CAHIERS DE
TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
CATÉGORIQUES

ALBERT BURRONI

Algèbres graphiques (sur un concept de dimension dans les langages formels)

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 22, nº 3 (1981), p. 249-265

<http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1981__22_3_249_0>

CAHIERS DE TOPOLOGIE
ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE
Vol. XXII-3 (1981)

3^e COLLOQUE SUR LES CATEGORIES
DEDIE A CHARLES EHRESMANN
Amiens, Juillet 1980

ALGÈBRES GRAPHIQUES
(Sur un concept de dimension dans les langages formels)

par Albert BURRONI

à E. B. et H. C.

INTRODUCTION.

Dans la première partie de ce résumé je montre que les structures suivantes :

les catégories, les catégories à limites finies, les topos,

sont équationnelles sur la catégorie des graphes (notée *Grph*). On peut ajouter à ces exemples : les catégories cartésiennes fermées, monoïdales, monoïdales fermées, les catégories abéliennes, les groupoïdes, les préordres, les triples,... bref «toutes» les structures étudiées en propre par les catégoriciens. Autrement dit, non seulement ces structures peuvent être décrites au moyen d'un «langage graphique», ce qui est assez évident, mais plus précisément au moyen d'un «langage graphique équationnel», ce qui n'est plus une évidence comme on pourra le voir sur les exemples de la Partie I. Un langage est équationnel s'il peut se déduire au moyen de symboles fonctionnels et d'égalités de termes. Un langage est graphique s'il décrit des structures dans *Grph* (et non plus dans la catégorie des ensembles *Ens* comme les langages usuels en Logique). De plus ces structures sont sont finitaires, il en résulte qu'elles sont triplables sur *Grph*, i.e. dans chaque cas il existe un triple T sur *Grph* dont elles sont les T-algèbres. Nous les appellerons des *algèbres graphiques* (relatives à T).

J'ai développé cette notion d'algèbre graphique pour l'appliquer à une description de la théorie des modèles. De ce point de vue un modèle est un homomorphisme d'algèbres graphiques $\mathfrak{M} : T \to E$ où T est une théorie mathématique et E est «l'univers du discours». La nature de ces algèbres graphiques dépend du type de logique utilisé et des modèles $\mathfrak{M}$ à décrire. Notamment lorsque T est une «théorie de structure graphique» et $E = Grph$, $\mathfrak{M}$ lui-même est une structure graphique.

La deuxième partie de ce résumé est une analyse des langages formels. Je dégage un concept de «dimension» qui mesure un ordre de complexité de ces langages et qui a des analogies avec celui utilisé en Topologie dans la description des CW-complexes.

Dejà le langage de la logique classique du premier ordre, à une ou plusieurs sortes, fait apparaître ce phénomène :

- en dimension 0 sont décrites les sortes dont on «déduit» les types ;
- en dimension 1 , les symboles fonctionnels et relationnels, dont on «déduit» les termes et les formules ;
- en dimension 2, les axiomes dont on déduit (sans guillemets ...) les démonstrations.

Mais le point de départ de ce travail a été pour moi de répondre à la question simple suivante : qu'arrive-t-il en théorie des modèles si on généralise la notion de prédicat n-aire $R \subset M^n$ ($n \in \mathrm{N}$) en celle de «fibré n-aire» $p : E \to M^n$ où p est une application quelconque et pas seulement une inclusion? On pourrait répondre que cela revient à ajouter une sorte de plus (celle de E) et remplacer un prédicat R par un symbole fonctionnel p . Mais il est également intéressant de regarder p comme un «prédicat généralisé» : c'est en effet ce qu'on fait lorsqu'on passe de la structure d'ensemble préordonné à celle de catégorie qui la généralise : la relation binaire $\leq$ du préordre est généralisée en un fibré binaire, i.e. en un graphe $E \rightrightarrows M$. On constate alors que les *propriétés* que doit satisfaire $\leq$ pour être un préordre sont métamorphosées en *données* sur le graphe $E \rightrightarrows M$ pour en faire une catégorie. Par exemple la propriété de transitivité du préordre devient la donnée de la loi de composition de la catégorie. Ces nouvelles données peuvent être alors soumises à de nouvelles propriétés qui sont en quelque sorte à la «dimension» supérieure. En l'occurence la loi de composition doit être associative. Les exemples de telles situations sont nombreux; ainsi toutes les algèbres graphiques consistent en la donnée d'un fibré binaire $p: E \to M^2$, de lois et d'équations sur ce fibré.

Ces exemples s'arrêtent dans leur description à la dimension 3. En revanche, dans le même esprit, l'emploi d'un langage de dimension 4 est utile pour décrire par exemple la structure de 2-catégorie. Pour fixer les idées disons que la donnée de l'ensemble D des 2-cellules d'une 2-catégorie est celle d'un fibré $D \to G(\rightrightarrows)$ (voir notations plus loin), où G est le graphe sous-jacent des 1-cellules, l'arité de ce fibré n'étant plus un entier comme en dimension 3 mais la «formule» «$X \rightrightarrows Y$» qui se réalise sur l'ensemble des «graphes internes» de G et qui dans le cas où G est seulement un préordre se réduit à la formule classique «$X \leq Y \wedge X \leq Y$». D'autres exemples nous conduiraient à des dimensions plus élevées et même infinie, comme par exemple les catégories dont les Hom sont munis de structures d'ensembles simpliciaux. Ces exemples expliquent, d'ailleurs, une partie de l'analogie que je fais avec les CW-complexes.

Je termine cette deuxième partie en résumant quelques arguments qui indiquent que ce concept de dimension peut avoir un sens intrinsèque. Il concerne alors toute T-algèbre où T est un triple sur une catégorie quelconque E. Lorsque $E = Ens$, la dimension peut toujours se réduire à 0, c'est sans doute ce qui explique que ce phénomène ne semble pas avoir attiré l'attention. Par contre avec $E = Grph$ cette dimension peut être irréductiblement aussi élevée que l'on veut.

Indiquons brièvement les liens qu'il peut y avoir entre mon point de vue et d'autres sur des sujets voisins. Une formulation catégorique de la théorie des modèles se trouve chez de nombreux auteurs, citons en particulier Bénabou, M. Coste, M.F. Coste, Diers, Ehresmann, Guitart, Joyal, Lair, Lawvere, Makkai-Reyes, Volger,... Dans ce travail il s'agit d'une formulation entièrement graphique, plus proche des travaux de Lambek mais également des esquisses d'Ehresmann, Lair, Conduché, A. Burroni. Ce que j'ai fait est plus précis que de démontrer par exemple que les topos sont «esquissables», ce qui assure seulement l'existence de topos libres sur les graphes ou encore l'équationnalité sur les catégories ; j'ai montré l'équationnalité sur les *graphes* et ceci parce que d'une certaine façon, j'ai construit une esquisse de topos adéquate. A partir de mon travail on retrouverait une confirmation de ce fait en utilisant les critères de triplabilité des structures esquissables formulés par Lair (*Diagramme*, Volume 1). Freyd a publié un article sur le «langage diagrammatique» et on m'a signalé que Blanc a développé un «langage graphique» dans sa thèse.

Enfin je ne peux terminer sans dire que certaines intuitions contenues ici datent de l'époque où j'étais, encore étudiant, élève de Charles Ehresmann. Je lui dois - parmi tant d'autres choses - mes premiers balbutiements dans le langage des graphes (orientés ...).

NOTATIONS. Un graphe est la donnée de deux ensembles, l'ensemble des objets M et l'ensemble des flèches E, et de deux applications de la forme $s, b: E \rightrightarrows M$. Les graphes forment les objets d'un topos $Ens^{(\rightrightarrows)}$. Les notations

$$(.), \quad (\to), \quad (\rightrightarrows), \quad \dots.$$

symbolisent, respectivement, le graphe à un objet et pas de flèche, le graphe à deux objets et une flèche les reliant, le graphe à deux flèches parallèles,... Si G, D sont des graphes, un homomorphisme de graphes $D \to G$ est appelé *diagramme de type* D *dans* G, leur ensemble sera noté $G(D)$. En particulier $G(.) = M$, $G(\to) = E$. De même, si $u: D' \to D$ est un homomorphisme de graphes, $G(u): G(D) \to G(D')$ est une application appelée *projection*; elle est définie par: $G(u)(d) = d \circ u$, pour tout $d: D \to G$. En particulier s, b sont des projections.

Par contre, si E est une catégorie et Σ un graphe, on note E^{Σ} la catégorie dont les objets sont les foncteurs $\Sigma \to D$; notamment, la catégorie $Ens^{(\rightrightarrows)}$ ci-dessus est ainsi définie.

I. STRUCTURES GRAPHIQUES.

Une *loi* (graphique) sur un graphe G est une application de la forme $\omega: G(D) \to G(D')$, où D, D' sont des graphes. Elle associe à tout diagramme de type D un diagramme de type D' dans G. On dit que ω est un D'-uplet de lois D-aires.

A partir d'une famille de lois on peut construire inductivement de nouvelles lois qu'on appellera des *termes* (et qu'on devrait appeler des «réalisations de termes»). Une *équation* (graphique) est alors une propriété qui s'exprime par une égalité $s = t$, où s, t sont des termes. Une *théorie équationnelle* (graphique) T fixe la forme des lois et des équations. Un graphe muni de telles lois et équations est alors appelé une *algèbre graphique* (relative à T).

La construction inductive des termes se fait en utilisant les lois données par la théorie, les projections (i.e. les applications de la forme $G(u)$), la composition et aussi une notion de «recollement» de termes. Dans un prochain article je donnerai une description complète de cette construction qui sera facile, a posteriori, à partir de ce premier travail. Mais dans ce résumé j'ai voulu éviter cette notion de «recollement» et j'ai fait en sorte, comme dans l'exemple 1 ci-dessous, de ne pas avoir besoin de l'utiliser et que les exemples se suffisent à eux-mêmes.

EXEMPLE 1 : LES CATEGORIES.

On définit usuellement cette structure sur un graphe G par deux lois

$$\circ : G(\to \to) \to G(\to) \text{ (composition)}, \quad id: G(.) \to G(\to) \text{ (identités)}$$

soumises aux équations

$$(1) \quad s(v \circ u) = s(u), \quad b(v \circ u) = b(v),$$

$$(2) \quad w \circ (v \circ u) = (w \circ v) \circ u,$$

$$(3) \quad s(id(X)) = X = b(id(X)),$$

$$(4) \quad id(Y) \circ u = u = u \circ id(X),$$

pour tout $\quad X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} T$.

On constate tout de suite l'une des difficultés des structures équationnelles sur les graphes - difficulté qui ne se présente pas sur les ensembles: Les équations (2) et (4), c'est-à-dire les termes qui y figurent, ne peuvent avoir de sens que si les équations (1) et (3) ont été préalablement écrites. Nous appellerons par la suite de telles équations des «équations de position». En fait on peut toujours éviter une telle situation en introduisant des lois plus compliquées. Nous allons le faire pour l'associativité.

Au lieu de la loi $\circ$ et des équations (1) et (2), on considére les lois et équations suivantes. On négligera dans les diagrammes la notation des objets. La première loi associe à tout $\cdot \xrightarrow{u} \cdot \xrightarrow{v} \cdot$ le diagramme

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "\lambda_1(u,v)"] \arrow[rr, bend right, "\lambda_3(u,v)"'] & \cdot \arrow[r, "\lambda_2(u,v)"] & \cdot \end{tikzcd}$$

avec les équations

$$\lambda_1(u,v) = u, \quad \lambda_2(u,v) = v.$$

La deuxième loi associe à tout $\cdot \xrightarrow{u} \cdot \xrightarrow{v} \cdot \xrightarrow{w} \cdot$ le diagramme

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "\mu_1(u,v,w)"] \arrow[rr, bend right, "\mu_4(u,v,w)"'] \arrow[rrr, bend right=40, "\mu_6(u,v,w)"'] & \cdot \arrow[r, "\mu_2(u,v,w)"] \arrow[rr, bend left, "\mu_5(u,v,w)"] & \cdot \arrow[r, "\mu_3(u,v,w)"] & \cdot \end{tikzcd}$$

avec les équations (en abrégé):

$$\mu_1 = u, \quad \mu_2 = v, \quad \mu_3 = w, \quad \mu_4 = \lambda_3(\mu_1, \mu_2), \quad \mu_5 = \lambda_3(\mu_2, \mu_3),$$

$$\lambda_3(\mu_4, \mu_3) = \mu_6 = \lambda_3(\mu_1, \mu_5).$$

Il est clair que ceci équivaut à définir sur G une loi de composition associative. On laisse au lecteur le soin de vérifier que des définitions analogues sont possibles pour les «éléments neutres». On obtient ainsi une définition équationnelle très nette de la structure de catégorie sur G.

Dans les exemples suivants nous négligerons de faire ce genre de transfomations faciles.

EXEMPLE 2: LES PREORDRES.

On les obtient en ajoutant à la structure de catégorie l'équation $u = v$ pour tout $\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, shift left, "u"] \arrow[r, shift right, "v"'] & \cdot \end{tikzcd}$.

EXEMPLE 3: CATEGORIE MUNIE D'UN OBJET FINAL.

Il est donné par une «constante-objet» $1 : G(\emptyset) \to G(.)$, mais la définition usuelle «pour tout objet X il existe un et un seul morphisme $X \to 1$» n'est pas équationnelle. On se donne donc une loi $\eta : G(.) \to G(\to)$, avec les équations

$$s(\eta(X)) = X, \quad b(\eta(X)) = 1.$$

Pour avoir l'unicité, on ajoute les équations

$$\eta(Y) \circ u = \eta(X) \text{ (pour tout } u: X \to Y\text{)}, \quad \eta(1) = id(1).$$

On en tire, en effet, pour $f: X \to 1$: $f = id(1) \circ f = \eta(1) \circ f = \eta(X)$.

EXEMPLE 4: LES ADJONCTIONS.

Cet exemple est, en fait, à «deux sortes». Son intérêt est de fixer la terminologie dont nous aurons besoin et de faciliter la compréhension des autres exemples. Une *adjonction* est un sextuplet (G, H, U, F, I, J) formé de deux catégories G, H, deux foncteurs $U: H \to G$, $F: G \to H$, deux transformations naturelles $I: id_G \to UF$, $J: FU \to id_H$. Ces données satisfont les «équations»:

$$UJ \circ IU = id(U), \quad JF \circ FI = id(F).$$

En abrégé on écrit $(I, J): F \dashv U$ ou simplement $F \dashv U$. Les adjonctions forment les objets d'une catégorie Adj.

PROPOSITION. *Le foncteur d'oubli* $Adj \to Grph^2 : (G, H, U, F, I, J) \mapsto (G, H)$ *(on note encore* G *le graphe sous-jacent à la catégorie* G*) est triplable.*

Pour la preuve je renvoie à l'Exemple 5 ci-dessous qui en donne les détails dans un cas particulier.

EXEMPLE 5: LES CATEGORIES A PRODUITS FIBRES.

Comme dans le cas de l'objet final, la définition des limites n'est pas a priori équationnelle. En réalité elle ne peut pas même être formulée, en général par des lois graphiques puisque celles-ci devraient être définies sur des diagrammes non pas quelconques mais commutatifs. Mais même dans les cas suivants utiles pour la construction de limites quelconques: les produits (finis ou infinis), les noyaux (simples ou multiples), les produits fibrés, où l'«arité» de la loi est un diagramme sans condition de commutativité la propriété des limites s'exprime usuellement non pas par des équations mais par des «formules de Hom». En réalité j'ai montré que dans chaque cas, par des constructions astucieuses et chaque fois différentes on parvient à donner des définitions équationnelles. Ici je me limite au seul cas utilisé plus loin, celui des produits fibrés. Pour ceux-ci la difficulté vient des mots «...pour tout carré commutatif...» qui exprime un quantificateur universel (graphique) borné. En fait je vais démontrer qu'une catégorie à produits fibrés est équationnelle grâce à une de leurs propriétés caractéristiques qui n'utilise que des triangles commutatifs. Ces triangles sont définis entièrement par la donnée de deux flèches $X'' \xrightarrow{m} X' \xrightarrow{p} X$, donc sans condition de commutativité.

Soit G une catégorie et $u: X \to Y$ un morphisme. On définit un foncteur $u_!: G/X \to G/Y$, où G/X, G/Y sont respectivement les catégories des «objets au-dessus» de X et Y et où $u_!(p) = u \circ p$ pour tout objet p de G/X. Se donner des produits fibrés sur G revient à se donner pour tout u une adjonction $(I_u, J_u): u_! \dashv u^*$. Je vais détailler ces données de façon équationnelle sur $\mathcal{G}rph$, mais dans un cadre à peine plus général ce qui en facilitera la compréhension et sera utile par la suite.

On va donc se donner équationnellement pour tout u une adjonction :

$$(G/X,\ G/Y,\ U_u,\ F_u,\ I_u, J_u).$$

Pour abréger la définition d'une loi $\omega: G(D) \to G(D')$ je donnerai sur un même diagramme en traits pleins les flèches de D et en pointillés les flèches de D'. Ces diagrammes contiennent en eux-mêmes des equations de position que je n'expliciterai pas. On se donne d'abord quatre lois :

$$\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[d, dashed, "U_u(q,n)"'] & \cdot \arrow[d, "n"] \\
\cdot \arrow[d, dashed, "U_u(q)"'] & \cdot \arrow[d, "q"] \\
\cdot \arrow[r, "u"'] & \cdot
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[d, "m"'] & \cdot \arrow[d, dashed, "F_u(p,m)"] \\
\cdot \arrow[d, "p"'] & \cdot \arrow[d, dashed, "F_u(p)"] \\
\cdot \arrow[r, "u"'] & \cdot
\end{tikzcd}$$

soumises aux équations suivantes : d'abord celles qui font de U_u, F_u des homomorphismes de graphes :

$$U_u(q \circ n) = U_u(q) \circ U_u(q, n), \quad F_u(p \circ m) = F_u(p) \circ F_u(p, m),$$

puis celles qui en font des foncteurs :

$$U_u(p, m \circ m') = U_u(p, m) \circ U_u(p \circ m, m'),$$
$$F_u(q, n \circ n') = F_u(q, n) \circ F_u(q \circ n, n'),$$

$$U_u(p, id(s(p))) = id(s(U_u(p))), \quad F_u(q, id(s(q))) = id(s(F_u(q))),$$

où $\cdot \xrightarrow{m'} \cdot \xrightarrow{m} \cdot \xrightarrow{p} \cdot$ et $\cdot \xrightarrow{n'} \cdot \xrightarrow{n} \cdot \xrightarrow{q} \cdot$.

Maintenant introduisons les transformations naturelles I_u, J_u (ou plutôt, comme pour F_u, U_u, les flèches qui les définissent):

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[drr, dashed, "U_u(F_u(p))"'] & & \bullet \arrow[ll, dashed, "I_u(p)"'] \arrow[d, "p"] & \\ & & \bullet \arrow[r, "u"'] & \bullet \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & \bullet \arrow[d, "q"'] & & \bullet \arrow[ll, dashed, "J_u(q)"'] \arrow[dll, dashed, "F_u(U_u(q))"] \\ \bullet \arrow[r, "u"'] & \bullet & & \end{tikzcd}$$

On exprime leur naturalité par les équations :

$$I_u(p) \circ m = U_u(F_u(p), F_u(p, m)) \circ I_u(p \circ m),$$

$$J_u(q) \circ F_u(U_u(q), U_u(q, n)) = n \circ J_u(q \circ n).$$

Reste enfin à écrire les équations d'adjonction :

$$U_u(q, J_u(q)) \circ I_u(U_u(q)) = id(s(U_u(q))),$$

$$J_u(F_u(p)) \circ F_u(p, I_u(p)) = id(s(F_u(p))).$$

Remarquons en passant que le sens de la flèche u n'a joué aucun rôle (en fait la flèche elle-même n'a joué jusqu'ici aucun rôle).

Pour décrire l'adjonction souhaitée $u_! \dashv u^*$ il suffit de faire coïncider $u_!$ avec F_u par les équations :

$$F_u(p) = p \circ u, \quad F_u(p, m) = m.$$

On peut alors prendre u^* défini par U_u, ce qui termine la preuve.

Evidemment si G est muni de plus d'un objet final, G admet toutes les limites projectives finies. Dualement on définit les limites inductives finies.

EXEMPLE 6 : LES CATEGORIES LOCALEMENT CARTESIENNES FERMEES.

Ce sont les catégories G qui admettent un objet final 1 et pour lesquelles chaque G/X est cartésienne fermée (définition due à Penon). Si dans la construction précédente on inversait le sens de la flèche u, cela ne changerait rien d'essentiel; alors u^* étant construit, on peut construire de même un nouvel adjoint à gauche $u^* \dashv u_*$, donc cette fois-ci en faisant coïncider u^* avec F_u. Ceci équivaut à faire de G une catégorie localement cartésienne fermée, en particulier cartésienne fermée.

EXEMPLE 7: LES TOPOS.

Pour faire du graphe G un topos on commence par se donner sur lui une structure équationnelle de catégorie à limites finies et cartésienne fermée. Alors à tout morphisme $u: X \to Y$ peut être associé un diagramme de la forme

$$\begin{tikzcd}
X\times_X X \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "i"'] & Y \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & Y+_X Y \\
 & Coim(u) & Im(u) \arrow[u, "j"'] &
\end{tikzcd}$$

où $X \xrightarrow{i} Coim(u)$ est le conoyau du produit fibré $X\times_Y X \rightrightarrows X$, $Im(u) \xrightarrow{j} Y$ est le noyau de la somme amalgamée $Y \rightrightarrows Y+_X Y$, toutes ces constructions étant équationnellement descriptibles : on a évidemment un morphisme

$$u': Coim(u) \to Im(u) \quad \text{tel que} \quad j\circ u'\circ i = u.$$

Or on sait que dans un topos u' est inversible; on peut donc définir sans risque deux «lois-flèches» $u \mapsto u'$, $u \mapsto u''$ soumises aux équations

$$j\circ u'\circ i = u, \quad u''\circ u' = id(Coim(u)), \quad u'\circ u'' = id(Im(u)).$$

Il en résulte en particulier que tout monomorphisme est un noyau.

Il ne reste plus qu'à introduire par une «constante-flèche» le morphisme classifiant

$$1 \xrightarrow{vrai} \Omega \quad (\text{équation } s(vrai) = 1).$$

Pour exprimer la propriété de classification on se donne une loi $(\to)$-aire qui associe à tout morphisme $u: X \to Y$ un diagramme de la forme

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "u'\circ i"'] & Y \arrow[dd] \\
Im(u) \arrow[ur, "j"'] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "p.f."] & \\
1 \arrow[r, "vrai"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

commutatif et où l'indication p.f. dans un carré indique qu'il est cartésien. Mais pour être complet disons que cette dernière condition s'exprime équationnellement en ajoutant un isomorphisme entre $Im(u)$ et $vrai^*(Y \to \Omega)$ commutant avec le reste de la figure, car il n'y a aucune raison pour que ces deux objets coïncident.

Donc tous les exemples précédents conduisent au résultat suivant

THEOREME. *La catégorie des topos (avec choix canoniques, cf. Remarque 1) est triplable sur la catégorie des graphes.* *)

La possibilité d'exprimer équationnellement dans un topos l'existence d'un objet des entiers reste ouverte.

REMARQUES. 1° Quand je parle de «catégorie à limites» il s'agit évidemment ici de catégories munies de limites «canoniques»; même chose pour toutes les données de ce genre, par exemple pour le morphisme classifiant $1 \to \Omega$ dans un topos, ce qui donne aussitôt par produits fibrés des sous-objets «canoniques».

2° Dans un prochain article je développerai la notion de *langage à Σ-sortes,* où Σ n'est plus un ensemble mais un graphe. Le cas des langages graphiques est obtenu pour $\Sigma = (\rightrightarrows)$. Pour décrire par exemple les catégories doubles ou les 2-catégories on utilisera d'autres graphes Σ.

II. LES FIBRÉS n-AIRES. DESCRIPTION DES LANGAGES FORMELS.

1. Construction des termes et des formules.

Les opérateurs usuels de la logique classique du premier ordre

$$\top, \perp, \neg, \vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \forall x, \exists x, \dots$$

peuvent se réaliser dans diverses algèbres graphiques adéquates (citons notamment: les catégories logiques de Volger, les catégories à déduction de Bénabou, les topos, etc...). On réalise des modèles dans ces algèbres graphiques en construisant par induction les notions de termes et de formules d'un langage.

Pour fixer les idées prenons par exemple une catégorie G munie

*) Je dois à Lambek de m'avoir signalé qu'une première démonstration était incomplète et à Coppey de m'avoir orienté vers la bonne solution.

d'un objet final 1 , d'un objet initial 0 et pour tout $u: X \to Y$ d'adjonctions de la forme

$$u_! \dashv u^* \dashv u_*, \qquad u^+ \dashv u_?$$

où les premières sont définies comme dans la Partie I et où $u_?$ est la notion duale de $u_!$ dans G^{op}, i.e. $u_?(q) = q \circ u$ pour tout $q: Y \to Y'$.

Rappelons brièvement comment, dans une telle algèbre graphique, on peut interpréter un langage classique :

Les limites projectives finies données par 1 et les u^* permettent les «changements de variables». Par exemple dans $G = Ens$, à partir du prédicat $R \subset M^2$ et du «changement»

$$i: \{0,1\} \to \{x,y\}: i(0) = x, \ i(1) = y \ (2 = \{0,1\})$$

on construit la formule atomique $R(x,y)$ par un produit fibré

$$\begin{tikzcd} R(x,y) \arrow[r] \arrow[d, hook] \arrow[dr, phantom, "p.f"] & R \arrow[d, hook] \\ M^{\{x,y\}} \arrow[r] & M^2 \end{tikzcd}$$

(Remarque: Pour simplifier dans tout cet article je confonds volontiers les notions syntaxiques avec leurs réalisations sémantiques : $R(x,y)$ ici n'est pas, à vrai dire, une formule atomique mais sa réalisation dans G.) Avec les mêmes données on exprime également les connecteurs $\top$, $\wedge$. Les noyaux permettent d'écrire les équations.

Les $u_!$ et les limites projectives finies permettent d'exprimer les termes.

Les u^+, avec 0 , permettent d'exprimer les limites inductives finies et donc les images. Avec les images on exprime les quantificateurs $\exists x$, ... et le connecteur $\vee$.

Finalement les exponentielles, données par les u_*, permettent d'exprimer les connecteurs $\Rightarrow$ et les quantificateurs $\forall x$, ... La négation $\neg$ et $\perp$ utilisent, de plus, 0 pour s'exprimer.

Ceci n'est évidemment qu'un exemple et on choisit telle ou telle forme d'algèbre graphique G selon le type de logique que l'on désire exprimer (classique, intuitionniste, d'ordre supérieur, graphique, etc...) et la nature des modèles à réaliser. On peut par exemple citer deux cas extrêmes: G pourrait être un topos; G pourrait aussi être simplement une catégorie monoïdale (pour réaliser des monoïdes par exemple).

2. Description de structures.

Commençons par un exemple: la notion de catégorie généralise celle d'ensemble préordonné (on peut caractériser ceux-ci comme les catégories dans lesquelles tous les diagrammes commutent!). Faisons un tableau mettant en parallèle les données usuelles sur ces deux structures. Les nombres entiers figurant dans la première colonne sont appelés *dimensions*; ils numérotent les étapes de la construction.

	Préordre	Catégorie
0	Ensemble de base M	Ensemble des objets M
1	prédicat binaire $(\leq) \subset M^2$	donnée d'un graphe $E \underset{b}{\overset{s}{\rightrightarrows}} M$ ou fibré binaire $E \xrightarrow{(s,b)} M^2$
2	axiomes $\vdash x \leq x$ $\vdash x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$	données d'applications $M^{\{x\}} \xrightarrow{id} E(x,x)$ $M^{\{x,y,z\}} \xrightarrow{\circ}$ $E(x,y) \times_{M^{\{x,y,z\}}} E(y,z) \Rightarrow_{M^{\{x,y,z\}}} E(x,z)$
3		. axiomes d'associativité et d'«éléments neutres»

où par exemple $E(x,y)$ désigne - de façon quelque peu incomplète - le produit fibré

$$\begin{tikzcd} E(x,y) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "p.f."] & E \arrow[d] \\ M^{\{x,y,z\}} \arrow[r] & M^2 \end{tikzcd}$$

obtenu par le changement de variable

$$2 \to \{x,y,z\}: \ 0 \mapsto x, \ 1 \mapsto y.$$

Les notations $\times_A$, $\Rightarrow_A$, où A est un ensemble, désignent respectivement le produit et l'exponentielle dans la catégorie Ens/A.

Considérons maintenant une situation plus générale: une structure du premier ordre est décrite par des symboles fonctionnels et relationnels, et plus généralement pour ces derniers par des symboles de «fibrés» (un fibré n-aire est une application de la forme $E \to M^n$). On observe dans la construction d'une syntaxe et de ses réalisations sémantiques une série d'étapes (les dimensions) que nous allons suggérer par un tableau très informel:

	Données	Constructions dérivées
-1		les objets canoniques tels que $0, 1, \ldots, 0 \to 1, \ldots$
0	les sortes $M, N, \ldots$ ou, si on veut, des flèches $M \to 1,\ N \to 1, \ldots$	les projections canoniques $M^n \to M^m$, $M \times N \to M, \ldots \qquad (n, m \in \mathrm{N})$
1	les lois $\omega : M^n \to M$ les fibrés $p : E \to M^n$	les termes, les formules sur les fibrés avec leurs flèches canoniques: $\Phi \to M^{\{x,y,z\}}, \quad \Phi \times_{M^n} \Psi \to \Phi, \ldots$
2	les «axiomes» $\Phi \xrightarrow{a} \Psi$	les «démonstrations»

Enfin la description de la théorie s'achève à la dimension 3 par la donnée d'un ensemble d'équations (commutation de diagrammes) et la théorie est en fait obtenue comme quotient de la congruence engendrée par ces équations.

Expliquons quelques détails:

1° Les formules des fibrés ne sont pas celles obtenues par les connecteurs usuels $\Lambda, \mathrm{V}, \Rightarrow, \ldots$ mais par leurs analogues pour les fibrés, i.e. $\times_{M^A}, +_{M^A}, \Rightarrow_{M^A}, \ldots$, où $A = \{x, y, z, \ldots\}$ est un ensemble de variables. Le connecteur V est en fait exprimé à la dimension 2 - par une image du coproduit $+_{M^A}$ (qui coïncide d'ailleurs avec le coproduit $+$). Les deux autres se réduisent automatiquement à Λ et $\Rightarrow$ lorsque les fibrés sont des prédicats.

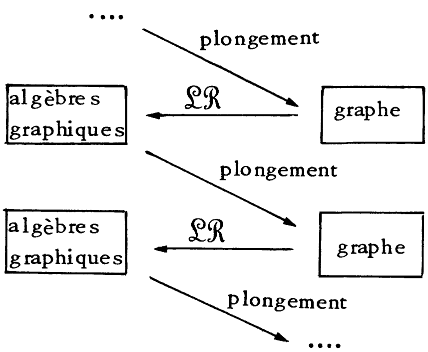
2° On peut exprimer de diverses manières - à la dimension 2 - qu'un fibré $i : \Phi \to M^n$ est un prédicat, i.e. un monomorphisme. On peut se donner par exemple un «axiome» de la forme $j : Im(i) \to \Phi$ et exiger au niveau des équations que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} \Phi \arrow[loop left, "id"] \arrow[rr, shift right] \arrow[dr, "i"'] & & Im(i) \arrow[ll, shift right, "j"'] \arrow[loop right, "id"] \arrow[dl] \\ & M^n & \end{tikzcd}$$

où les flèches non nommées représentent la décomposition canonique de i.

3° Les termes, tout comme les démonstrations, sont obtenus par composition (= modus ponens, pour les démonstrations) et en utilisant les limites projectives finies.

On constate alors que le processus de construction d'un langage formel est formé d'une série d'étapes, chacune de même nature, qu'on peut schématiser ainsi :



où $\mathfrak{L}\mathfrak{R}$ symbolise un opérateur qui fait passer d'un graphe à l'algèbre graphique qu'il engendre, en respectant les structures graphiques obtenues aux étapes précédentes.

3. Dimensions.

Cet opérateur $\mathfrak{L}\mathfrak{R}$ («libre relatif») suggère la situation générale suivante :

Soit $U : E' \to E$ un foncteur, A un objet de E' et un diagramme

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] & \bar{X} \\ U(A) & \end{tikzcd}$$

que nous interprétons comme une «adjonction d'une cellule $X \to \bar{X}$ à A au moyen du morphisme $X \to U(A)$». On peut chercher à fermer ce diagramme de façon universelle par un morphisme $A \to \bar{A}$ dans E' et un carré commutatif dans E

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] & \bar{X} \arrow[d] \\ U(A) \arrow[r] & U(\bar{A}) \end{tikzcd}$$

i.e. ces données doivent factoriser de façon unique par un morphisme de E' de source $\bar{A}$ tout autre système de données de cette nature. Cette construction de $\bar{A}$ combine les notions de somme amalgamée et d'objet libre : on obtient ce dernier cas pour $X = 0$, $A = 0$ (objets initiaux).

Soit $U: Alg(\mathrm{T}) \to Ens$ le foncteur d'oubli d'une catégorie d'algèbres d'un triple T sur Ens. Supposons que $X \to U(A)$ soit un morphisme d'adjonction, i.e. A est l'algèbre libre engendrée par X. Dans ce cas $\bar{A}$ est encore une algèbre libre engendrée par $\bar{X}$. Par exemple, si T est le triple des anneaux commutatifs, la formule

$$(\mathrm{Z}[X_1, \dots, X_n])[Y_1, \dots, Y_m] \approx \mathrm{Z}[X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_m]$$

exprime que, si l'on adjoint formellement de nouveaux éléments à un anneau libre, le résultat est encore un anneau libre ; ceci essentiellement parce que Ens est une catégorie booléienne : toute réunion (somme amalgamée) se ramène à une réunion disjointe. Par contre, avec une catégorie telle que $Grph$ lorsqu'on adjoint formellement un graphe à une algèbre graphique libre, la construction précédente donne une algèbre graphique qui peut ne plus être libre.

Pour illustrer ce phénomène je me contenterai de donner un exemple élémentaire : T est la théorie équationnelle sur $Grph$ présentée par une seule loi $\omega : G(.) \to G(\to)$ et une seule équation $s(\omega(X)) = X$. L'algèbre graphique libre A engendrée par le graphe (.) réduit à un seul objet a la forme suivante :

$$X \xrightarrow{\omega(X)} X' \xrightarrow{\omega(X')} X'' \longrightarrow \dots$$

Si on adjoint formellement à ce graphe un nouvel objet, l'algèbre graphique

$\bar{A}$ obtenue par adjonction d'une cellule qui a donc la forme $(.) \to (..)$ est le coproduit de deux copies de A, ce qui est évidemment le même résultat que si on avait tout de suite construit l'algèbre libre engendrée par $(..)$. Par contre si on adjoint formellement à A une flèche comme ceci :

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[d] & & \\ X \arrow[r] & X' \arrow[r] & X' \arrow[r] & \ldots \end{tikzcd}$$

l'algèbre graphique $\bar{A}$ a la forme suivante

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[r] \arrow[d] & Y' \arrow[r] \arrow[d] & \ldots \\ X \arrow[r] & X' \arrow[r] & X'' \arrow[r] & \ldots \end{tikzcd}$$

ce qui n'est plus une algèbre libre. Nous dirons qu'elle est de *dimension* 1 - les algèbres libres étant par définition de dimension 0. On peut évidemment adjoindre de nouvelles cellules, par exemple sur $\bar{A}$ une flèche $Z \to Y'$, etc... ; on s'éloigne encore un peu plus des algèbres libres.

Le fait que parfois ces adjonctions n'augmentent pas réellement la dimension, par exemple dans le cas $(..)$ étudié ci-dessus, n'est pas troublant. Après tout même en topologie le concept de dimension n'est pas simple : une cellule de dimension n - c'est-à-dire l'espace des

$$(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{R}^n \quad \text{tels que} \quad x_1^2 + \ldots + x_n^2 \leq 1 \text{ -}$$

a le même type d'homotopie qu'un point - c'est-à-dire que sa dimension à homotopie prés est 0. Cette réduction systématique à la dimension 0 n'arrive pas seulement dans le cas ensembliste, mais aussi pour certaines théories sur *Grph* comme par exemple la théorie des catégories.

D'autres exemples de ces réductions de dimension sont donnés dans la Partie I, puisque justement nous avons prouvé par exemple que l'esquisse de topos est réductible à la dimension 0 sur l'esquisse de graphe ($\rightrightarrows$) et non pas algèbrique seulement sur l'esquisse de catégorie, ce qui consisterait à dire qu'elle est de dimension 2 sur l'esquisse de graphe.

U. E.R. de Mathématiques
Université Paris VII, Tours 45-55
2 Place Jussieu 75005 PARIS