

# CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE CATÉGORIQUES

RENÉ GUITART

LUC VAN DEN BRIL

## **Calcul des satellites et présentations des bimodules à l'aide des carrés exacts (2e partie)**

*Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques*, tome  
24, n° 4 (1983), p. 333-369

[http://www.numdam.org/item?id=CTGDC\\_1983\\_\\_24\\_4\\_333\\_0](http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1983__24_4_333_0)

© Andrée C. Ehresmann et les auteurs, 1983, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**CALCUL DES SATELLITES ET PRÉSENTATIONS DES BIMODULES  
À L'AIDE DES CARRÉS EXACTS**

par René GUITART et Luc VAN DEN BRIL

2<sup>e</sup> Partie

**SOMMAIRE.**

0. Introduction
1. Carrés exacts dans  $Ab$ - $CAT$  et zig-zags de matrices (test)
2. Composition des bimodules et platitude (calcul)
3. Satellites droits ou inductifs (formalisme général)
4. Satellites ponctuels, extensions ponctuelles, cotenseurs
5. Satellites gauches ou projectifs
6. Présentations de bimodules et exemples de satellites
7. Prébifibrations (et itération de  $Sat_E$  par produits fibrés).
8. Le rôle (externe) des carrés exacts dans le calcul explicite des satellites
9. Présentations de  $EXT^n$  en longues suites exactes et satellites classiques
10. Systèmes de facteurs dans  $Ab$  (l'équivalence  $EXA \sim FAC$ )
11. Présentation de  $EXT$  dans le cas des complexes de chaînes
12.  $\tilde{E}\tilde{X}A$  et  $\tilde{E}\tilde{X}T$  (calcul des paires exactes)
13. Lax-bimodules (calcul des recollements)
14. Systèmes de facteurs dans  $C\dot{A}T$  et second rôle (interne) des carrés exacts
15. Références.

Les sections 1 à 8 ont été publiées dans le Volume XXIV-3.

**9. PRÉSENTATIONS DE  $EXT^n$  EN LONGUES SUITES EXACTES ET SATELLITES CLASSIQUES.**

9.1. Soit  $C$  une catégorie abélienne,  $A$  et  $C \in C_0$ . On désigne par  $EXT(C, A)$  l'ensemble des classes d'équivalence de suites exactes

$$E: 0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0.$$

Si  $\alpha: A \rightarrow M$  (resp.  $\gamma: N \rightarrow C$ ),  $\alpha E$  (resp.  $E\gamma$ ) est la classe définie par

$$\begin{array}{ccccccc} E & 0 \rightarrow & A & \rightarrow & B & \rightarrow & C \rightarrow 0 \\ & & \downarrow \alpha & \text{cocart} & \downarrow & & \downarrow \\ \alpha E & 0 \rightarrow & M & \rightarrow & B_1 & \rightarrow & C \rightarrow 0 \\ \text{(resp. par)} & & & & & & \\ E\gamma & 0 \rightarrow & A & \rightarrow & B_2 & \rightarrow & N \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow \text{cart} & & \downarrow \gamma \\ E & 0 \rightarrow & A & \rightarrow & B & \rightarrow & C \rightarrow 0 \end{array} .$$

Ainsi  $EXT: C^{op} \times C \rightarrow ENS$  devient un bifoncteur par

$$EXT(\gamma, \alpha)(E) = (\alpha E)\gamma = \alpha(E\gamma).$$

On obtient une structure de groupe abélien sur  $EXT(C, A)$  par

$$E_1 + E_2 = \nabla_A(E_1 \oplus E_2)\Delta_C$$

d'où le bifoncteur  $EXT: C^{op} \times C \rightarrow Ab$ .

(On se reportera par exemple au livre *Homology* de Mac Lane [12].)

9.2. On désignera par  $EXA(C)$  la catégorie des suites exactes de  $C$  décrite par

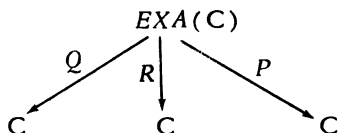
$$\begin{array}{ccccccc} E: & 0 \rightarrow & A & \rightarrow & B & \rightarrow & C \rightarrow 0 & \text{exacte} \\ & & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & \\ & & \alpha = \beta = \gamma & & & & & \\ F: & 0 \rightarrow & A' & \rightarrow & B' & \rightarrow & C' \rightarrow 0 & \text{exacte} \end{array}$$

sous-catégorie pleine de  $C^{(\rightarrow \rightarrow \rightarrow)}$ . On pose

$$P(\alpha, \beta, \gamma) = \alpha, \quad R(\alpha, \beta, \gamma) = \beta, \quad Q(\alpha, \beta, \gamma) = \gamma.$$

9.3. PROPOSITION. 1°  $EXA(C)$  est additive, avec des limites et co-limites finies, des factorisations épi-monos, mais n'étant pas équilibrée, elle n'est pas abélienne.

- 2°  $R$  a un adjoint à gauche et un adjoint à droite,
- 3°  $P$  a un adjoint à gauche,  $Q$  a un adjoint à droite.



9.4. THÉORÈME. On a  $EXT = Q \cdot P \circ$  (dans  $Ab\text{-}BIM$ ), c'est-à-dire pour  $A$  et  $C$  in  $C_0$  on a

$$EXT(C, A) \approx \int^E C[PE, A] \otimes C[C, QE],$$

avec les bimorphismes canoniques  $C[PE, A] \times C[C, QE] \rightarrow EXT(C, A)$ :

$$(\lambda: PE \rightarrow A, \mu: C \rightarrow QE) \mapsto \lambda E \mu,$$

la dinaturalité résultant de ce que avec les notations de 9.2 on a  $\alpha E = F \gamma$ .

9.5. THÉORÈME. On désignera par  $EXA^2(C)$  la catégorie (additive) des suites exactes de longueur 2 de  $C$  dont les objets sont les

$$E: 0 \rightarrow A \xrightarrow{u} X \xrightarrow{v} Y \xrightarrow{w} C \rightarrow 0.$$

On définit  $S, T: EXA^2(C) \rightarrow EXA(C)$  par

$$SE: 0 \rightarrow im v \rightarrow Y \xrightarrow{w} C \rightarrow 0.$$

$$TE: 0 \rightarrow A \xrightarrow{u} X \rightarrow im v \rightarrow 0.$$

Alors on a pour  $E_1, E_2 \in EXA(C)_0$ ,

$$C[PE_1, QE_2] \approx \int^E EXA(C)(E_1, SE) \otimes EXA(C)[TE_1, E_2].$$

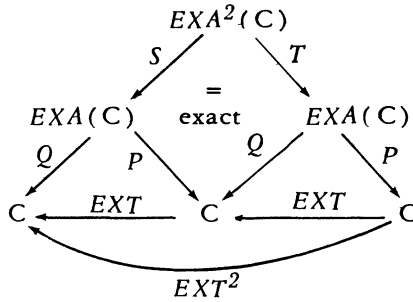
c'est-à-dire que le carré

$$\begin{array}{ccc}
 EXA^2(C) & \xrightarrow{T} & EXA(C) \\
 S \downarrow & & \downarrow Q \\
 EXA(C) & \xrightarrow{P} & C
 \end{array}$$

est  $Ab$ -exact, et  $EXA^2(C)$  est équivalente à  $EXA(C) \times_C EXA(C)$ .

9.6. PROPOSITION. 1°  $(QS)(PT) \circ: C \mapsto C$  est une présentation de  $EXT^2$ .

2° Des théorèmes 9.4 et 9.5 on tire, avec 9.6, 1, la figure



d'où  $EXT^2 \simeq EXT \otimes EXT$ .

9.7. Rappelons qu'un objet injectif est un  $J$  tel que pour tout monomorphisme  $\chi: A \rightarrow B$  et tout  $a: A \rightarrow J$  il existe  $\beta: B \rightarrow J$  tel que  $\beta \cdot \chi = a$ . On dit que  $C$  a suffisamment d'injectifs si pour tout  $X \in C_0$  il existe au moins une suite exacte

$$R_o X: 0 \rightarrow X \rightarrow I \rightarrow Y \rightarrow 0$$

avec  $I$  injectif.

On désigne par  $EXA_{inj}(C)$  la sous-catégorie pleine de  $EXA(C)$  ayant pour objets les suites exactes de la forme

$$0 \rightarrow X \rightarrow I \rightarrow Y \rightarrow 0, \quad I \text{ injectif.}$$

$EXA_{inj}(C)$  est additive.

On désigne par  $Mono(C)$  (resp. par  $Mono_{inj}(C)$ ) la sous-catégorie pleine de  $C^2$  ayant pour objets les monos de  $C$  (resp. les monos de  $C$  de la forme  $A \rightarrow I$  avec  $I$  injectif).

9.8. PROPOSITION. 1° Soit  $C$  une catégorie abélienne. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1.  $C$  a assez d'injectifs.

2.

$$\begin{array}{ccccc}
 EXA_{inj}(C) & \xrightarrow{J} & EXA(C) & \xrightarrow{P} & C \\
 \downarrow J & & & & \parallel \\
 EXA(C) & \xrightarrow{P} & & & C
 \end{array}$$

est exact dans  $CAT$  (il s'agit donc d'une présentation de  $P$ ).

3. Le carré du 2 est exact dans  $Ab\text{-}CAT$ .

$$4. \quad \begin{array}{ccc} \text{Mono}_{inj}(C) & \xrightarrow{P} & C \\ \downarrow & & \parallel \\ \text{Mono}(C) & \xrightarrow{P} & C \end{array}$$

est exact.

2° Si C a assez d'injectifs,  $EXA_{inj}(C)$  est une présentation de EXT i. e.

$$EXT = (C \xrightarrow{P_0} EXA \xrightarrow{Q} C) \cong (C \xrightarrow{(PI)^0} EXA_{inj} \xrightarrow{QI} C).$$

N. B. Voir aussi en 11.1 un lemme qui généralise ce résultat.

9.9. On désignera par  $EXA_{(0)}(C)$  et par  $EXA_{(2)}(C)$  les quotients de  $EXA(C)$  par, resp. les idéaux  $I_{(0)}$  et  $I_{(2)}$  où :

-  $I_{(0)}$  est l'idéal des  $\phi : E \rightarrow F$  tels qu'il existe un  $d$  avec

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & \longrightarrow & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \longrightarrow & \longrightarrow & 0 \end{array} \quad \begin{array}{c} E \\ \downarrow \phi \\ F \end{array}$$

(A diagonal arrow labeled  $d$  goes from the top-right to the bottom-left, with equals signs on either side.)

-  $I_{(2)}$  est l'idéal des  $\phi : E \rightarrow F$  tels qu'il existe un  $d$  avec

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & \longrightarrow & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \longrightarrow & \longrightarrow & 0 \end{array} \quad \begin{array}{c} E \\ \downarrow \phi \\ F \end{array}$$

(A diagonal arrow labeled  $d$  goes from the top-left to the bottom-right, with equals signs on either side.)

Donc  $\phi \in I_{(i)}$  ssi  $P_i \phi = 0$ . On note

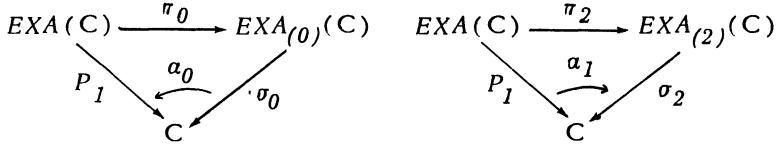
$$\pi_0 : EXA \rightarrow EXA_{(0)} \quad \text{et} \quad \pi_2 : EXA \rightarrow EXA_{(2)}$$

les morphismes de passage au quotient, et  $\sigma_0$  la factorisation de  $P_0 = P$  par  $\pi_0$ , et  $\sigma_2$  la factorisation de  $Q = P_2$  par  $\pi_2$ .

9.10. PROPOSITION. 1° Pour  $i = 0$  et 2 on a que  $\pi_i$  est complètement fidèle, et donc le carré suivant est exact.

$$\begin{array}{ccc} EXA(C) & \xrightarrow{\pi_i} & EXA_{(i)}(C) \\ P_i \downarrow & & \downarrow \sigma_i \\ C & \xlongequal{\quad} & C \end{array}$$

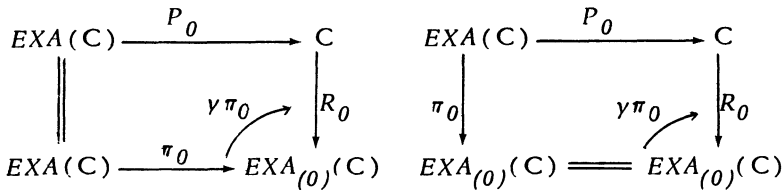
2° Avec  $P_1 = R$  on a dans  $CAT$  et dans  $Ab-CAT$  une extension gauche et une extension droite



3° Si  $C$  a assez d'injectifs alors  $\sigma_0 \dashv R_0 (\gamma, 1)$  (avec  $R_0 =$  résolution injective).

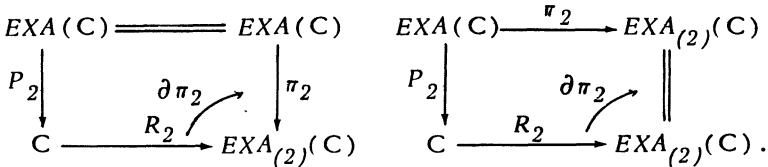
4° Si  $C$  a assez de projectifs alors  $R_2 \dashv \sigma_2 (1, \partial)$  (avec  $R_2 =$  résolution projective).

5° Si  $C$  a assez d'injectifs on a les carrés exacts dans  $CAT$  et  $Ab-CAT$



(il s'agit donc d'une coprésentation de  $P_0$ ).

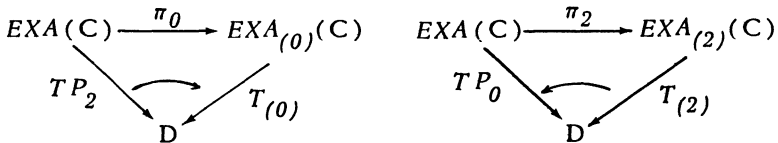
6° Si  $C$  a assez de projectifs on a les carrés exacts dans  $CAT$  et  $Ab-CAT$



9.11. PROPOSITION. Soit  $T : C \rightarrow D$ ,  $\alpha_0 : P_0 \Rightarrow P_1$  et  $\alpha_1 : P_1 \Rightarrow P_2$  les transformations naturelles canoniques avec  $P_i : EXA(C) \rightarrow C$ . On pose

$$T_{(0)}(E) = \text{coker}(T(\alpha_1 E)) \text{ et } T_{(2)}(E) = \text{ker}(T(\alpha_0 E)).$$

Alors on a une extension inductive et une extension projective



9.12. COROLLAIRE. Les satellites classiques sont les satellites des sections 3 et suivantes dans le cas  $E = EXT$  ; on les obtient donc (4.4) par  $S_{\mathcal{A}}t(T) = Ext_P(T, Q)$ , soit (9.10.5 et 4.3)  $Ext_{\pi_0}(T, Q) \cdot R_0$ , ou encore (9.11) :

$$S_{\mathcal{A}}t(T) = T_{(0)}R_0$$

(« calcul par résolutions injectives »).

9.13. COROLLAIRE. On a  $S_{\mathcal{A}}t(T) = Ext_P(T, Q)$ , soit  $Ext_{(\sigma_0, \pi_0)}(T, Q)$  ou encore, vu (9.11) :

$$S_{\mathcal{A}}t(T) = Ext_{\sigma_0} T_{(0)}$$

(« formule de Buchsbaum »).

9.14. N.B. On a l'analogie de 9.12 et 9.13 pour les satellites gauches.

9.15. REMARQUE. 1° Le théorème de Goursat peut s'énoncer ainsi : soit dans une catégorie abélienne

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{u} & B & \xrightarrow{v} & C \\ \downarrow a & & \downarrow b & & \downarrow c \\ X & \xrightarrow{r} & Y & \xrightarrow{s} & Z \end{array} \quad \begin{array}{l} = \\ = (*) \end{array}$$

$$v \cdot u = 0, \quad a, v, s \text{ épis, } (r, s) \text{ exacte en } Y.$$

Alors (\*) est co-cartésien.

De là on déduit le Lemme des 9, puis ces deux suffisent à montrer le résultat (connu) suivant :

Si  $C$  a assez d'injectifs et si  $T : C \rightarrow D$  est *semi-exacte* i. e. transforme les carrés bicartésiens de  $C$  en carrés exacts de  $D$ , alors pour toute suite exacte

$$E : 0 \longrightarrow A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C \longrightarrow 0$$

on a la suite exacte :

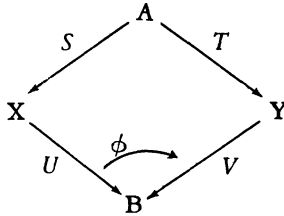
$$TA \xrightarrow{Tu} TB \xrightarrow{Tv} TC \xrightarrow{\partial E} (S_{\mathcal{A}}t T)A \xrightarrow{(S_{\mathcal{A}}t T)u} (S_{\mathcal{A}}t T)B \xrightarrow{(S_{\mathcal{A}}t T)v} (S_{\mathcal{A}}t T)C.$$

2° Après avoir donné à la Section 6 des présentations valables pour tout  $E$ , nous avons ci-avant donné pour  $E = EXT$  des présentations va-



lables pour tous les  $T: C \rightarrow D$ . Il resterait pour  $E = EXT$  à donner des présentations valables pour certains  $T$  satisfaisant certaines conditions de continuité ou d'exactitude, présentations que l'on déduirait, par exemple, de la suite exacte ci-dessus.

3° Avec



d'où  $\tilde{\phi}: S, T \rightarrow U, V$  et  $F: X \rightarrow C$ , on voit que si  $F$  satisfait  $\phi$  (i. e. si  $F\tilde{\phi}$  est un isomorphisme), alors  $S \underset{\rightarrow}{\text{at}}_{S, T} F \approx S \underset{\rightarrow}{\text{at}}_{U, V} F$ .

Voir aussi en 8.4 un résultat du même genre. Nous réservons pour un travail ultérieur l'étude et la classification de ces «présentations particulières».

9.16. On désignera par  $EXA^n(C)$  la catégorie des suites exactes de longueur  $n$  de  $C$  décrite par

$$\begin{array}{ccccccc}
 E: & 0 \longrightarrow & A & \longrightarrow & X_1 & \longrightarrow & \dots \longrightarrow X_n \longrightarrow B \longrightarrow 0 & \text{exacte} \\
 \phi & & \downarrow \phi_0 = \downarrow \phi_1 & & \downarrow \phi_n = \downarrow \phi_{n+1} & & & \\
 F: & 0 \longrightarrow & A' & \longrightarrow & X'_1 & \longrightarrow & \dots \longrightarrow X'_n \longrightarrow B' \longrightarrow 0 & \text{exacte.}
 \end{array}$$

On pose  $P(\phi) = \phi_0$  et  $Q(\phi) = \phi_{n+1}$ .

9.17. PROPOSITION.

$$C \xleftarrow{Q} EXA^n(C) \xrightarrow{P} C$$

est une préfibration au sens de 7.2, le morphisme universel  $\epsilon: F \rightarrow E$  attaché à  $f: R \rightarrow QE$  (resp. le morphisme co-universel  $\epsilon: E \rightarrow F$  attaché à  $f: PE \rightarrow R$ ) pouvant être choisi de sorte que  $Q\epsilon = f$  et  $P\epsilon = id$  (resp.  $P\epsilon = f$  et  $Q\epsilon = id$ ):

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & X_1 & \dots & X_{n-1} & \longrightarrow & R & \longrightarrow & 0 & & F \\
 & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \downarrow \text{cart} & & \downarrow f & & \downarrow \epsilon \\
 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & X_1 & \dots & X_{n-1} & \longrightarrow & X_n & \longrightarrow & B & \longrightarrow & 0 & E
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 \text{(resp. } & 0 \longrightarrow & A & \longrightarrow & X_1 & \longrightarrow & X_2 \dots & X_n & \longrightarrow & B & \longrightarrow & 0 \\
 & & f \downarrow & \text{cocart} & \downarrow & & \parallel & & \parallel & & \parallel & \\
 & 0 \longrightarrow & R & \longrightarrow & \cdot & \longrightarrow & X_2 \dots & X_n & \longrightarrow & B & \longrightarrow & 0 \quad .
 \end{array}$$

9.18. PROPOSITION.  $EXA^n(C)$  est additive, munie de  $n+2$  foncteurs additifs

$$P_i : EXA^n(C) \rightarrow C : E \mapsto X_i .$$

On pose  $P = P_0$ ,  $Q = P_{n+1}$ . On a une suite exacte dans  $C^{EXA^n(C)}$

$$0 \longrightarrow P \xrightarrow{a_0} P_1 \xrightarrow{a_1} P_2 \xrightarrow{a_2} \dots P_n \xrightarrow{a_n} Q \longrightarrow 0 .$$

On a  $n+1$  plongements pleinement fidèles additifs  $J_i : C \rightarrow EXA^n(C)$  donnés par

$$J_i(X \xrightarrow{f} Y) = \left( \begin{array}{ccccccc}
 0 \longrightarrow & 0 & \dots & 0 \longrightarrow & X = X & \longrightarrow & 0 & \dots & 0 \longrightarrow & 0 \\
 & & & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\
 & 0 \longrightarrow & 0 & \dots & 0 \longrightarrow & Y = Y & \longrightarrow & 0 & \dots & 0 \longrightarrow & 0 \\
 & & 0 & & i-1 & i & i+1 & & n+1 & & 
 \end{array} \right)$$

Et on a

$$P_i J_i = P_{i+1} J_i = id_C, \quad P_j J_i = 0 \text{ si } j \neq i \text{ et } j \neq i+1 .$$

On a alors la suite d'adjonctions

$$\begin{aligned}
 Q = P_{n+1} \dashv J_n \dashv P_n \dashv J_{n-1} \dashv \dots P_{i+1} \dashv J_i \dashv P_i \dashv J_{i-1} \dashv \dots \\
 \dots \dashv J_1 \dashv P_1 \dashv J_0 \dashv P_0 = P .
 \end{aligned}$$

Par suite les carrés

$$\begin{array}{ccc}
 EXA^n(C) & \xrightarrow{P_{i+1}} & C \\
 P_i \downarrow & \nearrow a_i & \parallel \\
 C & \xlongequal{\quad} & C
 \end{array}$$

sont exacts pour  $0 \leq i \leq n$ . On désigne par  $\pi_i : EXA^n(C) \rightarrow EXA^n_{(i)}(C)$  la catégorie quotient de  $EXA^n(C)$  par l'idéal des morphismes annulés par  $P_i$ , et par  $\sigma_i$  le passage au quotient de  $P_i$ . Comme  $\pi_i$  est copleinement fidèle, on obtient les carrés exacts

$$\begin{array}{ccc}
 EXA^n(C) & \xrightarrow{\pi_i} & EXA^n_{(i)}(C) \\
 P_i \downarrow & & \downarrow \sigma_i \\
 C & \xlongequal{\quad} & C
 \end{array}$$

9.19. THÉORÈME. On a  $EXT^n = Q.P^o$  (dans  $Ab\text{-}BIM$ ), i. e. pour  $A, C$  dans  $C_0$  on a

$$EXT^n(C, A) = \int^E C[C, QE] \otimes C[PE, A]$$

avec les bimorphismes canoniques

$$\begin{aligned} C[C, QE] \times C[PE, A] &\rightarrow EXT^n[C, A]: \\ (\mu: C \rightarrow QE, \lambda: PE \rightarrow A) &\mapsto \lambda E \mu. \end{aligned}$$

9.20. THÉORÈME («longue suite exacte des  $EXT$ »). Pour tout  $n, m \geq 0$ , on définit

$$S: EXA^{n+m}(C) \rightarrow EXA^n(C) \text{ et } T: EXA^{n+m}(C) \rightarrow EXA^m(C)$$

par, pour

$$\begin{aligned} E: 0 \rightarrow A \rightarrow X_1 \rightarrow \dots \rightarrow X_m \xrightarrow{f} Y_1 \rightarrow \dots \rightarrow Y_n \rightarrow C \rightarrow 0, \\ SE: 0 \rightarrow im f \rightarrow Y_1 \rightarrow \dots \rightarrow Y_n \rightarrow C \rightarrow 0, \\ TE: 0 \rightarrow A \rightarrow X_1 \rightarrow \dots \rightarrow X_m \rightarrow im f \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Alors on a

$$\begin{array}{ccc} EXA^{n+m}(C) & \xrightarrow{T} & EXA^m(C) \\ S \downarrow & & \downarrow Q \\ EXA^n(C) & \xrightarrow{P} & C \end{array} \quad \cong$$

est  $Ab$ -exact, exact, et

$$EXA^{n+m}(C) \cong EXA^n(C) \times_C EXA^m(C).$$

Par suite

$$EXT^n = EXT \otimes \dots \otimes EXT \quad (n \text{ fois}),$$

et avec  $Sqt_{EXT^n} =: Sqt^n$ , on a donc :

$$Sqt^n = Sqt \circ \dots \circ Sqt \quad (n \text{ fois}).$$

## 10. SYSTÈMES DE FACTEURS DANS $Ab$ (l'équivalence $EXA \cong FAC$ ).

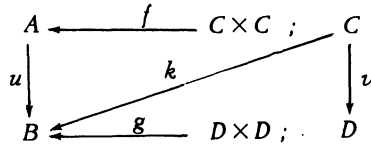
10.1. Dans ce paragraphe on prend  $C = Ab$ ,  $EXA(Ab)$  est noté  $EXA$ . On définit la catégorie  $FAC$  des systèmes de facteurs ainsi :

1° Un objet de  $FAC$  est un triplet  $(A, f, C)$  avec  $A, C \in Ab_0$  et

$f: C \times C \rightarrow A$  une application vérifiant:

- a)  $f(0, 0) = 0$ ,
- b)  $f(x+y, z) + f(x, y) = f(x, y+z) + f(y, z)$ ,
- c)  $f(x, y) = f(y, x)$ .

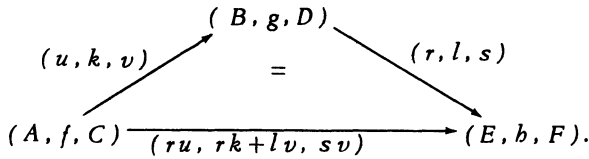
2° Un morphisme de FAC est un  $(u, k, v): (A, f, C) \rightarrow (B, g, D)$



où  $u: A \rightarrow B$  et  $v: C \rightarrow D$  sont des morphismes de groupes et  $k: C \rightarrow B$  une application, avec :

$$u f(x, y) + k(x+y) = kx + ky + g(vx, vy).$$

3° La composition est :



On fait de FAC une catégorie additive en posant

$$(u, k, v) + (r, l, s) = (u+r, k \Delta l, v+s)$$

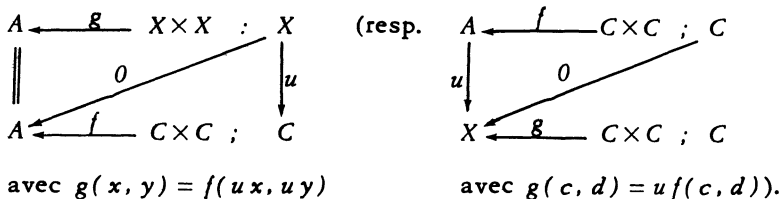
avec  $(k \Delta l)(x) = kx + lx + g(vx, sx)$ .

On définit  $P, Q: FAC \rightarrow Ab$  par  $P(A, f, C) = A, Q(A, f, C) = C$ .

10.2. THÉORÈME.

$$Ab \xleftarrow{Q} FAC \xrightarrow{P} Ab$$

est une prébifibration au sens de 7.2, le morphisme universel attaché à  $u: X \rightarrow Q(A, f, C)$  (resp. morphisme couniversel attaché à  $u: P(A, f, C) \rightarrow X$ ) étant



10.3. THÉORÈME. 1° Etant donné  $(A, f, C) \in FAC_0$  on munit  $A \times C$  d'une structure de groupe notée  $R(f)$  par

$$(a, x) + (b, y) = (a + b + f(x, y), x + y).$$

on détermine ainsi un foncteur  $R: FAC \rightarrow Ab$ , en posant

$$R(u, k, v)(a, x) = (ua + kx, vx).$$

2° On en déduit un foncteur de comparaison  $K: FAC \rightarrow EXA$  en associant à  $(u, k, v)$  le morphisme

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i_A} & Rf & \xrightarrow{p_C} & C \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow u & & = & & \downarrow v \\ 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{i_M} & Rg & \xrightarrow{p_P} & P \longrightarrow 0 \end{array}$$

où  $i_A(a) = (a, 0)$ ,  $p_C(a, x) = x$ .

3°  $K$  est une équivalence de catégories additives, et par suite dans  $Ab$  on peut calculer  $EXT$  sur  $EXA$  ou sur  $FAC$ .

4° D'après 10.3, 3, 10.2 et 7.4.3, on peut calculer  $EXT^n$  sur

$$FAC^n = \lim \left[ \begin{array}{c} FAC \\ \swarrow \quad \searrow \\ Ab \quad \quad Ab \quad \dots \quad Ab \quad \quad Ab \end{array} \right] .$$

n fois

### 11. PRÉSENTATION DE $EXT$ DANS LE CAS DES COMPLEXES DE CHAÎNES.

11.1. LEMME. 1° Soit  $J: \underline{M} \rightarrow \underline{C}$  l'inclusion de la sous-catégorie pleine  $\underline{M}$  de  $\underline{C}$  et  $P: \underline{C} \rightarrow \underline{D}$  un foncteur. On suppose que pour tout  $C \in \underline{C}$  il existe

$$u_C: C \rightarrow TC \text{ tel que } TC \in \underline{M}_0 \text{ et } Pu_C = id_{P_C};$$

et que pour tout  $f: C \rightarrow C' \in \underline{C}$  il existe

$$Tf: TC \rightarrow TC' \text{ tel que } Tf \cdot u_C = u_{C'} \cdot f.$$

Alors

$$\begin{array}{ccccc} \underline{M} & \xrightarrow{J} & \underline{C} & \xrightarrow{P} & \underline{D} \\ J \downarrow & & & & \downarrow \\ \underline{C} & \xrightarrow{P} & & \cong & \underline{D} \end{array}$$

est exact, et donc pour tout  $Q: \underline{C} \rightarrow \underline{B}$ , le bimodule  $QP^0$  admet la présentation  $(QJ)(PJ)^0$ .

2° Supposons que, en plus des hypothèses de 1,  $C$  soit une catégorie abélienne (mais non nécessairement  $\underline{M}$ ) et que les  $u_C$  soient des monomorphismes. On désigne par  $EXA_{\underline{M}}(C)$  la sous-catégorie pleine de  $EXA(C)$  ayant pour objets les suites exactes de la forme

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow M \longrightarrow Y \longrightarrow 0,$$

avec  $M \in \underline{M}_0$ . Alors

$$EXA_{\underline{M}}(C) \rightarrow EXA(C) \text{ et } P: EXA(C) \rightarrow C$$

(cf. 9.2) vérifient les hypothèses du 1, et donc  $EXA_{\underline{M}}(C)$  est une présentation de  $EXT$ , i. e.

$$EXT = (C \xrightarrow{(PJ)^0} EXA_{\underline{M}}(C) \xrightarrow{QJ} C).$$

En appliquant ce lemme on retrouve la Proposition 9.8 sur les résolutions injectives. Nous allons l'appliquer ci-après pour obtenir une présentation allégée du  $EXT$  de  $cC$ , où  $cC$  est la catégorie des complexes (de chaînes) de la catégorie abélienne  $C$ : un objet  $X \in cC_0$  est de la forme

$$X: \dots \rightarrow X_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} X_n \xrightarrow{d_n} X_{n-1} \rightarrow \dots,$$

avec  $d_n \cdot d_{n+1} = 0$ , pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ .

11.2. PROPOSITION. 1° La catégorie  $cC$  est munie d'une monade

$$Cone = (Cone, \epsilon, \mu)$$

avec

$$- (Cone f)_n = f_{n-1} \oplus f_n, (Cone X)_n = X_{n-1} \oplus X_n \text{ et}$$

$$\bar{d}_n = \begin{pmatrix} -d_{n-1} & 0 \\ 1 & d_n \end{pmatrix}: X_{n-1} \oplus X_n \rightarrow X_{n-2} \oplus X_{n-1}.$$

$$- (\epsilon X)_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}: X_n \rightarrow X_{n-1} \oplus X_n.$$

$$- (\mu X)_n = \begin{pmatrix} p_2^{n-1} & p_1^n \\ 0 & p_2^n \end{pmatrix}: (X_{n-2} \oplus X_{n-1}) \oplus (X_{n-1} \oplus X_n) \rightarrow X_{n-1} \oplus X_n$$

avec  $p_1^n: X_{n-1} \oplus X_n \rightarrow X_{n-1}$  et  $p_2^n: X_{n-1} \oplus X_n \rightarrow X_n$  les projections.

2° La catégorie  $cC$  est munie d'une comonade  $(G, \eta, \delta)$  telle que  $(GX)_n = X_{n+1} \oplus X_n$ , où la différentielle est donnée par

$$\begin{pmatrix} -d_{n+1} & 1 \\ 0 & d_n \end{pmatrix}$$

et où  $\eta$  et  $\delta$  se décrivent de manière duale de  $\epsilon$  et  $\mu$ ; en fait formellement  $\eta$  et  $\delta$  se déduisent de  $\epsilon$  et  $\mu$  grâce aux adjonctions

$$\dots \dashv \text{Cone} \dashv G \dashv \text{Cone} \dashv G \dashv \dots$$

3°  $X$  est contractile (i.e. il existe

$$s_n: X_n \rightarrow X_{n+1} \text{ avec } s_{n-1}d_n + d_{n+1}s_n = 1)$$

ssi il existe  $\sigma: \text{Cone } X \rightarrow X$  tel que  $\sigma \cdot \epsilon_X = id_X$ . Plus généralement,  $f: X \rightarrow Y$  est homotope à  $0: X \rightarrow Y$  ssi il existe  $\phi: \text{Cone } X \rightarrow Y$  tel que

$$\begin{array}{ccc} & \text{Cone } X & \\ \epsilon_X \nearrow & = & \searrow \phi \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

11.3. PROPOSITION. 1° Soit  $T: cC \rightarrow cC$  le foncteur de translation:  $(TX)_n = X_{n-1}$ , avec la différentielle  $-d_{n-1}: (TX)_n \rightarrow (TX)_{n-1}$ . Alors on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow 1 \xrightarrow{\epsilon} \text{Cone} \xrightarrow{p_1} T \longrightarrow 0,$$

définissant un foncteur  $\mathcal{C}$  section de  $P: EXA(cC) \rightarrow cC$ , avec

$$\mathcal{C}(X) = (0 \longrightarrow X \longrightarrow \text{Cone}(X) \longrightarrow T(X) \longrightarrow 0).$$

2° Pour  $f: X \rightarrow Y \in cC$ , le cône de  $f$  est le complexe  $\Delta f$  tel que  $(\Delta f)_n = X_{n-1} \oplus Y_n$  et la différentielle est

$$\begin{pmatrix} -d_{n-1} & 0 \\ f_{n-1} & d_n \end{pmatrix}.$$

On définit  $f^*: \text{Cone } X \rightarrow \Delta f$  par

$$f_n^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & f_n \end{pmatrix}.$$

Alors on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow Y \longrightarrow \Delta f \longrightarrow TX \longrightarrow 0$$

et un morphisme de suites exactes

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \longrightarrow & X & \xrightarrow{\epsilon_X} & Cone X & \xrightarrow{p_1} & TX & \longrightarrow 0 : [I_X] = \mathcal{C}(X) \\ & \downarrow f & \downarrow \text{=} & \downarrow f^\# & \downarrow \text{=} & \parallel & \downarrow [f] \\ & Y & \longrightarrow & \Delta f & \longrightarrow & TX & \longrightarrow 0 \end{array}$$

Par suite le carré (1) est bicartésien, et

$$[f] = f[I_X] = f_* \mathcal{C}(X),$$

et si  $f: X \rightarrow Y$  et  $g: Y \rightarrow Z$ , alors

$$[g \cdot f] = g[f] = [g] T f.$$

3° En associant à  $f$  l'élément  $[f]$  de  $EXT(TX, Y)$  on détermine un homomorphisme de groupes abéliens d'image

$$\begin{array}{ccc} Ho \ cC(X, Y) \approx \ cC(X, Y)/\text{homotopie} & & \\ \downarrow & \xrightarrow{[ ]} & \downarrow \\ cC(X, Y) & \xrightarrow{[ ]} & EXT_{cC}(TX, Y) \\ & \searrow \text{=} & \swarrow \\ & Ho \ cC(X, Y) & \end{array}$$

11.4. PROPOSITION. Soit  $Cone(cC)$  la sous-catégorie pleine de  $cC$  dont les objets sont de la forme  $Cone(X)$ , et soit  $contra \ cC$  et  $Acy \ cC$  les sous-catégories pleines de  $cC$  dont les objets sont les  $X$  contractiles (cf. 11.2.3) ou les  $X$  acycliques. Alors le Lemme 11.1 s'applique pour  $M = Cone(cC)$ , et on obtient que  $EXA_{Cone(cC)}$ ,  $EXA_{contra(cC)}$ , et  $EXA_{Acy(cC)}$  sont des présentations du  $EXT$  de  $cC$ .

On sait qu'il existe  $\partial: H_n Q \rightarrow H_{n-1} P$  telle que pour toute suite exacte

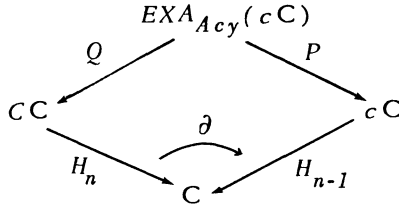
$$E: 0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

dans  $cC$ , la suite

$$H_n A \longrightarrow H_n B \longrightarrow H_n C \xrightarrow{\partial^E} H_{n-1} A \longrightarrow H_{n-1} B$$



soit exacte. Si  $E \in EXA_{Acy}(cC)$  on a pour tout  $n$ ,  $H_n(B) = 0$ , donc  $\partial^E$  est un isomorphisme. Comme de plus  $P: EXA_{Acy}(cC) \rightarrow C$  est complètement fidèle ( $P \cdot P^o \approx 1$ ) on obtient que  $(H_{n-1}, \partial)$  est l'extension de  $H_n Q$  le long de  $P$



Autrement dit:  $\underset{\rightarrow}{Sat} H_n = H_{n-1}$ .

On obtient donc comme corollaire de 11.4 le résultat suivant (dû à B. Mitchell, in *Theory of categories* page 213, ex. 7):

11.5. COROLLAIRE. On a

$$\underset{\rightarrow}{Sat} H_n = H_{n-1} \quad \text{et} \quad \underset{\leftarrow}{Sat} H_n = H_{n+1}$$

(et ces satellites sont absolus, i. e. pour tout  $F$ ,  $\underset{\rightarrow}{Sat} FH_n = FH_{n-1}$ ).

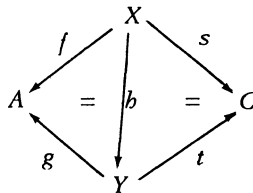
12.  $\tilde{E}X\tilde{A}$  ET  $\tilde{E}X\tilde{T}$  (calcul des paires exactes).

12.1. PROPOSITION. 1° Soit  $C$  à produits fibrés et  $S$  une classe de morphismes de  $C$  stable par produits fibrés. On note  $C \downarrow_S C$  la sous-catégorie de  $C \downarrow C$  dont les objets sont les morphismes de  $S$ , et  $P$  et  $Q$  sont les foncteurs source et but. Alors  $QP^o(C, A)$  est l'ensemble des couples

$$A \xleftarrow{f} X \xrightarrow{s} C, \quad s \in S, \quad f \in C,$$

quotienté par la relation engendrée par :

$$(f, s) \sim (g, t) \quad \text{s'il existe } b \text{ tel que}$$



Lorsque  $S$  est formé de monomorphismes, on obtient donc un ensemble

d'applications partielles quotienté par les restrictions, c'est-à-dire un ensemble de germes.

2° Si dans 1 on réduit  $C \downarrow_S C$  à sa sous-catégorie des carrés cartésiens alors  $Q'P'^{\circ}(C, A)$  est décrit comme en 1 à ceci près que dans - on ne considère que des  $b$  isomorphismes. Lorsque  $S$  est formé de monomorphismes, alors  $Q'P'^{\circ}(C, A) = Part(C, A)$  est l'ensemble des applications partielles de  $C$  dans  $A$ .

3° Si dans 1 on suppose que les épis sont universels et si l'on réduit  $C \downarrow_S C$  à sa sous-catégorie des carrés tels que «le morphisme canonique vers le produit fibré est un épi», alors  $Q''P''^{\circ}(C, A)$  est décrit comme en 1 à ceci près que dans - on ne considère que des  $b$  épis. Lorsque  $S$  est formé de tous les morphismes de  $C$  alors  $Q''P''^{\circ}(C, A) = Rel(C, A)$  ensemble des relations de  $C$  vers  $A$ .

12.2. Soit  $C$  une catégorie abélienne. On désignera par  $EXA(C)$  la catégorie suivante :

- les objets sont les paires exactes

$$A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C$$

dans  $C$  (telles que, donc,  $ker v = im u$ );

- les morphismes sont les triplets  $(\alpha, \beta, \gamma)$  tels que

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \xrightarrow{u} & B & \xrightarrow{v} & C \\
 \alpha \downarrow & \text{(1)} & \beta \downarrow & \text{(2)} & \downarrow \gamma \\
 X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z
 \end{array}$$

et tels que : i)  $ker u \rightarrow ker f$  est un épi,

ii)  $cokerv \rightarrow cokerg$  est un mono.

On pose  $P(\alpha, \beta, \gamma) = \alpha$ ,  $Q(\alpha, \beta, \gamma) = \gamma$ .

REMARQUES. 1° Sans les conditions i et ii le bimodule  $QP^{\circ}$  serait trivial (pour tout  $A$  et  $C$ ,  $QP^{\circ}(C, A)$  serait le groupe nul), car

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \xlongequal{\quad} & A & \xrightarrow{0} & C & \text{exacte} \\
 \parallel & & \downarrow u & & \parallel & \\
 A & \xrightarrow{u} & X & \xrightarrow{v} & C & \text{exacte.}
 \end{array}$$

$$2^{\circ} \quad C \xleftarrow{Q} \tilde{E}XA(C) \xrightarrow{P} C$$

est encore une bifibration mais  $\tilde{E}XA(C)$  n'est plus une  $Ab$ -catégorie.

3<sup>o</sup>  $\tilde{E}XA(C)$  contient  $EXA(C)$  comme sous-catégorie pleine.

4<sup>o</sup> Si  $(\alpha, \beta, \gamma) \in \tilde{E}XA(C)$  est tel que  $\alpha = id$  et  $\gamma = id$ , alors  $\beta$  est un isomorphisme.

5<sup>o</sup> Si  $E$  et  $F \in \tilde{E}XA(C)$ ,  $E \oplus F$  est bien défini, mais n'est pas le biproduit dans  $\tilde{E}XA(C)$ . On définit une « somme de Baer » dans  $\tilde{E}XA(C)$ , c'est-à-dire une somme  $+$  dans chaque  $QP^{\circ}(C, A)$  par

$$E + F = \nabla(E \oplus F)\Delta.$$

12.3. THEOREME. 1<sup>o</sup> Avec les notations de 12.2, on pose

$$\tilde{E}XT(C, A) = QP^{\circ}(C, A),$$

et on munit  $\tilde{E}XT(C, A)$  de la loi  $+$ :

$$E + F = \nabla(E \oplus F)\Delta.$$

Alors  $\tilde{E}XT(C, A)$  est un monoïde abélien contenant  $EXT(C, A)$  comme le sous-groupe de ses éléments inversibles.

De plus pour tout  $t: A \rightarrow \bar{A}$ ,  $E \mapsto tE$  est un morphisme de monoïdes

$$\tilde{E}XT(C, A) \rightarrow \tilde{E}XT(C, \bar{A}).$$

Et de même pour les morphismes  $s: \bar{C} \rightarrow C$ , de sorte que l'on a un foncteur  $\tilde{E}XT$  de  $C^{op} \times C$  dans  $Mon Ab$  (catégorie des monoïdes abéliens) tel que

$$\begin{array}{ccc} C^{op} \times C & \xrightarrow{\tilde{E}XT} & Mon Ab \\ & \searrow = & \downarrow \text{Inversible} \\ & EXT & Ab \end{array}$$

2<sup>o</sup>  $\tilde{E}XT(C, 0)$  est isomorphe au monoïde abélien des sous-objets de  $C$ , muni de l'intersection.

3<sup>o</sup> La suite  $\omega: A \rightarrow 0 \rightarrow C$  vérifie, pour tout  $E$ ,  $\omega + E = \omega$  (cette propriété exprime l'exactitude de  $E$ , en le sens que si l'on travaillait dans  $\overline{EXT}$  où toutes les suites nulles

$$E: A \xrightarrow{u} X \xrightarrow{v} C$$

seraient présentes comme objets on aurait :

$$\omega + E = H(E): A \xrightarrow{0} H(E) \xrightarrow{0} C$$

(voir 12.6). On a aussi :

$$(A \twoheadrightarrow B \xrightarrow{0} C) + (A \xrightarrow{0} B' \twoheadrightarrow C) = \omega.$$

4° On n'a pas en général  $sE + tE = (s+t)E$ , sinon on aurait  $0E = 0$  (mais cela équivaut pour

$$E: A \xrightarrow{u} X \xrightarrow{v} C$$

à ce que  $v$  soit un épi).

5° Pour

$$E: A \xrightarrow{u} X \xrightarrow{v} C$$

soit  $E_0: \text{Im } u \rightarrow X \rightarrow \text{coim } v$ . On a  $E_0 = 0$  ssi  $E + E = E$ . Par suite,  $\text{EXT}(C, A)$  est de Boole (i. e.  $E + E = E$ ) pour tout  $A$  ssi tous les sous-objets de  $C$  sont projectifs.

12.4. REMARQUE. Le «calcul» des 0-paires non nécessairement exactes nécessite l'introduction du gadget  $\text{EXO}^b$  suivant :

- les objets sont les 0-paires

$$A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C$$

dans  $C$  (telles que, donc,  $v \cdot u = 0$ ),

- les morphismes sont les triples  $(\alpha, \beta, \gamma)$  comme en 12.2 tels que (1) et (2) soient des carrés exacts.

On démontre (voir Guitart & Van den Bril in Diagrammes 6, déc. 81) que

$$A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C \text{ et } X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

ont même homologie ssi ils ont les mêmes composantes connexes dans  $\text{EXO}^b$ .

12.5. En fait  $s \xrightarrow{t} u \xrightarrow{v}$  est exact ssi  $\text{cokert} \rightarrow \text{coker } u$  est un mono et  $\text{kert} \rightarrow \text{ker } u$  est un épi, ou encore ssi on a une décomposition

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{t} & Y \\ s \downarrow & = & \downarrow v \\ X & \xrightarrow{u} & B \end{array} = \begin{array}{ccccc} A & \longrightarrow & I & \twoheadrightarrow & Y \\ s \downarrow & \text{cocart.} & \downarrow & \text{cart.} & \downarrow v \\ X & \longrightarrow & J & \twoheadrightarrow & B \end{array}$$

En plus,  $s \xrightarrow{t} v$  est cartésien ssi  $cokert \rightarrow cokeru$  est un mono et  $kert \rightarrow keru$  un iso.

Alors étant donné un morphisme  $\phi : E \rightarrow F$  entre 0-suites

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \xrightarrow{u} & X & \xrightarrow{v} & B & (u, v) = E \\
 \downarrow a & & \downarrow b & & \downarrow c & \phi = (a, b, c) \\
 M & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & N & (f, g) = F
 \end{array}$$

le carré cartésien

(resp. le carré cocartésien

$$\begin{array}{ccc}
 Im\ u & \xrightarrow{\quad} & Ker\ v \\
 \downarrow & (1) & \downarrow \\
 Im\ f & \xrightarrow{\quad} & Ker\ g
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 cokeru & \xrightarrow{\quad} & Im\ v \\
 \downarrow & (2) & \downarrow \\
 cokert & \xrightarrow{\quad} & Im\ g
 \end{array}$$

est cocartésien

est cartésien)

ssi  $H\phi$  est un isomorphisme et l'exactitude de (1) (resp. de (2)) équivaut à  $H\phi$  mono (resp.  $H\phi$  épi).

On peut donc agrandir  $EXO^b$  en  $EXO$  comme suit :

DÉFINITION. Soit  $C$  abélienne. La catégorie  $EXO(C)$  a :

- pour objets les 0-paires

$$A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C$$

dans  $C$  ( $v \cdot u = 0$ ),

- pour morphismes les  $\phi = (a, b, c)$  comme ci-dessus tels que

1.  $keru \rightarrow kerf$  est épi,
2.  $cokerv \rightarrow cokerg$  est mono,
3.  $HE \rightarrow HF$  est iso.

On pose  $P(a, b, c) = a$ ,  $Q(a, b, c) = c$ .

12.6. PROPOSITION. 1°

$$C \xleftarrow{Q} EXO(C) \xrightarrow{P} C$$

est une prébifibration (au sens de 7.2) et  $\tilde{E}\tilde{X}A(C)$  est une sous-catégorie pleine de  $EXO(C)$  définissant une sous-bifibration.

2° Si  $\phi : E \rightarrow F$ ,  $a = P\phi$ ,  $\gamma = Q\phi$ , alors  $aE = F\gamma$  (ceci est vrai pour toute prébifibration, et permettrait de prouver 9.4 dans le cas de  $EXA$ ).

3° Un  $(1_A, \beta, 1_B) : (u, v) \rightarrow (f, g)$  est dans  $EXO(C)$  ssi  $\beta$  est un isomorphisme.

4° On désigne (abusivement) par  $E$  la classe dans  $QP^o(B, A)$  de

$$E: A \xrightarrow{u} X \xrightarrow{v} B$$

(resp. par  $F$  la classe dans  $QP^o(D, C)$  de

$$F: C \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} D)$$

et par  $E \boxplus F$  la classe dans  $QP^o(B \oplus D, A \oplus C)$  de

$$A \oplus C \xrightarrow{u \oplus f} X \oplus Y \xrightarrow{v \oplus g} B \oplus D.$$

On a :

$$(\alpha \oplus \beta)(E \boxplus F) = \alpha E \boxtimes \beta F.$$

5° On obtient une loi de monoïde abélien sur  $QP^o(B, A)$  en posant

$$E + F = \nabla(E \boxplus F)\Delta.$$

On note  $\overline{EXT}(B, A)$  ce monoïde.

6° Pour tout  $E$  on a  $\omega + E = H(E)$  (comme dit en 12.3.3), et donc  $\overline{EXT}(B, A)$  est un sous-monoïde de  $\overline{EXT}(B, A)$ .

7°  $H$  est déterminé par  $\overline{EXT}$ , car c'est le morphisme de monoïdes

$$H: \overline{EXT}(B, A) \rightarrow \overline{EXT}(0, 0): E \mapsto 0_A E 0_B.$$

### 13. LAX-BIMODULES (calcul des recollements).

13.1. RAPPELS. Soit  $\underline{X}$  une catégorie et  $\underline{C}$  une 2-catégorie.

1° Un *lax-foncteur*  $(W, w): \underline{X} \dashrightarrow \underline{C}$  est (voir Street [14], Gray [5], Kelly [11], Bourn [2]) la donnée de :

1. Pour tout  $X \in \underline{X}_o$  un objet  $W(X) \in \underline{C}_o$ ,
2. Pour tout  $f: X \rightarrow Y \in \underline{X}$ , un 1-morphisme  $W(f): W(X) \rightarrow W(Y) \in \underline{C}$ ,
3. Pour tout  $X \in \underline{X}_o$  un 2-morphisme  $w(X): Id(W(X)) \Rightarrow W(Id(X))$

dans  $\underline{C}$ ,

4. Pour tout couple de flèches composables de  $\underline{X}$ ,

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

un 2-morphisme  $w(g, f): W(g) \cdot W(f) \Rightarrow W(g \cdot f)$ ,

ces données vérifiant :

L1: Pour tout  $f: X \rightarrow Y \in \underline{X}$ ,

$$w(f, 1) \cdot (W(f)w(X)) = w(1, f)(w(Y)W(f)) = id,$$

L2: Pour tout triplet de flèches composables

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{b} T,$$

$$w(b, gf)(W(b)w(g, f)) = w(bg, f)(w(b, g)W(f)).$$

CONVENTION. On appellera *colax-foncteur de  $\underline{X}$  vers  $\underline{C}$*  un lax-foncteur de  $\underline{X}$  vers  $\underline{C}^{OP2}$ , la 2-catégorie ayant les mêmes objets et 1-morphismes que  $\underline{C}$ , et où le sens des 2-morphismes est renversé.

Une *transformation lax-naturelle  $t$  de  $(W, w)$  vers  $(\bar{W}, \bar{w})$*  est la donnée de :

1. Pour tout objet  $X$ ,  $t(X): W(X) \rightarrow \bar{W}(X)$ ,
2. Pour tout  $f: X \rightarrow Y \in \underline{X}$ ,  $t(f): t(Y) \cdot W(f) \Rightarrow \bar{W}(f) \cdot t(X)$ ,

ces données vérifiant des conditions de compatibilité naturelles (données par exemple dans [5]).

Les transformations lax-naturelles se composent, on obtient ainsi une catégorie notée  $LAXFONC(\underline{X}, \underline{C})$ . Cette catégorie devient une 2-catégorie ayant pour 2-morphismes les *modifications*.

2° Pour toute catégorie  $\underline{X}$  il existe une 2-catégorie  $\Delta \underline{X}$  et un lax-foncteur  $\delta \underline{X}: \underline{X} \rightarrow \Delta \underline{X}$  tel que la composition avec  $\delta \underline{X}$  induise un isomorphisme de 2-catégories

$$(*) \quad LAXFONC(\underline{X}, \underline{C}) \simeq 2-FONC(\Delta \underline{X}, \underline{C})$$

(où dans le second membre les morphismes sont les transformations lax-naturelles entre 2-foncteurs et les 2-cellules sont définies à l'aide des modifications).

L'existence de  $\Delta \underline{X}$  est aisée à montrer en utilisant l'idée d'esquisse de morphismes (Guitart & Lair [9]), mais on peut aussi donner une construction explicite (voir par exemple Van den Bril [15]):

Soit  $V: CAT \rightarrow GRAPHE$  le foncteur d'oubli,  $L$  son adjoint et  $(S, \eta, \nu)$  le cotriple «des chemins» sur  $CAT$  induit par  $L \dashv V$ . Alors

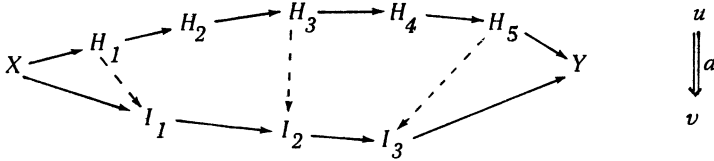
$$\Delta \underline{X} = \left[ S^3 X \xrightarrow{S\eta SX} S^2 X \begin{array}{c} \xrightarrow{\eta SX} \\ \xrightarrow{S\eta X} \\ \xleftarrow{\nu X} \end{array} SX \right]$$

est une catégorie interne à  $CAT$ , et c'est la 2-catégorie cherchée. Donc :

- Les objets de  $\Delta \underline{X}$  sont ceux de  $\underline{X}$ ,
- Les 2-morphismes sont les chemins  $X \rightarrow \cdot \rightarrow \cdot \rightarrow \dots \rightarrow Y$ ,
- Un 2-morphisme du chemin  $u$  vers le chemin  $v$  est un

$$a \in S^2 \underline{X} \text{ tel que } \eta S X(a) = u \text{ et } S \eta X(a) = v$$

(l'effacement des parenthèses dans  $a$  donne  $u$ , et en effectuant les parenthèses dans  $a$  on obtient  $v$ )



Donc  $a$  revient à la donnée d'une application croissante

$$a : \text{longueur}(v) \rightarrow \text{longueur}(u).$$

3° Soit  $\underline{X}$ ,  $\underline{Y}$  et  $\underline{C}$  des 2-catégories. Un *quasi(bi)foncteur* de  $\underline{X} \times \underline{Y}$  vers  $\underline{C}$  est (Gray [5]) un 2-foncteur

$$\underline{X} \longrightarrow 2\text{-FONC}[\underline{C}, \underline{C}].$$

Si  $\underline{X}$ ,  $\underline{Y}$  sont des catégories et  $\underline{C}$  une 2-catégorie, un *quasi(bi)foncteur* de  $\Delta \underline{X} \times \Delta \underline{Y}$  vers  $\underline{C}$ , i. e. un *lax-foncteur*

$$\underline{X} \dashrightarrow \text{LAX FONC}[\underline{Y}, \underline{C}],$$

sera appelé un *lax-bifoncteur* de  $(\underline{X}, \underline{Y})$  vers  $\underline{C}$ .

4° Si  $\underline{X}$  et  $\underline{Y}$  sont des 2-catégories, on déduit, de la construction du produit carré de A. et C. Ehresmann [4], la catégorie double, encore notée  $\underline{X} \blacksquare \underline{Y}$ , dont les 2-blocs sont les

$$\begin{array}{ccc} (X, Y) & \xrightarrow{(v, Y)} & (X', Y) \\ \downarrow (X, f) & (\epsilon, \eta) & \downarrow (X', g) \\ (X, Y') & \xrightarrow{(u, Y')} & (X', Y') \end{array}$$

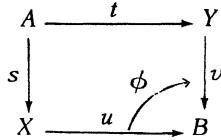
$$u \xrightarrow{\epsilon} v : X \rightarrow X' \in \underline{X}, \quad f \xrightarrow{\eta} g : Y \rightarrow Y' \in \underline{Y}.$$

Les compositions horizontales  $\circ$  et verticale  $\bullet$  sont définies par

$$(a, \beta) \circ (\epsilon, \eta) = (a * \epsilon, \beta \circ \eta), \quad (a, \beta) \bullet (\epsilon, \eta) = (\epsilon \circ a, \beta * \eta).$$



5° Enfin, si  $\underline{\underline{C}}$  est une 2-catégorie, A. et C. Ehresmann [4] définissent la *catégorie double des quintettes de  $\underline{\underline{C}}$* , notée  $\underline{\underline{QUINT}}(\underline{\underline{C}})$  comme la catégorie dont les 2-blocs sont les



où  $s : A \rightarrow X$ ,  $t : A \rightarrow Y$ ,  $u : X \rightarrow B$ ,  $v : Y \rightarrow B$

sont des 1-morphismes de  $\underline{\underline{C}}$  et où  $\phi : u \cdot s \rightarrow v \cdot t$  est un 2-morphisme de  $\underline{\underline{C}}$ . Il est montré dans A. et C. Ehresmann [4] que le foncteur

$$\underline{\underline{QUINT}} : 2\text{-CAT} \rightarrow \text{CAT-DOUBLE}$$

admet un adjoint à gauche

$$\text{STRING} : \text{CAT-DOUBLE} \rightarrow 2\text{-CAT}$$

(voir [4] pour une description explicite par « chapelets de 2-blocs »).

13.2. THEOREME. Soit  $\underline{\underline{X}}$ ,  $\underline{\underline{Y}}$  et  $\underline{\underline{C}}$  des 2-catégories. Alors un quasi(bi)-foncteur de  $\underline{\underline{X}} \times \underline{\underline{Y}}$  vers  $\underline{\underline{C}}$ , i. e. un 2-foncteur

$$\underline{\underline{X}} \rightarrow 2\text{-FONC}(\underline{\underline{Y}}, \underline{\underline{C}})$$

équivalent à la donnée d'un foncteur double

$$\underline{\underline{X}} \blacksquare \underline{\underline{Y}} \rightarrow \underline{\underline{QUINT}}(\underline{\underline{C}}),$$

ou encore d'un 2-foncteur

$$\underline{\underline{X}} \otimes \underline{\underline{Y}} =: \text{STRING}(\underline{\underline{X}} \blacksquare \underline{\underline{Y}}) \rightarrow \underline{\underline{C}}.$$

Cela provient en particulier de la décomposition « quaternaire » dans  $\underline{\underline{X}} \blacksquare \underline{\underline{Y}}$  du genre

$$\begin{array}{ccc}
 (X, Y) \xrightarrow{(v, Y)} (X', Y) & (X, id_Y) \downarrow & (X, Y) \xrightarrow{(v, Y)} (X', Y) \xrightarrow{(id_{X'}, Y)} (X', Y) \\
 \downarrow (X, f) \downarrow (\varepsilon, \eta) & \downarrow (\varepsilon, id_2 Y) & \downarrow (id_2 X', id_2 Y) \downarrow (X', id_Y) \\
 (X, Y') \xrightarrow{(u, Y')} (X', Y') & (X, f) \downarrow & (X, Y) \xrightarrow{(u, Y)} (X', Y) \xrightarrow{(id_{X'}, Y)} (X', Y) \\
 & \downarrow (id_u, id_f) \downarrow (X', f) & \downarrow (id_2 X', \eta) \downarrow (X', g) \\
 & (X, Y') \xrightarrow{(u, Y')} (X', Y') \xrightarrow{(id_{X'}, Y')} (X', Y') &
 \end{array}$$

13.3. COROLLAIRE. On appelle *lax-bimodule de X à Y* un colax-foncteur

$$X \longrightarrow \text{LAX FONC}[Y^{op}, \text{CAT}] .$$

Cela équivaut à l'une des données :

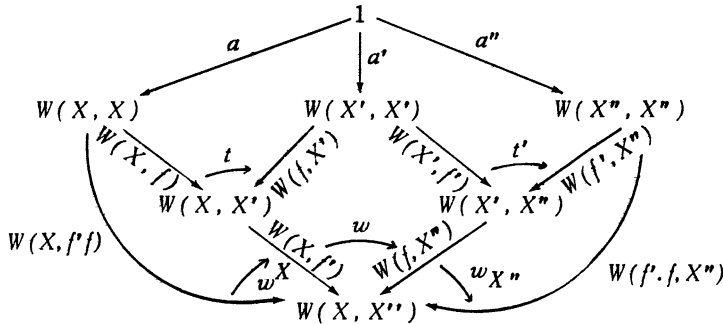
- un foncteur double  $(\Delta \underline{X})^{op2} \blacksquare \Delta(\underline{Y}^{op}) \rightarrow \underline{\underline{QUINT}}$ ,
- un 2-foncteur  $\text{STRING}((\Delta \underline{X})^{op2} \blacksquare \Delta(\underline{Y}^{op})) \rightarrow \underline{\underline{CAT}}$ .

Ainsi  $\text{STRING}((\Delta \underline{X})^{op2} \blacksquare \Delta(\underline{Y}^{op}))$ , qui se décrit explicitement, «résoud» le problème de cohérence pour les lax-bimodules de  $X$  à  $Y$ .

13.4. PROPOSITION. 1° Soit  $W: \underline{X}^{op} \times \underline{X} \dashrightarrow \text{CAT}$  un lax-bimodule de  $X$  à  $X$ . Le recollement ou «glueing» de  $W$  est la catégorie  $GW$  dont les objets sont les couples  $(X, a)$  où  $X \in \underline{X}_0$  et  $a \in W(X, X)_0$ , où un morphisme de  $(X, a)$  vers  $(X', b')$  est un  $(f, t)$  avec

$$f: X \rightarrow X' \in \underline{X} \quad \text{et} \quad t: W(X, f)(a) \rightarrow W(f, X')(a') \in W(X, X') ;$$

la composition dans  $GW$  est schématisée par



où  $w^X$ ,  $w$ ,  $w_{X''}$  résultent de la donnée du lax-bimodule (car  $W(X, \cdot)$  est colax,  $W(\cdot, X'')$  est lax, d'où  $w^X$  et  $w_{X''}$ , et  $w$  est lax-naturelle de  $W(\cdot, X')$  vers  $W(\cdot, X'')$  et colax-naturelle de  $W(X', \cdot)$  vers  $W(X, \cdot)$ ).

2° Si  $W$  est un bifoncteur  $\underline{X}^{op} \times \underline{X} \rightarrow \text{CAT}$ , alors  $GW$  est le glueing de [7].

3° Soit  $\pi: \underline{X}^{op} \dashrightarrow \text{CAT}$  colax et  $\sigma: \underline{X} \dashrightarrow \text{CAT}$  lax tels que pour

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

on ait donc

$$\begin{aligned} \pi f \pi g \xrightarrow{\lambda(g, f)} \pi gf, & \quad id \pi X \xrightarrow{\lambda X} \pi(id X), \\ \sigma gf \xrightarrow{\mu(g, f)} \sigma g \sigma f, & \quad \sigma(id X) \xrightarrow{\lambda X} id \sigma X. \end{aligned}$$

On en déduit  $W: X^{op} \times X \dashrightarrow CAT$  lax-bimodule «à variables séparées» par

$$W(X, Y) = \pi X \times \sigma Y, \quad W(f, Z) = \pi f \times id \sigma Z, \quad W(X, g) = id \pi X \times \sigma g,$$

$$w^X = id_2 \pi X \times \mu, \quad w_Y = \lambda \times id_2 \sigma Y, \quad w = id$$

(on notera brièvement  $W = \pi \times \sigma$ ). Alors on note  $\pi \diamond \sigma = GW$ . En particulier  $\pi \diamond 1$  est noté  $Kl' \pi$ ,  $1 \diamond \sigma$  est noté  $Kl \sigma$ . On a le carré cartésien et exact

$$\begin{array}{ccc} G(\pi \times \sigma) := \pi \diamond \sigma & \longrightarrow & \pi \diamond 1 := Kl' \pi \\ \downarrow & & \downarrow \\ Kl \sigma := 1 \diamond \sigma & \longrightarrow & X \end{array}$$

13.5. REMARQUES. Dans le cas non lax, le glueing  $G$  comprend comme cas particuliers les constructions  $K$  et  $K'$  de produits croisés associés à des cofibrations ou des fibrations (construction de Grothendieck). Dans le cas lax avec  $\underline{X} = 1$ , le glueing  $G$  comprend comme cas particuliers les constructions de Kleisli  $Kl$  et  $Kl'$  associées à des monades ou des comonades. Ainsi on peut lire « $Kl$ » comme « $K$  lax», ou comme «Kleisli».

Si  $\underline{X} = 1$  un lax-bimodule  $W: 1 \times 1 \dashrightarrow \underline{CAT}$  de 1 vers 1 équivaut à la donnée d'une co-monade dans la 2-catégorie des monades, soit une catégorie  $\underline{A}$ , une monade  $(T, \epsilon, \mu)$  et une comonade  $(G, \delta, \nu)$  sur  $\underline{A}$ , et une loi distributive  $\delta: GT \rightarrow TG$ . Une telle donnée est appelée une dyade. Par exemple une factorisation  $(E, M)$  sur  $\underline{A}$  engendre une dyade idempotente avec

$$GX = im(0 \rightarrow X), \quad TX = im(X \rightarrow 1)$$

13.6. PROPOSITION. Soit  $\underline{C}$  une 2-catégorie,  $\pi: \underline{Y} \dashrightarrow \underline{C}$  un colax-foncteur et  $\sigma: \underline{X} \dashrightarrow \underline{C}$  un lax-foncteur. Alors il existe un diagramme universel

$$\begin{array}{ccc} \sigma \downarrow \pi & \xrightarrow{d_1} & Y \\ d_0 \downarrow & & \downarrow \pi \\ \underline{X} & \xrightarrow{\sigma} & \underline{C} \end{array}$$

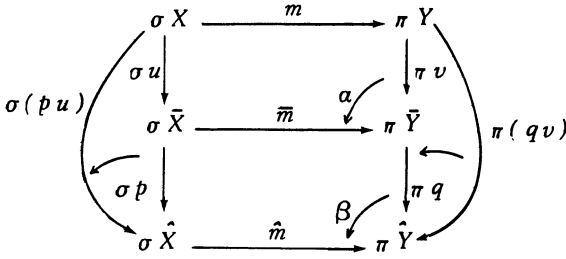
$\phi$  ↗

avec  $\phi$  transformation colax de  $\sigma d_0$  (lax) vers  $\pi d_1$  (colax). Un objet de  $\sigma \downarrow \pi$  est un triplet  $(X, m, Y)$  où  $m: \sigma X \rightarrow \pi Y$ , un morphisme est un

$(u, a, v): (X, m, Y) \rightarrow (\bar{X}, \bar{m}, \bar{Y})$  avec

$$u: X \rightarrow \bar{X}, \quad v: Y \rightarrow \bar{Y}, \quad a: \pi v \cdot m \rightarrow \bar{m} \cdot \sigma u.$$

La composition dans  $\sigma \downarrow \pi$  est schématisée par



Si en particulier  $\underline{C} = \underline{\underline{CAT}}$  et  $\sigma = \hat{1}$ , alors  $\hat{1} \downarrow \pi \approx Kl' \pi$ .

13.7. THÉOREME. Soit  $(W, w): \underline{X} \dashrightarrow \underline{\underline{CAT}}$  un lax-foncteur, et la 2-cofibration

$$K(W) \longrightarrow \Delta \underline{X} \xrightarrow{W} \underline{\underline{CAT}}.$$

On obtient un 2-foncteur  $P: K(W) \rightarrow Kl(W)$  qui identifie de manière universelle les 2-morphismes de  $K(W)$  par

$$P(X, a) = (X, a) \quad \text{et} \quad P(u, t) = (\eta u, t \circ W(u) a)$$

si  $t: W(u)(a) \rightarrow b \in WY$ , avec  $\eta: \Delta \underline{X} \rightarrow \underline{X}$  le 2-foncteur de composition et  $W(u)$  l'extension de  $W$  à un chemin quelconque. On a

$$\begin{array}{ccc} K(W) & \xrightarrow{P} & Kl(W) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Delta \underline{X} & \xrightarrow{\eta} & \underline{X} \end{array} \quad \begin{array}{c} \\ \\ \cong \end{array}$$

13.8. PROPOSITION. Soit  $(W, w): \underline{X} \dashrightarrow \underline{\underline{CAT}}$  un lax-foncteur. Tout  $f: X \rightarrow Y \in \underline{X}$  détermine dans  $\underline{\underline{CAT}}$  un diagramme

$$\begin{array}{ccc} WX & \xrightarrow{Wf} & WY \\ \searrow & \curvearrowright Jf & \swarrow \\ J(X) & & J(Y) \\ & \searrow & \swarrow \\ & KW & \end{array}$$

avec

$$J(X)(a) = (X, a), \quad J(f)(a) = (f, id W(f)a), \quad \text{et}$$

$$J(X)(t) = (id_X, t, W(X)a) = (id_X, W(X)b \circ W(id_X)t);$$

de plus  $J$  est une transformation lax-naturelle

$$J: W \dashrightarrow Kl(W)^\wedge: \underline{X} \dashrightarrow \underline{CAT},$$

i. e.  $W, J, w$  sont les composantes d'un lax-foncteur  $\underline{X} \dashrightarrow \underline{D}(KlW)$ , tel que

$$\begin{array}{ccc} \underline{X} & \dashrightarrow & \underline{D}(KlW) \\ & \searrow^{(W, w)} & \downarrow d_{KlW} \\ & & \underline{CAT} \end{array}$$

où  $\underline{D}Y$  est la 2-catégorie des diagrammes « inductifs » au-dessus de  $\underline{Y}$  (voir [6, 10]) dont les objets sont les  $p: \underline{A} \rightarrow \underline{Y}$ ,  $\underline{A} \in Cat_0$ , et les morphismes les

$$\begin{array}{ccc} \underline{A} & \xrightarrow{F} & \underline{B} \\ & \searrow p & \nearrow q \\ & & \underline{Y} \end{array}$$

$f$

un 2-morphisme étant un  $\theta: F \rightarrow G$  tel que  $q\theta \cdot f = g$ . Et  $d_Y(A, p) = A$ .

13.9. PROPOSITION (Lax-foncteur de codensité). Soit  $\underline{X}$  et  $\underline{K}$  deux catégories. Supposons donné pour tout  $X \in \underline{X}_0$  un foncteur  $J(X): W(X) \rightarrow K$  et pour tout  $f: X \rightarrow Y \in \underline{X}$  un relèvement universel

$$\begin{array}{ccc} & & W(Y) \\ & \nearrow W(f) & \downarrow J(Y) \\ W(X) & \xrightarrow{J(X)} & K \end{array}$$

$J(f)$

Alors  $f \mapsto (W(f), J(f))$  se prolonge de manière unique en un lax-foncteur  $\underline{X} \dashrightarrow \underline{D}K$ .

13.10. THÉORÈME (Version lax de  $K \dashv d$ ). Soit  $(W, w): \underline{X} \dashrightarrow \underline{Cat}$  un lax-foncteur et  $\underline{Y} \in \underline{CAT}_0$ . Alors il existe une bijection naturelle entre :

1. Les foncteurs  $Kl(W) \rightarrow \underline{Y}$ ,
2. Les lax-foncteurs  $\underline{X} \dashrightarrow \underline{D}Y$  tels que

$$\begin{array}{ccc} \underline{X} & \dashrightarrow & \underline{D}Y \\ & \searrow & \nearrow d_Y \\ & & \underline{Cat} \end{array}$$

13.11. REMARQUE. Le Théorème 13.10 se prouve «à la main» grâce à 13.8 et au fait que dans  $Kl(W)$  un  $(f, t): (X, a) \rightarrow (Y, b)$  se décompose en  $(f, t) = J(Y) t \circ J(f) a$ , le reste se vérifiant comme dans [6]. On peut aussi prouver 13.10 grâce à  $K \dashv d$  au niveau des 2-catégories, la propriété universelle de  $\Delta \underline{X}$  et le Théorème 13.7.

13.12. COROLLAIRE. On sait (Guitart & Van den Bril [10]) que  $\mathcal{D}Y$  est la lax-cocomplétion forte de  $\underline{Y}$ ; le Théorème 13.10 permet d'ajouter à cela que  $\mathcal{D}Y$  possède les lax-colimites fortes de lax-foncteurs  $W: \underline{X} \dashrightarrow \mathcal{D}Y$  de source  $\underline{X}$  petite, données par  $Kl(d_Y \cdot W) \rightarrow \underline{Y}$ .

13.13. PROPOSITION (description des  $W$ -algèbres). Soit  $(W, w): \underline{X} \dashrightarrow \underline{CAT}$  un lax-foncteur. On appelle  $W$ -algèbre l'une des données équivalentes suivantes :

1. Une transformation lax-naturelle  $1 \wedge \underline{a} \rightarrow W$ .
2. Un lax foncteur  $X \mathcal{A} \rightarrow K(W)$  tel que

$$\begin{array}{ccc}
 \underline{X} & \dashrightarrow & K(W) \\
 \epsilon_X \searrow & = & \nearrow k_W \\
 & \Delta \underline{X} &
 \end{array}$$

où  $k_W$  est la 2-fibration associée à  $W: \Delta \underline{X} \rightarrow \underline{CAT}$ .

3. Une 2-section de  $k_W$

$$\begin{array}{ccc}
 & & K(W) \\
 & \overset{s}{\dashrightarrow} & \searrow \\
 \Delta \underline{X} & \xrightarrow{1d} & \Delta \underline{X}
 \end{array}$$

4. Un lax-foncteur  $A: \underline{X} \dashrightarrow \underline{CAT}$  tel que

$$\begin{array}{ccc}
 & & \underline{CAT} \\
 & \overset{A}{\dashrightarrow} & \downarrow \phi \\
 \underline{X} & \dashrightarrow \underline{W} & \underline{CAT}
 \end{array}$$

où  $\underline{CAT}$  est la 2-catégorie des catégories pointées  $(\underline{C}, X)$ ,  $X \in \underline{C}_0$  dont les morphismes sont les  $(F, t): (\underline{C}, X) \rightarrow (\underline{D}, Y)$  avec  $F: \underline{C} \rightarrow \underline{D}$  foncteur et  $t: F(X) \rightarrow Y \in \underline{D}$ . Et  $\phi$  est la «fibration universelle», oubliant les pointages  $\phi(\underline{C}, X) = \underline{C}$ .

13.14. PROPOSITION (*recollement d'exactitude*). Soit  $\underline{A}$  une catégorie et un 2-diagramme dans  $CAT^{\underline{A}}$

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{G} & R \\ F \downarrow & & \downarrow N \\ Q & \xrightarrow{M} & S \end{array} \quad \begin{array}{c} \curvearrowright \\ t \end{array}$$

Alors dans  $CAT$  le carré

$$\begin{array}{ccc} KP & \xrightarrow{\bar{G}} & KR \\ \bar{F} \downarrow & & \downarrow \bar{N} \\ KQ & \xrightarrow{\bar{M}} & KS \end{array} \quad \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \bar{t} \end{array}$$

avec  $t(A, m) = (id_A, t(A)m)$ , est exact ssi pour tout  $A \in \underline{A}_0$  le carré

$$\begin{array}{ccc} P(A) & \xrightarrow{G(A)} & R(A) \\ F(A) \downarrow & & \downarrow N(A) \\ Q(A) & \xrightarrow{M(A)} & S(A) \end{array} \quad \begin{array}{c} \curvearrowright \\ t_A \end{array}$$

est exact.

14. SYSTÈMES DE FACTEURS DANS  $CAT$  ET SECOND RÔLE (*interne*)  
DES CARRÉS EXACTS.

14.1. DÉFINITION. Soit  $\mathcal{X}$  une sous-catégorie de  $CAT$  et  $\underline{X}$  une 2-catégorie. On désigne par  $FAC_{\underline{X}}(\mathcal{X})$  la 2-catégorie des systèmes de facteurs de type  $\mathcal{X}$  dans  $\underline{X}$  définie comme suit:

un objet est un  $\underline{X} = (\underline{X}, *) \in \mathcal{X}_0$  et un lax-foncteur  $W: \underline{X} \dashrightarrow \underline{X}$ ,

un morphisme est un  $(F, \phi): (\underline{X}, W) \rightarrow (\bar{\underline{X}}, \bar{W})$  où  $F: \underline{X} \rightarrow \bar{\underline{X}} \in \mathcal{X}$  et  $\phi: W \dashrightarrow \bar{W}$ .  $F$  une transformation lax-naturelle,

un 2-morphisme est une modification  $\epsilon: \phi \Rightarrow \psi$ .

$$\begin{array}{ccccc} \underline{X} & \xrightarrow{F} & \bar{\underline{X}} & \xrightarrow{G} & \hat{\underline{X}} \\ & \searrow W & \downarrow \bar{W} & \swarrow \hat{W} & \\ & & \underline{X} & & \\ & & \text{=} & & \end{array} \quad \begin{array}{c} \phi \\ \downarrow \epsilon \\ \psi \end{array} \quad \begin{array}{c} \eta \\ \downarrow \psi \end{array}$$

On pose  $P(\underline{X}, W) = W(*)$ ,  $Q(\underline{X}, W) = \underline{X}$ , d'où

$$\mathcal{X} \xleftarrow{Q} FAC_{\underline{X}}(\mathcal{X}) \xrightarrow{P} \underline{X}$$

14.2. PROPOSITION. On désigne par  $\underline{\underline{Gr}}$  la sous-2-catégorie pleine de  $\underline{\underline{CAT}}$  ayant pour objets les groupes. Donc si  $f, g: A \rightarrow B \in \underline{\underline{Gr}}$ , la donnée d'un 2-morphisme  $\beta: f \Rightarrow g$  équivaut à la donnée d'un  $b \in B$  tel que

$$g = \text{Int}(b) \circ f, \text{ avec } \text{Int}(b)(b') = bb'b^{-1}.$$

2° Soit  $C$  un groupe. Un lax-foncteur  $(\phi, f): C \dashrightarrow \underline{\underline{Gr}}$  équivaut à la donnée d'un  $C$ -«module»  $A$  et d'un système de facteurs à valeurs dans  $A$ , i. e. un groupe  $A$ , une application  $\phi: C \rightarrow \text{Aut } A$  et une application  $f: C \times C \rightarrow A$  telles que

$$\phi x \circ \phi y = \text{Int}(f(x, y)) \circ \phi(xy),$$

$$\phi x f(y, z) + f(x, yz) = f(x, y) + f(xy, z).$$

3° Une transformation lax-naturelle de  $W = (\phi, f): C \dashrightarrow \underline{\underline{Gr}}$  vers  $\bar{W} = (\bar{\phi}, \bar{f}): C \dashrightarrow \underline{\underline{Gr}}$  s'identifie à  $(u, g)$  avec  $u: A \rightarrow \bar{A}$  morphisme de groupes et  $g: C \rightarrow \bar{A}$  application vérifiant

$$u \circ \phi x = \text{Int}(gx) \circ \bar{\phi} x \circ u,$$

$$g(y) + \bar{\phi}(y)g(x) + \bar{f}(y, x) = u(f(y, x)) + g(y \cdot x).$$

4° On retrouve  $FAC$  du n° 10 comme la sous-2-catégorie pleine de  $FAC_{Gr}(\underline{\underline{Gr}})$  dont les objets sont les lax-foncteurs

$$W: C \dashrightarrow \underline{\underline{Ab}} \hookrightarrow \underline{\underline{Gr}} \text{ avec } C \in \underline{\underline{Ab}}.$$

5° En appliquant la théorie générale des sections 3 et suivantes au bimodule (non-additif)

$$E = (\underline{\underline{Gr}} \xrightarrow{P^0} FAC_{Gr}(\underline{\underline{Gr}}) \xrightarrow{Q} \underline{\underline{Gr}})$$

on obtient un calcul de satellites  $Sat_E(F): \underline{\underline{Gr}} \rightarrow \underline{\underline{C}}$  pour les 2-foncteurs  $F: \underline{\underline{Gr}} \rightarrow \underline{\underline{C}}$ , calcul qui étend celui classique du cas abélien.

14.3. PROPOSITION. Si

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\chi} E \xrightarrow{\sigma} B \longrightarrow 0$$

est une suite de groupes telle que  $\text{im } \chi = \text{ker } \sigma$ , soit

$$\text{Int}_E: E \times E \rightarrow E: (e, e') \mapsto ee'e^{-1},$$

$\gamma: E \times A \rightarrow A$  sa restriction,



$$\theta: E \rightarrow \text{Aut } A: x \mapsto \gamma(x, \cdot) \text{ et } \psi: B \rightarrow \text{Aut } A / \text{Int } A = \text{Out } A$$

déduit de  $\theta$  par passage au quotient. Eilenberg-Mac Lane appelle *abstract kernel* un tel  $\psi$ .

1° Le couple  $(\chi, \theta)$  détermine et est déterminé par un unique

$$\bar{\chi}: E \rightarrow \mathcal{D}E \text{ tel que } \theta = d_E \cdot \bar{\chi}$$

$$\bar{\chi}(x) = \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\theta x} & A \\ & \searrow \chi & \nearrow \chi \\ & E & \end{array} \quad \begin{array}{c} [x] \\ \curvearrowright \end{array}$$

2° Soit  $s = \mathcal{D}\sigma \circ \bar{\chi}: E \rightarrow \mathcal{D}B$ , et  $\pi_0^* \mathcal{D}B$  la catégorie des 2-composantes connexes de  $\mathcal{D}B$ , et  $P_B: \mathcal{D}B \rightarrow \pi_0^* \mathcal{D}B$ .

3° L'abstract kernel  $\psi$  détermine un unique foncteur  $\Psi: B \rightarrow \pi_0^* \mathcal{D}B$  tel que pour toute application  $u: B \rightarrow E$  section de  $\sigma$  on ait  $\Psi = P_B \circ s \circ u$ ; de plus on a

$$P_B \circ \text{zéro} = \psi \circ \text{incl}, \text{ avec } \text{zéro}: B_0 \rightarrow \mathcal{D}B \text{ et } \text{incl}: B_0 \rightarrow B,$$

de sorte que  $(A, \text{zéro}, B, \psi)$  équivaut à la donnée de  $\Psi: B \rightarrow \pi_0^* \mathcal{D}B$ . Nous appellerons  $\Psi$  le genre de l'extension

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow E \longrightarrow B \longrightarrow 0.$$

Alors toute section  $u$  de  $\sigma$  détermine une représentation de

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow E \longrightarrow B \longrightarrow 0$$

par un élément  $\phi_E$  de

$$\text{FAC}_{\psi}(B) = \{ \phi: B \dashrightarrow \mathcal{D}B \mid \phi \text{ lax-foncteur, } P_B \cdot \phi = \psi \};$$

et de  $\phi_E$  on retrouve  $E \rightarrow B$  comme  $Kl(d_B \phi_E) \rightarrow B$  (grâce à 13.10).

4° Si  $B$  est un groupe et  $W = (\phi, f): B \dashrightarrow \underline{\text{Gr}}$  un lax-foncteur, alors  $KlW = Kl(\phi, f)$  est le groupe d'ensemble sous-jacent  $B \times A$  ( $W(0) = A$ ) muni de la loi

$$(y, b) \cdot (x, a) = (yx, b + \phi(y)a + f(y, x)).$$

5° Dans la 2-catégorie  $\underline{\text{CAT}}$  le carré ci-après est exact ce qui signifie que  $J(A)$  est un sous-groupe normal de  $Kl(W)$  et  $B \cong KlW/JA$ ; on a

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{\quad} & 1 \\
 J \downarrow & & \downarrow \\
 KlW & \xrightarrow{P} & B
 \end{array}$$

donc une suite exacte

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{J} KlW \xrightarrow{P} C \longrightarrow 0.$$

6° Dans la situation 0 à 3 on obtient  $h: Kl(d_B \cdot \phi_E) \rightarrow E$  comme associé par 13.10 à

$$B \dashrightarrow \mathcal{D}E: \quad x \mapsto \begin{array}{ccc}
 & A & \xrightarrow{\theta x} & A \\
 & \searrow & & \swarrow \\
 X & & \xrightarrow{ux} & X \\
 & & \searrow & \swarrow \\
 & & & E
 \end{array}$$

et  $h$  est bien un iso parce que  $\sigma \cdot u = Id$  est un morphisme de groupes.

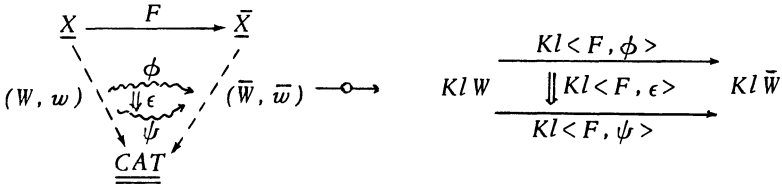
14.4. REMARQUE. En fait on peut comprendre maintenant que dans le cas de  $Ab$  (voir n° 10)  $EXA$  et  $FAC$  sont, respectivement, les aspects syntaxique et sémantique d'une même chose (le calcul des satellites). Dans le cas non abélien nous venons d'exposer l'outil pour satelliser sous forme sémantique ( $F\hat{A}C_{Gr}(\underline{Gr})$ ) et avons vu que la forme syntaxique « en suites exactes » s'obtient par recollement des systèmes de facteurs  $Kl(W)$ . Nous allons voir comment cela apparaît dans le cas plus général des catégories, en termes de lax-foncteurs et carrés exacts (à la place des systèmes de facteurs et suites exactes).

14.5. DÉFINITION. La 2-catégorie  $F\hat{A}C_{CAT}(\underline{CAT})$  (cf. Définition 14.1) sera notée simplement  $\underline{F\hat{A}C}$ . On désignera par  $\underline{FAC}$  la 2-catégorie ayant pour objets les couples  $(\underline{X}, W)$  avec  $\underline{X} \in CAT$  et  $W: \underline{X} \dashrightarrow \underline{CAT}$  un lax-foncteur ( $\underline{X}$  non pointée), les morphismes et 2-morphismes étant définis comme pour  $\underline{F\hat{A}C}$  (cf. 14.1)

$$\begin{array}{ccccc}
 \underline{X} & \xrightarrow{F} & \bar{\underline{X}} & \xrightarrow{G} & \hat{\underline{X}} \\
 & \searrow W & \downarrow \bar{W} & & \swarrow \hat{W} \\
 & & \underline{CAT} & & \\
 & \nearrow \psi & \downarrow \eta & & \nearrow \psi
 \end{array}$$

(Avec 13.13 on considèrera un objet de  $\underline{FAC}$  comme une « théorie » et un objet de  $\underline{F\dot{A}C}$  comme une « algèbre ».)

14.6. THÉORÈME. La construction  $Kl$  (cf. 13.4 et suite) se prolonge en un 2-foncteur  $Kl: \underline{FAC} \rightarrow \underline{CAT}$



par :

$$Kl\langle F, \phi \rangle(x, a) = (Fx, \phi(x)a),$$

$$Kl\langle F, \phi \rangle(f, t) = (Ff, \phi(y)t \circ \phi(f)a),$$

$$Kl\langle F, \epsilon \rangle(x, a) = (idFx, \epsilon(x)a \circ \bar{w}(Fx)\phi(x)a);$$

et on a

$$Kl\langle F, \phi \rangle Jf = \bar{J}(Fy)\phi f \circ \bar{J}(Ff)\phi x,$$

$$Kl\langle F, \epsilon \rangle Jx = \bar{J}(Fx)\epsilon(x),$$

$$\bar{k}. Kl\langle F, \epsilon \rangle = id(F.k),$$

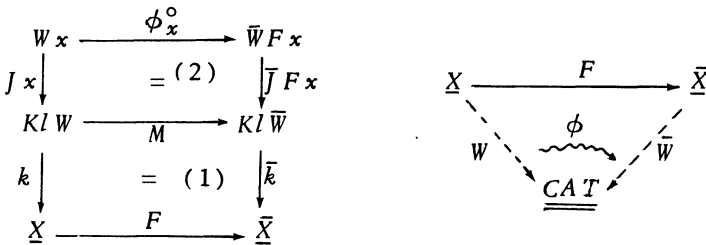
avec  $k: KlW \rightarrow \underline{X}$  et  $\bar{k}: Kl\bar{W} \rightarrow \underline{\bar{X}}$  les foncteurs canoniques.

14.7. THÉOREME (Lemme de Yoneda lax).

1° Supposons donnés  $(W, w): \underline{X} \dashrightarrow \underline{CAT}$ ,  $(\bar{W}, \bar{w}): \underline{\bar{X}} \dashrightarrow \underline{CAT}$ ,

$$F: \underline{X} \rightarrow \underline{\bar{X}}, M: KlW \rightarrow Kl\bar{W} \text{ tels que } \bar{k}. M = F.k$$

et pour tout  $x \in \underline{X}_0$ ,  $\phi^{\circ}x: Wx \rightarrow \bar{W}Fx$  tels que  $M.Jx = \bar{J}Fx.\phi x$ ,



Alors  $\phi^{\circ}$  se prolonge de manière unique en une transformation lax-naturelle  $\phi: W \dashrightarrow \bar{W}. F$  telle que  $M = Kl\langle F, \phi \rangle$  ( $\phi(f)$  est défini par

$$M(f, idW(f)(a)) = (Ff, \phi(f)a)$$

(et réciproquement un  $\phi$  détermine un unique  $(M, \phi^\circ)$ ).

2° Si  $F$  et les  $\phi_x^\circ$  sont des isomorphismes, alors  $M$  est un isomorphisme ssi  $\phi$  est un isomorphisme.

3° Si  $\phi : W \rightarrow \bar{W}F$  est un isomorphisme, alors (1) est un carré cartésien, et donc exact d'après 5 ci-après.

4° Supposons donnés seulement

$$(W, w) : \underline{X} \rightarrow \underline{CAT}, \quad (\bar{W}, \bar{w}) : \bar{X} \rightarrow \underline{CAT}, \quad F : \underline{X} \rightarrow \bar{X}$$

tels que pour tout  $x \in \underline{X}_0$ ,

$$\bar{W}F(id x) \Rightarrow id \bar{W}F x \text{ est un isomorphisme}$$

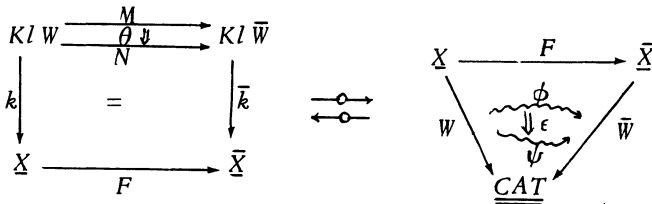
(par exemple si  $\bar{W}$  est un vrai foncteur, ou si les  $\bar{W}(Fx)$  sont des groupoïdes). Alors, en posant :

$$\begin{aligned} \theta &= Kl \langle F, \epsilon \rangle, \quad M(x, a) = (Fx, \phi(x)a), \\ \theta(x, a) &= (id Fx, \epsilon(x)a \circ w(Fx)\phi(x)a), \end{aligned}$$

on établit une bijection entre les

$$\theta : M \rightarrow N : KlW \rightarrow Kl\bar{W} \text{ tels que } k \cdot \theta = id(F \cdot k)$$

et les  $\epsilon : \phi \Rightarrow \psi : W \rightarrow \bar{W}F$ .



5° Un foncteur canonique  $k : KlW \rightarrow \underline{X}$  n'est pas une cofibration mais possède encore la propriété que tout produit fibré le long de  $k$  est un carré exact.

6° On déduit de 5 que les carrés (non cartésiens)

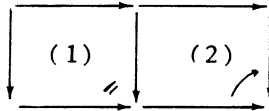
$$\begin{array}{ccc} Wx & \longrightarrow & 1 \\ Jx \downarrow & & \downarrow x \\ Klx & \xrightarrow{k} & \underline{X} \end{array}$$

sont exacts.

14.8. THÉORÈME (carrés fibrants et cofibrants).

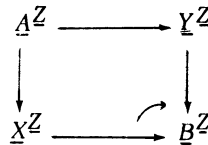
1° Un carré  $\phi : S \xrightarrow{\mathcal{F}} V$  sera dit *carré quasi-quotient* ssi  $\bar{\phi} : A \rightarrow U \downarrow V$  a un adjoint à gauche  $l \dashv \bar{\phi}(\epsilon, \eta)$ ; si de plus  $d_1 \epsilon$  est un iso, on dit que  $\phi$  est un *carré cofibrant*. Un carré  $\phi$  tel que  $\bar{\phi} \dashv r(\epsilon, \eta)$  avec  $d_0 \eta$  iso est dit *carré fibrant*. On retrouve les fibrations en suivant 7.1. Un carré cofibrant (resp. fibrant) est scindé si  $d_1 \epsilon = 1$  (resp.  $d_0 \eta = 1$ ).

Soit



Si (1) est un produit fibré et (2) fibrant, alors le composé est fibrant.

2° Un carré  $\phi$  est dit *fortement exact* ssi pour tout  $\underline{Z}$  le carré

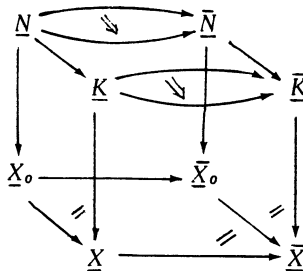


est exact. Dans  $CAT$  les carrés exacts ne sont pas toujours fortement exacts, car si  $\underline{E}$  est connexe non-vidé,  $\underline{E}^Z$  ne l'est pas nécessairement.

3° Les carrés fibrants et les carrés cofibrants sont fortement exacts.

14.9. REMARQUES. 1° Avec 14.7, 13.13 on obtient une présentation des objets de  $FAC$  à l'aide de carrés exacts.

2° Le Théorème 14.7 permet de représenter  $\underline{FAC}$  comme sous-2-catégorie pleine et 2-pleine de  $EXA^*$  ainsi défini : un 2-morphisme est un



les objets étant des carrés exacts

$$\begin{array}{ccc}
 \underline{N} & \longrightarrow & \underline{K} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \underline{X}_0 & \longrightarrow & \underline{X}
 \end{array}$$

On pose alors

$$Q\left( \begin{array}{ccc} \underline{N} & \longrightarrow & \underline{K} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \underline{X}_0 & \longrightarrow & \underline{X} \end{array} \right) = \underline{X}, \quad P\left( \begin{array}{ccc} \underline{N} & \longrightarrow & \underline{K} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \underline{X}_0 & \longrightarrow & \underline{X} \end{array} \right) = \underline{N},$$

d'où un CAT-bimodule

$$CAT \xrightarrow{P^0} E\tilde{X}A^* \xrightarrow{Q} CAT.$$

3° De même que dans  $Ab$  il y a  $E\tilde{X}A$  et  $EXA$  (cf. 9 à 12) on peut réduire  $E\tilde{X}A^*$  à une sous-catégorie pleine  $EXA$  dont les objets sont des carrés exacts particuliers qui dans le cas de  $Ab$  correspondent précisément aux suites exactes courtes (à savoir les carrés fibrants, ou les carrés cofibrants).

4° Soit par la construction pointée pour  $\dot{C}AT$ , soit par 14.8.2 ci-avant, pour  $CAT$  on obtient donc des  $CAT$ -bimodules *candidats* à jouer pour  $\dot{C}AT$  ou  $CAT$  le rôle que  $EXT$  joue pour  $Ab$ . Il s'agira ultérieurement de calculer ce que donne la théorie générale des Sections 3 à 8 pour obtenir des  $CAT$ -satellites pour les 2-foncteurs de source  $\dot{C}AT$  ou  $CAT$ . Mais le *problème de l'itération* (« cohomologie d'ordre supérieur ») est *ici résolu a priori*, comme dans le cas de  $Ab$  (n° 9), par le jeu de dominos avec les carrés exacts.