CAHIERS DE
TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
CATÉGORIQUES

PAULETTE LIBERMANN

Remarques sur les systèmes différentiels

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 23, nº 1 (1982), p. 55-72

<http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1982__23_1_55_0>

CAHIERS DE TOPOLOGIE
ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
Vol. XXIII-1 (1982)

3^e COLLOQUE SUR LES CATÉGORIES
DÉDIÉ À CHARLES EHRESMANN
Amiens, Juillet 1980

REMARQUES SUR LES SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS

par Paulette LIBERMANN

Beaucoup d'objets en Géométrie Différentielle peuvent être considérés comme des systèmes différentiels (G-structures, connexions par exemple), ce qui montre que les systèmes différentiels ont leur intérêt même quand ils ne sont pas complètement intégrables ou formellement intégrables.

C'est ce point de vue que nous adoptons dans ce travail, qui est une introduction à l'étude des systèmes différentiels. Par exemple nous montrons qu'une forme de Pfaff ω peut être considérée comme une connexion dont la courbure est la différentielle $d\omega$. Intuitivement la courbure, le tenseur de structure expriment la «différence» entre le prolongement holonome et le prolongement semi-holonome.

Les notions exposées ici sont principalement dûes à C. Ehresmann (jets holonomes et semi-holonomes, connexions, pseudo-groupes de Lie, groupoïdes différentiables, etc).

Notre bibliographie, incomplète, donne des références d'articles où sont étudiés d'une manière approfondie les sujets traités dans ce travail ou relatifs à la cohomologie de Spencer; ces articles contiennent eux-mêmes une bibliographie détaillée.

1. NOTATIONS.

Les variétés sont supposées, pour simplifier, paracompactes et de classe C^∞, les applications de classe C^∞.

Une *surmersion* («fibered manifold») (E, M, π) est une submersion surjective $\pi: E \to M$ (c'est-à-dire telle que l'application π soit de rang égal à la dimension de M); les submersions sont caractérisées par l'existence de sections locales. Si (E, M, π) et (E', M', π') sont deux surmersions, la sous-variété de $E \times E'$ des couples (z, z') tels que $\pi(z) = \pi(z')$ sera désignée par $E \times_M E$ ou $E \underset{\pi \times \pi'}{\times} E'$ (produit fibré). On désignera par VTE (fibré tangent vertical) l'ensemble des vecteurs tangents aux fibres $E_x = \pi^{-1}(x)$ de la surmersion (E, M, π).

On désignera par $J^k(V, W)$ l'ensemble des k-jets des applications locales d'une variété V dans une variété W, α et β étant les applications source et but.

Si (E, M, π) est une surmersion, on désignera par $J_k E$ l'espace des k-jets des sections locales ($J_k E \subset J^k(M, E)$). La projection $J_k E \to J_{k-1} E$ définit une structure de fibré affine; en particulier le fibré $J_1 E \to E$ admet pour fibré vectoriel associé le fibré des morphismes linéaires de TM dans VTE.

Si $E = V \times W$, $M = V$, $\pi = p_1 : V \times W \to W$, l'ensemble $J^k(V, W)$ s'identifie à $J_k E$ (toute section de E étant le graphe d'une application locale de V dans W).

2. SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS ET PROLONGEMENTS HOLONOMES.

Soient V et W deux variétés. Un *système différentiel d'ordre k* est par définition une sous-variété S_k de la variété $J^k(V, W)$. Une *solution* (locale) d'un tel système est une application $f : U \subset V \to W$ (U ouvert de V) telle que pour tout $x \in U$, le jet $j_x^k f$ appartienne à S_k ; l'application $j^k f : U \to S_k$ (définie par $j^k f(x) = j_x^k f$) est une section locale de S_k relativement à l'application source $\alpha : S_k \to V$.

Lorsque V et W sont des espaces numériques, on retrouve les systèmes d'équations aux dérivées partielles.

Le système S_k est dit *complètement intégrable* si pour tout $X_k \in S_k$ il existe une solution f de S_k satisfaisant la condition $j_x^k f = X_k$ (où $x = \alpha(X_k)$) et $j^k f$ est une section locale de S_k dont l'image contient X_k ; donc :

PROPOSITION 1. *Pour que le système S_k soit complètement intégrable, il est nécessaire que la restriction à S_k de l'application source α soit une submersion (et par suite $\alpha(S_k)$ est une sous-variété ouverte de V).*

On supposera désormais cette condition réalisée et l'on se ramènera au cas où $\alpha(S_k) = V$.

En posant, comme dans 1°, $E = V \times W$, $M = V$, $\pi = p_1$, on est conduit à la définition suivante :

DÉFINITION. Un système différentiel R_k d'ordre k, pour une surmersion (E, M, π) est une sous-variété de $J_k E$ telle que la restriction de la projection source α à R_k soit une surmersion ($R_k \to M$ est une « sous-surmersion » de $\alpha : J_k(E) \to M$).

Supposons R_k complètement intégrable ; soit $X_k \in R_k$ et soit f une solution de R_k telle que $j_x^k f = X_k$; pour tout $r > 0$, le jet $j_x^{k+r} f$ s'identifiant au jet $j_x^r j^k f$, ce jet $j_x^{k+r} f$ appartient à $J_r R_k \cap J_{r+k} E$, ce qui conduit à définir le *prolongement d'ordre* r de R_k comme le sous-ensemble

$$R_{k+r} = J_r R_k \cap J_{k+r} E$$

de $J_{k+r} E$.

Il est à remarquer que R_{k+r} n'est pas nécessairement une sous-variété de $J_{k+r} E$ pour $r > 0$.

De l'étude précédente, on déduit : *pour que le système R_k soit complètement intégrable, il est nécessaire que pour tout $r > 0$, l'application $R_{k+r} \to R_k$ soit surjective.*

S'il existe q tel que l'application $R_{k+q} \to R_k$ soit surjective, le système R_k est dit q-intégrable, l'obstacle à la q-intégrabilité étant le *tenseur de structure* d'ordre q, dont nous parlerons ultérieurement.

Parmi les systèmes différentiels, on distingue les systèmes de *type fini* (ceux pour lesquels il existe un entier r tel que le prolongement R_{k+r} soit une sous-variété de $J_{k+r} E$ et que R_{k+r} soit difféomorphe à R_{k+r-1}) ; les systèmes que ne sont pas de type fini sont dits de *type infini* (par exemple les systèmes correspondant aux « groupes infinis » de E. Cartan). Nous reviendrons au paragraphe 6 sur les systèmes de type fini.

Pour les systèmes de type infini, M. Kuranishi [6] et H. Goldschmidt [3a] ont étendu au cas non linéaire la théorie de Spencer ; par exemple dans [3a], on définit un *système formellement intégrable* comme un système R_k tel que pour tout $r > 0$, le prolongement R_{k+r} soit un système différentiel, ce système différentiel étant 1-intégrable. En utilisant la théorie de Spencer, on démontre qu'il suffit d'étudier un nombre fini de prolongements pour vérifier que R_k est formellement intégrable ou non.

Un système complètement intégrable peut ne pas être formellement intégrable (M. Janet a donné des exemples de systèmes différentiels complètement intégrables dont le prolongement n'est pas complètement intégrable) ; d'autre part H. Lewy a donné un exemple de système formellement intégrable sans solutions [4c]. Par contre, si les données sont analytiques, alors tout système formellement intégrable est complètement intégrable.

3. PROLONGEMENTS HOLONOMES DES FIBRÉS PRINCIPAUX.

Alors que le foncteur J_k (k-jet de section) est adapté aux fibrés vectoriels (systèmes linéaires), il n'en est pas de même pour les fibrés principaux car si $P \to M$ est une fibration principale, $J_k P$ n'est pas en général muni d'une structure de fibré principal. Pour les groupoïdes différentiables, il faut considérer seulement certaines sections, dites *inversibles*, pour que le prolongement soit un groupoïde.

J. Pradines [11b] a défini et étudié un foncteur prolongement S applicable à tous les cas.

Si M est une variété, on désigne par $T^k_p(M)$ (resp. $T^{*k}_p M$) l'espace des k-jets de R^p dans M (resp. de M dans R^p) de source (resp. but) O. Pour $p = k = 1$, on retrouve le fibré tangent TM et le fibré cotangent T^*M.

Si $p = n = dim M$, le sous-ensemble $H^k(M)$ de T^k_n formé des jets inversibles (c'est-à-dire des jets de difféomorphismes locaux) est l'espace des k-repères (pour $k = 1$, on a l'espace $H(M)$ des repères au sens usuel); $H^k(M)$ est un L^k_n-fibré principal (où L^k_n est le groupe des k-jets inversibles de R^n dans R^n de source et but O). De même $H^{*k}(M)$ (espace des co-repères).

Pour toute surmersion (E, M, π), dont la base M est de dimension n, on définit la sous-variété $\mathcal{T}^k_n E$ de $T^k_n E$, image réciproque de $H^k(M)$

par la projection $T^k\pi : T^k_n E \to T^k_n M$; en particulier si $E = M$ et $\pi = id_M$ on a : $\mathcal{T}^k_n M = H^k(M)$. On démontre [8d]

PROPOSITION 2. *La variété $\mathcal{T}^k_n E$ est difféomorphe au produit fibré $J_k E \times_M H^k(M)$.*

PROPOSITION 3. *Si (P, M, π) est une fibration principale, de groupe structural G, alors $(\mathcal{T}^k_n P, M, T^k\pi)$ est une fibration principale de groupe structural $T^k_n(G) \times L^k_n$.*

Ceci justifie l'introduction du foncteur $\mathcal{T}^k_n$.

On démontre également le théorème suivant:

THÉORÈME 1 *(Lemme de Schwarz pour les variétés). Il existe un difféomorphisme canonique*

$$\psi^k_p : T\,T^k_p M \to T^k_p T M$$

échangeant les projections de $T\,T^k_p M$ et $T^k_p TM$ sur TM et $T^k_p M$; de plus, pour une submersion (E, M, π), on a:

$$\psi^k_n(T\mathcal{T}^k_n E) = \mathcal{T}^k_n TE\,;$$

en particulier

$$\psi^k_n(TH^k(M)) = \mathcal{T}^k_n(TM)\,;$$

pour $p = k = 1$, on retrouve l'involution canonique sur $T\,TM$.

Ce théorème se démontre en utilisant des «jets partiels» de $R \times R^p$ dans M et, au moyen de cartes locales, en appliquant le Lemme de Schwarz pour les espaces numériques.

Pour toute fibration principale (P, M, π), de groupe structural G, le fibré tangent s'identifie au produit fibré $(TP/G) \times_M P$ où le fibré vectoriel TP/G, de base M, est l'espace des vecteurs tangents à P *mod.* les translations à droite de G (c'est l'espace des «déplacements infinitésimaux» de P au sens de C. Ehresmann [2c]).

Plus généralement une surmersion (E, M, π) admet un « *parallélisme fibré* » (cf. [8f]) s'il existe un fibré vectoriel $T_{red} E$, de base M, tel que TE soit isomorphe à $T_{red} E \times_M E$; le fibré $T_{red} E$ est appelé fibré tangent «réduit». On démontre alors, en utilisant la Proposition 2 et le Théorème 1 :

THÉORÈME 2. *Si une surmersion* (E, M, π) *admet un parallélisme fibré, de fibré tangent réduit* $T_{red} E$, *alors la surmersion* $(\mathcal{J}^k_n E, M, \mathcal{J}^k_n \pi)$ *admet un parallélisme fibré, de fibré tangent réduit* $J_q T_{red} E$,
c'est-à-dire $T \mathcal{J}^k_n E$ est difféomorphe à $J_k T_{red} E \times_M \mathcal{J}^k_n E$.

COROLLAIRE. *Si* (P, M, π) *est une fibration principale, alors pour la fibration principale* $(\mathcal{J}^k_n P, M, T^k \pi)$ *on a l'isomorphisme de fibrés vectoriels de base* M :

$$T(\mathcal{J}^k_n P)/G_k \Longleftrightarrow J_k(TP/G)$$

(où G_k, isomorphe à $T^k_n(G) \times L^k_n$, est le groupe structural de $\mathcal{J}^k_n P \to M$) ; en particulier, on a l'isomorphisme (cf. [8 b]) :

$$J_k(TM) \Longleftrightarrow TH^k/L^k_n .$$

Si l'on se donne un sous-fibré principal du fibré $\mathcal{J}^k_n P$ on obtient un système différentiel d'ordre k. Le corollaire du Théorème 2 permet de lui associer un sous-fibré vectoriel de $J_k(TP/G)$, d'où un système différentiel appelé le *linéarisé de* R_k, voir [4 b], [8 b], [9], [13].

En particulier une *G-structure d'ordre* k ou G-sous-fibré principal H_G de $H^k(M)$ (G étant un groupe de Lie, sous-groupe de L^k_n) est un système différentiel d'ordre k dont le linéarisé est un sous-fibré vectoriel de $J_k(TM)$; l'ensemble des solutions de ce système linéaire est appelé pseudogroupe infinitésimal [2 d], [8 b] : ce sont des champs de vecteurs locaux engendrant des groupes locaux de difféomorphismes laissant invariante la G-structure.

Une G-structure d'ordre k est dite *intégrable* si elle définit un système différentiel complètement intégrable, c'est-à-dire si pour tout $z \in H_G$, il existe un difféomorphisme f dont la source est un voisinage de O dans R^n, le but est contenu dans M, tel que

$$j^k_O f = z \quad \text{et} \quad j^k_u(f \circ \tau_u) \in H_G \quad \text{pour tout } u \in U$$

(τ_u étant la translation de R^n : $v \to v - u$). Si G est intégrable son linéarisé est complètement intégrable, la réciproque n'étant pas nécessairement vraie (voir paragraphe 7).

4. PROLONGEMENTS DES GROUPOÏDES DIFFÉRENTIABLES.

Comme l'a fait remarquer C. Ehresmann, l'étude des fibrés principaux est intimement liée à celle des groupoïdes différentiables.

DÉFINITION. Un groupoïde différentiable Φ est une variété différentiable munie d'une structure de groupoïde telle que :

1) La base M (c'est-à-dire l'ensemble des unités de Φ) est une sous-variété de Φ ;

2) Les applications $\alpha : \Phi \to M$, $\beta : \Phi \to M$ (qui à tout $\theta \in \Phi$ associent son unité à droite $\alpha(\theta)$ et son unité à gauche $\beta(\theta)$) sont différentiables et sont des surmersions ;

3) La loi de composition $(\phi, \phi') \to (\phi\phi')$ qui est définie sur le produit fibré des surmersions α et β (donc sur une sous-variété de $\Phi \times \Phi$) est différentiable ;

4) L'application $\phi \to \phi^{-1}$ est un difféomorphisme de Φ sur lui-même.

On a la notion de sous-groupoïde-variété.

EXEMPLES. 1° Un groupe de Lie (une seule unité).

2° Pour toute surmersion (E, M, π), le produit fibré $E \times_M E$ est muni d'une structure de groupoïde différentiable non transitif.

3° Si $\alpha = \beta$, Φ est une somme de groupes ; notamment les *fibrés vectoriels* sont des groupoïdes différentiables.

4° Un *groupoïde de Lie* est un groupoïde différentiable tel que l'application $\alpha \times \beta : \Phi \to M \times M$ soit une surmersion. Un groupoïde de Lie est donc transitif. On démontre [2 f], [8 d] qu'il est localement trivial.

Si Φ est un groupoïde de Lie, de base M, on montre que pour tout $x_0 \in M$, l'ensemble $\Phi_{x_0} = \alpha^{-1}(x_0)$ est un fibré principal, de groupe structural $G_{x_0} = (\alpha \times \beta)^{-1}(x_0, x_0)$, de projection β.

Inversement si (P, M, π) est une fibration principale, de groupe G, alors l'espace quotient $(P \times P)/\rho$ (où ρ est la relation d'équivalence définie par $(z'g, zg) \sim (z', z)$ pour tout $g \in G$) est muni d'une structure de groupoïde de Lie (appelé groupoïde associé à H_G) dont l'ensemble des unités s'identifie à M ; c'est le groupoïde des isomorphismes de fibre sur fibre [2 b], [8 d] ; le groupoïde associé à $\Phi_{x_0} = \alpha^{-1}(x_0)$ est Φ lui-même.

Par exemple si $P = H^k(M)$ (espace des k-repères), le groupoïde associé est l'ensemble $\Pi^k(M)$ des k-jets inversibles de M dans M.

Une *section locale inversible* d'un groupoïde différentiable Φ (non nécessairement de Lie) est une section locale s pour la projection α telle que $\beta \circ s$ soit un difféomorphisme local de la base M.

L'ensemble Θ des sections inversibles de Φ constitue un pseudogroupe pour la loi de composition suivante:

$(s, s') \to s''$, où s'' est la section $x \to s'(\beta s(x))s(x)$.

On définit ainsi le prolongement $\Phi^k \subset J_k \Phi$; Φ^k est l'ensemble des k-jets des sections inversibles. On vérifie que Φ^k est un groupoïde. Par exemple $\Pi^k(M)$ est le prolongement de $\Pi^0(M) = M \times M$.

Si P est un fibré principal et Φ son groupoïde associé, il y a correspondance biunivoque entre automorphismes locaux de ce fibré principal et sections locales inversibles de Φ ; on en déduit [8d] que Φ^k est le groupoïde associé à $\mathcal{J}_n^k P$, ce qui justifie encore l'introduction du foncteur $\mathcal{J}_n^k$.

Si Γ est un pseudogroupe de difféomorphismes locaux d'une variété M, l'ensemble $J^k(\Gamma)$ des k-jets de ces difféomorphismes locaux est un sous-groupoïde (non nécessairement différentiable) de $\Pi^k(M)$. Inversement un groupoïde différentiable Φ, sous-groupoïde de $\Pi^k(M)$, est un système différentiel d'ordre k dont les solutions constituent un pseudogroupe de difféomorphismes locaux sur M, mais Φ ne coïncide pas avec le groupoïde $J^k(\Gamma)$ s'il n'est pas complètement intégrable.

Un *pseudogroupe de Lie* d'ordre k sur une variété M est par définition un pseudogroupe Γ de difféomorphismes tel que:

a) Γ est complet d'ordre k, c'est-à-dire Γ est l'ensemble des solutions de $J^k(\Gamma)$.

b) $J^k(\Gamma)$ est un sous-groupoïde différentiable de $\Pi^k(M)$.

Un pseudogroupe de Lie est de *type fini* s'il est défini par un système de type fini; dans le cas contraire il est de *type infini* («groupes infinis» d'E. Cartan).

EXEMPLES. 1° Le pseudogroupe Γ des automorphismes locaux analytiques complexes de C^n (qu'on peut identifier à R^{2n}) est un pseudogroupe de Lie d'ordre 1; chaque automorphisme local vérifie les conditions de Cauchy-Riemann, ce pseudogroupe est de type infini.

2° Le sous-pseudogroupe $\Gamma' \subset \Gamma$ constitué des applications affines est de type fini; il est d'ordre 2. Remarquons que $J^1(\Gamma) = J^1(\Gamma')$.

3° Le pseudogroupe des isométries locales d'un espace euclidien est de type fini.

4° Le pseudogroupe des difféomorphismes locaux de R^n de déterminant 1, et le pseudogroupe des difféomorphismes locaux de R^{2n} laissant invariante la 2-forme

$$\Omega = dx^1 \wedge dy^1 + \ldots + dx^n \wedge dy^n$$

sont des pseudogroupes de Lie de type fini.

Nous désignerons par *pseudogroupe de Lie transitif* un pseudogroupe Γ tel que pour tout $s > 0$, $J^s(\Gamma)$ soit un *groupoïde de Lie* (exemples 1, 2, 3, 4).

Une *équation de Lie non linéaire* d'ordre k peut être définie comme la donnée d'un groupoïde de Lie, sous-groupoïde de $\Pi^k(M)$ (habituellement on désigne sous ce nom un sous-fibré principal de $H^k(M)$).

Les automorphismes locaux d'une G-structure (difféomorphismes locaux dont le k-jet laisse invariant H_G) sont les solutions du groupoïde de Lie Φ associé à H_G. Si ce système Φ est complètement intégrable le pseudogroupe Γ des solutions est un pseudogroupe de Lie transitif et la G-structure est dite *transitive et localement homogène* (pour tout couple (z, z') d'éléments de H_G, il existe un difféomorphisme local transformant z en z'). Si la G-structure est intégrable au sens du paragraphe 3, alors le groupoïde Φ est intégrable mais la réciproque n'est pas toujours vraie; par exemple la structure presque complexe sur la sphère S_6 définie par les octaves de Cayley n'est pas intégrable; par contre cette structure est homogène: S_6 s'identife à l'espace G_2/SU_3 (G_2 groupe simple exceptionnel à 14 paramètres) (cf. [8 a]).

5. DÉPLACEMENTS INFINITÉSIMAUX.

Nous avons vu les «déplacements infinitésimaux» d'un fibré principal $P \to M$ (c'est le fibré TP/G).

Pour tout groupoïde différentiable, un *déplacement infinitésimal* est un vecteur tangent à Φ qui est α-vertical et dont l'origine est une unité de Φ ; en notant $depl\Phi$ l'ensemble des déplacements infinitésimaux de Φ, on a

$$depl\,\Phi = M \underset{i \times \pi}{\times} V^{\alpha} T\Phi ,$$

où i est l'injection canonique $M \to \Phi$ et π la projection sur Φ du fibré tangent α-vertical $V^{\alpha} T\Phi$. L'ensemble $depl\Phi$ est un fibré vectoriel de base M.

Dans le cas d'un espace homogène P/G (P groupe de Lie, G sous-groupe fermé, on retrouve les déplacements infinitésimaux de la méthode du repère mobile.

PROPOSITION 4 [8e]. *Si Φ est le groupoïde associé à un fibré principal P, il existe un isomorphisme canonique de fibrés vectoriels entre $depl\,\Phi$ et TP/G (espace des vecteurs tangents à P modulo les translations à droite de G).*

Cette proposition explique la terminologie employée et on posera: $depl\,P = TP/G$.

COROLLAIRE. *Si P et P' sont des fibrés principaux ayant même groupoïde associé, alors $depl\,P = depl\,P'$.*

C'est le cas notamment de deux sous-fibrés principaux P et P' d'un même fibré principal se déduisant l'un de l'autre par la translation $z \to zs$.

L'espace $depl\,\Phi$ est un *algébroïde de Lie* au sens de J. Pradines: le faisceau des sections de $depl\,\Phi$ est un faisceau d'algèbres de Lie et le morphisme surjectif de fibrés vectoriels $r\colon depl\,\Phi \to TM$ induit un morphisme d'algèbres de Lie ; de plus le noyau de r est un fibré en algèbres de Lie.

J. Pradines [11a] a démontré le théorème de Lie pour les groupoïdes différentiables: *tout algébroïde de Lie est isomorphe à l'algébroïde d'un groupoïde a-simplement connexe (c'est-à-dire tel que* $a^{-1}(x)$ *est simplement connexe pour tout* $x \in M$*).*

La notion d'algébroïde de Lie permet de formuler le théorème démontré par A. Rodrigues [13]: *Si* (P, M, π) *est un fibré principal de base connexe, alors pour tout sous-algébroïde* E' *de* $depl P$*, il existe un sous-fibré principal connexe* P' *(*connexe en tant que *sous-variété de* P*) tel que* $depl P' = E'$*; tout autre sous-fibré principal connexe* P'' *tel que* $depl\, P'' = E'$ *se déduit de* P' *par* $z \to zs$*.*

En termes de groupoïdes, ce théorème de A. Rodrigues devient:

THÉORÈME 3. *Soit* Φ *un groupoïde de Lie de base connexe* M *; si* E' *est un sous-algébroïde de Lie de* $depl\,\Phi$*, alors il existe un sous-groupoïde a-connexe unique* Φ' *tel que* $depl\,\Phi' = E'$*.*

Ce théorème, notamment, justifie l'introduction des groupoïdes de Lie dans l'étude des fibrés principaux.

L'introduction du foncteur *depl* permet de linéariser les équations de Lie non linéaires: si Φ est un sous-groupoïde de $\Pi^k(M)$, alors $depl\,\Phi$ est un sous-fibré de $depl(\Pi^k(M))$ c'est-à-dire en utilisant le Théorème 2 et la Proposition 4, $depl\,\Phi$ est un sous-fibré vectoriel de $J_k(TM)$; si Φ est complètement intégrable ou formellement intégrable, il en est de même de $depl\,\Phi$; la réciproque n'est vraie que moyennant des conditions de régularité (voir paragraphe 7).

6. PROLONGEMENTS SEMI-HOLONOMES. APPLICATION AUX SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS DE TYPE FINI.

En plus des jets usuels (que l'on appelle holonomes), C. Ehresmann a introduit les jets non holonomes et semi-holonomes ; ces derniers s'obtiennent en oubliant la condition de symétrie de Schwarz. Les prolongements semi-holonomes successifs d'un système différentiel (qui contiennent les prolongements holonomes de même ordre) sont des sous-variétés; nous verrons, dans les systèmes de type fini, que l'intégrabilité est équivalente à la coïncidence des prolongements holonomes et semi-holonomes.

Soit (E, M, π) une submersion; $J_1 J_1 E$ est appelé prolongement non holonome de E ; par itération, on obtient les prolongements non holonomes de tous ordres.

On définit le prolongement semi-holonome $\bar{J}_2 E \subset J_1 J_1 E$ de la manière suivante: une section locale $s: U \subset M \to J_1 E$ sera dite *adaptée* en $x \in U$ si $s(x) = j^1_x(\beta . s)$, où β est l'application but $J_1 E \to E$; le jet $j^1_x s$ sera dit *semi-holonome* ; $\bar{J}_2 E$ est l'ensemble de ces jets semi-holonomes; c'est encore le noyau de la double flèche (cf. Pradines):

$$\begin{array}{ccc} J_1 J_1 E & \xrightarrow{j_1 \beta} & J_1 E \\ \beta \downarrow & & \\ J_1 E & & \end{array} \quad .$$

Remarquons que si s s'écrit $j^1 f$, alors la section $j^1 f$ est adaptée en tout point et

$$j^1_x s = j^1_x j^1 f = j^2_x f \, ;$$

on a un 2-jet holonome.

Par récurrence, on définit $\bar{J}_k E$ comme noyau de la double flèche

$$\begin{array}{ccc} J_1 \bar{J}_{k-1} E & \xrightarrow{j_1 \beta} & J_1 \bar{J}_{k-2} E \\ \beta \downarrow & & \\ \bar{J}_{k-1} E & & \end{array} \quad \text{(en remarquant que } \bar{J}_{k-1} E \subset J_1 \bar{J}_{k-2} E \text{).}$$

On définit de même les foncteurs $\bar{T}^k_p$, $\bar{\mathfrak{T}}^k_n$, $\bar{T}^{r\,k}_p$, ainsi que les fibrés principaux $\bar{H}^k(M)$, $\bar{H}^{r\,k}(M)$ et les prolongements semi-holonomes $\bar{\Phi}^k$ des groupoïdes différentiables ; si R_k est un fibré vectoriel, il en est de même de ses prolongements semi-holonomes. Remarques identiques pour les prolongements semi-holonomes des sous-fibrés principaux de $H^k(M)$ et des sous-groupoïdes de $\Pi^k(M)$.

EXEMPLES. *1° Connexions:*

Si (E, M, π) est une submersion, une connexion d'ordre 1 est un relèvement $C: E \to J_1 E$. *Les connexions sont donc des systèmes différentiels de type fini* ; ce relèvement C définit sur E un champ d'éléments de contact, transverse aux fibres $\pi^{-1}(x)$. Ce relèvement se prolonge en un relèvement $j^1 C : J_1 E \to J_1 J_1 E$ et l'application composée

$$j^1 C . C : E \to J_1 J_1 E$$

est à valeurs dans $\bar{J}_2 E$. *Pour que C soit intégrable, il faut et il suffit d'après le théorème de Frobenius que $j^1 C . C$ soit à valeurs dans $J_2 E$*: en effet en utilisant des cartes locales, on se ramène à la situation d'une équations «aux différentielles totales» et le théorème de Frobenius est une réciproque du lemme de Schwarz. En utilisant le fait que $\bar{J}_2 E \to J_1 E$ soit une fibration affine, on fait la différence entre un élément de $(j^1 C . C)(E)$ et d'un élément de $J_2 E$ et l'on antisymétrise: on obtient ainsi la *courbure* de la connexion, obstacle à l'intégrabilité.

On définit de même des connexions d'ordre supérieur par un relèvement $C_k : J_{k-1} E \to J_k E$; on a encore un système de type fini et l'on définit la courbure, obstacle à l'intégrabilité.

2° Formes de Pfaff:

Soit $\omega : M \to T^*M$ une forme de Pfaff; par définition, pour tout $x \in M$, il existe une fonction numérique

$$f : U \subset M \to \mathrm{R} \quad \text{telle que} \quad f(x) = 0, \; j^1_x f = \omega(x) \; ;$$

la section $\omega : M \to T^*M \subset J^1(M, \mathrm{R})$ est donc adaptée en tout x, et le jet $j^1_x \omega$ appartient à $\bar{T}^{*2}(M)$ (espace des 2-jets semi-holonomes de M dans R ou covitesses d'ordre 2 semi-holonomes); pour que le jet $j^1_x \omega$ appartienne en tout point à $T^{*2}(M)$, il faut que $\omega = j^1 f$, c'est-à-dire que $\omega = df$.

Par exemple si ω est définie dans un ouvert U, au moyen de coordonnées locales, par $\omega = \sum_{i=1}^{n} a_i \, dx^i$, $j^1_x \omega$ est défini par

$$a_1(x), \; \dots, \; a_n(x), \; \frac{\partial a_i}{\partial x^j}(x) \; ;$$

pour que le 2-jet soit holonome en tout point, il faut et il suffit (si U est simplement connexe) que

$$\frac{\partial a_i}{\partial x^j} = \frac{\partial a_j}{\partial x^i} \qquad (i, j = 1, \dots, n).$$

Ceci se rattache à l'exemple 1 ; en effet si l'on considère le fibré vectoriel trivial $E_0 = M \times \mathrm{R}$, on a :

$$J_1 E_0 = T^*M \oplus E_0 .$$

Toute forme $\omega : M \to T^*M$ définit la connexion $C : E_0 \to J_1 E_0$ telle que

$$C(x, t) = (\omega(x), t)$$

dont la courbure est $d\omega$.

Cette étude se résume dans la proposition suivante :

PROPOSITION 5. *Il existe un isomorphisme canonique de fibrés vectoriels: $J_1(T^*M) \to \bar{T}^{*2}(M)$; toute forme de Pfaff ω définit une connexion dont la courbure s'identifie à la différentielle $d\omega$.*

3° Structure de fibré principal sur $J_1\, H(M)$:

PROPOSITION 6 [*15a*]. *Il existe un difféomorphisme canonique de $J_1 H(M)$ sur $\bar{H}^2(M)$.*

Pour démontrer la proposition, on considère des sections locales de $H(M)$ et l'on montre qu'elles définissent des applications adaptées de R^n dans $H(M)$ dont on prend le 1-jet.

La structure de fibré principal sur $\bar{H}^2(M)$ induit une structure de fibré principal sur $J_1\, H(M)$; une connexion principale sur $H(M)$ est donc un relèvement $H(M) \to J_1 H(M)$ qui est un morphisme de fibrés principaux ; les connexions qui induisent des relèvements de $H(M)$ dans $H^2(M)$ sont symétriques, l'obstacle à la symétrie étant la torsion.

Pour k quelconque, on démontre que $\bar{H}^{k+1}(M)$ est difféomorphe à $\bar{J}_k H(M)$. Le Théorème 2 s'étend aux prolongements semi-holonomes.

Si l'on revient aux systèmes différentiels de type fini, d'ordre > 1, d'après la définition du Paragraphe 2, on peut se ramener à un système R_q tel que R_q soit difféomorphe à R_{q-1} (en considérant au besoin un prolongement du système initial R_k).

Dans ce cas, pour que R_q soit intégrable, il faut et il suffit qu'il soit 1-intégrable (c'est-à-dire l'application $R_{q+1} \to R_q$ est surjective); R_q est en effet défini localement par un système d'équations aux dérivées partielles de Mayer-Lie (les dérivées d'ordre q sont fonctions des dérivées d'ordre inférieur) et le théorème de Frobenius assure l'existence des solutions; la théorie des systèmes formellement intégrables est inutile dans ce cas.

On peut, en partant de $J_q E$, définir le prolongement *sesqui-holonome* $\check{J}_{q+1} E$ de E comme le noyau de la double flèche

$$\begin{array}{ccc} J_1 J_q E & \longrightarrow & J_1 J_{q-1} E \\ \downarrow & & \\ J_q E & & ; \end{array}$$

on en déduit le prolongement sesqui-holonome $\check{R}_{q+1} = \check{J}_{q+1} E \cap J_1 R_q$ et l'on démontre que si R_q est difféomorphe à R_{q-1}, alors $\check{R}_{q+1}$ est difféomorphe à R_q. Les résultats précédents se résument dans le théorème suivant [2d], [8e] :

THÉORÈME 4. *Pour qu'un système différentiel R_q tel que R_q soit difféomorphe à sa projection R_{q-1} soit complètement intégrable, il faut et il suffit que son prolongement holonome R_{q+1} coïncide avec son prolongement sesquiholonome $\check{R}_{q+1}$.*

Pour $q = 2$, le prolongement $\check{R}_2$ s'identifie au prolongement R_2 et l'on retrouve l'exemple 1 notamment.

7. SUR L'INTÉGRABILITÉ DES G-STRUCTURES ET DES GROUPOÏDES DIFFÉRENTIABLES.

Pour simplifier l'exposé, la G-structure sera supposée du premier ordre, c'est-à-dire H_G est un sous-fibré de $H(M)$.

On définit le prolongement semi-holonome $\bar{H}_G^{q+1}$ de H_G comme le sous-fibré principal de $\bar{H}^{q+1}(M)$, image de $\bar{J}_q H_G$ par l'isomorphisme $\bar{J}_q H(M) \to \bar{H}^{q+1}(M)$; le prolongement holonome est, par définition, $H_G^{q+1} = \bar{H}_G^{q+1} \cap H^{q+1}(M)$; ce n'est pas nécessairement un fibré principal; par contre si la G-structure est q-intégrable, c'est-à-dire si l'application $H_G^{q+1} \to H_G$ est surjective, on démontre [8d], [8e] qu'alors H_G^{q+1} est un fibré principal. L'obstacle à la q-intégrabilité est le *tenseur de structure* d'ordre q ; à l'ordre 1 cette notion a été introduite par C. Ehresmann [2a] et D. Bernard [1]. Pour l'ordre supérieur, voir notamment [4a], [7], [8d], [10], [16]. Le point de vue de C. Ehresmann est le suivant: une G-structure correspond à une section globale s du fibré $H(M)/G$ (de fibres isomorphes à $GL(n,\mathrm{R})/G$); le jet $j^1 s$ définit une section globale de $\bar{H}_2(M)/\bar{G}^2$ (où $\bar{G}^2$ est le groupe structural de $\bar{H}_G^2$); pour que la structure soit 1-intégrable, la section doit vérifier un système différentiel du premier ordre; ce point de vue a été développé à l'ordre supérieur par P. Molino [10] (équations admissibles).

On définit de même le tenseur de structure pour les groupoïdes de Lie, sous-groupoïdes de $\Pi(M)$; si Φ est le groupoïde associé à une G-structure H_G, la «nullité» du tenseur de structure de Φ entraîne que celui de H_G est à valeur constante, non nécessairement nulle (on retrouve les résultats du Paragraphe 3).

Si le groupoïde Φ, sous-groupoïde de $\Pi(M)$, est formellement intégrable, il en est de même de son linéarisé. Inversement on a [8d] :

THÉORÈME 5. *Soit Φ un groupoïde de Lie, sous-groupoïde de $\Pi(M)$, R_1 le sous-fibré vectoriel de $J_1 T(M)$, isomorphe à depl Φ ; si les conditions suivantes sont satisfaites :*

1° Φ est a-connexe,

2° le prolongement $R_2 = J_2 T(M) \cap \bar{R}_2$ de R_1 est un sous-fibré vectoriel de $J_2 T(M)$ et de $\bar{R}_2$,

3° l'application $R_2 \to R_1$ est surjective,

alors le groupoïde Φ est 1-intégrable (c'est-à-dire l'application

$$\Pi^2(M) \cap \bar{\Phi}^2 \to \Phi$$

est surjective).

La démonstration utilise les méthodes de A. Rodrigues pour démontrer le Théorème 3 (on utilise également le théorème lui-même).

On démontre par récurrence que si *depl* Φ est q-intégrable, il en est de même de Φ.

BIBLIOGRAPHIE.

0. E. CARTAN, Groupes infinis, *Oeuvres complètes Partie II*, Vol. 2, 571-926.

1. D. BERNARD, Thèse, *Ann. Inst. Fourier* 10 (1960), 151-270.

2. C. EHRESMANN, a) Sur les structures infinitésimales régulières, *Congrès Intern. Math. Amsterdam* (1954), Vol. 1, 479-480.
   b) Connexions infinitésimales, *Colloque Top. Alg. Bruxelles* (1950), 29-55.
   c) Structures infinitésimales et pseudogroupes de Lie, *Colloq. Intern. C.N.R.S. Géom. Diff. Strasbourg* (1953), 97-110.
   d) *Compte-rendus Acad. Sc. Paris* 240 (1954), 1762; 241 (1955), 397 et 1755; 246 (1958), 360.
   e) Connexions d'ordre supérieur, *Atti 5 Congr. dell'Unione Mat. Italiana* 1955, Ed. Cremonese, Roma (1956), 326-328.
   f) Catégories topologiques et catégories différentiables, *Colloq. Géom. Diff. Globale Bruxelles*, C.B.R.M. (1958), 137-150.
   g) Groupoides diferenciales, *Revista Un. Mat. Argentina* XIX, Buenos-Aires (1960), 48.

3. H. GOLDSCHMIDT, a) Non linear partial differential equations, *J. Diff. Geom.* 1 (1967), 269-307.
   b) Sur la structure des équations de Lie, *J. Diff. Geom.* 6 (1972), 357-373 ; 7 (1972), 67-95.

4. V. GUILLEMIN, a) The integrability problem for *G*-structures, *Trans. A.M.S.* 116 (1965), 544.
   & STERNBERG, b) Deformation theory of pseudogroup structures, *Mem. A.M.S.* 64 (1966).
   c) The Lewy counterexample, *J. Diff. Geom.* 1 (1967), 58-67.

5. A. KUMPERA & SPENCER, *Lie equations*, Ann. of Math. Studies 73, Princeton Univ. Press, 1972.

6. M. KURANISHI, *Lectures on involutive systems*, São Paulo, 1967.

7. D. LEHMANN, Sur l'intégrabilité des *G*-structures, *Symp. Math.* X (Convegno di Geom. Diff.), Roma (1971), 127-140.

8. P. LIBERMANN, a) Thèse, Strasbourg 1953: Sur le problème d'équivalence des structures infinitésimales régulières, *Ann. Mat. Pura Appl.* 36 (1954), 27-120.
   b) Pseudogroupes infinitésimaux, *Bull. Soc. Math. France* 87 (1959), 409-425.
   c) Connexions d'ordre supérieur et tenseur de structure, *Atti Conv. Internat. Geom. Diff. Bologna* (1967).
   d) Sur les prolongements des fibrés principaux et groupoïdes différentiables, *Séminaire Analyse Globale Montréal* (1969), 7-108.
   e) Groupoïdes différentiables et presque parallélisme, *Symp. Math.* X (Convegno di Geom. Dif.) Roma (1971), 59-93.

f) Parallélismes, *J. Diff. Geom.* 8 (1973), 511-539.

g) Introduction à l'étude de certains systèmes différentiels, *Geometry and Diff. Geom. Proc.* Haïfa, Lecture Notes in Math. 792 (1979).

9. B. MALGRANGE, Equations de Lie, *J. Diff. Geom.* 6 (1972), 503-522; 7 (1972) 117-141.

10. P. MOLINO, Sur quelques propriétés des *G*-structures, *J. Diff. Geom.* 6 (1972), 489-518.

11. J. PRADINES, a) *Compte-rendus Acad. Sc. Paris* 263 (1966), 907-910; 264 (1967), 245-248; 266 (1968), 1194-1196.

b) Fibrés vectoriels doubles et calcul des jets non holonomes, *Esquisses Math.* 29, Amiens (1977).

12. N.V. QUE, Nonabelian Spencer cohomology, *J. Diff. Geom.* 3 (1969), 165-211.

13. A. RODRIGUES, *G*-structures et pseudogroupes de Lie, *Cours Faculté Sc. Grenoble* (1967-68).

14. D. SPENCER, Overdetermined systems of linear partial differential equations *Bull. A.M.S.* 75 (1965), 1-114.

15. P. VER EECKE, a) Thèse, *Cahiers Topo. et Géom. Diff.* V (1963).

b) *Geométrie Différentielle*, Sao Paulo, 1967; *Conexiones de orden superior* Zaragoza, 1968 (Traduction anglaise par Cross et Smith, Melbourne, 1978).

16. P.C. YUEN, Prolongements des *G*-structures (Thèse, Paris 1970), *Esquisses Math.* 11.

U.E.R. de Mathématiques
Université Paris 7
2 Place Jussieu
75005 PARIS