CAHIERS DE
TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
CATÉGORIQUES

RENÉ GUITART

Qu'est-ce que la logique dans une catégorie ?

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 23, nº 2 (1982), p. 115-148

<http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1982__23_2_115_0>

CAHIERS DE TOPOLOGIE
ET GÉOMETRIE DIFFÉRENTIELLE
Vol. XXIII-2 (1982)

3[e] COLLOQUE SUR LES CATÉGORIES
DÉDIÉ A CHARLES EHRESMANN
Amiens, Juillet 1980

QU'EST-CE QUE LA LOGIQUE DANS UNE CATÉGORIE ?

par René GUITART

Pour Françoise

SOMMAIRE.

-1. SOURCE.

Je veux profiter de ce Colloque pour rappeler toute l'aide - tant sur le plan scientifique que sur le plan personnel - que j'ai reçue d'Andrée et Charles Ehresmann. Beaucoup de mes réflexions ont pour sources des outils qu'ils ont introduits (foncteur-types, 2-catégories, catégories d'opérateurs, suites exactes de foncteurs, esquisses). Ce texte est une synthèse unificatrice de la thèse de Doctorat d'Etat préparée sous leur direction (et soutenue à Amiens le 8 Juin 1979, avec pour jury: A & C. Ehresmann, G. Choquet, H. Kleisli, J. Bénabou, M. Tierney, L. Boasson) et de travaux réalisés depuis. Les résultats des paragraphes 13 à 17 qui ont fait l'objet de l'exposé oral à ce Colloque sont inédits.

Les démonstrations ne figurent pas; sauf pour celles des paragraphes 13 à 17, on les trouvera, avec des compléments et toutes les informations bibliographiques qui n'ont pas leur place dans ce rapide survol de mes idées, dans les textes suivants (auxquels ce texte-ci est une *introduction générale* où l'aspect «logique» est privilégié). Ces textes sont réunis en deux volumes multigraphiés à l'Université Paris 7. (Abréviations:

C.R.A.S. = Compte-rendus de l'Académie des Sciences;
CTGD = Cahiers de Topologie et Géom. Diff.)

VOLUME 1.

[1. Relations, fermetures, continuités (Thèse 3^e cycle Univ. Paris 7, Juin 1970) *Esquisses Math.* 1 (1970), 102 pages.]

2. Problèmes universels associés à quelques catégories d'applications, *C.R.A.S. Paris* 270 (1970), 1398-1401.
3. La catégorie des relations continues entre fermetures, *Idem* 1572-1574.
4. Définitions de l'homotopie entre relations, *Idem* 271 (1970), 635-638.
5. Sur l'homotopie entre relations, *Idem* 272 (1971), 1175-1178.
6. Sur les fonctions associées à la notion de sous-structure, *Idem* 273, 558-561.
7. Foncteurs sous-objets et relations continues, *CTGD* XIII-1 (1972), 57-100.
8. Sur les idempotents dans les triples et la description des structures, *C.R.A.S.* 275 (1972), 259-262.
9. Sur l'ébauche des structures, *Proc. 3^d Cong. of Bulgarian Math.*, Summaries II (1972), p. 354.
10. Structures algébriques et extensions de Kan d'applications covariantes, *C.R.A.S. Paris* 277 (1973), 83-86.
11. Sur le foncteur diagramme, *CTGD* XIV-2 (1973), 181-182.
12. Les monades involutives en théorie élémentaire des ensembles, *C.R.A.S. Paris* 277 (1973), 935-937.
13. Categorias cantorianas, *Encontro Nac. de Logica Mate.*, Univ. Fed. Flumin. Niteroï, 1974, 14 pages.
14. Remarques sur les machines et les structures, *CTGD* XV-2 (1974). 113-144.
15. Equational translation of set theoretical notions, Summary of a conf. at Oberwolfach, 1974, 3 pages.
16. Constructions de monades involutives, *C.R.A.S. Paris* 279 (1974), 491-493.
17. Traduction équationnelle de notions ensemblistes, *Idem* 541-543.
18. Monades involutives complémentées, *CTGD* XVI-1 (1975), 17-101.
19. Involutive monads and topologies, *Math. Forschungsinst. Oberwolfach*, Tagung. 33 (1975), 2 pages.
20. Un contexte adapté aux relations continues, *CTGD* XVI-3 (1975), 244-245.
21. Fibrations, diagrams and decompositions, Abstract of a talk at the category theory Meeting Isle of Thorns, 1976, 3 pages.
22. Sur la décomposition des catégories, Multigraphié Univ. Paris 7, 1976, 4 p.
23. Topogenesis and continuous relations, Abstract of a talk at the Northwest German Category Seminar. Univ. Bremen, 1976, 4 pages.
24. Topologie dans les univers algébriques, *Math. Arbeitspap.* 7, Univ. Bremen (1976), 59-97.

VOLUME 2.

25. Calcul des relations inverses, *CTGD* XVIII-1 (1977), 67-100.
26. Structures dans les univers algébriques, Multigraphié Univ. Paris 7, 1977, 45 p.
27. Changement de logique dans les univers algébriques, Idem, 10 pages.
28. Extensions de Kan absolues, *Math. Forschungsinst. Oberwolfach*, Tagung. Kat.

egorien, 1977, 42-44.
29. Décompositions et lax-complétions (avec L. VandenBril), *CTGD* XVIII-4 (1977), 333-407.
30. Des machines aux bimodules, Multigraphié Univ. Paris 7, 1978, 28 p.
31. Foncteurs-types, équations de structures, Univers algébriques, Exposé 9 *Sém. de Catégories* (Guitart-Lair-Coppey-Foltz), 1979, Multigraphié Paris 7, 8 p.
32. Résumé de Thèse. Univ. Amiens, 1979, 2 pages.
33. Théorie des bornes, I, *Diagrammes* 1 (1979), Paris, 4 pages.
34. a) Carrés exacts; b) Tenseurs et machines, *Math. Forschungsinst., Oberwolfach*, Tagung. Kategorien, 1979, 1 page.
35. Algebraic universes, Lecture at the summer school on universal algebra and ordered sets, Jindrichuv Hradec (Tchécoslovaquie), 1979, 10 pages.
36. Constructions de produits tensoriels et machines non-déterministes, *Seminarberichte Fernuniv. Hagen* 7 (1980), 25-30.
37. Théorie des bornes, II, *Diagrammes* 2, Paris (1979), 2 p.
38. Tenseurs et machines, *CTGD* XXI-1 (1980), 5-62.
39. Pour un calcul logique géométrique, Multigraphié, Univ. Paris 7, 1980, 6 p.
40. Sur les contributions de Charles Ehresmann à la théorie des catégories, *Gazette des Math.* S.Math. France 13 (1980), 37-43.
41. Extenseurs, *Diagrammes* 3, Paris (1980), 2 p.
42. Relations et carrés exacts, *Ann. Sc. Math. Qué.* IV-2 (1980), 103-125.
43. a) Exact squares and reality; b) Tensors, Fachtagung allgemeine Algebra und Grenzgebiete 27/10 Almsfeld/Harz, DDR, 1980, 2 pages.
44. Qu'est-ce que la logique dans une catégorie? Ce Volume.

0. BUT.

Je conçois la théorie des catégories comme une *logique mathématique* élargie, incorporant à son propre développement, à son formalisme et à ses méthodes certains aspects de la *logique dialectique.* Elle se développe par l'observation objective des pratiques singulières des mathématiciens et la recherche de ce que ces pratiques comportent d'universel.

Je vais exposer ici comment mes propres travaux s'appuient sur cette conception et la renforcent. Mon *but* précis est de montrer que, en se plaçant au niveau convenable d'abstraction, on a:

$$\textit{Logique} = \textit{Algèbre homologique},$$

de sorte que chacun de ces domaines doit profiter des méthodes de l'autre.

1. PRATIQUE.

La logique étant la branche des mathématiques appliquées qui étudie l'activité mathématique elle-même, il importe de fixer d'abord la conception que l'on se fait de cette activité.

Quand Einstein préconise de rester profondément opportuniste, il indique que tout principe épistémologique limite les possibilités de découverte. Pour cela aussi Bohr renonce à l'exigence habituelle de simplicité, d'élégance et même de compatibilité avec les théories admises. Feyerabend précise que, «pour ceux qui considèrent la richesse des éléments fournis par l'histoire et qui ne s'efforcent pas de l'appauvrir pour satisfaire leur soif de sécurité intellectuelle - sous forme de clarté, précision, «objectivité» - pour ceux-là, il devient clair qu'il y a un seul principe à défendre en toutes circonstances et à tous les stades du développement humain, c'est le principe : tout est bon» (*Against Method*, New Left Books, 1975).

Ainsi même le principe suivant lequel pour être intéressant un travail mathématique doit soit être clair et élégant, soit résoudre un problème difficile, est inacceptable, par la priorité absolue qu'il donne aux modes de pensées et théories établis, rejetant dans les ténèbres extérieures les idées et pratiques «fausses», tortueuses ou bizarres qui participent pourtant aussi des mathématiques, mais qui n'ont pas l'avantage d'être en accord avec le dogme de l'instant. Au contraire une conception plus expérimentale de l'activité mathématique, préservant au maximum la richesse et la diversité des découvertes possibles, conduit à ne pas négliger et peut-être à encourager les conduites hétérodoxes et les pratiques sauvages. Je ne critique pas ici la clarté d'exposition toujours indispensable, mais la schématisation excessive et a priori, basée sur la croyance que les chemins conduisant à la vérité sont simples. On sait maintenant que l'activité scientifique ne procède ni du réalisme (Aristote, Newton) ni du rationalisme (Platon, Descartes), mais ne se réalise pleinement qu'en assumant dans ses pratiques la complexité de la dualité (soulignée par Bachelard) *Réalisme/Rationalisme*. C'est dans ce va-et-vient lucide entre Pittoresque et Compréhensible, entre Singulier et Universel, que la Science se fait.

Si, comme l'a souligné Husserl, l'intérêt d'une Logique est d'être une efficace doctrine de la Science, une Logique évoluée doit tenter d'intégrer explicitement à ses mécanismes ce va-et-vient fondamental rappelé ci-dessus. A ce sujet Kedrov observe (*Dialectique, Logique, Gnoséologie :*

leur unité, Ed. du Progrès, 1970) que «les logiciens formels ne font que s'abstraire de la variabilité de la vérité (c'est-à-dire de notre savoir) laissant à une autre science logique le soin de résoudre et d'étudier cette question. Cette autre science logique est la logique dialectique». Dans la même veine, Marcuse (*One-dimensional man*, Beacon Press, 1964) dit que «la logique mathématique actuelle est une forme de pensée d'où a été retranché le «négatif» qui était tellement évident à l'origine de la philosophie et de la logique - le négatif ou l'expérience de la force négative, décevante, falsifiante de la réalité établie. En éliminant cette expérience, l'effort conceptuel de ce fait cesse de maintenir la tension entre est et devrait», et il oppose à cela la logique dialectique qui «refuse les abstractions de la logique formelle et transcendantale, mais en même temps refuse le concret de l'expérience immédiate». *Une Logique Mathématique qui rendrait compte de la logique dialectique serait très précieuse,* car beaucoup plus adaptée à l'analyse des pratiques scientifiques réelles. Je pense que, après la logique formelle et la théorie des modèles classique (ensembliste), la théorie des catégories est un pas vers une telle Logique, en un sens que je vais développer dans la suite, et décrire sous une forme utilisable au n° 17.

2. FORMULES.

La logique est l'étude des formules, avec :

Formule = Description d'une pratique.

La nécessité soulignée ci-dessus de n'éliminer a priori aucune pratique particulière crée, dans l'étude «logique» d'une catégorie C, la nécessité de ne formaliser que lentement, en prêtant attention surtout à la cohérence interne de la théorie en cours de formation, plutôt qu'à ses éventuelles «retombées» dans les théories «reconnues». Chaque catégorie C est en fait une modélisation provisoire (i.e. qu'il ne faut pas s'interdire de modifier - cf. n° 15) d'une problématique réelle, et l'étude de C vise à «résoudre» cette problématique-là, et non à contribuer aveuglément à l'enrichissement du Corpus Mathématique.

Les formules dans une catégorie donnée C devront être simplement *les descriptions des pratiques qui se sont développées dans* C *depuis son* *émergence dans l'histoire des mathématiques.* De ces descriptions, on exige principalement d'être fidèles à la pratique dans C telle qu'elle est réellement perçue ; pour un géomètre les formules seront vues comme formules-figures, et pour un esprit plus analytique elles revêtiront l'aspect de formules-algorithmes. Ces descriptions devraient être d'une forme brute et directe, ne cherchant pas à reprendre les chemins des classiques constructions logico-ensemblistes ; les manières de construire et d'interpréter les formules dans C devraient être discutées en second lieu seulement, de telles opérations revenant à comparer les formules dans C avec les formules dans d'autres catégories. Il faut éviter d'imposer a priori une forme spéciale aux formules (e.g. une présentation heureuse ailleurs) et s'attacher à dégager la nature profonde des situations sans chercher trop hâtivement à résoudre les questions apparentes. *L'idée de formule est informalisable,* et demeure dynamique et ouverte, de sorte que pour chaque catégorie nouvelle C la logique intrinséque à C est radicalement à découvrir, la première étape étant de donner les formules, c'est-à-dire de décrire précisément ce que l'on a réellement fait déjà dans C. Mais ensuite, il faut faire les mathématiques, c'est-à-dire - suivant Thom et Poincaré - «gagner de la rigueur, quitte à perdre de la signification» et, «poussant les entités distinctes à se confondre», délimiter un calcul, dégager des présentations formelles de *diverses approximations limitées de l'idée de formule.*

3. DIAGRAMMES.

L'utilisateur d'une catégorie concrète C voit dans les morphismes les «liens élémentaires» entre objets, et ses premières démarches consistent à construire et analyser des liens plus généraux et puissants : relations entre paires d'objets de C, extensions et suites exactes, carrés commutatifs, morphismes à homotopie près, préfaisceaux sur C, et au sens le plus général, *diagrammes* dans C. Voila donc les premiers exemples de formules ; on observera que de ce point de vue la *logique est peu différente de la théorie des catégories elle-même.* L'idée de penser directement les cônes inductifs et projectifs comme des formules a déjà été indiquée par plusieurs auteurs (Mijoule - en 1973 au Séminaire A. & C. Ehresmann à Paris 7, Rosicky, Keane, Andreka-Nemeti-Sain, Guitart (voir (39))), et par ailleurs cette «logique des cônes» s'est développée implicitement sous forme d'esquisses (A. et C. Ehresmann, Gabriel-Ulmer, Lair, Diers) ou de topologie de Grothendieck (Makkai-Reyes, Coste, Diers). Nous systématisons ceci avec le calcul des T-*formules* ou formules internes à une théorie T (voir paragraphes 13, 14) qui rejoint aussi (avec T = *Graphes* ou *Cat*) les idées de Blanc, Rambaud, Penon, A. Burroni sur les langages sur graphes, langages de catégories, langages graphiques (voir en particulier la conférence de Burroni dans ce Colloque). Voir aussi au nº 10 la *complétion graphique.*

4. FONDEMENTS.

La question de fondements (où se font les maths. ?) est un aspect particulier de la question de la logique (comment se font les maths. ?). Je crois que nous n'avons besoin de fondements que localement, afin de savoir, pour une théorie donnée, sur quoi nous bâtissons. L'idée de fonder dans leur ensemble toutes les mathématiques est démesurée. Une idée essentielle qui a émergé dans les années cinquante est *qu'il n'y a pas un univers privilégié* (avec une logique donnée, des objets donnés) où se développe le discours mathématique, mais une infinité d'univers possibles. De plus dans l'étude des mathématiques à l'intérieur d'un univers il peut être très fructueux de s'«extraire» de l'univers en question, et éventuellement de modifier cet univers. Ainsi - suivant l'expression de Dieudonné - Grothendieck «sort» les ouverts de l'espace topologique et propose les topos comme objets fondamentaux de la géométrie algébrique; Robinson joue sur le va-et-vient entre deux univers U et $^*U$ pour simplifier l'étude de l'analyse dans le premier et fournir un cadre formel correct au calcul infinitésimal à la Leibniz ; et dans les modèles booléiens, Scott et Solovay «gonflent» l'univers initial où la logique est binaire en lui ajoutant de manière cohérente des valeurs logiques qui serviront à évaluer plus finement les énoncés portant sur le premier univers.

Suivant Gauss (puis Hilbert, Eilenberg-MacLane, Ehresmann), en mathématique la nature «intime» des êtres étudiés n'importe pas, seules comptent les relations entre ces êtres, et les structures exprimant ces relations. En particulier pour développer telle théorie il importe moins d'avoir un modèle précis explicitement construit qu'un système d'axiomes bien défini. Devant cette attitude toute méfiance envers les éléments idéaux introduits à diverses époques pour *rompre des situations paradoxales* (irrationnels, imaginaires, points à l'infini, etc) disparaît, puisque ces éléments «insensés» ne prétendent plus à une quelconque existence et expriment seulement des rapports.

Si maintenant cette conception, au lieu d'être appliquée à la géométrie, la théorie des équations, ou telle autre théorie particulière, est appliquée d'un coup à la théorie mathématique des mathématiques, cela donne la conception axiomatique des univers, avec en particulier la possibilité de modifier les univers par adjonction d'éléments idéaux convenables (nouveaux ensembles, nouvelles valeurs logiques,...).

Le mathématicien au travail dans un contexte et rencontrant une situation insoluble a l'habitude de changer de contexte, de se placer délibérément ailleurs, dans un contexte élargi, «complet», où les solutions existent. A force de manipulation et avec «de l'inspiration», il finit par «saisir» les éléments de ce nouveau contexte, et par acquérir ainsi une nouvelle vision sur sa situation insoluble initiale. Cela vaut si le contexte initial en question est un univers tout entier. Suivant la philosophie des paragraphes 1 et 2 l'étude de ces pratiques doit aussi être un fragment de la logique. *L'étude axiomatique des univers*, les manières de les construire, et les façons dont on peut faire les mathématiques dans un univers donné, tout cela est expliqué dans l'algèbre universelle classique et les nombreux travaux - au demeurant très fins - de théorie des modèles : mais cette approche ne me satisfait pas, car *la vision ensembliste est aujourd'hui une authentique obstruction* à l'application directe de la méthode mathématique à la réalité (où l'intuition perçoit les structures et non pas les «points» des ensembles abstraits soi-disant sous-jacents à ces structures). Du reste, on observe que cette faculté de changer de contexte est en pratique très limitée chez nombre de mathématiciens quand il s'agit de la théorie des ensembles, parce que leur intuition est canalisée depuis trop longtemps dans le formalisme des ensembles, de sorte qu'ils ont perdu le goût de la recherche des limites de ce formalisme où ils vivent : ils finissent par croire que la théorie des ensembles est une base absolue et que les ensembles existent réellement.

1° Prendre définitivement comme base pour les questions de fondement la théorie des ensembles est trop limitatif.

2° Un rôle essentiel dans l'axiomatique des univers est à jouer par la théorie des catégories.

5. RELATIONS.

Dans ma conception un univers est constitué de trois données : une *catégorie* de base, un contexte *opérationnel*, un contexte *relationnel*. Ainsi si U est un univers de Grothendieck, la catégorie de base est *Ens* (la catégorie d'applications associée à U), le contexte opérationnel est le calcul des produits cartésiens dans *Ens* , et le contexte relationnel est le calcul dans *Ens* des fonctions caractéristiques de sous-ensembles.

Pour l'aspect opérationnel, l'essentiel a été dit de 1955 à 1965 par Grothendieck, Lawvere, Chevalley, Ehresmann, Bénabou, qui ont donné diverses variantes pour développer les théories algébriques de manière interne à une catégorie à limites projectives, puis de 1965 à 1969 par Linton, Kleisli, Eilenberg, Kelly, à propos des monades et catégories monoïdales. Il faut aussi citer l'étude par Lambek des catégories cartésiennes et multicatégories. En 1970 on sait donc assez bien étudier les théories algébriques dans les catégories, mais on ne sait pas ce qu'il convient de faire pour les théories topologiques (où l'aspect relationnel est crucial), et cela principalement parce que l'étude logique des catégories commence à peine, malgré l'étude de Lawvere de 1963 sur les axiomes élémentaires de *Ens* . Au Colloque de Zürich en 1970 Lawvere et Tierney présentent leurs topos élémentaires, dont l'étude dans les six ou sept années suivantes par de nombreux auteurs montrera la richesse (voir l'exposé n° 513 par P. Cartier dans le Séminaire Bourbaki de Février 1978) ; on sait en particulier maintenant que la logique des topos est celle des algèbres de Heyting, la logique intuitionniste.

Après la notion de doctrine (Lawvere), Bénabou, Lambek (voir son article dans ce Colloque), Volger, ont proposé vers 1974 des systèmes plus généraux que les topos permettant encore un calcul des relations (catégories déductives, dogmas, catégories logiques). Zadeh et Goguen, entre autres, ont popularisé les ensembles flous (où la logique «probabiliste» n'est pas intuitionniste, et donc ne relève pas du cas des topos, même si des calculs dans le gros topos Ens^{Ens} semblent opportuns - cf. n° 15).

En 1970 au Colloque de Zürich - voir (1) page 60 -, afin d'axiomatiser l'idée d'univers du point de vue de la logique dans les catégories, et dans un esprit différent des topos élémentaires que je ne connaissais d'ailleurs pas, j'ai introduit les «chaînes dualisantes», calcul axiomatisant la dualité de Stone, que j'ai prouvé ensuite équivalent à celui des *monades involutives complémentées* (voir (18)) qui est le premier fragment d'une *théorie des relations* «ensemblistes» qui a abouti (1975-76) à la théorie des *univers algébriques* (voir (24) et ici les paragraphes 7 et 11).

Si la logique dans une catégorie C est vue d'abord comme l'introduction pour tout objet X d'un treillis $Sub(X)$ des sous-objets de X - les relations de X vers Y étant les éléments de $Sub(X \times Y)$ - alors on peut dire que l'on applique à C un schéma de pensée externe à C (à savoir l'idée de treillis) qui est inspiré du cas $C = Ens$, ce qui autorisera donc la «reproduction» dans C de résultats connus dans Ens, et dans certains cas, l'explicitation des pseudo-nouveautés ainsi obtenues engendrera en retour dans Ens des résultats originaux (lire aussi le n° 15). Ce point de vue (qui je crois anime les méthodes des catégories déductives, dogmas et catégories logiques) est voisin de celui des topos. Il peut se faire que l'idée de treillis soit franchement étrangère à la vraie nature de la logique interne intrinsèque à C, comme le montre le cas où $C = Cat$ ou le cas où $C = Top$ (cf. paragraphes 8, 10).

Dans un topos le treillis $Sub(X)$ est représentable par un objet PX, et les relations sont les morphismes $X \to PY$. De même dans Top on a pour tout X un espace de sous-espaces 2^X (avec la «finite topology» de Michael). Beaucoup d'auteurs (Riemann, Grassmann, les géomètres italiens, Grothendieck, Cerf, Douady) ont cherché à munir canoniquement d'une structure de variété l'ensemble des sous-variétés d'une variété donnée. C'est cette idée - inscrite dans la pratique des mathématiciens - d'associer à tout objet X de C *un objet des sous-objets* $PX \in C_0$ - que j'ai privilégiée, considérant donc une catégorie de relations comme étant la catégorie de Kleisli d'une *monade* (= construction standard), par analogie avec le cas de la catégorie de Kleisli de la monade des parties sur *Ens*.

6. SINGULIER ET UNIVERSEL.

Les mathématiques ne se réduisant pas aux problèmes universels, l'étude des logiques de catégories concrètes doit s'aborder a priori sur un mode combinatoire *naïf*, quitte à découvrir ensuite dans des cadres ad hoc les propriétés universelles des opérateurs mis en évidence. C'est le sens de la démarche entreprise avec les univers algébriques - conçus comme outil opératoire pour la topologie et l'analyse fonctionnelle, et la différence cruciale entre univers algébriques et topos élémentaires.

D'un autre côté une approche de la logique de *Ens* encore plus purement catégorique que celle faite avec les topos élémentaires (où *une* propriété universelle de $\{0,1\}$ est choisie comme clé) est celle consistant à classifier, pour tout $X \in Ens_0$, *tous* les problèmes universels dont X est solution (e.g.

$$2 = 1+1, \quad 2 = \text{sub.obj.cl.}, \quad \mathrm{N} = \text{free mon.}(1), \quad \mathrm{N} = \mathrm{N.N.O.},$$

...). Cette logique des propriétés universelles est liée aux *décompositions* dans une catégorie (Tarski, Coppey) et donc, suivant (21), (22), (29), aux fibrations. Et en fait ces questions de classification des problèmes universels et des décompositions sont une partie de la logique exacte fibrée sur *Ens* (cf. n° 16).

On distinguera donc dans la logique d'une catégorie C *les formules universelles*, i.e. dont la description a un sens dans toute catégorie (les formules «diagrammes» du n° 3 sont de ce genre) et les *formules singulières*, i.e. dont la description nécessite - jusqu'à preuve du contraire - d'être dans la catégorie C précisément (par exemple «$A \in PX$» formule dans *Ens*, «$\vec{v} \in T_x M$» formule dans la catégorie des variétés C^1).

Historiquement toute formule est apparue sous forme singulière a priori. C'est dans l'interpénétration permanente entre l'universalisation et un flot sans cesse renouvelé de données singulières que l'on comprend le monde réel qu'une catégorie donnée schématise.

Dans ce texte les formules singulières seront réalisées comme formules *sur* des objets de C, e.g. les données de la forme $(Y \to \Phi X) \in D$, où $X \in C_0$ et $\Phi : C \to D$ foncteur, et les formules universelles seront les formules *sur* C elle-même (comme objet de Cat), e.g. les foncteurs $B \to Fib\,C$; ainsi l'universel dans C est le reflet sur C du singulier dans Cat.

De même que l'idée de formule l'idée de la dualité *Singulier/Universel* n'est pas formalisable. Sous l'angle particulier de la dualité Modèle/Théorie, et dans le cadre spécial du formalisme catégorique, une approximation limitée de cette idée existe sous la forme des divers théorèmes d'adjonctions Sémantique/Syntaxe qui décrivent le passage dans *Cat des foncteurs sortant de* C (= données sémantiques) aux *foncteurs entrant dans* C (= données syntaxiques).

Dans les univers algébriques (n° 7) et les topogenèses (n° 8) on conserve aux espaces de formules PX leur caractère singulier, i.e. non universellement défini, et ainsi divers fragments de la théorie des univers algébriques (e.g. catégories avec appartenance (7), monades involutives (12), (18), calcul des transpositions (25)) restent utiles en eux-mêmes, comme formalismes exploratoires d'autres espaces «singuliers» de formules que les «espaces de parties d'un ensemble».

A l'opposé dans les carrés exacts et la logique exacte fibrée on ne considère que l'aspect universel (voir les paragraphes 12 à 16).

7. UNIVERS ALGÉBRIQUES.

Afin de saisir la définition d'univers algébriques, il est conseillé de l'interpréter dans les exemples qui suivent, et en particulier dans le cas de *Ens*.

On appelle *univers algébrique* (en abrégé u.a.) la donnée de :

(I) Un *contexte opérationnel*, i.e. une catégorie $\underline{E}$ à $\varprojlim$ finies.

(II) Un *contexte relationnel*, c'est-à-dire :

1° *Une monade* («des parties») $\mathrm{P} = (P, a, S)$ sur $\underline{E}$, avec donc

$$P = (\underline{E} \xrightarrow{L} Kl\mathrm{P} \xrightarrow{U} \underline{E}),$$

supposée *très fidèle*, i.e. telle que, pour tout $X \in \underline{E}_0$, on ait

$$a_X = ker(a_{PX}, Pa_X).$$

2° *Une involution* (calculant les relations «opposées»), c'est-à-dire un foncteur $I: Kl\mathrm{P} \to (Kl\mathrm{P})^{op}$ tel que, pour tout $X \in \underline{E}_0$, $I(X) = X$, et tel que $I^{op}.I = Id_{Kl\,\mathrm{P}}$. On pose $U.I^{op} = R$, $R.L^{op} = F$.

3° *Une transposition* (calculant les relations «adjointes»), - ou «quantification» - c'est-à-dire un foncteur

$$T: (Kl\mathrm{P})^{op} \to \underline{E} \quad \text{tel que} \quad T.L^{op} = R.L^{op} = F.$$

(III) Un *lien* entre contextes opérationnel et relationnel, c'est-à-dire :

1° *Un terme vide*, i.e. une transformation naturelle $0: \ulcorner 1 \urcorner \to P$.

2° *Une représentation des couples*, i.e. une transformation naturelle $c: (-)^2 \to P$ assujettie aux conditions (1), (2), (3) suivantes :

(1) $c_X.\Delta_X = a_X$ *(les atomes sont les couples diagonaux).*

(2) En désignant par $\bar{r}: X \nrightarrow Y$ le morphisme de $Kl\mathrm{P}$ déterminé par le morphisme $r: X \to PY$ de $\underline{E}$, on a en particulier $S_X = U(\bar{1}_{PX})$; on pose

$$\tau_X = T(\bar{1}_{PX}),\ \ \psi_X = R(\bar{1}_{PX}),\ \ t_X = \psi_X \cdot a_X,$$
$$J_X = F(t_X).F(\tau_{FX}).t_{F^2X},\ \ \Lambda_X = J_X \cdot c_{PX},\ \ \mathrm{V}_X = S_X \cdot c_{PX},$$
$$D_{X,Y} = \Lambda_{X\times Y}.(F(proj_X^{X,Y}) \times F(proj_Y^{X,Y})): PX \times PY \to P(X \times Y).$$

On impose que D *calcule les produits cartésiens de relations*, i.e. :

(2-1) D *fait de* P *une monade involutive monoïdale symétrique* (par rapport à $\times$), i.e. le bifoncteur $\bar{\times}$ donné par $\bar{r} \bar{\times} \bar{r}' = \overline{D_{Y,Y'}.(r \times r')}$ est une extension à $Kl\mathrm{P}$ de la structure monoïdale symétrique $\times$ de $\underline{E}$ et on a $I.\bar{\times}^{op} = \bar{\times}.(I \times I)$.

(2-2) $P(proj_Y^{X,Y}).D_{X,Y}.(a_X \times 1_{PY}) = proj_{PY}^{X,PY}$ *(compatibilité de* D *et proj).*

(2-3) En posant, pour A, $X \in \underline{E}_0$,

$$g_X = assoc_{A,A,X}.(\Delta_A \times 1_X): A \times X \to A \times (A \times X),$$

on impose (*compatibilité de D et* Δ *):*

$$L(g_X).IL(g_X) = (1_A \bar{\times} IL(g_X)).L(g_{A\times X}).$$

(3) Sous les hypothèses précédentes, on montre que

$$(A\times(-),\, IL(proj_-^{A,-}),\, IL(g_-))$$

est une monade involutive *sur* $Kl\,\mathrm{P}$, d'où des bijections naturelles

$$Kl\,\mathrm{P}(Y, A\times X) \approx Kl\,\mathrm{P}(X, A\times Y)$$

qui, composées avec I, induisent des bijections

$$car_{X,Y}: \underline{E}(X, PY) \approx \underline{E}(X\times Y, P1).$$

On pose $car_{PX,X}(1_{PX}) = ev_X$, et, pour tout $f: B\to A$, on impose que :

$$ev_A.(1_{PA}\times f) = ev_B.(Ff\times 1_B) \quad (F \text{ calcule les images inverses}).$$

Je ne peux exposer ici que quelques uns des résultats sur les u.a. donnés dans mes articles (voir particulièrement (7, 15, 17, 18, 19, 24, 25, 27)). Tout d'abord, on prouve - par une démonstration (27) un peu différente de celle donnée par Kock dans le cas particulier d'un topos - qu'*un u.a. est automatiquement une catégorie cartésienne fermée.*

D'autre part, on prouve que l'ensemble de toutes les données d'un *u. a. se réduit à une catégorie à* $\varprojlim$ *finies* $\underline{E}$ *avec :*

1° Un objet V de $\underline{E}$ tel qu'il existe V^X, pour tout $X\in \underline{E}_0$ (on aura $P1 = V$).

2° Pour tout $X\in\underline{E}_0$ des morphismes

$$0_X: 1\to V^X,\quad c_X: X\times X\to V^X,\quad \psi_X, \tau_X : V^X\to V^{V^X}.$$

3° En posant

$$a_X = c_X.\Delta_X \quad\text{et}\quad Pa_X = V^{(V^{a_X}.\,a_{V^X})}.\psi_X,$$

la condition : $a_X = ker(a_{V^X}, Pa_X)$.

4° Des équations entre les données 2, que l'on trouvera dans les articles cités.

Les topos de Lawvere-Tierney et les quasi-topos de Penon sont des exemples d'u.a., avec :

$$V = \Omega, \quad O_X(*)(x) = o, \quad c_X(x, x') = \{x, x'\},$$
$$\psi_X(A) = \{A' \mid \exists x (x \in A \wedge x \in A')\},$$
$$\tau_X(A) = \{A' \mid \forall x (x \in A' \rightarrow x \in A)\},$$
$$F(f) = \Omega^f, \quad P(f) =: F a_Y . F^2 f . \psi_X = \exists f,$$
$$P'(f) =: F a_Y . F^2 f . \tau_X = \forall f.$$

En prenant $\underline{E} = Ens$ et $(L, \otimes, sup)$ un monoïde abélien complet on obtient un u. a. en posant: $V = L$, $O_X(*)(x) = o$,

$$c_X(x, x')(x'') = \begin{cases} e & \text{si } x'' = x \text{ ou } x'' = x' \\ o & \text{sinon} \end{cases}$$

(avec e = élément neutre de $\otimes$),

$$\psi_X(p)(p') = \sup_{x \in X} \{p(x) \otimes p'(x)\}, \quad \tau_X(p)(p') = \inf_{x \in X} \{p'(x) \oslash p(x)\},$$

(en désignant par $\oslash : L \times L^{op} \rightarrow L$ le bifoncteur adjoint à $\otimes : L \times L \rightarrow L$). La structure d'u. a. de Ens résulte, au choix, de ce que Ens est un topos ou de ce que $\{0, 1\} = 2$ est un monoïde abélien complet.

C'est en séparant le plus longtemps possible contexte relationnel et contexte opérationnel, et en évitant d'introduire le calcul des relations par une propriété universelle, qu'on conserve le maximum de souplesse, obtenant comme cas particuliers les topos *et* les ensembles flous ; ces deux cas peuvent d'ailleurs se mêler sous la forme abstraite suivante (principe de *changement de logique*): *étant donné dans un u. a.* $\underline{E}$ *un objet* L *muni d'une loi de monoïde abélien* k *et d'une loi de* P-*algèbre* α, *compatibles* ($\alpha . P(k) . D_{L,L} = k . (\alpha \times \alpha)$), *il est possible* (comme ci-dessus dans le cas de Ens) *de construire sur la même catégorie* $\underline{E}$ *une deuxième structure d'u. a. dont l'objet* V *soit maintenant* L. Par exemple, si $\underline{E}$ est un topos, A un objet de $\underline{E}$ et j une topologie de Grothendieck sur $\underline{E}$, on peut prendre $L = \Omega^A$ ou $L = \Omega_j$.

En général, *les* ψ_X *déterminent un morphisme* entre monades $\psi : \mathrm{P} \rightarrow V^{V^{(-)}}$ (qui dans le cas de Ens fait apparaitre les algèbres de Boole atomiques complètes comme des sup-treillis complets). Ces ψ et τ sont en fait familiers aux topologues vers 1950 et sont la clé de l'étude des relations continues, s.c.i. ou s.c.s : c'est la première «motivation» de cette approche de la logique de *Ens*, qui par ailleurs peut être vue comme une «radicalisation catégorique» du point de vue de Bourbaki-Ehresmann sur les foncteurs-types et les structures. Adaptant l'idée de «transformation naturelle structurale» de Blanc, on désigne, pour un u.a. $\underline{E}$, par $Type(\underline{E})$ la catégorie ayant pour objets les foncteurs de $\underline{E}$ vers $\underline{E}$ obtenus par composition entre eux des foncteurs $\ulcorner 1 \urcorner$, $(-)\times(.)$, F, et où les morphismes sont les transformations engendrées par O, c, ψ, r, Δ, $Proj$. Alors on prouve que *compl. proj. fin.* $Type(E)$ a précisément pour objets les foncteurs «structures» de la forme $\Sigma(X) = \{ s \in TX \mid A(s) \}$ où $T \in Type(\underline{E})_0$ et A formule du premier ordre typée au sens de Kleene-Houdebine-Blanc. Autrement dit, un u.a. est un système suffisamment riche pour que au moins toute structure usuelle du premier ordre y soit définissable comme solution d'équations à coefficients pris parmi 1, $\times$, F, O, c, ψ, r, Δ, $Proj$, ou encore, le langage du premier ordre typé dans un u.a. E n'est autre que celui dont *les formules sont les diagrammes finis dans* $Type(\underline{E})$ (et donc des $Type(\underline{E})$-formules particulières, au sens des T-formules du n° 13).

Mais cette possibilité n'exclut pas des approches plus directes comme, par exemple, l'introduction des compacts à la Linton-Manes, i.e. comme algèbres de la monade des ultrafiltres, laquelle a une description très facile dans un u.a.. Il est possible aussi de développer une arithmétique «externe» très différente des N.N.O., dans laquelle les cardinaux (finis ou non) sont remplacés par les *bornes*, i.e. les sous-foncteurs B de P tels que $B(0) = P(0)$, où 0 est initial. L'ensemble des bornes est donc

$$BOR = Ens^{Ens}(1, \mathrm{B}), \quad \text{avec} \quad \mathrm{B} = ker\,(\Omega^P \underset{vrai}{\overset{\Omega^{\ulcorner\emptyset\urcorner}}{\rightrightarrows}} \Omega)$$

dans le topos Ens^{Ens}. Avec $\underline{E} = Ens$, $V = L$, on obtient ainsi une «arithmétique L-floue» des L-faisceaux d'entiers (cf. (26), (33), (37)).

8. TOPOGÉNÈSES.

Une topogenèse (définition ci-après) pourrait s'appeler «topologie universelle», car, de même que l'on a

«algèbre universelle = mots + équations»,

on a

«topogenèse = figures + relations d'incidence»
(= éléments de $S^{-}(F,M)$ + *sat*), et une topogenèse est *une* présentation d'*une* notion d'espace : les formalisations connues de la notion d'espace sont des exemples de topogenèses (e.g., topologies en termes d'ouverts, topologies en termes de fermés (ce qui dans un topos quelconque n'est pas équivalent à la théorie avec les ouverts), en termes de voisinages, prétopologies de Choquet, quasi-topologies de Kowalsky, espaces à fermeture de Moore, locales et paratopologies d'Ehresmann, topologies de Grothendieck...).

En fait on peut obtenir les résultats ci-dessous dans un cadre plus général, en substituant dans la définition une cofibration quelconque q sur E^{op} à une cofibration de la forme q_M.

Soit M un inf-treillis complet dans un u.a. $\underline{E}$ et $|-| : S^{-}(F,M) \to \underline{E}$ le foncteur déduit de $q_M : (\underline{E}//M)^{op} \to \underline{E}^{op}$ par produit fibré le long de $F^{op} : \underline{E} \to \underline{E}^{op}$. On appelle *topogenèse de type* (F,M) la donnée d'une sous-catégorie coreflexive $\underline{T}$ de $S^{-}(F,M)$ au-dessus de $|-|$ ou encore un relèvement *sat* de F^{op} à travers le foncteur $Moore(M) \to \underline{E}$, où $Moore(M)$ a pour objets les (X,m) avec m fermeture de Moore sur M^X, et pour morphismes les $f : X \to X'$ de $\underline{E}$ tels que $m.M^f.m' = M^f.m'$.

Soit $RC_\lambda(\underline{T})$ *la catégorie des relations* λ*-continues entre* $\underline{T}$*-espaces*, dont les objets sont ceux de $\underline{T}$ et les morphismes les $r : X \to PX'$ tels que $b' \leq b.F(r).\lambda_{X'}$, avec $b : PX \to M$ et $b' : PX' \to M$ des T-espaces, et avec, pour tout X, $\lambda_X : PX \to P^2X$ donné. On prouve (24) que : $RC_\lambda(\underline{T})$ *est de la forme* $Kl\,\bar{\mathrm{P}}^\lambda$ avec $\bar{\mathrm{P}}^\lambda$ *une monade sur* $\underline{T}$, *relèvement de* P, *pourvu que* λ *soit une donnée de la forme* $\lambda_X = Q(\bar{1}_{PX})$ *où* Q *est une transposition sur* (P, I), par exemple, si $\lambda = \psi$ ou si $\lambda = \tau$.

Si $\underline{E}$ est un topos, il y a exactement autant de tels λ que d'ordres complets sur Ω, et pour *Ens* il y a seulement deux possibilités (ψ et τ), les notions de continuité correspondantes étant la semi-continuité inférieure et la semi-continuité supérieure.

Ce résultat exprime une classification de toutes les notions actuelles de «relations continues» par les structures «naturelles» de $\underline{T}$-espaces sur les objets PX ; même dans le cas particulier $\underline{E} = Ens$ et $\underline{T} = Top$, ce sont ces structures qui importent, et non pas seulement le fait élémentaire que les $PX = 2^X$ sont des treillis.

Comme corollaire assez particulier on obtient, en utilisant le Théorème de Vietoris-Frink-Choquet-Michael suivant lequel X est compact ssi 2^X (l'espace des parties de X muni de la «finite topology») est compact, que les relations continues entre espaces compacts sont les éléments de la catégorie de Kleisli d'une monade 2^X, et de plus les ψ_X et r_X sont continus - voir (18) page 65 - ce qui est la substance de l'article de Michael «Topology on spaces of subsets», *Trans. A. M. S.* 71 (1951) page 152. Voir aussi Choquet, «Convergences», *Ann. Inst. Fourier* XXIII (1947-48).

L'intérêt du calcul des relations continues se sent mieux si l'on rappelle que déjà Kuratowski voyait une donnée continue $X \to 2^Y$ comme une description de Y «découpé en tranches» ou «fibré» sur X. Après les calculs de relations continues et de fibrations, bien d'autres pratiques topologiques devraient être prises en compte comme formules de base pour analyser la *logique spatiale* (e.g. homotopies, recollements). Tout spécialement, grâce aux travaux sur les homotopy pullbacks (Brown, Mather, Nomura, Rutter, Spencer, Walker), je crois qu'un outil principal de cette logique devrait être le *calcul des carrés exacts* (en mon sens - cf. n° 12) *dans la 2-catégorie d'homotopie,* qui pourrait s'exprimer en termes *d'homotopies entre relations* (voir (4) et (5)).

Néanmoins je ne pense pas que les diverses catégories d'espaces actuelles donnent une modélisation satisfaisante de l'intuition spatiale; un traitement axiomatique non-ensembliste de l'idée d'espace reste à imaginer.

9. MACHINES ET TENSEURS.

E. Burroni et Arbib-Manes ont montré que dans l'étude du non-déterminisme en théorie des automates et grammaires formelles, il faut que le processus qui «donne du flou» soit en fait une monade; je montre (38) que ce processus doit même être une *monade monoïdale cohérente* P sur une catégorie monoïdale $K = (\underline{K}, \otimes)$, car on peut démontrer qu'alors *il est* *possible d'obtenir un bon produit tensoriel sur la catégorie* $\underline{K}^{\mathrm{P}}$ *des algèbres de* P (ce qui améliore des résultats de Kock, Keigher, Porst-Wischnewsky, et complète des résultats de Foltz-Lair, A. et C. Ehresmann), et comme conséquence il vient que *les critères d'observabilité forte pour les machines de Mealy non-déterministes, floues, stochastiques, etc.* (cf. Ehrig & als) *s'obtiennent pas lecture automatique dans* K^{P} *des critères déterministes valables dans* $\underline{K}$.

Pour $(K, \otimes, P)$ le calcul des relations cède la place au calcul des machines et à la bicatégorie des relations ternaires

$$X \xrightarrow{\{A;r\}} Y \quad (\text{avec } r: X \otimes A \to P\,Y)$$

(voir (38)). Après les travaux de Mac Lane, Kelly, Voreadou sur la cohérence, ou bien ceux de Hoehnke, Schreckenberger sur les dht-symmetric categories et la syntaxe de la catégorie *Par* des applications partielles entre ensembles, l'étude systématique de la *logique monoïdale* serait à developper. Le développement d'un fragment de *logique ensembliste* sous la forme d'u.a. était aussi un effort dans ce sens, un effort à poursuivre car actuellement pour les u.a. on ne connaît ni la bonne «sémantique» ni la théorie de la déduction; d'autres outils - en particulier les carrés exacts - devront être mis en œuvre (cf. paragraphes 15, 16).

10. FIBRATIONS.

A côté du concept de *profoncteur* (ou bimodule, ou distributeur), celui de *machine* de Mealy avec entrées et sorties des catégories (soit dans *CAT* un span

$$(\,\underline{X} \xleftarrow{\;f\;} \underline{Q} \xrightarrow{\;g\;} \underline{Y}\,)$$

avec f une cofibration scindée) est un candidat au statut de «relation» entre catégories localement petites (la composition s'effectuant par produits fibrés). On démontre (voir les détails dans (14)) que la *bicatégorie MAC des machines est isomorphe à Kl(Cat//(-))*, la bi-monade *Cat//(-)* sur *CAT* ayant sa multiplication définie par la construction de Grothendieck (les 2-catégories *Cat//*$\underline{X}$ étant les 2-catégories de petits diagrammes dans $\underline{X}$, soit les 2-catégories 2-comma de

$$1 \xrightarrow{\ulcorner \underline{X} \urcorner} CAT \hookleftarrow Cat \text{)}.$$

Dans (29) on fait l'étude systématique des 2-catégories $Cat//\underline{X} =_{\mathrm{def}} D\underline{X}$ avec, par exemple, de meilleures démonstrations du *théorème d'extension de Kan avec paramètres* ou extension de Kan dans la 2-catégorie $D\underline{X}$ (déjà énoncé dans (10), (11), (14) (1973) - et à comparer au théorème principal de la thèse de Celeyrette (1975)), utilisé depuis par Rosicky (pour des relèvements de monades) et par Wischnewsky (pour caractériser les foncteurs semi-topologiques). On y montre aussi le *caractère co-algébrique de la théorie des fibrations* (via les catégories de diagrammes pointés), mais surtout, on y démontre que, pour tout X, *la 2-catégorie $D\underline{X}$ est la lax-cocomplétion forte de $\underline{X}$* (une lax-colimite forte étant une lax-colimite qui de plus a la propriété d'unique extension des modifications). *Ces résultats se localisent le long de $U : \underline{M} \to Cat$, si U est stable par construction de Grothendieck*, et offrent alors des liens avec les clubs de Kelly et l'étude de la cohérence ; on pose

$$U^*(D\underline{X} \to Cat) =: D_U\underline{X} \text{ ou } \underline{M}//X$$

s'il n'y a pas d'ambiguité. Par exemple, si $ch: Graphes \to Cat$ est le foncteur «chemins» associant à un graphe G la catégorie $ch\,G$ libre sur G, la catégorie $D_{ch}\underline{X}$ ou $Graphes//\underline{X}$ est la *complétion graphique de $\underline{X}$*.

Par ailleurs j'ai montré ((9), (10), (14)) que *les machines peuvent remplacer les esquisses dans la description des structures* (comme «théorie analytique des modèles»), ce qui milite en faveur des 2-esquisses et pseudo-théories, si l'on tient compte du théorème suivant (30) : *en fait les plongements*

$$D\underline{X} \to Cat^{\underline{X}^{op}} : p \mapsto (-)\downarrow p$$

induisent un plongement de MAC dans la bicatégorie des 2-profoncteurs, laquelle contient évidemment la bicatégorie des profoncteurs. Tenant compte des inclusions $Cat^{\underline{X}^{op}} \hookrightarrow Fib(X)$, on obtient ensuite qu'un concept unifié de relation entre catégories est celui de *pseudo-module* (= pseudo-foncteur $\underline{X} \to Fib(\underline{Y})$). On montre enfin que *$Fib(\underline{X})$ est une pseudo-complétion de $\underline{X}$*.

11. PRO-UNIVERS.

Les catégories régulières ou les pré-topos ne sont pas des exemples d'u. a., mais sont seulement des «*pro-univers*», la monade P y étant remplacée par une pro-monade. On pourrait donc «pro-ifier» la théorie des u. a. pour couvrir ces exemples ; mais en fait une pro-monade involutive sur $\underline{E}$ revient simplement à un foncteur $L: \underline{E} \to \underline{R}$ bijectif sur les objets et une involution $I: \underline{R} \to \underline{R}^{op}$. Depuis la thèse de Riguet et à travers les travaux de Lambek, Mac Lane, Puppe, Brinkmann, Levy-Bruhl, Burgin, Calenko, Parodi, Conte, Grandis, l'étude des plongements d'une catégorie dans une catégorie à involution s'est bien développée. La présentation des u. a. *à partir d'une catégorie involutive* avec le concept de *catégorie relationnelle* ((18), page 51) est une contribution à ce sujet.

Il importe d'observer ici que dans la situation très générale où l'on dispose seulement sur $\underline{E}$ de deux foncteurs $(-): \underline{E} \to \underline{R}$ et $(-)^{\circ}: \underline{E} \to \underline{R}^{op}$ ayant mêmes valeurs sur les objets (comme dans le cas des pro-univers ci-dessus, dans le cas de *Cat*, et aussi comme dans la théorie des Mackey-foncteurs) on peut déjà, et nous allons en voir l'intérêt ci-dessous, définir les carrés exacts comme les carrés

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "T"] \arrow[d, "S"'] & \cdot \arrow[d, "V"] \\ \cdot \arrow[r, "U"'] & \cdot \end{tikzcd}$$

dans $\underline{E}$ tels que, dans $\underline{R}$, on ait $S.T^{\circ} = U^{\circ}.V$.

12. LE RÔLE CENTRAL DES CARRÉS EXACTS.

Je viens de montrer que les logiques ensemblistes, spatiales, catégoriques, comportent comme fragments importants des calculs de relations vues comme morphismes de catégories de Kleisli de monades (ou bi-monades, ou pro-monades). Je vais raffiner l'étude en soulignant quelques pratiques «sauvages», c'est-à-dire en désaccord apparent avec cette analyse.

C'est en cherchant - dans la ligne du n° 5 - les structures naturelles de catégories sur l'ensemble des sous-catégories d'une catégorie $\underline{X}$ que j'ai construit $Cat//\underline{X}$ et la bi-monade $Cat//(-)$ sur CAT. Par contre, on ne sait pas construire naturellement un groupe des sous-groupes d'un groupe donné, et dans *Gr* ou *Ab* les relations-spans $(\underline{X} \leftarrow \underline{R} \rightarrow \underline{Y})$ ne sont pas représentables par des morphismes $X \rightarrow PY$ bien que cela soit possible dans $CAT \supset Gr \supset Ab$. Et pourtant le calcul des relations additives existe, les relations se composant par produits fibrés, comme dans le cas de *Ens*. Par contre, dans *Cat* la composition des pro-foncteurs *ne se fait pas* par produits fibrés des bifibrations associées. Mais, *dans tous les cas (Ens, Ab, Gr, Cat), la composition peut se décrire en utilisant des carrés exacts* (qui sont bien connus dans *Ab* ; travaux de Lambek, Mac Lane, Pupe, Brinkmann, Hilton).

Dans une 2-catégorie représentable C on appelle *carré exact* (Guitart - Van den Bril) une figure

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "T"] \arrow[d, "S"'] & Y \arrow[d, "V"] \\ X \arrow[r, "U"'] \arrow[ur, phantom, "\nearrow\phi"] & B \end{tikzcd}$$

telle qu'en notant

$$\begin{tikzcd} U{\downarrow}V \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, "d_0"'] & Y \arrow[d, "V"] \\ X \arrow[r, "U"'] \arrow[ur, phantom, "\nearrow a"] & B \end{tikzcd}$$

le carré comma de U et V, et $\bar{\phi} : A \rightarrow U{\downarrow}V$ l'unique morphisme tel que $a.\bar{\phi} = \phi$, on ait, pour tous Z, $P : X \rightarrow Z$, $Q : Y \rightarrow Z$: l'application

$$\Sigma\bar{\phi} : C(P.d_0, Q.d_1) \rightarrow C(P.S, Q.T) : \beta \mapsto \beta.\bar{\phi}$$

est bijective.

J'ai introduit ce concept dans le cas particulier de *Cat* dans (42) en 1978 (voir aussi (28), (34), (43)), en montrant que dans ce cas la condition d'exactitude équivaut à

$$S \otimes T^{\circ} \underset{\approx}{\overset{\sim}{\Leftarrow}} U^{\circ} \otimes V, \text{ avec } T =: [.;T-] \dashv [T.,-] =: T^{\circ},$$

dans les pro-foncteurs, avec $\otimes$ la multiplication des pro-foncteurs. D'où les exemples cités ci-après. Il existe aussi (42) une caractérisation «symétrique» en terme de carrés «multiplicatifs», une caractérisation en terme d'extensions de Kan ponctuelles, et des critères «locaux» comme : ϕ est exact ssi, pour tout D et $x: \underline{D} \to \underline{X}$, ϕ *est exact en* x, i.e. le carré composé (noté $x|\phi$)

$$\begin{tikzcd}
x{\downarrow}\underline{S} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{comma}\nearrow"] & \underline{A} \arrow[r, "T"] \arrow[d, "S"'] \arrow[dr, phantom, "\phi\nearrow"] & \underline{Y} \arrow[d, "V"] \\
\underline{D} \arrow[r, "x"'] & \underline{X} \arrow[r, "U"'] & \underline{B}
\end{tikzcd}$$

est exact.

Si les relations ont bien un air de famille avec la logique (des prédicats), l'aspect logique des carrés exacts et plus spécialement des *suites exactes* est moins traditionnel (voir toutefois la preuve «additive» du théorème du zig-zag (d'Isbell) par B. Mitchell); pourtant c'est bien dans *ce* langage que l'étude de *Ab* s'est développée au mieux. La philosophie des paragraphes 1 et 2 nous incite à considérer que dans la *logique abélienne* il faut prendre comme formules les 0-suites. Alors, par exemple, le Lemme 3×3 apparaît comme un véritable principe de déduction (au sens du n° 14).

Ainsi le concept de carré exact contient d'abord, dans le cas de *Ab* celui de *suite exacte* (Eilenberg-Steenrod). Si, ensuite, toujours fidèle à l'esprit des paragraphes 1 et 2, nous cherchons la nature de la logique catégorique en cherchant *ce qui a été fait dans Cat*, nous obtenons : les calculs de diagrammes, limites, fibrations et pro-foncteurs (Grothendieck), les calculs de foncteurs pleinement fidèles, d'adjonctions (Kan), d'extensions de Kan ponctuelles (Kelly), de carrés commas et carrés co-commas (Lawvere), les limites absolues (Paré). Tous ces ingrédients devraient être intégrés à la logique catégorique. Or il se trouve (42) qu'*ils dérivent tous trivialement du seul concept de carré exact dans la 2-catégorie Cat.*

Dans (42) j'explique comment *dans une 2-catégorie quelconque le calcul des relations est possible à l'aide des carrés exacts, et ceci de façon que dans Ab on retrouve les relations additives, et dans Cat les pro-foncteurs.*

En fait, comme je le montrerai ailleurs, ceci, joint à la fin du n° 11, permet de voir que, si A est une 2-catégorie, il y a une adjonction de type syntaxe-sémantique entre les données du genre E ⊂ Quintette(A) *(théorie d'exactitude)* et les foncteurs bijectifs sur les objets de A vers une catégorie à involution *(théorie de relations)*.

Dans la thèse de mon étudiant Van den Bril - résumée dans «Carrés exacts de Hilton dans des contextes non abéliens» (*Ann. sc. Math. Québec* IV-2, 1980) - la technique des carrés exacts est étendue aux 2-catégories arbitraires (non nécessairement représentables), et on trouve les caractérisations des carrés exacts dans *Ens* et dans *Gr*.

Bourn et Cordier ont montré (*CTGD* XXI-2, 1980) que ces carrés jouent aussi un rôle crucial dans la «shape theory» (Borsuk, Mardesič, Frei, Deleanu-Hilton, Porter), alors que dans (42) j'ai seulement montré - via la définition des *foncteurs opaques* (généralisant les foncteurs riches de Hilton) - leur rôle dans la pro-localisation, et, sans faire le lien, leur *caractérisation comme carrés préservant les extensions de Kan ponctuelles* (et ce dans une 2-catégorie munie d'une Yoneda-structure de Street-Walters).

13. ESQUISSES CONCRÈTES ET ESQUISSES ABSTRAITES.

Ce qui précède - et en particulier les paragraphes 3, 10 et 12 - précise l'idée de ce que doivent être les formules dans la logique de *Cat*. Je vais esquisser ci-après (n° 14) les premiers principes déductifs de cette logique; comme en fait la clé de l'idée de validité sera la notion de carré exact, ces principes sont adaptables à toutes les logiques étudiées ci-avant puisque, à travers les calculs de relations ces logiques s'incorporent une définition des carrés exacts.

Soit $T = (\underline{T}, P, I)$ un objet de la 2-catégorie *ESQ* des esquisses mixtes (ou catégories munies de cônes projectifs *et* de cônes inductifs). On appelle T-*formule* ou *formule interne à* T une figure dans *CAT* de la forme

$$\begin{tikzcd} \underline{K} \arrow[rr, "M"] \arrow[dr, "C"'] & \arrow[d, phantom, "\overset{\frown}{\phi}"] & \underline{X} \arrow[dl, "V"] \\ & (Ens^{\underline{T}})^{op} & \end{tikzcd}$$

que l'on voit comme une famille $(\phi^X)_{X \in \underline{X}_0}$ de cônes projectifs dans $Ens^{\underline{T}}$ de la forme

$$\phi^X = (\phi^X_{K,x} : V(X) \xrightarrow{V^{op}(x)} VM(K) \xrightarrow{\phi^{op}_K} C(K))_{(K, M(K) \xrightarrow{x} X) \in (M \downarrow X)_0} .$$

L'idée essentielle est que pour un modèle $R: \mathrm{T} \to Ens$ de T, la validité de ϕ équivaut à celle de tous les cônes ϕ^X, et que la validité de ϕ^X «dépend» de $Hom_{Ens^{\mathrm{T}}}(V(X), R)$, de sorte que intuitivement ϕ^X est une formule à une variable quantifiée «libre-élément» de $V(X)$. Sous cette forme on peut exprimer les quantifications universelles «bornées», puisque l'on peut imposer à la variable de ϕ^X de «voyager» dans un préfaisceau fixé $V(X): \underline{T} \to Ens$ (autrement dit l'ensemble des variables de ϕ^X est structuré du genre T). Précisément, on dit que ϕ est *valide dans* $R: \mathrm{T} \to Ens$, et on écrit $R \models \phi$, ssi le foncteur $(Ens^{\mathrm{T}})^{op}(R, -)$ (= ext. de Kan proj. de R le long de $Yoneda: \underline{T} \to (Ens^{\underline{T}})^{op}$) transforme ϕ en une extension de Kan inductive. On démontre alors (Guitart-Lair) que *toute formule du premier ordre sur un* T-*modèle équivaut à une* T-*formule* (ce qui éclaire le théorème de Łos à la Andreka-Nemeti-Sain, ainsi que les multi-adjoints de Diers), *que l'on peut construire explicitement une esquisse* $\mathrm{T}(\phi)$ *et* $u_\phi: \mathrm{T} \to \mathrm{T}(\phi)$ *tels que* $R \models \phi$ *ssi* R *s'étend le long de* u_ϕ *en un* R' *tel que* $R \approx R'.u_\phi$ (de sorte que $mod(\mathrm{T})/\phi \approx mod(\mathrm{T}(\phi))$), et enfin *que* $R \models \phi$ *ssi* ϕ *est exact en* $\ulcorner R \urcorner$ (cf. n° 12).

Par exemple, on sait que, si T = théorie des anneaux commutatifs, si $K = \{1, 2\}$, si $X = \{*\}$ et si ϕ^* est le cône dans Ann:

$$\begin{array}{lcl} C_1 = Z[X,Y]/XY-1 & \nwarrow & \\ & & Z[X] = V(*) \\ C_2 = Z[X]/X & \swarrow & \end{array}$$

alors ϕ est valide dans un anneau A ssi A est un corps. Mais par ailleurs on sait qu'un corps est une réalisation de l'esquisse

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \xrightarrow{0} & 1 \amalg K^* \approx K & \longleftarrow & K \times K \\ & & \uparrow & & \\ & & K^* & & \end{array} .$$

En fait il y a là un phénomène tout à fait général: il est équivalent pour une catégorie $\underline{X}$ d'être une catégorie de réalisations d'une esquisse mixte (nous dirons *esquisse abstraite*) ou d'être une catégorie de modèles de (T, ϕ) (i.e. catégorie des foncteurs de $\underline{T}$ vers *Ens* satisfaisant la T-formule ϕ). Nous dirons que *(T, ϕ) est une esquisse concrète.* Entre esquisses abstraites et esquisses concrètes il y a une adjonction du type syntaxe - sémantique.

En fait avec Lair j'ai montré que les catégories multireprésentables de Diers sont *exactement* les catégories de réalisations d'esquisses mixtes où les cônes inductifs distingués sont des sommes. Mais c'est en sortant du cas discret (sommes) étudié par Diers que l'on arrive à tout le premier ordre, et la classification des T-formules (e.g. mise sous forme normale) est alors essentiellement le problème des commutations de limites dans Ens^{T}, ce qui revient à chercher si certains carrés sont exacts.

Si $\mathrm{T} = (\underline{T}, P, \emptyset)$ est une esquisse projective, alors l'inclusion $mod(\mathrm{T}) \hookrightarrow Ens^{\underline{T}}$ a un adjoint (c'est le théorème connu du faisceau associé). Que reste-t-il de ce théorème quand T est mixte ? Lair et moi avons obtenu un *théorème du faisceau associé dans le cas mixte* qui sera publié autre part (*Diagrammes* 4, 1980).

Observons enfin que, suivant la fin du n° 10, on a

$$D((Ens^{\underline{T}})^{op}) \subset Cofib(Cofib(\underline{T})),$$

et que nos T-formules sont donc des morphismes dans cette dernière catégorie.

14. LA DÉDUCTION DANS LA LOGIQUE CATÉGORIQUE.

Venons-en aux *règles de déduction.* Pour les exprimer un carré général $\phi : U.S \to V.T$ est considéré comme une dérivation syntaxique de V à partir de S, et noté

$$\phi : S \xrightarrow[U]{T} V, \quad \text{ou } S \xrightarrow{(U,T;\phi)} V \quad \text{ou simplement } S \to V ;$$

si de plus ϕ est exact, la flèche $\to$ est remplacée par $\xrightarrow[\text{ex}]{}$.

1° *Substitution exacte.* Soit $\phi : C \to V.M$ une T_0-formule, $\eta : S \xrightarrow[M]{T} S'$ un carré au-dessus de M, R un modèle de T_0. On a :

$$sub.ex. \quad \frac{R \models \phi, \ \ \eta : S \xrightarrow[M]{T}{}_{\text{ex}} S'}{R \models V\eta . \phi S} .$$

Cette règle exprime que la signification de ϕ est inchangée par modification «exacte» en $V.S'$ de son «espace de variable» V. Par exemple on retrouve comme cas particulier le fait que si R transforme un cône inductif K en cône limite, il transforme aussi en cône limite toute partie finale de K. La règle générale résulte aisément du fait que dans *Cat* les carrés exacts se composent.

2° *Modélisation et syntactisation.* Soit $\phi : S \xrightarrow[U]{T} V$ un carré dans la catégorie des esquisses projectives et $mod\,\phi : mod(V) \xrightarrow[mod(T)]{mod(U)} mod(S)$ le carré associé dans *Cat* (avec $mod(V) = Ens^V$, etc.). On a

$$mod. \qquad \frac{S \xrightarrow[\text{ex}]{} V}{mod(V) \xrightarrow[\text{ex}]{} mod(S)} \quad ,$$

$$syn. \qquad \frac{mod(V) \xrightarrow[\text{ex}]{} mod(S)}{S \xrightarrow[\text{ex}]{} V} \quad .$$

Ces régles résultent d'un calcul de profoncteurs dans *Cat*. Dans l'article de Van den Bril dans ce Colloque, ce résultat est aussi obtenu, dans le cadre plus abstrait des Yoneda-structures. Le couple (mod, syn) est une sorte de principe de contraposition.

3° *Extension exacte.* Soit ϕ une S_0-formule et ψ une T_0-formule ; soit u_ϕ et u_ψ les morphismes de ESQ qui représentent ϕ et ψ (voir ci-avant). Pour R modèle de S_0 on a

$$ex.ex. \qquad \frac{R \models \phi \wedge \psi : u_\phi \xrightarrow[N \ \text{ex}]{Q} u_\psi}{Ext.\ ind._Q\, R \models \psi} \quad .$$

En particulier, si $S_0 = T_0$, $Q = 1_{S_0}$, pour que $\phi \Rightarrow \psi$ (sémantiquement, i.e. : $\forall R,\ R \models \phi \Rightarrow R \models \psi$), il suffit qu'il existe un λ exact de u_ϕ vers u_ψ. On démontre cette règle, et on montre qu'*elle est assez puissante pour induire immédiatement les théorèmes d'extension de Kan de théories cohomologiques et K-théories de Mac Donald et Deleanu-Hilton.* Puisque *ex.ex.* est une espèce de *modus ponens*, cela fait ressortir la puissance logique des méthodes cohomologiques. (Voir aussi la fin du n° 17.)

Puisque $R \models \phi$ se dit en terme d'exactitude, les trois exemples ci-avant de règles de déduction sont en fait simplement *des règles de manipulations et formations des carrés exacts*; l'ensemble de ces règles dans une 2-catégorie quelconque X - à la place de *Cat* ou *ESQ* - constitue ce que j'appellerai la *logique exacte* dans X (pour X = *Ab*, c'est la base de l'algèbre homologique, pour X = *Cat*, c'est (cf. nº 12) la théorie «élémentaire» des catégories.

15. LISSAGE DE LA RÉALITÉ.

Pour aller plus avant, il me faut d'abord revenir sur le nº 2 et la dualité Réalisme/Rationalisme sous la forme plus psychologique *doute/dogme*. Le *réalisme local* consiste en ceci que dans l'étude d'une théorie ou d'une catégorie C particulière, il faut se souvenir que C n'a pas d'intérêt propre, et ne nous concerne que parce qu'elle est censée donner une modélisation acceptable d'un certain aspect de la réalité. Les problèmes dans C doivent donc être critiqués d'abord sous l'angle de leur «réalisme»; il faut en particulier donner pour ce qu'elles sont les ratiocinations sans intérêt objectif, et tenter d'être *intuitiviste*, de «calculer» au niveau des intuitions, d'exprimer les questions «hors» du formalisme. Il est donc question de regarder de l'extérieur chaque théorie avec la plus grande suspicion, mais en même temps cette suspicion doit être locale, délimitée, en ce sens que chaque individu doit, quand il discerne suffisamment de «réel», cesser de douter délibérément et commencer à construire un dogme. A cet effet, le principe de *lissage* est essentiel.

Comme exemple, rappelons que l'étude d'un ensemble de transformations T se fait mieux au sein du groupe $\hat{T}$ engendré par T, et - la géométrie de T consistant en l'étude des covariants entre $\hat{T}$-actions - il est encore plus efficace de se placer dans le topos $Ens^{\hat{T}}$. De même, si le réalisme nous impose l'étude d'un processus concret sous la forme d'une mauvaise catégorie C à la logique peu claire, il est bon (cf. nº 4) de chercher à se placer dans un «monde meilleur» engendré par C, comme $Ens^{C^{op}}$, $Fais_J(C)$ ou encore $Ens^{Kl\mathrm{P}}$ si P est une monade intervenant dans la logique de C (e.g. si C est un u.a. - cf. nº 7) (appliqué à l'étude de la logique de *Ens* représentée par le calcul des relations, ce principe conduit à la catégorie des treillis complets (sous-catégorie de Ens^{Rel})); si D est l'un de ces topos de Grothendieck, on y dispose de sa logique intuitionniste et, c'est essentiel, on y dispose en plus *d'opérateurs supplémentaires venant de ceux décrivant sur C les pratiques « concrètes » que C modélise.* L'efficacité de cette méthode vient du point crucial que dans D, comme dans tout topos, on peut interpréter toutes les théories mathématiques, et en particulier la théorie «décrite» par C, et cette nouvelle lecture «non-standard» de la problématique initiale est plus régulière, certains paradoxes impossibles à résoudre dans C se dénouant dans D. Après Grothendieck pour la géométrie algébrique, Makkai-Reyes, Coste et d'autres pour les théories cohérentes, cette méthode est utilisée pour le calcul différentiel (Lawvere, Kock, Reyes, Dubuc). Son emploi serait certainement utile pour d'autres théories, comme la théorie du potentiel et le mouvement brownien, avec C = catégorie des espaces tribués, P = monade stochastique (Linton, Riguet, Swirszcz, Giry)- de sorte que $Kl\,\mathrm{P}$ soit la catégorie des probabilités de transition - et avec $D = Ens^{(Kl\,\mathrm{P})^{op}}$. On pourra même l'employer pour la théorie des univers elle-même.

Le lissage étend donc le principe (de Herbrand -Henkin) de construire des modèles ayant pour points des formules, et est une forme plus élaborée de l'adjonction formelle d'«insensés» (nº 4), qui souligne les paradoxes de C et, néanmoins, ne gomme pas les véritables problèmes.

16. LOGIQUE EXACTE FIBRÉE.

J'ai indiqué au nº 4 ma défiance vis-à-vis du monde ensembliste. En fait, puisqu'il utilise $Ens^{(-)}$, le lissage du nº 15 reste ensembliste, et ne peut dénouer totalement, dans l'étude d'une catégorie C, les paradoxes résultant de la vision ensembliste des choses. Dans la pratique mathématique, les catégories existent «plus» que les ensembles, de sorte que je préfère retenir l'idée d'un «lissage catégorique», plus vaste, consistant à substituer à C l'une des 2-catégories

$$Cat(C),\quad Cat(Ens^{C^{op}}) = Cat^{C^{op}},\quad Cat//C = DC$$

ou, contenant toutes celles-ci, $Fib(C)$ (ou, encore plus grande, CAT/C etc.). Mais $Fib(C)$ n'est pas un topos, on n'y dispose pas de la logique intuitionniste, et on ne peut espérer comprendre la logique de C à travers celle de $Fib(C)$ que si celle-ci est simple et avec des principes déductifs clairs. Or nous disposons justement d'une telle logique : la logique exacte dans $Fib(C)$, et dans ses sous-2-catégories de *champs* $Fib_J(C)$, logique que nous appellerons en bref *la logique exacte fibrée sur* C. Il faut insister sur ce point que, ainsi décrite suivant les principes du n° 14, la l.e.f. est bien équipée de principes déductifs.

Les résultats sur DC (cf. (29) et ici le n° 10) et le théorème d'extension de Kan avec paramètres (n° 10) sont en fait des résultats *dans cette logique.*

Suivant la fin du n° 10, *la l.e.f. englobe la logique faisceautique ou logique du local* (i.e. la logique exacte de $Ens^{C^{op}}$ qui, via le calcul des relations, équivaut à la logique intuitionniste de ce topos) *et la logique diagrammatique ou logique des figures graphiques* (i.e. la logique exacte de DC); et, généralisant les préfaisceaux et les cônes *les fibrations y sont vues comme des formules-concepts dans* C.

17. DIALECTIQUE, DOGME PROVISOIRE, MÉTALOGIQUE, FORMULES ET HOMOLOGIES.

Que j'ai voulu d'abord exposer ici mes propres résultats et conceptions justifie le ton «engagé» de ce texte et son caractère non-exhaustif. Le non-spécialiste pourra s'informer aussi à d'autres sources sur la «vraie» nature de la théorie des catégories. (Il serait très utile que, sans «technique», d'autres catégoriciens écrivent sur leurs motivations.) En guise de conclusions, je voudrais proposer un guide pour l'action ou «dogme provisoire» qui me semble se dégager de l'exploration ci-avant.

La question du rapport entre catégories et logique n'est pas du tout, comme on a pu le dire, de «prouver» que les catégories peuvent être utiles en logique mathématique classique (e.g. pour les problèmes «fondationnels», en «théorie de la preuve», en «théorie des modèles». Plutôt il s'agit de constater que la théorie des catégories constitue actuellement un *lan-*

gage naturel peu normatif apte à décrire et analyser le travail mathématique contemporain ; *c'est donc de fait, en soi-même, une logique* (au sens plein du mot, comme précisé aux paragraphes 1 et 2). C'est pourquoi, comme le dit Choquet, «un mariage de raison entre catégories et logique mathématique classique ne pourra être que profitable aux mathématiques». Il reste à préciser le contrat de ce mariage.

Comme la dialectique (et toute logique assez puissante) la théorie des catégories offre la particularité de s'appliquer à soi-même, et de saisir son propre développement. De plus dans son formalisme actuel on peut déceler des résonnances «dialectiques» : ainsi un carré exact (n° 12) ou plus particulièrement une adjonction (e. g. une adjonction sémantique/ syntaxe), peut être vu comme la «trace formelle rationnelle» de la logique dialectique d'une contradiction-en-mouvement (dont par contre les monades seraient des «traces formelles empiriques»).

Mais surtout, la logique catégorique a pour centre le fait que la *compréhension mathématique se situe exactement au moment où l'on transforme du singulier en de l'universel* (au sens précisé au n° 6), et à ce moment-là l'aspect esthétique véritable (à ne pas identifier au simplisme - cf. n° 1) joue un rôle décisif. C'est en fait cette idée le vrai moteur de l'activité des catégoriciens.

Concrètement, dans l'étude de la logique d'une catégorie C, cette idée, exprimée par Leray, que «le progrès scientifique vient peut-être de notre faculté d'oublier les connaissances superflues» est mise en œuvre dans *l'oubli organisé* de ce que l'on sait des objets de C, dans la mise en place de processus d'extériorisation de ce qui fut donné d'abord de l'intérieur.

Les résultats sur les monades involutives et dualités, univers algébriques, topogenèses, machines non-déterministes et tenseurs, machines dans *Cat*, lax-cocomplétions, extensions de Kan avec paramètres, carrés exacts, foncteurs opaques, formules internes et déduction catégorique, etc., *esquissés dans les paragraphes précédents,* sont tous des outils pour l'étude de logique des catégories, et *convergent vers cette idée que la logique dans une catégorie* C *est l'affaire essentiellement de deux techniques de* *base de l'algèbre homologique: constructions standards et exactitudes;* mais il ne s'agit plus de les mettre en œuvre dans Ab ou une catégorie abélienne, mais dans des 2-catégories «régularisantes» de C (et dont les objets sont interprétés comme formules (universelles) dans C), à savoir dans C elle-même, dans $Ens^{C^{op}}$, DC, $Fam\, C$, $Fib(C)$, etc.. De ce point de vue :

1° L'*exactitude* (carrés exacts, logiques exactes) est considérée comme théorie des règles de validité et de manipulations des *formules universelles* (dans $C, \dots, Fib(C)$). On a vu que cela «contient» la logique usuelle de la déduction entre formules du premier ordre. Ici on a fixé en fait comme hypothèse $C \in Cat_0$: si, connaissant mieux C, on sait préciser que, par exemple, $C \in Cat.monoïdales_0$, alors l'exactitude monoïdale (i.e. dans la 2-catégorie $Fib.mon.\, C$) entre en jeu. Donc la nature de l'universel dans C n'est pas absolue, et n'est fixée que par notre ignorance des singularités de C.

2° Pour chaque monade ou *construction standard* P *sur* C - ou sur $Ens^{C^{op}}, \dots, Fib(C)$ - PX est considéré comme *espace «singulier» des formules sur* X (dans C - ou $Ens^{C^{op}}, \dots, Fib(C)$) et la structure déductive de PX est variable (e.g. treillis, algèbre de Heyting, 2-catégorie, extenseur (voir (41)), objet déductif de Lambek-Scott, déducteur, etc.), mais dérive du fait que PX est une P-algèbre et de la structure globale de P (e.g. topos, dogma, monade involutive, univers algébrique, etc.). La structure de P est à découvrir dans chaque cas concret; ainsi si $C = Ens$ et $P = 2^{(-)}$, ou si $C = Cat$ et $P = D$, on dispose de vues diverses (e.g. n° 7, n° 10) de la structure de P, et par contre pour $C = Cat$ et $P = Fib(-)$, l'état actuel des connaissances est insuffisant.

Ainsi 1 correspond aux pratiques «catégoriques» régulières réalisées a posteriori dans C, de l'extérieur, et 2 incorpore les pratiques «vécues» à la main dans C, et décrites de l'intérieur de C, sur ses objets.

En résumé, pour attaquer un problème réel, on obtient le *dogme* suivant: commencer par suspecter le cadre formel qui est en général fourni gratuitement avec le problème lui-même, et re-modéliser le problème «naïvement» par une catégorie C. Ensuite, tenter de lisser C en construisant une 2-catégorie *Formules(C)* ayant pour objets des «formules-concepts» dans C (actuellement $Fib(C)$ joue assez bien ce rôle). Enfin, développer l'algèbre homologique (carrés exacts, monades, tenseurs, involutions, dualités, etc.) dans, disons, $Fib(C)$, ce qui conduit à travailler à des niveaux plus élevés (dans les $Fib^n(C)$, $n \geq 1$). Cela permet de contrôler plus précisément dans quelle catégorie $\mathcal{C}'$ «vit» en fait le modèle $C \in Cat_0$, et l'on peut reprendre la «résolution» de C par des constructions standards $P : \mathcal{C}' \to Cat(\mathcal{C}')$, d'où une nouvelle approximation $\mathcal{C}''$ de là où «vit» C, etc. La solution du problème «est» la suite $(Cat, \mathcal{C}'\ \mathcal{C}''\ \mathcal{C}''', \ldots)$.

L'application de ce dogme aux situations spéciales

$$C = Ens \ (\text{n}^\text{o}\, 7), \quad C = Top \ (\text{n}^\text{o}\, 8), \quad C = K^{\mathrm{P}} \ (\text{n}^\text{o}\, 9), \quad C = Cat \ (\text{n}^\text{o}\, 10)$$

d'où ce dogme est issu devrait donc logiquement aboutir à mieux compren-prendre et à raffiner l'étude.

Cette perception «logique» de l'étude des constructions standards et de l'exactitude dans les 2-catégories $Fib(C)$ incite à *développer la théorie des 2-catégories comme une métalogique* (i.e. - en reprenant les termes des paragraphes 1 et 2 - comme une étude des métapratiques, les métapratiques étant les pratiques dans le champ de la logique (vue elle-même comme étude des pratiques mathématiques en général)). Dans cet esprit on pensera à une 2-catégorie abstraite X comme à la «logique» d'une catégorie «réaliste» C, en voyant les objets, 1-morphismes, 2-morphismes et carrés, carrés exacts dans X, et les monades sur X comme - respectivement - des concepts, formules (universelles), dérivations de formules, démonstrations de formules, métaformules (singulières).

Mais ceci est déjà une autre histoire, et pour revenir au but annoncé au nº 0, je terminerai plutôt, à la lumière de ce qui précède, par une précision sur le lien entre formules et homologies. D'abord au lieu de se diriger vers la métalogique on peut penser au contraire au problème de «plonger» l'algèbre homologique généralisée présentée ici (théorie des carrés exacts et monades dans les 2-catégories $Fib(C)$) dans l'algèbre homologique classique (dans Ab et les catégories abéliennes). Ceci est suggéré par le théorème (Guitart-Van den Bril) que *le foncteur Matrice: Ab-CAT* $\to$ *CAT préserve et reflète les carrés exacts*; combiné à l'usage du foncteur *Libre: CAT* $\to$ *Ab-CAT*, cela montre que les calculs de zig-zags et de familles d'objets peuvent toujours être transformés en des calculs de produits tensoriels de groupes abéliens et de matrices.

Ensuite, on sait que H. Weyl voulait «... attacher à chaque édifice physique un système propre de grandeurs, une algèbre non commutative au sens mathématique du terme et dont les éléments sont formés par les grandeurs physiques elles-mêmes». Il précisait par là l'idée de «caractéristique universelle» de Leibniz. Dans la logique des valeurs cette idée s'est développée dans le calcul des logiques modales et *logiques multivalentes*. Mais dans la pratique des mathématiciens les mêmes idées sur la mesure ou la valuation des énoncés se sont développées de manière finalement beaucoup plus audacieuse: ainsi la courbure mesure le défaut de platitude (et prend ses valeurs dans R), le groupe d'homotopie mesure le défaut de simple connexité (et prend ses valeurs dans *Ab*), le spectre d'un anneau mesure son défaut de localité (et prend ses valeurs dans *Top*), l'homologie d'une 0-suite mesure son défaut d'exactitude (et prend ses valeurs dans *Ab*), etc. Tous ces calculs de défauts sont liés dans la théorie des *cohomologies généralisées*, qui se rapproche comme suit du calcul des formules: Une T-*caractéristique additive* est un foncteur $V: mod(\mathrm{T}) \to Ab\text{-}CAT$ (cf. la logique de *CAT*, n° 10), et pensée comme formule-prédicat sur $mod(\mathrm{T})$. De ce point de vue les extensions de Kan de théories cohomologiques (n° 14) sont des méta-quantifications.

Si ϕ est une T-formule (n° 13) et $R \in mod(\mathrm{T})$ on définit la valeur de «$R \models \phi$» comme, avec la notation $(x \mid \phi)$ du n° 12, la T-caractéristique

$$V^{\phi}(R) = Homologie(\ulcorner R \urcorner \phi).$$

(j'exposerai ailleurs comment en liaison avec les *cubes exacts* on peut définir et calculer l'homologie d'un carré de foncteurs). Etant donnée une T-caractéristique additive et un foncteur semi-exact $K: Ab\text{-}CAT \to Ab$ le composé $mod(\mathrm{T}) \xrightarrow{V^{\phi}} Ab\text{-}CAT \xrightarrow{K} Ab$ calcule une obstruction à la validité de ϕ.

U. E. R. de Mathématiques, Université Paris 7
2 Place Jussieu, 75221 PARIS CEDEX 05