma(t)}}], \gamma(t))$$

pour tout $t \in I$. On suppose $t \geq t_0$ (la démonstration étant similaire pour $t \leq t_0$) et on a alors

$$\begin{aligned} \alpha_S(e_{\Sigma_0}, \gamma(t)) &= \\ &= (e_{\Sigma_0} * [(\widetilde{\gamma} / [a, t_0])_{\Sigma_0 \Sigma'_{\gamma(t_0)}}] * [(\widetilde{\gamma} / [t_0, t])_{\Sigma'_{\gamma(t_0)} \Sigma_{\gamma(t)}}], \gamma(t)) = \\ &= ((\widetilde{\gamma} / [a, t_0])_{\Sigma_0 \Sigma'_{\gamma(t_0)}} (\widetilde{\gamma} / [t_0, t])_{\Sigma'_{\gamma(t_0)} \Sigma_{\gamma(t)}}], \gamma(t)) = \\ &= ((\widetilde{\gamma} / [a, t])_{\Sigma_0 \Sigma_{\gamma(t)}}], \gamma(t)), \end{aligned}$$

compte tenu de ce que

$$[(\widetilde{\gamma} / [t_0, t])_{\Sigma'_{\gamma(t_0)} \Sigma_{\gamma(t)}}] \in \pi_{\Sigma'_{\gamma(t_0)} \Sigma_{\gamma(t)}}(F)$$

est l'image par

$$\gamma(t)^\# : \pi_{\Sigma'_{\gamma(t_0)} \Sigma_{\gamma(t)}}(F_U) \rightarrow \pi_{\Sigma'_{\gamma(t_0)} \Sigma_{\gamma(t)}}(F)$$

de l'unique élément auquel est réduit $\pi_{\Sigma'_{\gamma(t_0)} \Sigma_{\gamma(t)}}(F_U)$. En effet, F_1 désignant la feuille de F_U contenant $\gamma(I)$, on a un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \text{Hol}_{(\Sigma'_{\gamma(t_0)}, \gamma(t_0)), (\Sigma'_{\gamma(t)}, \gamma(t))}(F_1) & \longrightarrow & \text{Hol}_{(\Sigma'_{\gamma(t_0)}, \gamma(t_0)), (\Sigma_{\gamma(t)}, \gamma(t))}(F) \\ \eta_{F_1} \downarrow & & \downarrow \eta_F \\ \pi_{\Sigma'_{\gamma(t_0)} \Sigma_{\gamma(t)}}(F_U) & \xrightarrow{\gamma(t)^\#} & \pi_{\Sigma'_{\gamma(t_0)} \Sigma_{\gamma(t)}}(F) \end{array}$$

où la flèche horizontale supérieure est l'injection canonique par laquelle $(\gamma \uparrow [t_0, t])_{\Sigma \uparrow \gamma(t_0) \Sigma \uparrow \gamma(t)}$ est l'image du germe d'holonomie $(\tilde{\gamma}_1)_{\Sigma \uparrow \gamma(t_0) \Sigma \uparrow \gamma(t)}$ de F_U associé au chemin $\gamma_1: [t_0, t] \rightarrow F_1$ induit par γ .

Etant donné une feuille F de (V, F) , on a un groupoïde $\pi_\diamond(F)$ ayant $F \diamond$ pour ensemble d'objets et déduit de $\pi(F)$ par la surjection $(\Sigma, x) \rightarrow x$ de $F \diamond$ sur Γ . On a un foncteur $\chi_F: \pi_\diamond(F) \rightarrow \text{Hol}(F)$, noté plus simplement χ sauf risque de confusion, défini par les applications

$$\text{où } \chi_F: \omega \rightarrow \tilde{\omega}_{\Sigma_0 \Sigma} \text{ de } \pi_{x_0, x}(F) \text{ sur } \text{Hol}_{(\Sigma_0, x_0)(\Sigma, x)}(F),$$

$$(\Sigma_0, x_0), (\Sigma, x) \in F \diamond \text{ et } \tilde{\omega}_{\Sigma_0 \Sigma} = \tilde{\gamma}_{\Sigma_0 \Sigma} \text{ avec } [\gamma] = \omega.[g]$$

On écrira $\tilde{\omega}$ au lieu de $\tilde{\omega}_{\Sigma_0 \Sigma}$, sauf risque de confusion;

Proposition. Pour toute feuille F de (V, F) , on a un carré fonctoriel commutatif

$$\begin{array}{ccc} \pi_\diamond(F) & \xrightarrow{\chi_F} & \text{Hol}(F) \\ \downarrow j_* & & \downarrow \eta_F \\ \pi_\diamond(V) & \xrightarrow{\chi_F} & \pi(F) \end{array}$$

où j_* est induite de l'inclusion $j: F \rightarrow V$.

Pour $(\Sigma_0, x_0), (\Sigma, x) \in F \diamond$, il s'agit de vérifier la commutativité de

$$\begin{array}{ccc} \pi_{x_0, x}(F) & \xrightarrow{\chi_F} & \text{Hol}_{(\Sigma_0, x_0)(\Sigma, x)}(F) \\ \downarrow j_* & & \downarrow \eta_F \\ \pi_{x_0, x}(V) & \xrightarrow{\chi_F} & \pi_{\Sigma_0 \Sigma}(F) \end{array}$$

c'est-à-dire

$$(\eta_F \circ \chi_F)([\gamma]) = (\chi_F \circ j_*)([\gamma])$$

pour tout chemin $\gamma: [0, 1] \rightarrow F$ d'origine x_0 et d'extrémité x . Or on a

$$\text{et } (\eta_F \circ \chi_F)([\gamma]) = \eta_F(\tilde{\gamma}_{\Sigma_0 \Sigma}) = [\tilde{\gamma}_{\Sigma_0 \Sigma}]$$

$$(\chi_F \circ j_*)([\gamma]) = (j \hat{\circ} \gamma)_{\Sigma_0 \Sigma}.$$

D'autre part, la remarque précédente entraîne

$$(j \hat{\circ} \gamma)_{\Sigma_0 \Sigma} = [\tilde{\gamma}_{\Sigma_0 \Sigma}].$$

2.5. La remarque suivante exprime que χ_F est sans effet sur les chemins transverses.

Remarque. Soit Σ_0 une sous-variété transverse à (V, F) . Pour tout $\omega \in i_{x_*}(\pi(\Sigma_0))$ où $i : \Sigma_0 \rightarrow V$ est l'injection canonique, on a $\hat{\omega}_{\Sigma_0} = e_{\Sigma_0}$.

Soit S un champ transverse constant et égal à Σ_0 sur Σ_0 . D'après la remarque de (2.2), le relèvement

$$(\tilde{\gamma}, \gamma) : [0, 1] \rightarrow \pi_{\Sigma_0 S}(F) \quad \text{d'origine} \quad ([\gamma(0)]_{\Sigma_0 \Sigma_0}, \gamma(0)) = (e_{\Sigma_0}, \gamma(0))$$

d'un représentant γ de ω vérifie $\tilde{\gamma}(t) = e_{\Sigma_0}$ pour tout $t \in [0, 1]$ d'où

$$\hat{\omega}_{\Sigma_0} = \tilde{\gamma}(1) = e_{\Sigma_0}.$$

Proposition. Le foncteur $\chi_F : \pi_{\diamond}(V) \rightarrow \pi(F)$ est surjectif.

Les sous-variétés pointées transverses $(\Sigma_0, x_0), (\Sigma, x)$ étant fixées, il s'agit de vérifier que

$$\chi : \pi_{x_0 x}(V) \rightarrow \pi_{\Sigma_0 \Sigma}(F)$$

est surjective, ou encore que, pour tout $\Phi \in \pi_{\Sigma_0 \Sigma}(F)$, il existe un $\omega \in \pi_{x_0 x}(V)$ tel que

$$(1) \quad \hat{\omega}_{\Sigma_0 \Sigma} = \Phi.$$

Soit $(\Sigma_0, \varphi_0, \Sigma_1, \dots, \varphi_{n-1}, \Sigma_n)$ une chaîne d'holonomie représentant Φ . Pour $i = 0, \dots, n$, soit δ_i l'image de l'unique élément de $\pi_{z_{i-1} y_i}(\Sigma_i)$ par

$$\pi_{z_{i-1} y_i}(\Sigma_i) \rightarrow \pi_{z_{i-1} y_i}(V)$$

induite de $\Sigma_i \subset V$, où

$$y_i = \alpha(\varphi_i), \quad z_i = \beta(\varphi_i) \quad \text{pour } i = 0, \dots, n-1 \text{ et } z_{-1} = x_0, \quad y_n = x.$$

Pour $i = 0, \dots, n-1$, soit

$$\omega_i \in \pi_{y_i z_i}(F_i), \quad \text{où } F_i = F_{y_i} \quad , \quad \text{tel que } \tilde{\omega}_i_{\Sigma_i \Sigma_{i+1}} = \varphi_i$$

et soit ω'_i l'image de ω_i par $\pi_{y_i z_i}(F_i) \rightarrow \pi_{y_i z_i}(V)$ induite de $F_i \subset V$. Compte tenu de la proposition de (2.4), de (2) de (1.2) et de la remarque ci-dessus, il vient alors

$$\begin{aligned} \Phi &= [\varphi_0] * \dots * [\varphi_{n-1}] = \\ &= e_{\Sigma_0} * [\varphi_0] * e_{\Sigma_1} * \dots * e_{\Sigma_{n-1}} * [\varphi_{n-1}] * e_{\Sigma_n} = \end{aligned}$$

$$\hat{\delta}_0_{\Sigma_0} * \hat{\omega}'_{\Sigma_0 \Sigma_1} * \hat{\delta}_1_{\Sigma_1} * \dots * \hat{\delta}_{n-1}_{\Sigma_{n-1}} * \hat{\omega}'_{\Sigma_{n-1} \Sigma_n} * \hat{\delta}_n_{\Sigma_n}$$

c'est-à-dire (1), si on pose

$$\omega = \delta_0 \omega'_0 \delta_1 \dots \delta_{n-1} \omega'_{n-1} \delta_n .$$

Le corollaire suivant correspond à un résultat de van Est [7, 8].

Corollaire 1. *Le groupe fondamental $\pi(F)$ est un quotient de $\pi(V)$.*

Plus précisément pour toute sous-variété transverse pointée (Σ_0, x_0) l'homomorphisme $\chi : \pi_{x_0}(V) \rightarrow \pi_{\Sigma_0}(F)$ est surjectif.

On obtient aussi le complément suivant à la Proposition (2.1).

Corollaire 2. *$\pi_{\Sigma_0 S}(F)$ est connexe.*

$x_0 \in \Sigma_0$ étant fixé, on peut, compte tenu de la remarque de (2.1), supposer $\Sigma_{x_0} = \Sigma_0$ et il s'agit alors, pour tout $\Phi \in \pi_{\Sigma_0}(F)$, de montrer qu'il existe dans $\pi_{\Sigma_0 S}(F)$ un chemin d'origine (e_{Σ_0}, x_0) et d'extrémité (Φ, x_0) . Or, d'après le corollaire précédent, il existe

$$\omega \in \pi_{x_0}(V) \text{ tel que } \hat{\omega}_{\Sigma_0} = \Phi$$

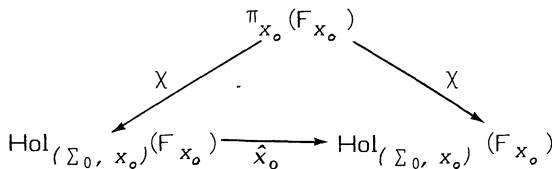
et, d'autre part, $(\Phi, x_0) = (\hat{\omega}_{\Sigma_0}, x_0)$ est, relativement au revêtement $q : \pi_{\Sigma_0 S}(F) \rightarrow V$, l'extrémité du relèvement d'origine (e_{Σ_0}, x_0) d'un représentant de ω .

3. LE NOYAU DE $\chi : \pi_{x_0}(V) \rightarrow \pi(F)$.

3.1. Pour $x_0 \in V$ fixé on observe que le noyau $\text{Ker } \chi_{x_0}(F_{x_0})$ de l'homomorphisme

$$\chi : \pi_{x_0}(F_{x_0}) \rightarrow \text{Hol}_{(\Sigma_0, x_0)}(F_{x_0})$$

est indépendant de la sous-variété transverse $\Sigma_0 \ni x_0$. Etant donné des sous-variétés transverses $\Sigma_0 \ni x_0, \Sigma'_0 \ni x_0$, on a en effet le diagramme commutatif



où \hat{x}_0 est l'isomorphisme

$$\varphi \rightarrow (\bar{x}_0 \Sigma_0 \Sigma'_0)^{-1} \varphi \bar{x}_0 \Sigma_0 \Sigma'_0.$$

On désignera par $\overline{\text{Ker}}_{x_0}(F_{x_0})$ l'image de $\text{Ker}_{x_0}(F_{x_0})$ par l'homomorphisme $\pi_{x_0}(F_{x_0}) \rightarrow \pi_{x_0}(V)$ induit de $F_{x_0} \subset V$: Pour $x_0, x \in V$, on définit alors la relation $\omega \sim \omega'$, notée éventuellement $\omega \sim \omega'$ quand la précision s'impose, par la propriété suivante :

il existe des $x_i \in V, i = 0, \dots, n$, avec $x_n = x$, des $\omega_i \in \pi_{x_{i-1}x_i}(V) \quad i = 1, \dots, n$, et $\delta_i \in \overline{\text{Ker}}_{x_i}(F_{x_i}), i = 0, \dots, n$, tels que l'on ait

$$\omega = \omega_1 \dots \omega_n \quad \text{et} \quad \omega' = \delta_0 \omega_1 \delta_1 \dots \delta_{n-1} \omega_n \delta_n.$$

Cette relation est une relation d'équivalence et on observe que

$\omega_1 \sim \omega'_1$ dans $\pi_{x_0x_1}(V), \quad \omega_2 \sim \omega'_2$ dans $\pi_{x_1x_2}(V)$
entraînent
 $\omega_1 \omega_2 \sim \omega'_1 \omega'_2$ dans $\pi_{x_0x_2}(V).$

Etant donné une sous-variété Σ transverse à (V, F) et $x_0, x \in \Sigma$, on désignera dans ce qui suit par $\varepsilon_{(x_0, \Sigma, x)}$ l'image de l'unique élément de $\pi_{x_0x}(\Sigma)$ par l'application $\pi_{x_0x}(\Sigma) \rightarrow \pi_{x_0x}(V)$ induite de $\Sigma \subset V$.

Proposition. Soit F et F' des feuilles de la variété feuilletée (V, F) , soit Σ_0, Σ des sous-variétés transverses et soit

$$x \in \Sigma_0 \cap F, \quad x' \in \Sigma_0 \cap F', \quad y \in \Sigma \cap F, \quad y' \in \Sigma \cap F'.$$

Si

$$\omega \in \pi_{xy}(F) \quad \text{et} \quad \omega' \in \pi_{x'y'}(F')$$

vérifient $C(\tilde{\omega}) = C(\tilde{\omega}')$ dans $\text{Hol}_{\Sigma_0 \Sigma}(F)$, on a alors

$$(1) \quad j_*(\omega) \in (y, \Sigma, y') \sim \varepsilon_{(x, \Sigma_0, x')} j_*(\omega')$$

dans $\pi_{xy'}(V)$, où j_* est induite par l'inclusion j dans V d'une feuille.

Il existe des ouverts élémentaires $\Omega_1, \dots, \Omega_n$ de $\text{Hol}_{\Sigma_0 \Sigma}(F)$ tels que

$$\tilde{\omega} \in \Omega_1, \quad \tilde{\omega}' \in \Omega_n \quad \text{et} \quad \Omega_i \cap \Omega_{i+1} \neq \emptyset, \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Soit alors $\varphi_i \in \Omega_i \cap \Omega_{i+1}$ et $\omega_i \in \pi_{x_i y_i}(F_{x_i}), x_i = \alpha(\varphi_i), y_i = \beta(\varphi_i), i = 1, \dots, n-1$ tels que $\tilde{\omega}_i = \varphi_i$. Il suffira de vérifier

$$(2) \quad j_*(\omega_i) \in (y_i, \Sigma, y_{i+1}) \sim \varepsilon_{(x_i, \Sigma_0, x_{i+1})} j_*(\omega_{i+1}) \quad \text{dans} \quad \pi_{x_i y_{i+1}}(V),$$

dans $\pi_{x_i y_{i+1}}(V)$, pour $i = 0, \dots, n-1$, avec

$$x_0 = x, \quad x_n = x', \quad y_0 = y, \quad y_n = y', \quad \omega_n = \omega';$$

ce qui entraînera (1). Ceci revient à dire qu'on est ramené à démontrer l'énoncé dans le cas particulier où $\tilde{\omega}, \tilde{\omega}'$ appartiennent à un même ouvert élémentaire de $\text{Hol}_{\Sigma_0 \Sigma}(F)$. Or, dans cette hypothèse, on a une chaîne transverse

$$\tau = (\Sigma'_0, U_0, \Sigma_1, \dots, \Sigma_{n-1}, U_{n-1}, \Sigma'_n)$$

avec $x, x' \in \Sigma'_0 \subset \Sigma_0, \Sigma'_n \subset \Sigma$ et

$$(3) \quad \tilde{\omega} = j_x(h_\tau), \quad \tilde{\omega}' = j_{x'}(h_\tau).$$

Il suffit évidemment de démontrer

$$j_*(\omega) \in_{(y, \Sigma', y')} \sim \in_{(x, \Sigma'_0, x')} j_*(\omega')$$

ce qui permet de supposer $\Sigma'_0 = \Sigma_0, \Sigma'_n = \Sigma$. On a $h_\tau = h_{n+1} \circ \dots \circ h_0$, où $h_i: \Sigma_i \rightarrow \Sigma_{i+1}$, avec $\Sigma_n = \Sigma'$, est le difféomorphisme canonique relatif à F_{U_i} . Soit $x_i, x'_i \in \Sigma_i, i = 0, \dots, n$, définis par

$$x_0 = x, \quad x'_0 = x' \text{ et } x_{i+1} = h_i(x_i), \quad x'_{i+1} = h_i(x'_i) \quad \text{pour } i = 0, \dots, n;$$

soit ω_i (resp. ω'_i) dans l'image de l'application

$$\pi_{x_i x_{i+1}}(F_i) \rightarrow \pi_{x'_i x'_{i+1}}(F_i) \quad (\text{resp. } \pi_{x'_i x'_{i+1}}(F'_i) \rightarrow \pi_{x_i x_{i+1}}(F'_i))$$

induite par l'inclusion dans F (resp. F') de la feuille F_i (resp. F'_i) de F_{U_i} par x_i (resp. x'_i). On pose

$$\bar{\omega} = \omega_0 \dots \omega_{n-1}, \quad \bar{\omega}' = \omega'_0 \dots \omega'_{n-1},$$

ce qui permet d'écrire [9]

$$j_x(h_\tau) = (\bar{\omega}), \quad j_{x'}(h_\tau) = (\bar{\omega}').$$

Compte tenu de (3), on a alors

$$\bar{\omega}^{-1} \in \overline{\text{Ker}}_x(F), \quad \bar{\omega}' \omega'^{-1} \in \overline{\text{Ker}}_{x'}(F')$$

et, par conséquent

$$j_*(\omega) \sim j_*(\bar{\omega}), \quad j_*(\omega') \sim j_*(\bar{\omega}').$$

Dans la relation (1) qu'on se propose de démontrer, on peut donc remplacer ω (resp. ω') par $\bar{\omega}$ (resp. $\bar{\omega}'$), c'est-à-dire supposer

$$\omega = \omega_0 \dots \omega_{n-1} \quad (\text{resp. } \omega' = \omega'_0 \dots \omega'_{n-1}).$$

Mais (1) résulte alors de ce que, pour $i = 0, \dots, n-1$, on a

$$\varepsilon_{(x_i, \Sigma_i, x'_i)} j_*(\omega'_i) = j_*(\omega_i) \varepsilon_{(x_{i+1}, \Sigma_{i+1}, x'_{i+1})}$$

dans $\pi_{x_i x'_{i+1}}(V)$ parce que U_i est simplement connexe.

3.2. Avec les notations ci-dessus, on dira qu'une chaîne d'holonomie

$$\Gamma = (\Sigma_0, \varphi_0, \dots, \Sigma_{n-1}, \varphi_{n-1}, \Sigma)$$

de (V, F) et $\omega \in \pi_{x_o x}(V)$, où $x_o \in \Sigma_0, x \in \Sigma$, sont associés ou forment un couple associé (Γ, ω) s'il existe $\omega_i \in \pi_{y_i z_i}(F_y)$, avec $y_i = \alpha(\varphi_i), z_i \in \beta(\varphi_i), i = 0, \dots, n-1$, vérifiant $\tilde{\omega}_i = \varphi_i$ et tels qu'on ait

$$\omega = \varepsilon_{(x_o, \Sigma_0, y_o)} j_*(\omega_o) \varepsilon_{(z_o, \Sigma_1, y_1)} j_*(\omega_1) \dots j_*(\omega_{n-1}) \varepsilon_{(z_{n-1}, \Sigma, x)}$$

On a alors

$$(1) \quad [\varphi_0]_* \dots * [\varphi_{n-1}] = \hat{\omega}_{\Sigma_0 \Sigma}.$$

En effet, compte tenu de la proposition de (2.4) et de la Remarque de (2.5), le premier membre de (1) s'écrit

$$\varepsilon_{\Sigma_0} * [\varphi_0]_* \varepsilon_{\Sigma_1} \dots * [\varphi_{n-1}]_* \varepsilon_{\Sigma} = \hat{\varepsilon}_{(x_o, \Sigma_0, y_o)} j_* \hat{(\omega_o)} \hat{\varepsilon}_{(z_o, \Sigma_1, y_1)} \dots j_* \hat{(\omega_{n-1})} \hat{\varepsilon}_{(z_{n-1}, \Sigma, x)} = \hat{\omega}_{\Sigma_0 \Sigma}.$$

Ceci revient encore à dire que $(\Gamma, \hat{\omega}_{\Sigma_0 \Sigma})$ appartient au produit fibré de l'application canonique

$$\overline{\text{Hol}}_{\Sigma_0 \Sigma}(F) \rightarrow \pi_{\Sigma_0 \Sigma}(F)$$

et de

$$\chi: \pi_{x_o x}(V) \rightarrow \pi_{\Sigma_0 \Sigma}(F).$$

On remarque que si

$$(\Gamma, \omega) \in \overline{\text{Hol}}_{\Sigma_0 \Sigma_1}(F) \times \pi_{x_o x_1}(V), \quad (\Gamma', \omega') \in \overline{\text{Hol}}_{\Sigma_1 \Sigma_2}(F) \times \pi_{x_1 x_2}(V)$$

sont des couples associés, alors il en est de même de $(\Gamma * \Gamma', \omega \omega')$. Si une chaîne composée $\Gamma_1 * \Gamma_2$ est associée à $\omega \in \pi(V)$, alors ω peut s'écrire $\omega = \omega_1 \omega_2$ où ω_1 (resp. ω_2) est associé à Γ_1 (resp. Γ_2).

Remarque. Soit $(\Sigma_0, x_o), (\Sigma, x)$ des sous-variétés pointées transverses à (V, F) . Alors

i) Pour tout $\Gamma \in \overline{\text{Hol}}_{\Sigma_0 \Sigma}(F)$, il existe $\omega \in \pi_{x_o x}(V)$, associé à Γ et si $\omega, \omega' \in \pi_{x_o x}(V)$ sont associés à Γ , alors $\omega \sim \omega'$.

ii) Pour tout $\omega \in \pi_{x_o x}(V)$, il existe $\Gamma \in \overline{\text{Hol}}_{\Sigma_0 \Sigma}(F)$ associé à ω .

Démonstration. i) Il existe $\omega \in \pi_{x_0, x}(V)$ associé à

$$\Gamma = (\Sigma_0, \varphi_0, \dots, \varphi_{n-1}, \Sigma_n)$$

du fait que les applications

$$\chi : \pi_{y_i, z_i}(F_{y_i}) \rightarrow \text{Hol}_{(\Sigma_i, y_i) / (\Sigma_{i+1}, z_i)}(F_{y_i}),$$

avec $y_i = \alpha(\varphi_i)$, $z_i = \beta(\varphi_i)$, $i = 0, \dots, n-1$, sont surjectives. Si ω, ω' sont associés dans $\pi_{x_0, x}(V)$ à Γ , il existe $\omega_i, \omega'_i \in \pi_{y_i, z_i}(F_{y_i})$, $i = 0, \dots, n-1$ vérifiant

$$(2) \quad \tilde{\omega}_i = \varphi_i = \tilde{\omega}'_i \quad \text{et}$$

$$\begin{aligned} \omega &= \varepsilon_{(x_0, \Sigma_0, y_0)} j_*(\omega_0) \varepsilon_{(z_0, \Sigma_1, y_1)} \dots j_*(\omega_{n-1}) \varepsilon_{(z_{n-1}, \Sigma_n, x)}, \\ \omega' &= \varepsilon_{(x_0, \Sigma_0, y_0)} j_*(\omega'_0) \varepsilon_{(z_0, \Sigma_1, y_1)} \dots j_*(\omega'_{n-1}) \varepsilon_{(z_{n-1}, \Sigma_n, x)}. \end{aligned}$$

Mais (2) entraîne

$$\omega_i \omega_i'^{-1} \in \text{Ker}_{y_i}(F_{y_i}), \quad \text{donc}$$

donc $j_*(\omega_i) \sim j_*(\omega'_i)$, $i = 0, \dots, n-1$, et finalement $\omega \sim \omega'$.

ii) Soit $\gamma : [0, 1] \rightarrow V$ un représentant de ω . Il existe

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$$

et des ouverts simplement connexes $U_i \supset \gamma([t_i, t_{i+1}])$ à feuilletages induits F_{U_i} triviaux, $i = 0, \dots, n-1$, des sous-variétés $T_i \ni x_i$, $T'_i \ni x_{i+1}$ où $x_i = \gamma(t_i)$ saturant U_i et absolument transverses conjuguées pour F_{U_i} . Pour $i = 0, \dots, n-1$, soit alors ω_i dans l'image de l'application

$$\pi_{x_i x'_i}(F_i) \rightarrow \pi_{x_i x'_i}(F_{x'_i})$$

induite de $F_i \subset F_{x'_i}$, où F_i est la feuille par x_i de F_{U_i} et où $\{x'_i\} = F_i \cap T'_i$; puisque U_i est simplement connexe, on a

$$j_*(\omega_i) \varepsilon_{(x'_i, T'_i, x_{i+1})} = [\gamma_i] \quad \text{où} \quad \gamma_i = \gamma|_{[t_i, t_{i+1}]}$$

ce qui montre que

$$\tilde{\omega}_i \in \text{Hol}_{T_i T'_i}(F) \subset \overline{\text{Hol}}_{T_i T'_i}(F)$$

est associé à $[\gamma_i] \in \pi_{x_i, x_{i+1}}(V)$. Il est alors clair que

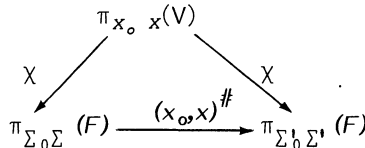
$$\bar{x}_0 * \tilde{\omega}_0 * \bar{x}_1 * \dots * \bar{x}_{n-1} * \tilde{\omega}_{n-1} * \bar{x}_n \in \overline{\text{Hol}}_{\Sigma_0 \Sigma}(F)$$

est associé à

$$[\gamma_0] \dots [\gamma_{n-1}] = \omega$$

compte tenu de ce que, pour $i = 0, \dots, n$, l'élément neutre de $\pi_{x_i}(V)$ est associé à $\hat{x}_i \in \text{Hol}_{T_{i-1}T_i}(F) \subset \text{Hol}_{T_{i-1}T_i}(F)$, avec $T_{-1} = \Sigma_0, T_n = \Sigma$.

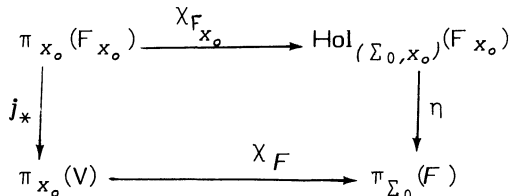
3.3. Pour $\omega, \omega' \in \pi_{x_0 x}(V)$, on observe que l'égalité $\hat{\omega}_{\Sigma_0 \Sigma} = \hat{\omega}'_{\Sigma_0 \Sigma}$ est indépendante des sous-variétés transverses $\Sigma_0 \ni x_0, \Sigma \ni x$. Etant donné, en effet, des sous-variétés transverses $\Sigma_0, \Sigma'_0 \ni x_0$ et $\Sigma, \Sigma' \ni x$, on a un diagramme commutatif



dans lequel $\hat{\omega}_{\Sigma_0 \Sigma}, \hat{\omega}'_{\Sigma'_0 \Sigma'}$ et $\hat{\omega}^\dagger_{\Sigma_0 \Sigma}, \hat{\omega}'^\dagger_{\Sigma'_0 \Sigma'}$ se correspondent respectivement par la bijection $(x_0 x)^\#$. On écrira donc $\hat{\omega} = \hat{\omega}'$. En particulier pour $x_0 \in V$ fixé, le noyau $\text{Ker}_{x_0}(F)$ de l'épimorphisme

$$\chi : \pi_{x_0}(V) \rightarrow \pi_{\Sigma_0}(F)$$

est indépendant de la sous-variété transverse $\Sigma_0 \ni x_0$. D'après la proposition de (2.4), on a un carré commutatif



ce qui entraîne $j_x(\text{Ker}_{x_0}(F_{x_0})) \subset \text{Ker}_{x_0}(F)$, c'est-à-dire

$$(1) \quad \overline{\text{Ker}_{x_0}(F_{x_0})} \subset \text{Ker}_{x_0}(F).$$

Proposition. Etant donné $\omega, \omega' \in \pi_{x_0 x}(V)$ on a $\omega \approx \omega'$ ssi $\hat{\omega} = \hat{\omega}'$.

Vérifions d'abord que la condition est nécessaire. Il existe alors $x_i \in V, \omega_i \in \pi_{x_i x_{i+1}}(V), i = 0, \dots, n-1$, avec $x_n = x$, et $\delta_i \in \overline{\text{Ker}_{x_i}(F_{x_i})}, i = 0, \dots, n$, tels qu'on ait

$$\omega = \omega_0 \dots \omega_n, \quad \omega' = \delta_0 \omega_0 \delta_1 \dots \delta_{n-1} \omega_{n-1} \delta_n$$

Des sous-variétés transverses $\Sigma_i \ni x_i, i = 0, \dots, n$ étant fixées, il vient alors, compte tenu de (1),

$$\begin{aligned} \hat{\omega}'_{\Sigma_0 \Sigma_n} &= \hat{\delta}_0_{\Sigma_0} \hat{\omega}_0_{\Sigma_0 \Sigma_1} \hat{\delta}_1_{\Sigma_1} \cdots \hat{\delta}_{n-1} \hat{\omega}_{n-1} \hat{\delta}_n_{\Sigma_n} = \\ &= \hat{\omega}_0_{\Sigma_0 \Sigma_1} \cdots \hat{\omega}_{n-1} \hat{\delta}_n_{\Sigma_n} = \hat{\omega}_{\Sigma_0 \Sigma_n} \end{aligned}$$

Vérifions que la condition est suffisante et soit $\Sigma_0 \ni x_0, \Sigma \ni x$ des sous-variétés transverses fixées. D'après la remarque de (3.2) il existe des chaînes d'holonomie

$$\Gamma, \Gamma' \in \overline{\text{Hol}}_{\Sigma_0 \Sigma}(F)$$

associées respectivement à ω, ω' . D'après (1) de (3.2), l'hypothèse $\omega = \omega'$ entraîne alors $\Gamma \simeq \Gamma'$ et il existe donc des chaînes d'holonomie

$$\Gamma_0 \sim \Gamma_1 \sim \cdots \sim \Gamma_{n-1} \sim \Gamma'$$

dans $\overline{\text{Hol}}_{\Sigma_0 \Sigma}(F)$. Pour $i = 1, \dots, n-1$, il existe aussi, d'après la remarque de (3.2), $\omega_i \in \pi_{x_0 x}(V)$ associé à Γ_i . Il suffirait de montrer maintenant qu'on a

$$\omega \sim \omega_1 \cdots \sim \omega_{n-1} \sim \omega'$$

ce qui revient finalement à démontrer l'énoncé dans le cas particulier où ω, ω' admettent des associés $\Gamma, \Gamma' \in \overline{\text{Hol}}_{\Sigma_0 \Sigma}(F)$ contigus. On peut alors écrire

$$\Gamma = \Gamma_1 * \Gamma_2 * \Gamma_3, \quad \Gamma' = \Gamma_1 * \Gamma'_2 * \Gamma_3,$$

avec

$$\Gamma_2 = (\Sigma_1, \varphi, \Sigma_3), \quad \Gamma'_2 = (\Sigma_1, \varphi_1, \Sigma_2, \varphi_2, \Sigma_3)$$

tels que

$$\Gamma_2 < \Gamma'_2 \quad \text{et} \quad \Sigma_1 = \Sigma_0 \quad (\text{resp.} \quad \Sigma_3 = \Sigma)$$

si Γ_1 (resp. Γ_3) ne figure pas dans les factorisations ci-dessus de Γ, Γ' . Soit

$$y = \alpha(\varphi), \quad z \in \beta(\varphi) \quad \text{et} \quad x_i = \alpha(\varphi_i), \quad y_i = \beta(\varphi_i), \quad i = 1, 2.$$

Puisque ω est associé à Γ , il existe $\omega_1, \omega'_1 \in \pi_{x_0 x_1}(V)$ associés à Γ_1 , ensuite $\omega_2, \omega'_2 \in \pi_{x_1 y_2}(V)$ associés respectivement à Γ_2, Γ'_2 , et enfin $\omega_3, \omega'_3 \in \pi_{y_2 x}(V)$ associés à Γ_3 tels que

$$\omega = \omega_1 \omega_2 \omega_3 \quad \text{et} \quad \omega' = \omega'_1 \omega'_2 \omega'_3.$$

Puisque $\omega_1 \sim \omega'_1$ et $\omega_3 \sim \omega'_3$, d'après la remarque de (3.2), il n'est plus que de vérifier

$$(2) \quad \omega_2 \sim \omega'_2.$$

Or il existe par hypothèse

tels que
 (3) $\eta \in \pi_{y,z}(F_y)$ et $\zeta_i \in \pi_{x_i y_i}(F_{x_i}), i = 1, 2,$
 $\omega_2 = \varepsilon_{(x_1, \Sigma_1, y)} j_*(\eta) \varepsilon_{(z, \Sigma_3, y_2)}, \quad \tilde{\eta}_{\Sigma_1 \Sigma_3} = \varphi$
 et
 (3') $\omega_2' = j_*(\zeta_1) \varepsilon_{(y_1, \Sigma_2, x_2)} j_*(\zeta_2), \quad \tilde{\zeta}_1_{\Sigma_1 \Sigma_2} = \varphi_1, \quad \tilde{\zeta}_2_{\Sigma_2 \Sigma_3} = \varphi_2.$

Il existe aussi
 $y' \in \Sigma_2, \quad \psi_1 \in \text{Hol}_{(\Sigma_1, y)(\Sigma_2, y')}(F_y)$ et $\psi_2 \in \text{Hol}_{(\Sigma_2, y')(\Sigma_3, z)}(F_z)$

tels qu'on ait

(4) $C(\psi_1) = C(\varphi_1), \quad C(\psi_2) = C(\varphi_2)$

dans $\text{Hol}_{\Sigma_1 \Sigma_2}(F), \text{Hol}_{\Sigma_2 \Sigma_3}(F)$ respectivement et

(5) $\psi_1 \psi_2 = \varphi.$

Soit enfin $\eta_1 \in \pi_{y y'}(F), \eta_2 \in \pi_{y' z}(F)$ tels qu'on ait

(6) $\tilde{\eta}_1_{\Sigma_1 \Sigma_2} = \psi_1 \quad \tilde{\eta}_2_{\Sigma_2 \Sigma_3} = \psi_2$

et par conséquent $C(\tilde{\zeta}_i) = C(\tilde{\eta}_i), i = 1, 2,$ compte tenu de (3), (3') et (4). D'après la proposition de (3.1), il vient alors

$$\varepsilon_{(x_1, \Sigma_1, y)} j_*(\eta_1) \sim j_*(\zeta_1) \varepsilon_{(y_1, \Sigma_2, y')}$$

dans $\pi_{x_1 y'}(V)$ et

$$\varepsilon_{(y', \Sigma_2, x_2)} j_*(\zeta_2) \sim j_*(\eta_2) \varepsilon_{(z, \Sigma_3, y_2)}$$

dans $\pi_{y' y_2}(V)$. Il en résulte

$$\varepsilon_{(x_1, \Sigma_1, y)} j_*(\eta_1) j_*(\eta_2) \varepsilon_{(z, \Sigma_3, y_2)} \sim j_*(\zeta_1) \varepsilon_{(y_1, \Sigma_2, y')} \varepsilon_{(y', \Sigma_2, x_2)} j_*(\zeta_2)$$

dans $\pi_{x y_2}(V)$ et donc

(7) $\varepsilon_{(x_1, \Sigma_1, y)} j_*(\eta_1 \eta_2) \varepsilon_{(z, \Sigma_3, y_2)} \sim \omega_2'$

compte tenu de (3'). D'après (6), (5) et (3), on a

$$(\tilde{\eta}_1 \tilde{\eta}_2)_{\Sigma_1 \Sigma_3} = \tilde{\eta}_1_{\Sigma_1 \Sigma_2} \tilde{\eta}_2_{\Sigma_2 \Sigma_3} = \psi_1 \psi_2 = \varphi = \tilde{\eta}_{\Sigma_1 \Sigma_3}$$

d'où

$$j_*(\eta_1 \eta_2) \sim j_*(\eta)$$

dans $\pi_{y,z}(V)$ et enfin (2), compte tenu de (3) et (7).

3.4. On désignera par $\pi_{\diamond}(F)$ le groupoïde ayant pour ensemble d'objets

$F \diamond \boxtimes V$ et qu'on déduit de $\pi(F)$ par la projection évidente

$$F \diamond \boxtimes V \rightarrow F \diamond ;$$

on désignera encore par χ_F , ou plus simplement χ , le foncteur de $\pi_{\diamond}(V)$ vers $\pi_{\diamond}(F)$ déduit de

$$\chi_F : \pi_{\diamond}(V) \rightarrow \pi(F)$$

et qui conserve les objets de ces groupoïdes. L'application canonique $p : V \rightarrow V/F$ induit $p_* : \pi(V) \rightarrow \pi(V/F)$ et par conséquent un foncteur

$$p_* : \pi_{\diamond}(V) \rightarrow \pi_{\diamond}(V/F)$$

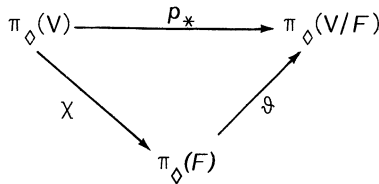
conservant les objets, où $\pi_{\diamond}(V/F)$ est le groupoïde ayant pour ensemble d'objets $F \diamond \boxtimes V$ et qu'on déduit de $\pi(V/F)$ par l'application

$$(\Sigma, x) \rightarrow F_x \text{ de } F \diamond \boxtimes V \text{ sur } V/F .$$

Proposition. Soit (V, F) une variété feuilletée. Il existe un foncteur

$$\vartheta : \pi_{\diamond}(F) \rightarrow \pi_{\diamond}(V/F)$$

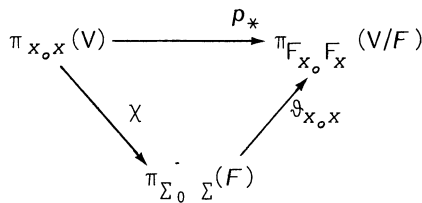
déterminé par la condition de rendre commutatif



Des sous-variétés pointées transverses $(\Sigma_0, x_0), (\Sigma, x)$ étant fixées, il s'agit de montrer qu'il existe une et une seule application

$$\vartheta_{x_0, x} : \pi_{\Sigma_0 \Sigma}(F) \rightarrow \pi_{F_{x_0} F_x}(V/F)$$

rendant commutatif



Or, χ étant surjective d'après la proposition de (2.5), il suffit de vérifier que $\chi(\omega) = \chi(\omega')$, c'est-à-dire $\hat{\omega} = \hat{\omega}'$, entraîne $p_*(\omega) = p_*(\omega')$.

D'après la Proposition de (3.3), on a $\omega \sim \omega'$, c'est-à-dire qu'il existe $x_i \in V$, $i = 1, \dots, n$, avec $x_n = x$, $\omega_i \in \pi_{x_i x_{i+1}}(V)$, $i = 0, \dots, n-1$, et $\delta_i \in \overline{\text{Ker}}_{x_i}(F_{x_i})$, $i = 0, \dots, n$ tels que

$$(1) \quad \omega = \omega_0 \cdots \omega_{n-1}, \quad \omega' = \delta_0 \omega_0 \delta_1 \cdots \delta_{n-1} \omega_{n-1} \delta_n$$

Chaque $\delta_i \in j_* (\pi_{x_i}(F_{x_i}))$, $i = 0, \dots, n$ appartient au noyau de l'homomorphisme $\rho_* : \pi_{x_i}(V) \rightarrow \pi_{F_{x_i}}(V/F)$ puisque $\rho \circ j : F_{x_i} \rightarrow V/F$ est constante, ce qui entraîne $\rho_*(\omega) = \rho_*(\omega')$, compte tenu de (1).

Corollaire. Etant donné une sous-variété transverse Σ_0 et une feuille F_0 , on a pour tout $x_0 \in \Sigma_0 \cap F_0$ un homomorphisme

$$\vartheta_{x_0} : \pi_{\Sigma_0}(F) \rightarrow \pi_{F_0}(V/F)$$

déterminé par la condition de rendre commutatif

$$\begin{array}{ccc} \pi_{x_0}(V) & \xrightarrow{\rho_*} & \pi_{F_0}(V/F) \\ & \searrow \chi & \nearrow \vartheta_{x_0} \\ & & \pi_{\Sigma_0}(F) \end{array}$$

On dira que ϑ_{x_0} est l'homomorphisme canonique attaché à Σ_0, F_0 .

Remarque. Soit Σ_0, Σ des sous-variétés transverses de (V, F) telles que les ouverts $\rho(\Sigma_0), \rho(\Sigma)$ de V/F soient contenus dans des sous-espaces simplement connexes, et soit F_0, F des feuilles telles que $F_0 \cap \Sigma_0 \neq \emptyset$, $F \cap \Sigma \neq \emptyset$. Il existe alors une application $\vartheta : \pi_{\Sigma_0 \Sigma}(F) \rightarrow \pi_{F_0 F}(V/F)$

déterminée par la condition de rendre commutatif

$$\begin{array}{ccc} & \pi_{x_0 x}(V) & \\ \chi \swarrow & & \searrow \rho_* \\ \pi_{\Sigma_0 \Sigma}(F) & \xrightarrow{\vartheta} & \pi_{F_0 F}(V/F) \end{array}$$

quels que soient $x_0 \in F_0 \cap \Sigma_0$, $x \in F \cap \Sigma$.

Pour $x_0, x'_0 \in F_0 \cap \Sigma_0$ et $x, x' \in F \cap \Sigma$, il suffit de vérifier que $\vartheta_{x_0 x} = \vartheta_{x'_0 x'}$, ce qui revient à démontrer la commutativité de

$$\begin{array}{ccccc} & & \pi_{x_0 x}(V) & & \\ & \chi \swarrow & & \searrow \rho_* & \\ \pi_{\Sigma_0 \Sigma}(F) & & & & \pi_{F_0 F}(V/F) \\ & \nwarrow \chi & \downarrow \kappa & \nearrow \rho_* & \\ & & \pi_{x'_0 x'}(V) & & \end{array}$$

où

$$\kappa(\omega) = \varepsilon_{(x'_0, \Sigma_0, x_0)} \omega \varepsilon_{(x, \Sigma, x')}$$

Or on a, d'une part, $\chi \circ \kappa = \chi$ parce que

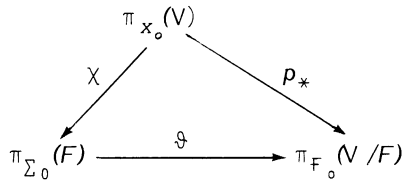
$$\chi(\varepsilon_{(x'_0, \Sigma_0, x_0)}) = e_{\Sigma_0}, \quad \chi(\varepsilon_{(x, \Sigma, x')}) = e_{\Sigma}$$

d'après la remarque de (2.5) et, d'autre part, l'existence de sous-espaces simplement connexes $\Sigma'_0 \supset \rho(\Sigma_0)$, $\Sigma' \supset \rho(\Sigma)$ de V/F entraîne que $\rho_*(\varepsilon_{(x'_0, \Sigma_0, x_0)})$ (resp. $\rho_*(\varepsilon_{(x, \Sigma, x')})$) est l'élément neutre de $\pi_{F_0}(V/F)$ (resp. $\pi_F(V/F)$) ; d'où $\rho_* \circ \kappa = \rho_*$.

Corollaire. Soit Σ_0 une sous-variété transverse et F_0 une feuille telles que $F_0 \cap \Sigma_0 \neq \emptyset$. Si $\rho_*(\Sigma_0)$ est contenu dans un sous-espace simplement connexe de V/F , il existe alors un homomorphisme

$$\vartheta : \pi_{\Sigma_0}(F) \rightarrow \pi_{F_0}(V/F)$$

tel que



soit commutatif quel que soit $x_0 \in \Sigma_0$.

3.5. On désignera par F_0 le feuilletage discret d'une variété connexe séparée V , c'est-à-dire ayant pour feuilles les points de V . L'application $p : V \rightarrow V/F_0$ est un homéomorphisme, donc $\rho_* : \pi_{\diamond}(V) \rightarrow \pi_{\diamond}(V/F_0)$ est une équivalence, et d'après la Proposition de (3.4), on a alors une équivalence canonique $\chi : \pi_{\diamond}(V) \rightarrow \pi_{\diamond}(F_0)$. C'est dire qu'on a une bijection canonique

$$\chi : \pi_{x_0, x}(V) \rightarrow \pi_{\Sigma_0, \Sigma}(F_0)$$

quels que soient $x_0, x \in V$ et les ouverts connexes, simplement connexes $\Sigma_0 \ni x_0, \Sigma \ni x$ de V . Etant donné un ouvert connexe simplement connexe $\Sigma_0 \subset V$ et $x_0 \in \Sigma_0$, on a un isomorphisme canonique

$$\chi : \pi_{x_0}(V) \rightarrow \pi_{\Sigma_0}(F_0).$$

Ceci exprime que le groupe de Poincaré de V s'interprète comme le groupe fondamental de son feuilletage discret et correspond aussi au fait que $\pi(V)$ coïncide avec le groupe fondamental du schéma de variété défini par V [8].

4. GROUPE FONDAMENTAL D'UN FEUILLETAGE SIMPLE.

4.1. On appellera section locale d'un morphisme de variétés $f: V \rightarrow W$ un couple (U, σ) , où U est un ouvert connexe simplement connexe de W et où le morphisme $\sigma: U \rightarrow V$ est une section de f ; on dira que U est le domaine de (U, σ) . On dira que $\omega \in \pi_{x_0, x}(V)$ est associé au chemin $\gamma: [a, b] \rightarrow W$ si on a $\gamma(a) = f(x_0)$, $\gamma(b) = f(x)$ et qu'il existe

$$a = t_0 < t_1 \dots < t_n = b$$

et des sections locales (U_i, σ_i) , $i = 0, \dots, n-1$, avec $U_i \supset \gamma([t_i, t_{i+1}])$, et des

$$\omega_i \in \pi_{z_{i-1}y_i}(f^{-1}(\gamma(t_i))), \quad i = 0, \dots, n,$$

avec $z_{-1} = x_0, \dots, z_n = x$ et $y_i = \sigma_i(\gamma(t_i))$, $z_i = \sigma_i(\gamma(t_{i+1}))$ pour tout $i = 0, \dots, n-1$, tels qu'on ait

$$\omega = j_*(\omega_0) \in_{(y_0, \Sigma_0, z_0)} j_*(\omega_1) \dots j_*(\omega_{n-1}) \in_{(y_{n-1}, \Sigma_{n-1}, z_{n-1})} j_*(\omega_n)$$

avec $\Sigma_i = \sigma_i(U_i)$;

$$\varepsilon_{(y_i, \Sigma_i, z_i)} = [\sigma_i \circ \gamma|_{[t_i, t_{i+1}]}]$$

désigne l'image de l'unique élément de $\pi_{y_i z_i}(\Sigma_i)$ par l'application $\pi_{y_i z_i}(\Sigma_i) \rightarrow \pi_{y_i z_i}(V)$ induite de $\Sigma_i \subset V$ et on a désigné par j l'injection dans V de $f^{-1}(\xi)$, $\xi \in W$, supposé non vide. On a alors évidemment $[\gamma] = f_*(\omega)$. On dit que γ et ω ci-dessus sont associés moyennant $0 = t_0 < t_1 \dots < t_n = 1$ et les (U_i, σ_i) , $i = 0, \dots, n-1$. On observe que γ et ω sont alors aussi associés moyennant toute subdivision plus fine

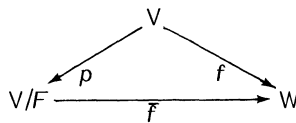
$$0 = t'_0 < t'_1 \dots < t'_m = 1$$

et les sections locales (U'_j, σ'_j) , $j = 0, \dots, m-1$, où

$$(U'_j, \sigma'_j) = (U_{i(j)}, \sigma_{i(j)})$$

avec $i(j)$ déterminé par $[t'_j, t'_{j+1}] \subset [t_{i(j)}, t_{i(j)+1}]$.

Etant donné une submersion f d'une variété séparée V sur une variété W , on désignera par F_f le feuilletage sur V défini par f , c'est-à-dire le feuilletage $f^{-1}(F_\omega)$ image réciproque par f du feuilletage discret de W , et dont les feuilles sont les composantes connexes des $f^{-1}(y)$, $y \in W$. On sait [9] que V/F est alors une variété étalée au-dessus de W par un morphisme \bar{f} qui rend commutatif



où p est une surmersion. Puisque le feuilletage simple F_f est sans holonomie, on sait que, pour des sous-variétés pointées (Σ_0, x_0) , (Σ, x) transverses à une feuille F de F_f , les morphismes $f|_{\Sigma_0}$ et $f|_{\Sigma}$ sont étales et on a

$$\text{Hol}_{(\Sigma, x_0)(\Sigma, x)}(F) = \{j_{x_0}(f|_{\Sigma_0})j_x(f|_{\Sigma})^{-1}\}.$$

Lemme. Soit (V, F) une variété feuilletée sans holonomie. Soit Σ_i, Σ'_i , $i = 0, \dots, n$, des sous-variétés transverses et soit $F_i, i = 0, \dots, n-1$, des feuilles. Pour $i = 0, \dots, n-1$, soit

$$x_i \in F_i \cap \Sigma_i, x'_i \in F_i \cap \Sigma'_i, \quad y_i \in F_i \cap \Sigma_{i+1}, y'_i \in F_i \cap \Sigma'_{i+1}$$

avec

$$(\Sigma_0, x_0) = (\Sigma'_0, x'_0) \quad \text{et} \quad (\Sigma_n, y_{n-1}) = (\Sigma'_n, y'_{n-1}).$$

Pour $i = 1, \dots, n-1$, on suppose

$$C(\varphi_{y_{i-1}y'_{i-1}}) = C(\varphi_{x_i x'_i}) \quad \text{dans} \quad \text{Hol}_{(\Sigma_i, \Sigma'_i)}(F)$$

où

$$\{\varphi_{y_{i-1}y'_{i-1}}\} = \text{Hol}_{(\Sigma_i, y_{i-1})(\Sigma'_i, y'_{i-1})}(F_i), \quad \{\varphi_{x_i x'_i}\} = \text{Hol}_{(\Sigma_i, x_i)(\Sigma'_i, x'_i)}(F_i)$$

On a alors

$$(1) \quad [\varphi_{x_0 y_0}] * \dots * [\varphi_{x_{n-1} y_{n-1}}] = [\varphi_{x'_0 y'_0}] * \dots * [\varphi_{x'_{n-1} y'_{n-1}}]$$

dans $\pi_{\Sigma_0 \Sigma_n}(F)$, avec

$$\{\varphi_{x_i y_i}\} = \text{Hol}_{(\Sigma_i, x_i)(\Sigma_{i+1}, y_i)}(F_i), \quad \{\varphi_{x'_i y'_i}\} = \text{Hol}_{(\Sigma'_i, x'_i)(\Sigma'_{i+1}, y'_i)}(F_i),$$

L'énoncé étant trivial pour $n = 1$, supposons-le démontré pour $n-1 > 0$ et vérifions-le pour $n > 1$. L'hypothèse de récurrence entraîne

$$(2) \quad [\varphi_{x_1 y_1}] * \dots * [\varphi_{x_{n-1} y_{n-1}}] = [\varphi_{x'_1 y'_1}] * \dots * [\varphi_{x'_{n-1} y'_{n-1}}]$$

avec

$$\{\varphi_{x_1 y_1}\} = \text{Hol}_{(\Sigma_1, x_1)(\Sigma_2, y_1)}(F_1).$$

On a d'autre part

$$\varphi_{x_0 y_0} \varphi_{y_0 y'_0}^{-1} = \varphi_{x_0 y_0} \quad \text{où} \quad \{\varphi_{x_0 y'_0}\} = \text{Hol}_{(\Sigma_0, x_0)(\Sigma'_1, y'_0)}(F_0)$$

et

$$\varphi_{x'_1 y'_1}^{-1} = \varphi_{x'_1 y'_1} = \varphi_{x'_1 y'_1} \varphi_{x'_1 y'_1}^{-1}$$

où

$$\{\varphi_{x_1 y'_1}\} = \text{Hol}_{(\Sigma_1, x_1)(\Sigma'_2, y'_1)}(F_1).$$

Compte tenu de l'hypothèse $C(\varphi_{y_0 y'_0}) = C(\varphi_{x_1 x'_1})$ qui entraîne

$$[\varphi_{y_0 y'_0}] = [\varphi_{x_1 x'_1}]$$

il vient alors

$$\begin{aligned} [\varphi_{x_0 y_0}] &= [\varphi_{x_0 y'_0}] * [\varphi_{y_0 y'_0}]^{-1} = \\ &= [\varphi_{x'_0 y'_0}] * [\varphi_{x_1 x'_1}]^{-1} = [\varphi_{x'_0 y'_0}] * [\varphi_{x'_1 y'_1}] * [\varphi_{x_1 y_1}]^{-1}. \end{aligned}$$

Compte tenu de (2), on obtient alors enfin (1).

Proposition. Soit $f : V \rightarrow W$ une surmersion, V étant supposée séparée, et les $f^{-1}(y)$, $y \in W$, connexes.

i) Quels que soient $x_0, x \in V$ et le chemin $\gamma : [a, b] \rightarrow W$ d'origine $f(x_0)$ et d'extrémité $f(x)$, il existe $\omega \in \pi_{x_0, x}(V)$, associé à γ , et si $\omega, \omega' \in \pi_{x_0, x}(V)$ sont associés à γ , alors $\omega \stackrel{F}{\sim} \omega'$.

ii) Quels que soient $\omega \in \pi_{x_0, x}(V)$ et $x_0, x \in V$, il existe un chemin de W associé à ω .

Démonstration. i) Puisque f est une surmersion, il existe

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$$

et des sections locales (U_i, σ_i) , $i = 0, \dots, n-1$, de f , avec

$$U_i \supset \gamma([t_i, t_{i+1}]) \quad \text{et} \quad \sigma_0(\gamma(a)) = x_0, \quad \sigma_{n-1}(\gamma(b)) = x.$$

Il existe $\omega \in \pi_{x_0, x}(V)$ associé à la chaîne d'holonomie

$$(\Sigma_0, \varphi_0, \dots, \varphi_{n-2}, \Sigma_{n-1})$$

de F_f , où

$$\Sigma_i = \sigma_i(U_i) \quad \text{et} \quad \{\varphi_i\} = \text{Hol}_{(\Sigma_i, \sigma_i(\gamma(t_i)))(\Sigma_{i+1}, \sigma_{i+1}(\gamma(t_{i+1})))} (F^{-1}(\gamma(t_i))).$$

Il est clair alors que ω est associé à γ moyennant

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$$

et les (U_i, σ_i) , $i = 0, \dots, n-1$. Si $\omega, \omega' \in \pi_{x_0, x}(V)$ sont associés à γ , alors on sait qu'il existe $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ et des sections locales (U_i, σ_i) , (U'_i, σ'_i) , $i = 1, \dots, n-1$, de f telles que ω (resp. ω') soit associé à γ moyennant $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ et les (U_i, σ_i) (resp. les (U'_i, σ'_i)), $i = 1, \dots, n-1$. Soit $\Sigma_0 \ni x_0$ et $\Sigma_n \ni x_n$ des sous-variétés transverses à F et posons $\Sigma_i = \sigma_i(U_i)$, $\Sigma'_i = \sigma'_i(U'_i)$,

$$x_i = \sigma_i(\gamma(t_i)), \quad x'_i = \sigma'_i(\gamma(t_i)), \quad i = 1, \dots, n-1,$$

$$y_i = \sigma_{i+1}(\gamma(t_{i+1})), \quad y'_i = \sigma'_{i+1}(\gamma(t_{i+1})), \quad i = 0, \dots, n-2,$$

et

$$y_{n-1} = y'_{n-1} = x.$$

Avec les notations du lemme, on observe que ω (resp. ω') est associé à la chaîne d'holonomie

$$(\Sigma_0, \varphi_{x_0 y_0}, \Sigma_1, \dots, \varphi_{x_{n-1} y_{n-1}}, \Sigma_n)$$

(resp. $(\Sigma_0, \varphi_{x'_0 y'_0}, \Sigma_1, \dots, \varphi_{x'_{n-1} y'_{n-1}}, \Sigma_n)$)

avec $x'_0 = x_0$) du feuilletage sans holonomie F_f . Compte tenu de la Proposition de (3.3), il s'agit de vérifier $\hat{\omega}_{\Sigma_0 \Sigma} = \hat{\omega}'_{\Sigma_0 \Sigma}$ ou encore

$$[\varphi_{x_0 y_0}] * \dots * [\varphi_{x_{n-1} y_{n-1}}] = [\varphi_{x'_0 y'_0}] * \dots * [\varphi_{x'_{n-1} y'_{n-1}}].$$

Or ceci résulte du lemme, compte tenu de la connexité de

$$\text{Hol}_{\Sigma_i \Sigma'_i}(F_f) = \{ j_{\gamma(t)}(f|_{\Sigma_i})(j_{\gamma'(t)}(f|_{\Sigma'_i}))^{-1} \mid t \in [t_{i-1}, t_i] \}$$

pour $i = 1, \dots, n-1$.

ii) Etant donné des sous-variétés $\Sigma_0 \ni x_0, \Sigma \ni x$, transverses à F_f , et qu'on peut supposer absolument transverses parce que F_f est simple [9] il existe, d'après la remarque de (3.2), une chaîne d'holonomie

$$(\Sigma_0, \varphi_0, \dots, \Sigma_n, \varphi_n, \Sigma)$$

associée à ω . On peut supposer $x_0 = \alpha(\varphi_0)$, $x = \beta(\varphi_n)$ et la démonstration de la Remarque de (3.2) montre qu'on peut supposer les Σ_i , $i = 1, \dots, n$ tous absolument transverses, puisque toute sous-variété transverse au feuilletage simple F_f est réunion de sous-variétés ouvertes absolument transverses [9]. On a alors des sections locales $(f|_{\Sigma_i}, \sigma_i)$, $i = 1, \dots, n$ où σ_i est la réciproque de l'homéomorphisme $f|_{\Sigma_i} : \Sigma_i \rightarrow f(\Sigma_i)$. Pour chaque $i = 1, \dots, n$, soit $\gamma_i : [i-1/n, i/n] \rightarrow f(\Sigma_i)$ un chemin d'origine $f(\alpha(\varphi_{i-1})) = f(\beta(\varphi_{i-1}))$ et d'extrémité

$$f(\alpha(\varphi_i)) = f(\beta(\varphi_i)).$$

Alors $\gamma_1 + \dots + \gamma_n : [0, 1] \rightarrow W$ est associé à ω .

4.2. Etant donné une surmersion $f : V \rightarrow W$ on dira que les chemins homotopes $\gamma : [a, b] \rightarrow W$, $\gamma' : [a, b] \rightarrow W$ sont strictement homotopes relativement à f s'il existe $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ et des domaines

$$U_i \supset \gamma([t_i, t_{i+1}]) \cup \gamma'([t_i, t_{i+1}]), \quad i = 0, \dots, n-1$$

de sections locales telles que, pour $i = 1, \dots, n-2$, $\gamma(t_i)$ et $\gamma'(t_i)$ appartiennent à la même composante connexe de $U_{i-1} \cap U_i$.

Lemme. Soit $f : V \rightarrow W$ une surmersion. Si $\gamma_0 : [0, 1] \rightarrow W$ et $\gamma : [0, 1] \rightarrow W$ sont homotopes, alors il existe des chemins $\gamma_i : [0, 1] \rightarrow W$, $i = 1, \dots, n-1$, tels que γ_i et γ_{i+1} soient strictement homotopes relativement à f , pour

$i = 0, \dots, n-1$ et avec $\gamma_n = \gamma$.

Soit $h : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow W$ une application continue réalisant l'homotopie de γ_0 à γ . On a donc

$$\gamma_0 = h(\cdot, 0), \quad \gamma = h(\cdot, 1).$$

Tout $y \in W$ admet un voisinage ouvert U_y domaine d'une section locale de f . En vertu du lemme de Lebesgue, il existe un entier n et des $y_{ij} \in W, 0 \leq i, j \leq n-1$ tels que

$$[i/n, (i+1)/n] \times [j/n, (j+1)/n] \subset h^{-1}(U_{y_{ij}}).$$

Il est clair que deux éléments consécutifs de la suite des $h(\cdot, j/n)$, $j = 0, \dots, n$, sont strictement homotopes relativement à f .

Proposition. Si le feuilletage F sur V est simple, alors $\vartheta : \pi_{\diamond}(F) \rightarrow \pi_{\diamond}(V/F)$ est une équivalence.

Les sous-variétés pointées transverses $(\Sigma_0, x_0), (\Sigma, x)$ étant fixées, il s'agit de montrer que

$$\vartheta_{x_0, x} : \pi_{\Sigma_0, \Sigma}(F) \rightarrow \pi_{F_0, F}(V/F)$$

où $F_0 = F_{x_0}, F = F_x$ est bijective. Observons d'abord que $\vartheta_{x_0, x}$ est surjective parce que p_* est surjective dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} & \pi_{x_0, x}(V) & \\ \chi \swarrow & & \searrow p_* \\ \pi_{\Sigma_0, \Sigma}(F) & \xrightarrow{\vartheta_{x_0, x}} & \pi_{F_0, F}(V/F) \end{array}$$

En effet, pour tout chemin γ de V/F d'origine F_0 , d'extrémité F , il existe $\omega \in \pi_{x_0, x}(V)$ associé à γ et qui vérifie dès lors $p_*(\omega) = [\gamma]$. Il reste à montrer que $\vartheta_{x_0, x}$ est injective, c'est-à-dire que

$$p_*(\omega) = p_*(\omega') \quad \text{entraîne} \quad \chi(\omega) = \chi(\omega')$$

ou encore $\omega \underset{F}{\sim} \omega'$ d'après la Proposition de (3.3). Puisque p est une surmersion, il existe, d'après la Proposition de (4.1), des chemins γ, γ' de $\pi_{F_0, F}(V/F)$ définis dans $[0, 1]$ et associés respectivement à ω, ω' . On a alors

$$[\gamma] = p_*(\omega) = p_*(\omega') = [\gamma'].$$

D'après le lemme ci-dessus, il existe alors des chemins

$$\gamma_i : [0, 1] \rightarrow V/F, \quad i = 0, \dots, n,$$

avec $\gamma_0 = \gamma_1, \gamma_n = \gamma'$ tels que $\gamma_i, \gamma_{i+1}, i = 0, \dots, n-1$, soient strictement homotopes relativement à p . D'après la Proposition de (4.1), chaque $\gamma_i, i = 1, \dots, n-1$, admet un associé $\omega_i \in \pi_{x_0, x}(V)$. On est ramené à démontrer

$$\omega \sim \omega_1 \sim \dots \sim \omega_{n-1} \sim \omega'$$

c'est-à-dire au cas où ω, ω' admettent des associés γ, γ' strictement homotopes relativement à p . Or il existe alors $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ et des sections locales $(U_i, \sigma_i), i = 0, \dots, n-1$, de p , avec

$$U_i \supset \gamma([t_i, t_{i+1}]) \cup \gamma'([t_i, t_{i+1}]), \quad \sigma_0(F_0) = x_0, \quad \sigma_{n-1}(F) = x,$$

et telles que, pour $i = 1, \dots, n-2, \gamma'(t_i), \gamma(t_i)$ appartiennent à la même composante connexe de $U_{i-1} \cap U_i$. D'après la démonstration de i de la Proposition de (4.1), il existe $\omega_1, \omega'_1 \in \pi_{x_0, x}(V)$ associés à γ, γ' respectivement, moyennant $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ et les $(U_i, \sigma_i), i = 0, \dots, n-1$. Ceci entraîne, d'après la même proposition,

$$\omega \sim \omega_1, \quad \omega' \sim \omega'_1$$

compte tenu de $F = F_p$. Il n'est donc plus que de vérifier $\omega_1 \sim \omega'_1$. Compte tenu de la Proposition de (3.3), ceci revient à démontrer

$$(1) \quad \hat{\omega}_1_{\Sigma_0 \Sigma_{n-1}} = \hat{\omega}'_1_{\Sigma_0 \Sigma_{n-1}} \quad \text{ou} \quad \Sigma_i = \sigma_i(U_i), \quad i = 0, \dots, n-1.$$

Or ω_1 (resp. ω'_1) est associé à la chaîne d'holonomie

$$\Gamma = (\Sigma_0, \varphi_0, \Sigma_1, \dots, \varphi_{n-2}, \Sigma_{n-1})$$

$$\text{(resp.} \quad \Gamma' = (\Sigma_0, \varphi'_0, \Sigma_1, \dots, \varphi'_{n-2}, \Sigma_{n-1}))$$

avec

$$\varphi_i = j_{\sigma_i(\gamma(t_{i+1}))}(\rho) j_{\gamma(t_{i+1})}(\sigma_{i+1}), \quad \varphi'_i = j_{\sigma_i(\gamma'(t_{i+1}))}(\rho) j_{\gamma'(t_{i+1})}(\sigma_{i+1})$$

$i = 0, \dots, n-2$. La relation (1) résultera donc de $\Gamma \simeq \Gamma'$. Or on a effectivement $C(\varphi_i) = C(\varphi'_i)$, donc $[\varphi_i] = [\varphi'_i]$, pour $i = 0, \dots, n-2$. En effet, il existe par hypothèse un chemin $\delta_i : [0, 1] \rightarrow U_i \cap U_{i+1}$ d'origine $\gamma(t_{i+1})$ et d'extrémité $\gamma'(t_{i+1})$; d'où le chemin

$$t \rightarrow j_{\sigma_i(\delta_i(t))}(\rho) j_{\delta_i(t)}(\sigma_{i+1})$$

d'origine φ_i et d'extrémité φ'_i dans $\text{Hol}_{\Sigma_i \Sigma_{i+1}}(F)$.

Corollaire 1. Soit (Σ_0, x_0) une sous-variété pointée transverse à une

variété feuilletée simple (V, F) . L'homomorphisme

$$\vartheta_{x_0} : \pi_{\Sigma_0}(F) \rightarrow \pi_{F_{x_0}}(V/F)$$

est un isomorphisme.

La remarque de (3.4) et son corollaire permettent d'énoncer :

Corollaire 2. Soit Σ_0, Σ des sous-variétés transverses à la variété feuilletée simple (V, F) et supposons que les ouverts $p(\Sigma_0)$ et $p(\Sigma)$ de V/F soient contenus dans des sous-espaces simplement connexes. Soit aussi F_0, F des feuilles rencontrant respectivement Σ_0, Σ . Alors

$$\vartheta : \pi_{\Sigma_0 \Sigma}(V) \rightarrow \pi_{F_0 F}(V/F)$$

est bijective et $\vartheta : \pi_{\Sigma_0}(F) \rightarrow \pi_{F_0}(V/F)$ est un isomorphisme.

Les hypothèses de ce corollaire sont vérifiées dans le cas particulier où Σ_0, Σ sont absolument transverses, puisque p induit alors un homéomorphisme de Σ_0 (resp. Σ) sur $p(\Sigma_0)$ (resp. $p(\Sigma)$).

C'est au sens précis des corollaires précédents qu'on peut dire que le groupe fondamental d'un feuilletage simple F sur V n'est autre que le groupe de Poincaré de la variété V/F . Ceci a été perçu par van Est [8] dans le cadre des schémas de variété et résulte des faits suivants. Le schéma de variété de la variété feuilletée simple (V, F) est isomorphe, en tant que schéma de variété, au schéma de variété défini par la variété V/F . Ces deux schémas de variété ont donc des groupes fondamentaux isomorphes. Or $\pi(F)$ est le groupe fondamental du schéma de (V, F) et $\pi(V/F)$ est le groupe fondamental du schéma de V/F [8].

5. GROUPE FONDAMENTAL D'UN FEUILLETAGE IMAGE RECIPROQUE

5.1. Dans ce qui suit, $f : V \rightarrow W$ désignera un morphisme de variétés séparées connexes, transverse à un feuilletage F de W . On sait [9] que les feuilles du feuilletage image réciproque $f^{-1}(F)$ sur V sont les composantes connexes des sous-espace $f^{-1}(F)$ (pour la topologie fine définie par $f^{-1}(F)$), où F parcourt V/F . On sait aussi que f induit, pour toute feuille F de $f^{-1}(F)$, un morphisme $f|_F : F \rightarrow F'$, où F' désignera la feuille de F contenant $f(F)$. D'où une application continue évidente $\bar{f} : V/F \rightarrow W/F$.

Proposition. Soit $f : V \rightarrow W$ transverse au feuilletage F de W . Pour tout $x \in V$, on a alors

$$(1) \quad (f|_F)_* J_x^1(\text{Ker}_{f(x)}(F'_x)) = \text{Ker}_x(F'_x)$$

et

$$(2) \quad f_*(\overline{\text{Ker}}_X(F_X)) \subset \overline{\text{Ker}}_{f(x)}(F'_X)$$

où

$$(f|_{F_X})_* : \pi_X(F_X) \rightarrow \pi_{f(x)}(F'_X) \quad \text{et} \quad f_* : \pi_X(V) \rightarrow \pi_{f(x)}(W)$$

sont induites par $f|_{F_X}$ et f respectivement.

Etant donné des sous-variétés $\Sigma \ni x$ et $\Sigma' \ni f(x)$ transverses à $f^{-1}(F)$ et F respectivement, on a [9] un homomorphisme injectif

$$\tilde{f} : \text{Hol}_{(\Sigma, x)}(F_X) \rightarrow \text{Hol}_{(\Sigma', f(x))}(F'_X)$$

déterminé par la condition de rendre commutatif le carré

$$\begin{array}{ccc} \pi_X(F_X) & \xrightarrow{(f|_{F_X})_*} & \pi_{f(x)}(F'_X) \\ \chi \downarrow & & \downarrow \chi \\ \text{Hol}_{(\Sigma, x)}(F_X) & \xrightarrow{\tilde{f}} & \text{Hol}_{(\Sigma', f(x))}(F'_X) \end{array}$$

D'où (1). Il est clair que $(f|_{F_X})_*(\text{Ker}_X(F_X)) \subset \text{Ker}_{f(x)}(F'_X)$ et la commutativité du carré

$$\begin{array}{ccc} \pi_X(F_X) & \xrightarrow{(f|_{F_X})_*} & \pi_{f(x)}(F'_X) \\ j_* \downarrow & & \downarrow j'_* \\ \pi_X(V) & \xrightarrow{f_*} & \pi_{f(x)}(W) \end{array}$$

induit de

$$\begin{array}{ccc} F_X & \xrightarrow{f|_{F_X}} & F'_X \\ j \downarrow & & \downarrow j' \\ V & \xrightarrow{f} & W \end{array}$$

où j, j' sont les inclusions, entraînent (2).

Corollaire. Soit $f : V \rightarrow W$ une surmersion telle que les $f^{-1}(y), y \in W$, soient connexes et soit F un feuilletage sur W . Pour tout $x \in V$, les homomorphismes

$$(f|_{F_X})_* : \text{Ker}_X(F_X) \rightarrow \text{Ker}_{f(x)}(F'_X) \quad \text{et} \quad f_* : \overline{\text{Ker}}_X(F_X) \rightarrow \overline{\text{Ker}}_{f(x)}(F'_X)$$

sont surjectifs.

En effet, $f|_{F_x}: F_x \rightarrow F'_x$ étant une surmersion à fibres connexes [9] il résulte de la proposition de (4.1) que

$$(f|_{F_x})_* : \pi_x(F_x) \rightarrow \pi_{f(x)}(F'_x)$$

est surjective. Compte tenu de (1), il est clair que

$$(f|_{F_x})_* : \text{Ker}_x(F_x) \rightarrow \text{Ker}_{f(x)}(F'_x)$$

est surjective. Il en résulte immédiatement que

$$f_* : \overline{\text{Ker}}_x(F_x) \rightarrow \overline{\text{Ker}}_{f(x)}(F'_x)$$

est surjective.

5.2. Proposition. Soit $f : V \rightarrow W$ transverse à un feuilletage F . Quelles que soient les sous-variétés pointées (Σ_0, x_0) , (Σ, x) transverses à $f^{-1}(F)$ et les sous-variétés $\Sigma'_0 \ni f(x_0)$, $\Sigma' \ni f(x)$ transverses à F , on a une application

$$f_{x_0, x}^\# : \pi_{\Sigma_0 \Sigma}(f^{-1}(F)) \rightarrow \pi_{\Sigma'_0 \Sigma'}(F)$$

déterminée par la condition de rendre commutatif

$$\begin{array}{ccc} \pi_{x_0, x}(V) & \xrightarrow{f_*} & \pi_{f(x_0), f(x)}(W) \\ \downarrow \chi_{f^{-1}(F)} & & \downarrow \chi_F \\ \pi_{\Sigma_0 \Sigma}(f^{-1}(F)) & \xrightarrow{f_{x_0, x}^\#} & \pi_{\Sigma'_0 \Sigma'}(F) \end{array}$$

Puisque $\chi_{f^{-1}(F)}$ et χ_F sont surjectives, il s'agit de montrer que

$$\chi_{f^{-1}(F)}(\omega) = \chi_{f^{-1}(F)}(\omega') \text{ entraîne } \chi_F(f_*(\omega)) = \chi_F(f_*(\omega')),$$

ou encore, compte tenu de la Proposition de (3.3), que : $\omega \underset{f^{-1}(F)}{\sim} \omega'$ entraîne

$$(1) \quad f_*(\omega) \underset{F}{\sim} f_*(\omega').$$

Or il existe alors par hypothèse $x_i \in V$, $i = 0, \dots, n$, avec $x_n = x$, $\omega_i \in \pi_{x_{i-1}x_i}(V)$, $i = 1, \dots, n$ et $\delta_i \in \text{Ker}_{x_i}(F_{x_i})$, $i = 0, \dots, n$, tels que

$$\omega = \omega_1 \cdots \omega_n, \quad \omega' = \delta_0 \omega_1 \delta_1 \cdots \omega_n \delta_n.$$

D'où

$$\begin{aligned} f_*(\omega) &= f_*(\omega_1) \cdots f_*(\omega_n), \\ f_*(\omega') &= f_*(\delta_0) f_*(\omega_1) \cdots f_*(\omega_n) f_*(\delta_n), \end{aligned}$$

où

$$f_*(\delta_i) \in \overline{\text{Ker } f(x_i)(F'x_i)}$$

d'après la Proposition de (5.1). D'où (1).

Corollaire. Soit $f : V \rightarrow W$ transverse au feuilletage F . Etant donné une sous-variété pointée (Σ_0, x_0) transverse à $f^{-1}(F)$ et une sous-variété $\Sigma'_0 \ni f(x_0)$ transverse à F , on a un homomorphisme

$$f^{\#}_{x_0} : \pi_{\Sigma_0}(f^{-1}(F)) \rightarrow \pi_{\Sigma'_0}(F)$$

déterminé par la condition de rendre commutatif

$$\begin{array}{ccc} \pi_{x_0}(V) & \xrightarrow{f_*} & \pi_{f(x_0)}(W) \\ \chi_{f^{-1}(F)} \downarrow & & \downarrow \chi_F \\ \pi_{\Sigma_0}(f^{-1}(F)) & \xrightarrow{f^{\#}_{x_0}} & \pi_{\Sigma'_0}(F) \end{array}$$

Avec les notations et les données ci-dessus, on observe encore :

Remarque 1. i) Si $x \in F_{x_0}$, le carré

$$\begin{array}{ccc} \text{Hol}_{(\Sigma_0, x_0)(\Sigma, x)}(F_{x_0}) & \xrightarrow{\tilde{f}} & \text{Hol}_{(\Sigma'_0, f(x_0))(\Sigma', f(x))}(F'_{x_0}) \\ \eta \downarrow & & \downarrow \eta \\ \pi_{\Sigma_0 \Sigma}(f^{-1}(F)) & \xrightarrow{f^{\#}_{x_0 x}} & \pi_{\Sigma'_0 \Sigma'}(F) \end{array}$$

est commutatif.

$$\text{ii) } \begin{array}{ccc} \pi_{\Sigma_0 \Sigma}(f^{-1}(F)) & \xrightarrow{f^{\#}_{x_0 x}} & \pi_{\Sigma'_0 \Sigma'}(F) \\ \vartheta_{x_0 x} \downarrow & & \downarrow \vartheta_{f(x_0) f(x)} \\ \pi_{F_{x_0} F_x}(V/f^{-1}(F)) & \xrightarrow{(\tilde{f})_*} & \pi_{F'_{x_0} F'_x}(W/F) \end{array}$$

est commutatif.

Démonstration. i) Résulte, compte tenu de (1.4), de la commutativité des carrés internes du diagramme 1 de la page suivante, où les χ sont surjectives.

ii) Compte tenu de i, ceci résulte de la commutativité des diagrammes internes du diagramme 2 de la page suivante, où

$$p : V \rightarrow V/f^{-1}(F) \quad \text{et} \quad p' : W \rightarrow W/F$$

sont les applications canoniques.

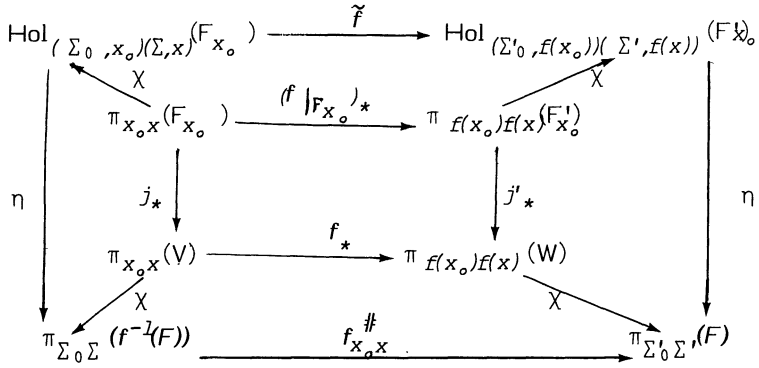


Figure 1

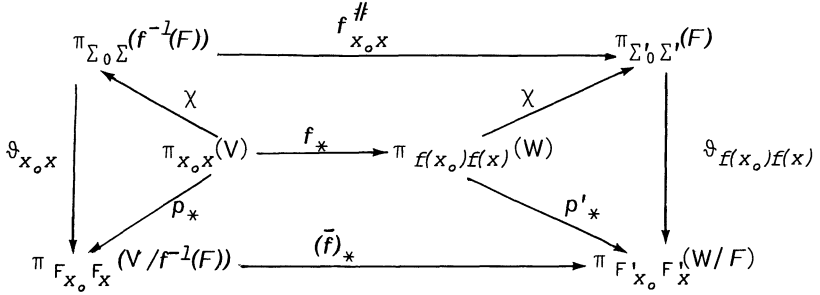


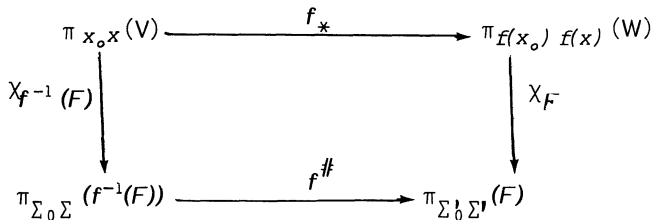
Figure 2

On observe aussi que $f^{\#}_{x_0, x}$ est indépendant de $x_0 \in \Sigma_0, x \in \Sigma$ dans le cas suivant :

Remarque 2. Soit $f : V \rightarrow W$ transverse à F , soit Σ_0, Σ des sous-variétés transverses à $f^{-1}(F)$ et soit $\Sigma'_0 \supset f(\Sigma_0), \Sigma' \supset f(\Sigma)$ des sous-variétés transverses à F . Il existe alors

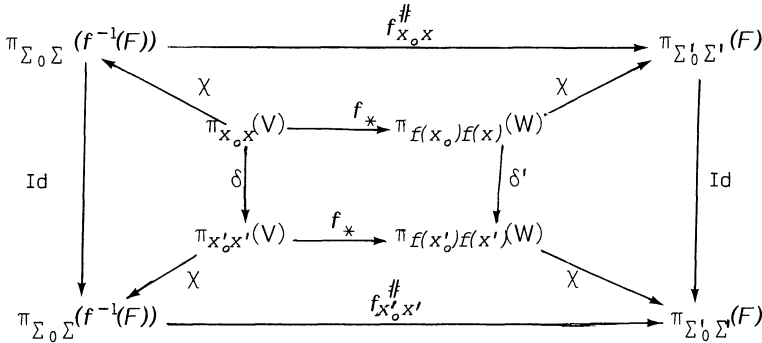
$$f^{\#} : \pi_{\Sigma_0, \Sigma}(f^{-1}(F)) \rightarrow \pi_{\Sigma'_0, \Sigma'}(F)$$

déterminée par la condition de rendre commutatif



quels que soient $x_0 \in \Sigma_0$, $x \in \Sigma$.

Quels que soient $x_0, x'_0 \in \Sigma_0$ et $x, x' \in \Sigma$, il s'agit de vérifier $f_{x_0 x}^\# = f_{x'_0 x'}^\#$, ce qui revient encore à vérifier la commutativité du carré externe du diagramme



où δ et δ' sont définis par

$$\delta(\omega) = \epsilon_{(x'_0, \Sigma_0, x_0)} \omega \epsilon_{(x, \Sigma, x')}, \quad \delta'(\omega) = \epsilon_{(f(x'_0), \Sigma'_0, f(x_0))} \omega \epsilon_{(f(x), \Sigma', f(x'))}$$

Or, d'une part, on a $\delta' \circ f_* = f_* \circ \delta$ du fait que

$$f_*(\epsilon_{(x'_0, \Sigma_0, x_0)}) = \epsilon_{(f(x'_0), \Sigma'_0, f(x_0))}, \quad f_*(\epsilon_{(x, \Sigma, x')}) = \epsilon_{(f(x), \Sigma', f(x'))}$$

D'autre part, on a $\chi \circ \delta = \chi$ (resp. $\chi \circ \delta' = \chi$) du fait que

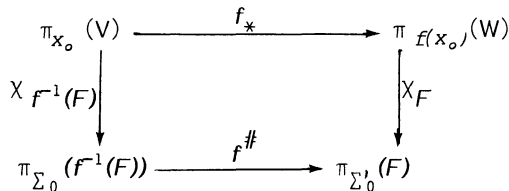
$$\chi(\epsilon_{(x'_0, \Sigma_0, x_0)}) = e_{\Sigma_0}, \quad \chi(\epsilon_{(x, \Sigma, x')}) = e_{\Sigma}$$

$$\text{(resp. } \chi(\epsilon_{(f(x'_0), \Sigma'_0, f(x_0))}) = e_{\Sigma'_0}, \chi(\epsilon_{(f(x), \Sigma', f(x'))}) = e_{\Sigma'} \text{)}.$$

Corollaire. Soit $f : V \rightarrow W$ transverse à F , soit Σ_0 une sous-variété transverse à $f^{-1}(F)$ et soit $\Sigma'_0 \subset f(\Sigma_0)$ une sous-variété transverse à F . Il existe un homomorphisme

$$f^\# : \pi_{\Sigma_0}(f^{-1}(F)) \rightarrow \pi_{\Sigma'_0}(F)$$

rendant commutatif



pour tout $x_0 \in \Sigma_0$.

Les énoncés qui précèdent précisent dans quel sens il y a lieu de

parler de l'homomorphisme $\pi(f^{-1}(F)) \rightarrow \pi(F)$ des groupes fondamentaux induit par $f : V \rightarrow W$ transverse à F . Le paragraphe suivant concerne un cas remarquable où cet homomorphisme est un isomorphisme.

5.3. Lemme. Soit $f : V \rightarrow W$ une surmersion de variétés séparées et soit F un feuilletage de W . Alors $\omega_{F_f} \simeq \omega'_f$ dans $\pi_{x_o, x}(V)$ entraîne

$$\omega_{f^{-1}(F)} \simeq \omega'_f$$

Quels que soient la feuille F de F_f et $y \in F$, il s'agit de vérifier

$$(1) \quad \overline{\text{Ker}}_y(F) \subset \overline{\text{Ker}}_y(\tilde{F}),$$

où \tilde{F} désigne la feuille de $f^{-1}(F)$ contenant F . Puisque F_f est sans holonomie, on a

$$(2) \quad \overline{\text{Ker}}_y(F) = j_* (\pi_y(F)) = j'_* (k_* (\pi_y(F))),$$

compte tenu du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \pi_y(F) & \xrightarrow{k_*} & \pi_y(\tilde{F}) \\ & \searrow j_* & \swarrow j'_* \\ & \pi_y(V) & \end{array}$$

où

$$j : F \rightarrow V, \quad k : F \rightarrow \tilde{F}, \quad j' : \tilde{F} \rightarrow V$$

sont les inclusions. Compte tenu de (2), la démonstration de (1) se ramène à celle de

$$k_* (\pi_y(F)) \subset \text{Ker}_y(\tilde{F}),$$

c'est-à-dire, compte tenu de la Proposition de (5.1), à

$$k_* (\pi_y(F)) \subset (f|_{\tilde{F}})_* (\text{Ker}_y(\tilde{F})).$$

Or ceci résulte de ce que l'application composée

$$F \xrightarrow{k} \tilde{F} \xrightarrow{f|_{\tilde{F}}} \tilde{F}'$$

est constante.

L'énoncé suivant généralise le cas particulier où F est discret, et qui a déjà été établi, parce qu'on a alors

$$\pi(F) \simeq \pi(W) \simeq \pi(f^{-1}(F))$$

d'après (3.5) et la Proposition de (4.2).

Proposition. Soit $f : V \rightarrow W$ une surmersion telle que les $f^{-1}(y)$, $y \in W$, soient connexes et soit F un feuilletage de W . Quelles que soient les sous-variétés pointées (Σ_0, x_0) , (Σ, x) transverses à $f^{-1}(F)$ et les sous-variétés $\Sigma'_0 \ni f(x_0)$, $\Sigma' \ni f(x)$ transverses à F , l'application

$$f_{x_0, x}^\# : \pi_{\Sigma_0, \Sigma} (f^{-1}(F)) \rightarrow \pi_{\Sigma'_0, \Sigma'} (F)$$

est une bijection.

Dans le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \pi_{x_0, x}(V) & \xrightarrow{f_*} & \pi_{f(x_0), f(x)}(W) \\ \chi_{f^{-1}(F)} \downarrow & & \downarrow \chi_F \\ \pi_{\Sigma_0, \Sigma}(f^{-1}(F)) & \xrightarrow{f_{x_0, x}^\#} & \pi_{\Sigma'_0, \Sigma'}(F) \end{array}$$

les flèches verticales sont surjectives, ainsi que f_* , en conséquence de la Proposition de (4.1). Donc $f_{x_0, x}^\#$ est surjective. Démontrer que $f_{x_0, x}^\#$ est injective revient, compte tenu de la Proposition de (3.3), à montrer que $f_*(\omega) \sim f_*(\omega')$ entraîne

$$(1) \quad \omega \underset{f^{-1}(F)}{\sim} \omega'.$$

Or, sous cette hypothèse, il existe $y_i \in W$, $\delta_i \in \overline{\text{Ker}}_{y_i}(F_{y_i})$, $i = 0, \dots, n$, avec $y_0 = f(x_0)$, $y = f(x)$, et $\omega_i \in \pi_{y_{i-1}, y_i}(W)$, $i = 1, \dots, n$, tels que

$$(2) \quad f_*(\omega) = \omega_1 \cdots \omega_n, \quad f_*(\omega') = \delta_0 \omega_1 \delta_1 \cdots \omega_n \delta_n.$$

Pour $i = 1, \dots, n$, soit $x_i \in f^{-1}(y_i)$ avec $x_n = x$. En conséquence de la Proposition de (4.1), il existe

$$\bar{\omega}_i \in \pi_{x_{i-1}, x_i}(V), \quad i = 1, \dots, n,$$

tels que $f_*(\bar{\omega}_i) = \omega_i$ et, d'après le Corollaire de (5.1), il existe

$$\bar{\delta}_i \in \overline{\text{Ker}}_{x_i}(\check{F}_{x_i}), \quad i = 0, \dots, n,$$

(où \check{F}_{x_i} désigne ici la feuille de $f^{-1}(F)$ par x_i) tels que $f_*(\bar{\delta}_i) = \delta_i$. Posons alors

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 \cdots \bar{\omega}_n, \quad \bar{\omega}' = \bar{\delta}_0 \bar{\omega}_1 \bar{\delta}_1 \cdots \bar{\omega}_n \bar{\delta}_n$$

Puisque $\bar{\omega} \underset{f^{-1}(F)}{\sim} \bar{\omega}'$, la démonstration de (1) revient à vérifier

$$(3) \quad \bar{\omega} \underset{f^{-1}(F)}{\sim} \bar{\omega}', \quad \bar{\omega}' \underset{f^{-1}(F)}{\sim} \omega'$$

Or, compte tenu de (2), on a

$$f_*(\omega) = f_*(\bar{\omega}) \quad \text{et} \quad f_*(\omega') = f_*(\bar{\omega}'),$$

ce qui, d'après la Proposition de (4.2), entraîne

$$\omega \underset{F_f}{\sim} \bar{\omega}, \quad \omega' \underset{F_f}{\sim} \bar{\omega}'.$$

On a alors (3) d'après le lemme.

Corollaire. Soit $f : V \rightarrow W$ une surmersion telle que les $f^{-1}(y)$, $y \in W$, soient connexes, et soit F un feuilletage de W . Quelles que soient la sous-variété pointée (Σ_0, x_0) transverse à $f^{-1}(F)$ et la sous-variété $\Sigma_0 \ni f(x_0)$ transverse à F , l'homomorphisme

$$f^{\#}_{x_0} : \pi_{\Sigma_0}(f^{-1}(F)) \rightarrow \pi_{\Sigma_0}(F)$$

est un isomorphisme.

D'après le Corollaire de (5.2), on sait que cet isomorphisme est indépendant de $x_0 \in \Sigma_0$ dans le cas où $\Sigma_0 \supset f(\Sigma_0)$. Les énoncés ci-dessus précisent dans quel sens on peut, sous les hypothèses dites, identifier les groupes fondamentaux de F et de $f^{-1}(F)$. On remarque que ces hypothèses entraînent que $\bar{f} : V/f^{-1}(F) \rightarrow W/F$ est un homéomorphisme et, d'après la Remarque 1 de (5.2), il est clair que les homomorphismes

$$\vartheta_{x_0} : \pi_{\Sigma_0}(f^{-1}(F)) \rightarrow \pi_{F_{x_0}}(V/f^{-1}(F)) \quad \text{et} \quad \vartheta_{f(x_0)} : \pi_{\Sigma_0}(F) \rightarrow \pi_{F_{f(x_0)}}(W/F)$$

où $\Sigma_0 \ni x_0$, $\Sigma_0 \ni f(x_0)$ sont des sous-variétés transverses quelconques, se correspondent pas les isomorphismes

$$f^{\#}_{x_0} : \pi_{\Sigma_0}(f^{-1}(F)) \rightarrow \pi_{\Sigma_0}(F) \quad \text{et} \quad (\bar{f})_* : \pi_{F_{x_0}}(V/f^{-1}(F)) \rightarrow \pi_{F_{f(x_0)}}(W/F).$$

6. LE FEUILLETAGE $q^{-1}(F)$.

6.1. Le revêtement $q : \pi_{\Sigma_0} S(F) \rightarrow V$ étant évidemment transverse à F , on peut énoncer, compte tenu de la proposition de (5.1).

Proposition. Soit Σ_0 une sous-variété transverse et $S : x \rightarrow \Sigma_x$ un champ transverse au feuilletage F sur V . Soit $\Phi_0 \in \pi_{\Sigma_0} S(F)$ et $x_0 = q(\Phi_0)$. Alors :

$$i) \quad 1 \rightarrow \pi_{\Phi_0}(\pi_{\Sigma_0} S(F)) \xrightarrow{q_*} \pi_{x_0}(V) \xrightarrow{\chi} \pi_{\Sigma_{x_0}}(F) \rightarrow 1$$

est exacte.

$$ii) \quad 1 \rightarrow \pi_{\Phi_0}(F_{\Phi_0}) \xrightarrow{\bar{q}_*} \pi_{x_0}(F_{x_0}) \xrightarrow{\psi} \pi_{\Sigma_{x_0}}(F)$$

est exacte, où F_{Φ_0} (resp. F_{x_0}) est la feuille de $q^{-1}(F)$ (resp. F) par

Φ_0 (resp. x_0), où $\bar{q} : F_{\Phi_0} \rightarrow F_{x_0}$ est induit par q , et où ψ est l'homomorphisme composé

$$\pi_{x_0}(F_{x_0}) \xrightarrow{\chi} \text{Hol}_{(\Sigma_{x_0}, x_0)}(F_{x_0}) \xrightarrow{\eta} \pi_{\Sigma_{x_0}}(F)$$

iii) Les homomorphismes

$$\bar{q}_* : \text{Ker}_{\Phi_0}(F_{\Phi_0}) \rightarrow \text{Ker}_{x_0}(F_{x_0}) \quad \text{et} \quad q_* : \overline{\text{Ker}}_{\Phi_0}(F_{\Phi_0}) \rightarrow \overline{\text{Ker}}_{x_0}(F_{x_0})$$

sont surjectifs.

Démonstration. i) Compte tenu du corollaire 1 de (2.5) et puisque q est un revêtement, il s'agit, pour tout $\omega \in \pi_{x_0}(V)$, de vérifier que

$$\omega \in \text{Im } q_* \quad \text{ssi} \quad \omega \in \text{Ker } \chi.$$

Soit γ un lacet de V en x_0 tel que $[\gamma] = \omega$, et soit $(\bar{\gamma}, \gamma)$ son relèvement d'origine $(e_{\Sigma_{x_0}}, x_0)$ relativement à $q : \pi_{\Sigma_{x_0}S}(F) \rightarrow V$. Alors $\omega \in \text{Ker } \chi$ équivaut à $\bar{\gamma}(1) = e_{\Sigma_{x_0}}$ ou encore à dire que $(\bar{\gamma}, \gamma)$ est un lacet en $(e_{\Sigma_{x_0}}, x_0)$. Mais, compte tenu de l'isomorphisme de revêtements

$$\Phi_0^\# : \pi_{\Sigma_{x_0}S}(F) \longrightarrow \pi_{\Sigma_0S}(F)$$

ceci revient encore à dire que le relèvement $\Phi_0^\# \circ (\bar{\gamma}, \gamma)$ de γ relativement à $q : \pi_{\Sigma_0S}(F) \rightarrow V$ est un lacet en Φ_0 , ce qui équivaut à $\omega \in \text{Im } q_*$.

ii) On sait que $\bar{q} : F_{\Phi_0} \rightarrow F_{x_0}$ est un revêtement [9]. Il s'agit donc de vérifier

$$(1) \quad \text{Im } \bar{q}_* \subset \text{Ker } \psi$$

et

$$(2) \quad \text{Ker } \psi \subset \text{Im } \bar{q}_*.$$

Or (1) résulte de la commutativité de

$$(3) \quad \begin{array}{ccccc} \pi_{\Phi_0}(F_{\Phi_0}) & \xrightarrow{\bar{q}_*} & \pi_{x_0}(F_{x_0}) & \xrightarrow{\chi} & \text{Hol}_{(\Sigma_0, x_0)}(F_{x_0}) \\ \downarrow i'_* & & \downarrow i_* & \searrow \psi & \downarrow \eta \\ \pi_{\Phi_0}(\pi_{\Sigma_0S}(F)) & \xrightarrow{q_*} & \pi_{x_0}(V) & \xrightarrow{\chi_F} & \pi_{\Sigma_{x_0}}(F) \end{array}$$

où $i : F_{x_0} \rightarrow V$ et $i' : F_{\Phi_0} \rightarrow \pi_{\Sigma_0S}(F)$

sont les inclusions et où, d'après i , on a $\text{Im } q_* \subset \text{Ker } \chi_F$. Vérifions (2), c'est-à-dire que $\omega \in \text{Ker } \psi$ entraîne $\omega \in \text{Im } \bar{q}_*$. Soit γ un lacet de F_{x_0} .

en x_0 tel que $\omega = [\gamma]$, et soit γ_1 son relèvement d'origine Φ_0 relativement au revêtement \bar{q} . Il s'agit de montrer que γ_1 est un lacet en Φ_0 , ou encore que $i' \circ \gamma_1$ est un lacet en Φ_0 . Or $i' \circ \gamma_1$ est le relèvement d'origine Φ_0 de $i \circ \gamma$ relativement à $q : \pi_{\Sigma_0 S}(F) \rightarrow V$ et, d'après i, ce relèvement est un lacet en Φ_0 parce que $[\gamma] \in \text{Ker } \psi$ entraîne

$$[i \circ \gamma] \in \text{Ker } \chi_F .$$

iii) Compte tenu de la commutativité du carré gauche de (3), il suffit de montrer que l'homomorphisme de $\text{Ker } \Phi_0(F_{\Phi_0})$ dans $\text{Ker } x_0(F_{x_0})$ induit par $\bar{q}_* : \pi_{\Phi_0}(F_{\Phi_0}) \rightarrow \pi_{x_0}(F_{x_0})$ est surjectif. Or, d'après ii, on a $\text{Ker } x_0(F_{x_0}) \subset \text{Ker } \psi = \text{Im } \bar{q}_*$; d'autre part, d'après la Proposition de (5.1), on a aussi

$$\bar{q}_*^{-1}(\text{Ker } x_0(F_{x_0})) = \text{Ker } \Phi_0(F_{\Phi_0}).$$

D'où

$$\bar{q}_*(\text{Ker } \Phi_0(F_{\Phi_0})) = \text{Ker } x_0(F_{x_0}).$$

6.2. De ce qui va suivre, il résultera que le revêtement universel du schéma de variété [8] d'un feuilletage F sur V est le schéma de variété du feuilletage image réciproque $q^{-1}(F)$ sur $\pi_{\Sigma_0 S}(F)$.

Proposition. Soit Σ_0 une sous-variété transverse et $S : x \rightarrow \Sigma_x$ un champ transverse au feuilletage F sur V . Alors :

- i) Le groupe fondamental du feuilletage $q^{-1}(F)$ de $\pi_{\Sigma_0 S}(F)$ est trivial.
- ii) Pour tout $\Phi_0 \in \pi_{\Sigma_0 S}(F)$, le groupe d'holonomie de la feuille F_{Φ_0} de $q^{-1}(F)$ est le noyau de

$$\eta : \text{Hol}_{(\Sigma_0, x_0)}(F_{x_0}) \longrightarrow \pi_{\Sigma_0}(F), \quad \text{où } x_0 = q(\Phi_0).$$

Démonstration. i) D'après la Proposition de (3.2), il s'agit, pour tout $\omega \in \pi_{\Phi_0}(\pi_{\Sigma_0 S}(F))$, de vérifier

$$(1) \quad \omega \tilde{q}^{-1}(F) 1$$

où 1 désigne l'élément neutre du groupe $\pi_{\Phi_0}(\pi_{\Sigma_0 S}(F))$. D'après i de la proposition de (6.1), on a $q_*(\omega) \in \text{Ker } \chi_F$ et donc $q_*(\omega) \sim 1$ dans $\pi_{x_0}(V)$, où 1 désigne encore l'élément neutre. Il existe alors $x_i \in V$, $i = 1, \dots, n$, avec $x_n = x_0$, $\omega_i \in \pi_{x_i x_{i+1}}(V)$, $i = 0, \dots, n-1$, et $\delta_i \in \text{Ker } x_i(F_{x_i})$, $i = 0, \dots, n$, tels que l'on ait

$$(2) \quad \omega_0 \cdots \omega_{n-1} = 1 \quad \text{et} \quad \delta_0 \omega_0 \delta_1 \cdots \delta_{n-1} \omega_{n-1} \delta_n = q_*(\omega)$$

dans $\pi_{x_0}(V)$. Soit alors $\Phi_i \in \pi_{\Sigma_0 S}(F)$, $i = 1, \dots, n$, et

tels que
$$\bar{\omega}_i \in \pi_{\Phi_i \Phi_{i+1}}(\pi_{\Sigma_0} S(F)), \quad i = 0, \dots, n-1$$
 et
$$q(\Phi_i) = x_i \quad \text{et} \quad q_*(\bar{\omega}_i) = \omega_i .$$

Pour $i = 0, \dots, n$, il existe aussi, d'après iii de la proposition précédente, $\bar{\delta}_i \in \overline{\text{Ker}}_{\Phi_i}(F_{\Phi_i})$ tel que $q_*(\bar{\delta}_i) = \delta_i$. Compte tenu de (2), il vient alors

$$q_*(\bar{\omega}_0 \cdots \bar{\omega}_{n-1}) = q_*(\bar{\omega}_0) \cdots q_*(\bar{\omega}_{n-1}) = 1$$

et

$$q_*(\bar{\delta}_0 \bar{\omega}_0 \cdots \bar{\delta}_{n-1} \bar{\omega}_{n-1} \bar{\delta}_n) = q_*(\bar{\delta}_0) q_*(\bar{\omega}_0) \cdots q_*(\bar{\delta}_{n-1}) q_*(\bar{\omega}_{n-1}) q_*(\bar{\delta}_n) = q_*(\omega),$$

d'où

$$\Phi_n = \Phi_0, \quad \bar{\omega}_0 \cdots \bar{\omega}_n = 1 \quad \text{et} \quad \bar{\delta}_0 \bar{\omega}_0 \cdots \bar{\delta}_{n-1} \bar{\omega}_{n-1} \bar{\delta}_n = \omega$$

c'est-à-dire (1).

iii) Dans (3) de la proposition précédente, on a $\text{Ker}(\eta \circ \chi) = \text{Im} \bar{q}_*$. Puisque χ est surjective, on a donc aussi $\text{Ker} \eta = \text{Im}(\chi \circ \bar{q}_*)$ et on sait [9] que $\text{Im}(\chi \circ \bar{q}_*)$ est le groupe d'holonomie de F_{Φ_0} .

6.3. Van Est a remarqué [7] que le résultat de Haefliger [3] sur le groupe de Poincaré d'une variété compacte V admettant un feuilletage F analytique de codimension 1 est, au fond, un théorème sur $\pi(F)$. Le noeud de ce théorème, et qui semble justifier le recours aux schémas de variété, consiste à montrer qu'un feuilletage analytique à groupe fondamental trivial de codimension 1 est simple, ainsi qu'il résulte du Théorème 7.1 de [7]. Ceci étant supposé acquis, on constate en effet, compte tenu des Propositions de (4.2) et de (6.2), que $\pi_{\Sigma_0} S(F)/q^{-1}(F)$ est une variété simplement connexe de dimension 1, et n'est donc pas quasi-compacte. Donc $\pi_{\Sigma_0} S(F)$ n'est pas compacte. Si V est supposée compacte, il en résulte que la fibre de $q: \pi_{\Sigma_0} S(F) \rightarrow V$, c'est-à-dire le groupe fondamental $\pi(F)$, est de cardinal infini. Le Corollaire 1 de (2.5) entraîne alors que $\pi(V)$ est infini, c'est-à-dire le résultat d'Haefliger.

BIBLIOGRAPHIE

1. C. EHRESMANN, Structures feuilletées, Proc. 5th Canad. Math. Congress 1961 (Charles Ehresmann : Oeuvres complètes et commentées, Partie II.2, 563-626).
2. C. EHRESMANN & SHIH WEISHU, Sur les espaces feuilletés, C.R.A.S. Paris 243 (1956), 344 (Charles Ehresmann : Oeuvres complètes et commentées, Partie I, 370-373).
3. A. HAEFLIGER, Structures feuilletées et cohomologie dans un faisceau de groupoïdes, Comm. Math. Helv. 32 (1958), 248-329.
4. A. HAEFLIGER, Variétés feuilletées, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3) 16 (1962), 367-379.
5. P. MOLINO, Sur la géométrie transverse des feuilletages, Ann. Inst. Fourier 25 Grenoble, (1975), 279-284.
6. J. PRADINES, Feuilletages, holonomie et graphes locaux, C.R.A.S. Paris 298, Série I, n° 13 (1984), 297-300.
7. W. van EST, Sur le groupe fondamental des schémas de variété à une dimension, Ann. Inst. Fourier 30 (2), Grenoble (1980), 45-77.
8. W. van EST, Rapport sur les S-atlas, Astérisque 116 (1984).
9. P. VER EECKE, Introduction à la théorie des variétés feuilletées, Esquisses Math. 31, Amiens, 1982.
10. P. VER EECKE, Sur le groupe fondamental d'un feuilletage, C.R.A.S. Paris 300, Série I, n° 2 (1985), 55-58.
11. Structure transverse des feuilletages (Journées S.M.F., Toulouse 1982), Astérisque 116, 1984.

U.E.R. de Mathématiques
33 rue Saint-Leu
80039 AMIENS Cedex. FRANCE