CAHIERS DE
TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
CATÉGORIQUES

R. LAVENDHOMME
TH. LUCAS

À propos d'un théorème de MacIntyre

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 22, nº 4 (1981), p. 387-398
<http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1981__22_4_387_0>

CAHIERS DE TOPOLOGIE
ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE
Vol. XXII-4 (1981)

3[e] COLLOQUE SUR LES CATEGORIES
DEDIE A CHARLES EHRESMANN
Amiens, Juillet 1980

A PROPOS D'UN THÉORÈME DE MACINTYRE

par R. LAVENDHOMME et Th. LUCAS

Depuis plusieurs années, les liens entre logique et théorie des modèles d'une part et théorie des catégories et des topos d'autre part, s'approfondissent et se multiplient. Rappelons par exemple les travaux de J. Bénabou sur logique et catégories [1], le forcing de A. Joyal, le livre de M. Makkai et G. Reyes [6]. Mais il nous semble évident que l'on percevra de plus en plus que C. Ehresmann, par sa théorie des esquisses [3], a dans ce domaine comme dans bien d'autres, un rôle de pionnier.

La note que nous présentons ici se situe dans le cadre plus limité de la théorie des modèles dans un topos spatial. Elle part de l'étude d'un théorème de Macintyre sur la modèle-complétude ([5], Theorème 2) pour en dégager la notion de «structure moelleuse» - sorte de version logique des faisceaux mous - et redémontrer le théorème de Macintyre à l'aide de cette notion. A proprement parler, le lecteur ne trouvera pas ici de résultat vraiment nouveau et il notera que notre démonstration du théorème de Mac intyre reste étroitement parallèle à celle de [5]. Il nous a cependant semblé que la notion de structure moelleuse avait en soi un intérêt suffisant pour pouvoir être présentée et que, jointe au lemme à la Feferman-Vaught que nous dégageons dans le n° 3, elle organisait cette démonstration sur des bases conceptuellement fort différentes et moins tributaires d'hypothèses de type booléen.

0. NOTATIONS.

On désignera par L un langage du premier ordre, X un espace topologique et $\mathfrak{M}$ un faisceau de L-structures sur X.

Si $\phi(x)$ est une formule dont la suite des variables libres est

$x = (x_1, \dots, x_n)$, U est un ouvert de X, $a = (a_1, \dots, a_n)$ est une suite d'éléments de $\mathfrak{M}(U)$, nous noterons $\mathfrak{M} \Vdash_U \phi(x)[a]$ la relation de forcing faisceautique due à A. Joyal (pour la définition, cfr. par exemple G. Reyes [8]). On désigne par $[\![\phi(x); a]\!]$ le plus grand ouvert U tel que l'on ait $\mathfrak{M} \Vdash_U \phi(x)[a]$.

Pour tout ouvert U de X, $\mathfrak{M}(U)$ est une L-structure au sens usuel. On notera la satisfaction dans cette structure $\mathfrak{M}(U) \models \phi(x)[a]$.

Si α est un point de X, on note $\mathfrak{M}_\alpha$ la tige de $\mathfrak{M}$ en α. On dit que $\mathfrak{M}_\alpha$ force $\phi(x)$ en $\tilde{a}$ (où $\tilde{a} = (\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_n)$ est une suite d'éléments de $\mathfrak{M}_\alpha$) s'il existe un voisinage ouvert U_α de α et des sections $a = (a_1, \dots, a_n)$ de germe $\tilde{a}$ en α tels que $\mathfrak{M} \Vdash_{U_\alpha} \phi(x)[a]$. Cette relation de forcing sera notée $\mathfrak{M}_\alpha \Vdash \phi(x)[\tilde{a}]$.

La tige $\mathfrak{M}_\alpha$ est également une L-structure. On y notera la satisfaction: $\mathfrak{M}_\alpha \models \phi(x)[\tilde{a}]$. La théorie des tiges est alors la théorie de l'ensemble de structures $\{ \mathfrak{M}_\alpha \mid \alpha \in X \}$.

On pose enfin :

$$K_\phi(a) = \{ \alpha \in X \mid \mathfrak{M}_\alpha \models \phi(x)[\tilde{a}(\alpha)] \}.$$

1. UN POINT CRUCIAL DE LA DÉMONSTRATION DE MACINTYRE.

Considérons les formules :

$$\text{(a)}\ \exists x (\neg \theta_1 \wedge \neg \theta_2), \quad \text{(b)}\ \exists x \neg \theta_1 \wedge \exists x \neg \theta_2,$$

où θ_1 et θ_2 sont atomiques. Nous allons examiner quand la satisfaction de (a) et de (b) pourraient être équivalentes dans la structure $\mathfrak{M}(X)$.

a) Dire que

$$(1) \qquad \mathfrak{M}(X) \models \exists x (\neg \theta_1 \wedge \neg \theta_2),$$

c'est dire qu'il existe une section globale $a \in \mathfrak{M}(X)$ telle que

$$\mathfrak{M}(X) \models (\neg \theta_1 \wedge \neg \theta_2)[a],$$

c'est-à-dire telle que

$$\mathfrak{M}(X) \nVdash \theta_1[a] \quad \text{et} \quad \mathfrak{M}(X) \nVdash \theta_2[a].$$

Pour les formules atomiques la satisfaction coïncide avec le forcing et donc (1) donne

$$[\![\theta_1 ; a]\!] \neq X \quad \text{et} \quad [\![\theta_2 ; a]\!] \neq X.$$

Faisons l'hypothèse que $[\![\theta_1 ; a]\!]$ et $[\![\theta_2 ; a]\!]$ soient des ouverts réguliers. Alors (1) revient à l'existence d'ouverts non vides U_1 et U_2 tels que

$$\mathfrak{M} \Vdash_{U_1} \neg\,\theta_1[a] \quad \text{et} \quad \mathfrak{M} \Vdash_{U_2} \neg\,\theta_2[a].$$

Ceci revient encore à l'existence de deux points α_1 et α_2 de X tels que

$$\mathfrak{M}_{\alpha_1} \Vdash \neg\,\theta_1[\bar{a}(\alpha_1)] \quad \text{et} \quad \mathfrak{M}_{\alpha_2} \Vdash \neg\,\theta_2[\bar{a}(\alpha_2)].$$

Cette situation est suggérée dans la figure 1 :

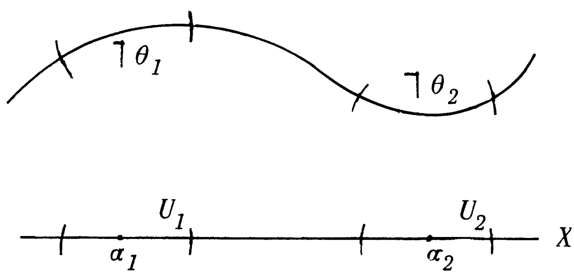

FIGURE 1

Notons que si on suppose X séparé et sans point isolé, on peut supposer les points α_1 et α_2 distincts et les ouverts U_1 et U_2 disjoints.

b) On voit de même que

$$(2) \qquad \mathfrak{M}(X) \models \exists x \neg\,\theta_1 \wedge \exists x \neg\,\theta_2$$

est équivalent à l'existence de sections globales a_1, a_2 de $\mathfrak{M}(X)$ et d'ouverts non vides U_1 et U_2 tels que

$$\mathfrak{M} \Vdash_{U_1} \neg\,\theta_1[a_1] \quad \text{et} \quad \mathfrak{M} \Vdash_{U_2} \neg\,\theta_2[a_2]$$

pourvu que $[\![\theta_1 ; a_1]\!]$ et $[\![\theta_2 ; a_2]\!]$ soient des ouverts réguliers. Cette situation est suggérée par la figure 2.

On a immédiatement que (1) $\Rightarrow$ (2). Mais on a inversement que

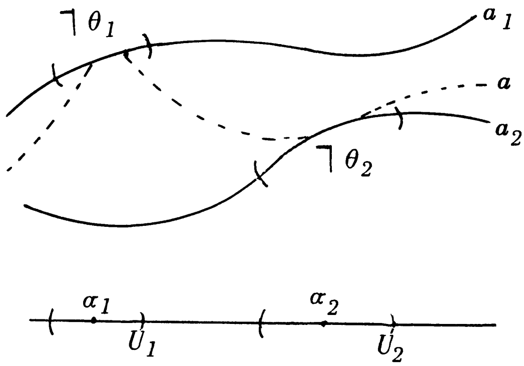

FIGURE 2

(2) ⇒ (1) si

- d'une part, on peut choisir les ouverts U_1 et U_2 disjoints, ce qui est le cas si X est séparé et sans point isolé,

- d'autre part, le faisceau $\mathfrak{M}$ est mou car alors la donnée des deux germes $\tilde{a}_1(\alpha_1)$ et $\tilde{a}_2(\alpha_2)$ est la donnée d'une section sur le fermé $\{\alpha_1, \alpha_2\}$, section qui s'étend à l'espace X tout entier.

On a donc obtenu le résultat suivant :

PROPOSITION 1. *Soit θ_1 et θ_2 deux formules atomiques. Supposons que*

1) pour tout a de $\mathfrak{M}(X)$, $[\![\theta_1; a]\!]$ et $[\![\theta_2; a]\!]$ soient des ouverts réguliers ;

2) X soit séparé et sans point isolé ;

3) $\mathfrak{M}$ soit un faisceau mou.

Alors,

$$\mathfrak{M}(X) \models \exists x(\neg\,\theta_1 \wedge \neg\,\theta_2)$$

si et seulement si

$$\mathfrak{M}(X) \models \exists x(\neg\,\theta_1) \wedge \exists x(\neg\,\theta_2).$$

Pour rapprocher cette présentation de [5], [2] et [4], notons qu'au lieu de travailler avec les ouverts de forcing $[\![\phi ; a]\!]$, on peut aussi travailler avec les domaines de satisfaction $K_\phi(a)$. On pose alors la définition suivante :

DEFINITION 1. *On dit que la L-structure $\mathfrak{M}$ sur X est sans point isolé* *si pour toute formule* ϕ *et toute section* a, $K_{\phi}(a)$ *est vide ou infini.*

On obtient alors la

PROPOSITION 2. *Supposons que* X *soit séparé,* $\mathfrak{M}$ *soit sans point isolé et soit un faisceau mou. Alors si* θ_1 *et* θ_2 *sont atomiques,*

$$\mathfrak{M}(X) \models \exists x(\neg\, \theta_1 \wedge \neg\, \theta_2)$$

si et seulement si

$$\mathfrak{M}(X) \models \exists x(\neg\, \theta_1) \wedge \exists x(\neg\, \theta_2).$$

2. STRUCTURE MOELLEUSE.

DEFINITION 2. *Soit* $\mathfrak{M}$ *un faisceau sur* X *et* $\mathcal{F}$ *un sous-faisceau de* $\mathfrak{M}$. *On dit que* $\mathcal{F}$ *est mou relativement à un ouvert* U *de* X *si pour tout fermé* F *de* X *contenu dans* U, *toute section* a *de* $\mathcal{F}$ *sur* F *s'étend en une section* b *de* $\mathfrak{M}$ *dont la restriction à* U *soit dans* $\mathcal{F}$.

Soit Φ une classe de formules.

DEFINITION 3. *On dit que la structure* $\mathfrak{M}$ *est* Φ*-moelleuse si pour toute formule* $\phi(x,y)$ *de* Φ *(où* $x=(x_1,\dots,x_n)$ *et* $y=(y_1,\dots,y_m)$*) et pour toute suite* $b=(b_1,\dots,b_m)$ *de sections globales, le faisceau interprétant* $\phi(x,b)$ *est mou relativement à l'ouvert* $[\![\exists x\,\phi(x,y);b]\!]$.

Le reste de ce paragraphe sera consacré à quelques exemples rudimentaires de structures moelleuses. Dans le cas booléen on a d'abord le résultat suivant:

PROPOSITION 3. *Soit* X *un espace booléen,* $\mathfrak{M}$ *un faisceau de* L*-structures sur* X, Φ *la classe des formules* ϕ *telles que pour toute famille* b *de sections globales,* $[\![\exists x\,\phi(x,y);b]\!]$ *soit un ouvert fermé. Alors* $\mathfrak{M}$ *est une structure* Φ*-moelleuse.*

DEMONSTRATION. Par hypothèse, pour ϕ dans Φ, $U=[\![\exists x\,\phi(x,y);b]\!]$ est un ouvert fermé et est donc lui-même un espace booléen. Soit $\mathcal{F}$ le faisceau interprétant $\phi(x,b)$. Pour voir que $\mathcal{F}$ est mou relativement à U il suffit, comme U est ouvert fermé, de voir que $\mathcal{F}|_U$ est mou sur U. Or on voit facilement qu'un faisceau sur un espace booléen est mou si et seulement si il est localement non vide. Comme

$$\mathfrak{M} \Vdash_U \exists x\, \phi(x,y)\,[b],$$

$\mathcal{F}|_U$ est bien localement non vide et la proposition est démontrée.

REMARQUES. 1) Si $\mathfrak{M}$ vérifie la condition (C) de Comer (cf. [2]) on voit facilement que la classe Φ contient toutes les formules sans $\forall$ (mais, éventuellement, avec $\neg\exists\neg$).

2) On pourrait montrer également que si X est un espace booléen métrisable, toute L-structure flasque est Φ-moelleuse pour la classe Φ des formules écrites sans $\forall$.

3) En sens inverse, nous remercions C. Mulvey de nous avoir fait remarquer que si X est un espace séparé, $\mathfrak{M}$ est mou et la théorie des tiges de $\mathfrak{M}$ est positivement modèle-complète, alors X est totalement discontinu dès que le langage L est assez riche.

Le problème qui se pose maintenant est celui de l'existence de structures Φ-moelleuses sur un espace non booléen pour une classe Φ non triviale. C'est la raison d'être des deux propositions suivantes (dont la démonstration paraîtra ailleurs).

Soit $\mathcal{C}$ le faisceau sur R des fonctions continues à valeurs réelles. Soit L_1 le langage ne contenant qu'un prédicat unaire (et sans égalité). En interprétant ce prédicat unaire dans $\mathcal{C}$ par le faisceau des fonctions ≥ 0, $\mathcal{C}$ devient un faisceau de L_1-structures.

PROPOSITION 4. *Le faisceau $\mathcal{C}$ de L_1-structures sur* R *est Φ-moelleux pour la classe Φ des doubles négations de formules sans $\forall$.*

Soit L_2 le langage de l'égalité. Le faisceau $\mathcal{C}$ est une structure faisceautique pour L_2.

PROPOSITION 5. *Le faisceau $\mathcal{C}$ de L_2-structures sur* R *est Φ-moelleux pour la classe Φ des doubles négations des formules de Horn sans quantificateurs.*

REMARQUE. La Proposition 5 ne peut être étendue à toutes les formules sans quantificateurs ni même à leur double négation : la formule

$$x = y_1 \vee x = y_2$$

et sa double négation ne sont pas molles pour les sections globales constantes $0, 1$.

3. UN LEMME A LA FEFERMAN-VAUGHT.

Nous abordons maintenant l'analyse de la démonstration du Théorème de Macintyre ([5], Théorème 2). Dans la première partie de sa démonstration, Macintyre redémontre, sur des bases nouvelles, un aspect du théorème de Feferman-Vaught [4] dans le cadre faisceautique. Cette première partie s'étend aux espaces non booléens grâce à une hypothèse de type «moelleux».

PROPOSITION 6. *Soit X un espace séparé, $\mathfrak{M}$ une L-structure sur X sans point isolé (cf. Définition 1). Supposons que $\mathfrak{M}$ soit Φ-moelleux pour Φ la classe des conjonctions de fomules atomiques.*

A toute formule existentielle $\psi(x)$ de L on peut associer effectivement :

- une formule Ψ du langage $<=, 0, 1>$ (langage de la structure $<\mathcal{P}(X), =, \phi, X>$, de la forme

$$\Psi = \bigvee_{i=1}^{k} \bigwedge_{j=1}^{l_i} \epsilon_{ij}(X_{ij}),$$

où $\epsilon_{ij}(X_{ij})$ est soit $X_{ij} = 1$, soit $X_{ij} \neq 0$,

- des formules existentielles $\psi_{ij}(x)$ de L,

de telle sorte que, pour tout $a = (a_1, \ldots, a_n)$ ($a_i \in \mathfrak{M}(X)$), les deux affirmations suivantes soient équivalentes :

(i) $\mathfrak{M}(X) \models \psi(x)[a]$,

(ii) $\mathcal{P}(X) \models \Psi((X_{ij}))[(K_{\psi_{ij}}(a))]$.

DEMONSTRATION. Il suffit évidemment de démontrer la proposition pour une fomule primitive $\psi(x)$, i.e. pour une formule de la forme :

$$(\exists y)(\bigwedge_{r=1}^{p} \phi_r(y, x) \wedge \bigwedge_{s=1}^{q} \neg \theta_s(y, x)),$$

où les ϕ_r et les θ_s sont atomiques. Posons :

$$\psi_0(x) = (\exists y)(\bigwedge_{r=1}^{p} \phi_r(y,x)),$$

$$\psi_s(x) = (\exists y)(\bigwedge_{r=1}^{p} \phi_r(y,x) \wedge \neg\, \theta_s(y,x)) \ (1 \leq s \leq q).$$

Il suffit de démontrer l'équivalence de

(i) $\mathfrak{M}(X) \models (\exists y)(\bigwedge_{r=1}^{p} \phi_r(y,x) \wedge \bigwedge_{s=1}^{q} \neg\, \theta_s(y,x))[a]$

et

(ii) $K_{\psi_0}(a) = X$ et $K_{\psi_s}(a) \neq \emptyset$ pour $1 \leq s \leq q$.

La condition (i) est équivalente à l'existence d'un b global tel que

(a_1) $\forall \alpha \in X \ \mathfrak{M}_\alpha \models \bigwedge_{r=1}^{p} \phi_r(y,x)[b(\alpha), a(\alpha)]$

et

(b_1) pour $1 \leq s \leq q$, il existe $\alpha_s \in X$ tel que

$$\mathfrak{M}_{\alpha_s} \models \neg\, \theta_s(y,x)[b(\alpha_s), a(\alpha_s)].$$

Comme $\mathfrak{M}$ est sans point isolé, on peut en outre supposer que les α_s sont distincts.

La proposition (ii) est, elle, équivalente à

(a_2) $\forall \alpha \in X \ \mathfrak{M}_\alpha \models (\exists y)(\bigwedge_{r=1}^{p} \phi_r(y,x))[a(\alpha)]$

et

(b_2) pour $1 \leq s \leq q$, il existe $\alpha_s \in X$ tel que

$$\mathfrak{M}_{\alpha_s} \models (\exists y)(\bigwedge_{r=1}^{p} \phi_r(y,x) \wedge \neg\, \theta_s(y,x))[a(\alpha_s)].$$

Comme $\mathfrak{M}$ est sans point isolé, on peut aussi supposer que les α_s sont distincts.

On a immédiatement que (i) entraîne (ii). Inversement, supposons que l'on ait (a_2) et (b_2). Sur le femé $F = \{\alpha_1, \dots, \alpha_q\}$ on a donc une section b' telle que

$$\mathfrak{M}_{\alpha_s} \models (\bigwedge_{r=1}^{p} \phi_r(y,x) \wedge \neg\, \theta_s(y,x))[b'(\alpha_s), a(\alpha_s)].$$

En vertu de (a_2), et comme ψ_0 est existentielle positive, on a

$$[\![\psi_0(x); a]\!] = X.$$

$\mathfrak{M}$ étant moelleuse pour les conjonctions d'atomiques, b' s'étend à X tout entier en une section b du faisceau interprétant $\bigwedge_{r=1}^{p} \phi_r(y, a)$. Pour ce b, on a bien (a_1) et, comme b étend b', on a aussi (b_1). La proposition est donc démontrée.

La proposition précédente contient la Proposition 2. On peut en fait, comme dans la démonstration de la Proposition 1, utiliser les ouverts de forcing. On a alors

PROPOSITION 7. *Dans les hypothèses de la Proposition 6, remplaçons «$\mathfrak{M}$ est sans point isolé» par*

- *X est sans point isolé*
- *$[\![\theta; a]\!]$ est un ouvert régulier pour toute formule atomique θ.*

On peut alors dans la conclusion remplacer l'affirmation (ii) par

(ii') $$\mathcal{P}(X) \models \Psi((X_{ij}))[([\![\psi_{ij}; a]\!])].$$

Nous montrerons en [7] que cette proposition s'étend en un théorème de Feferman-Vaught pour toutes les formules moyennant des hypothèses de type «moelleux» convenables.

4. LE THÉORÈME DE MACINTYRE.

Nous redémontrons maintenant le Théorème de Macintyre en utilisant les n^{os} 2 et 3. L'énoncé qui suit en diffère légèrement («... contient la théorie des anneaux intègres ...» au lieu de «... contient la théorie des anneaux sans idempotents triviaux ...»), mais cette différence n'influe pas sur les applications qui en sont données en [5].

THEOREME *(Macintyre). Si X est un espace booléen sans point isolé, L inclut le langage de la théorie des anneaux unitaires, $\mathfrak{M}$ est un faisceau de L-structures tel que la théorie des tiges soit complète, positivement modèle-complète et contienne la théorie des anneaux intègres, alors la théorie des sections globales de $\mathfrak{M}$ est modèle-complète.*

DEMONSTRATION. En vertu de la Proposition 3, $\mathfrak{M}$ est Φ-moelleuse pour la classe Φ des conjonctions d'atomiques. D'autre part comme la théorie des tiges est positivement modèle-complète, $\mathfrak{M}$ vérifie la condition (C) de Comer [2] et donc, comme X est sans point isolé, la structure $\mathfrak{M}$ est sans point isolé. La Proposition 6 s'applique.

Pour démontrer la proposition, il suffit de montrer que, si $\psi(x)$ est une formule primitive, $\neg\,\psi(x)$ est équivalente à une existentielle relativement à la théorie des sections globales de $\mathfrak{M}$.

En vertu de la Proposition 6 et en reprenant les notations de sa démonstration, on a que, quel que soit a,

$$(1) \qquad \mathfrak{M}(X) \models \neg\,\psi(x)[a]$$

si et seulement si

$$K_{\neg\psi_0}(a) \neq \emptyset \text{ ou il existe } s,\ 1 \leq s \leq q \text{ avec } K_{\neg\psi_s}(a) = X.$$

Comme la théorie des tiges est positivement modèle-complète, $\neg\,\psi_0(x)$ et $\neg\,\psi_s(x)$ sont équivalentes à des existentielles positives, disons

$$\bigvee_i \mu_i(x) \quad \text{et} \quad \bigvee_j \nu_{js}(x).$$

L'hypothèse (1) est alors équivalente à la disjonction :

$$(a_1)\ \exists i\ [\![\mu_i ; a]\!] \neq \emptyset \quad \text{ou} \quad (b_1)\ \exists s \bigcup_j [\![\nu_{js} ; a]\!] = X.$$

Un raisonnement topologique simple montre que ces propositions sont équivalentes à (a_2) et (b_2) respectivement :

$$(a_2) \qquad \exists i\ \exists b_i \neq 0\ \forall \alpha \in X \setminus [\![\mu_i ; a]\!]\ b_i(\alpha) = 0,$$

$$(b_2) \quad \exists s\ \exists b_{js}\ (\forall \alpha \in X \setminus [\![\nu_{js} ; a]\!]\ b_{js}(\alpha) = 0) \text{ et } \prod_j (1 - b_{js}) = 0 .$$

Que (a_2) et (b_2) soient équivalentes à la satisfaction dans $\mathfrak{M}(X)$ d'une existentielle résulte alors du Lemme suivant :

LEMME. *Supposons que la théorie des tiges de* $\mathfrak{M}$ *soit complète et contienne la théorie des anneaux intègres. Supposons que* $\mathfrak{M}$ *soit* Φ*-moelleuse pour la classe* Φ *des conjonctions d'atomiques. Soit* $\sigma(x)$ *une formule primitive positive* $(\exists y)(\bigwedge_i \phi_i(x, y))$. *Soit* $\sigma^{\#}(x, z)$ *la formule*

$$z \neq 0 \rightarrow (\exists x')(xz = x'z \wedge \sigma(x')).$$

Alors, quels que soient a, b *dans* $\mathfrak{M}(X)$, *on a*

$$(1) \qquad \mathfrak{M}(X) \models \sigma^{\#}(x,z)\,[a,b]$$

si et seulement si

$$(2) \qquad \{\alpha \in X \mid b(\alpha) \neq 0\} \subset K_{\sigma}(a).$$

DEMONSTRATION. Que (1) $\Rightarrow$ (2) est facile. Supposons donc que

$$C = \{\alpha \in X \mid b(\alpha) \neq 0\} \subset K_{\sigma}(a).$$

Il faut montrer que

$$\mathfrak{M}(X) \models \sigma^{\#}(x,z)\,[a,b].$$

Si $b = 0$, c'est évident. Supposons donc $b \neq 0$. Mais alors C est un fermé non vide et pour tout α de C,

$$\mathfrak{M}_{\alpha} \models (\exists y)(\bigwedge_{i} \phi_i(x,y))\,[a(\alpha)].$$

On a donc

$$\mathfrak{M}_{\alpha} \models (\exists x)(\exists y)(\bigwedge_{i} \phi_i(x,y))$$

et, la théorie des tiges étant complète, ceci a lieu pour tout α de X. Le caractère moelleux de $\mathfrak{M}$ permet alors de trouver a' tel que $a'(\alpha) = a(\alpha)$ pour tout α de C et $\forall \alpha \in X$, $\mathfrak{M}_{\alpha} \models \sigma(x)\,[a'(\alpha)]$. On a alors

$$\mathfrak{M}(X) \models (\exists x')(xz = x'z \wedge \sigma(x'))\,[a,b],$$

car il suffit d'interpréter les x' par les a'. Ceci achève la démonstration de lemme.

Le théorème est donc démontré.

BIBLIOGRAPHIE.

1. BENABOU J., Théories relatives à un corpus, *C.R.A.S. Paris* 281 (1975), 831.
   Fibrations petites et localement petites, *Ibid.* 897-900.

2. COMER S.D., Elementary properties of structures of sections, *Bol. Soc. Mat. Mexicana* 19 (1974), 78-85.

3. EHRESMANN C., Esquisses et types des structures algébriques, *Bul. Inst. Polit. Iaşi* 14 (1968).

4. FEFERMAN S. & VAUGHT R.L., The first-order properties of products of algebraic systems, *Fund. Math.* 47 (1959), 57-103.

5. MACINTYRE A., Model-completeness for sheaves of structures, *Fund. Math.* 81 (1973), 73-89.

6. MAKKAI M. & REYES G., First order categorical logic, *Lecture Notes in Math.* 611, Springer (1977).

7. LAVENDHOMME R. & LUCAS TH., Généralisation non-booléenne d'un théorème de Feferman-Vaught, En préparation.

8. REYES G., Théorie des modèles et faisceaux, *Sém. Math. Pure Univ. Catholique de Louvain* 63 (1978).

Institut de Mathématiques
Université Catholique de Louvain
2 Chemin du Cyclotron
1348 LOUVAIN-LA-NEUVE. BELGIQUE