CAHIERS DE
TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
CATÉGORIQUES

MARCO GRANDIS

Sous-quotients et relations induites dans les catégories exactes

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 22, n° 3 (1981), p. 231-238

<http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1981__22_3_231_0>

CAHIERS DE TOPOLOGIE
ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE
Vol. XXII-3 (1981)

3^e COLLOQUE SUR LES CATEGORIES
DEDIE A CHARLES EHRESMANN
Amiens, Juillet 1980

SOUS-QUOTIENTS ET RELATIONS INDUITES DANS LES CATÉGORIES EXACTES

par Marco GRANDIS

1. INTRODUCTION.

Les «systèmes homologiques» se présentent souvent comme systèmes de sous-quotients d'un ou plusieurs objets, reliés par des morphismes induits.

L'homologie $Ker\,\partial / Im\,\partial$ d'un objet différentiel (A, ∂) est bien un sous-quotient de A, c'est-à-dire un quotient d'un sous-objet $(Ker\,\partial)$ ou dualement un sous-objet d'un quotient $(Cok\,\partial)$. En passant à un système plus riche, si $A = ((A_n), (\partial_n), (F_p A_n))$ est un complexe filtré, les termes de la suite spectrale associée

$$E^r_{p,q} = Z^r_{p,q} / (Z^{r-1}_{p-1,q+1} + B^{r-1}_{p,q}) \tag{1}$$

$$\begin{aligned} Z^r_{p,q} &= F_p A_n \cap \partial_n^{-1} (F_{p-r} A_{n-1}), \\ B^r_{p,q} &= F_p A_n + \partial_{n+1} (F_{p+r} A_{n+1}), \quad n = p+q, \end{aligned} \tag{2}$$

sont des sous-quotients des A_n, reliés par des morphismes induits par la différentielle; les transgressions et les suspensions existantes sont encore des morphismes induits par la différentielle et, respectivement, sa relation réciproque.

Toutefois l'étude des morphismes induits (plus, en général des relations induites) parait avoir été bloqué par leur manque de composabilité; voir le contr'exemple de MacLane [11, page 53].

Les travaux [5-10], dont on résume ici les résultats concernant directement les sous-quotients, prouvent que cette composabilité peut être établie lorsqu'on se borne à ne considérer, pour chaque objet A, que les sous-quotients ayant numérateur et dénominateur dans un sous-treillis *dis-*

tributif fixé du treillis (modulaire) des sous-objets de A ; on peut alors définir de façon correcte la notion (très utilisée) de sous-quotients «canoniquement isomorphes» du même objet.

La restriction envisagée est effectivement possible pour des systèmes homologiques intéressants, par exemple pour les suites spectrales: si $A = ((A_n), (\partial_n), (F_pA_n))$ est un complexe filtré, les termes $E^r_{p,q}$ sont des sous-quotients des A_n $(n = p + q)$ ayant numérateur et dénominateur dans le sous-treillis X_n engendré par la bifiltration:

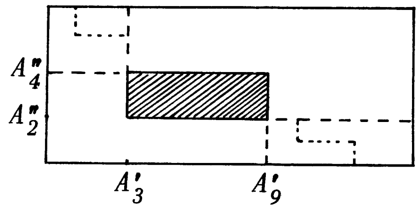
(3) $(F_pA_n)_p$

(4) $\ldots \partial_{n+1}F_pA_{n+1} \subset \ldots \partial_{n+1}A_{n+1} \subset \partial_n^{-1}O \subset \ldots \partial_n^{-1}F_pA_{n-1} \subset \ldots$

et ceci est distributif, par un théorème de Birkhoff sur les treillis modulaires engendrés par une bifiltration.

Ces résultats sont susceptibles d'un traitement catégorique, dans le cadre des catégoriès exactes (au sens de B. Mitchell [12]) et de leurs symétrisations; des travaux en cours de publication fondent sur cette base les diagrammes de Zeeman [13] pour les suites spectrales (ainsi que pour d'autres sytèmes); on ne peut ici qu'ébaucher les considérations suivantes: si $A = (A, (A'_p), (A''_q))$ est un objet bifiltré, la zone hachurée de la figure

(5)



représente une classe de sous-quotients de A canoniquement isomorphes (par rapport au treillis distributif engendré par la bifiltration), parmi lesquels sont $N \vee D/D$ et $N/N \wedge D$ (où $N = A'_9 \wedge A''_4$ et $D = A'_3 \vee A''_2$) et bien d'autres.

2. LES SOUS-QUOTIENTS COMME SOUS-OBJETS PAR RAPPORT À LA CATÉGORIE DES RELATIONS.

Plaçons-nous dans la catégorie $\mathcal{G}$ des groupes abéliens; si A est un objet et $N \subset M$ des sous-groupes de A, *le sous-quotient* M/N est déterminé par le diagramme commutatif à lignes exactes

$$(1) \qquad \begin{array}{ccccc} N & \xrightarrow{n} & A & \xrightarrow{p} & A/N \\ \uparrow 1 & & \uparrow m & & \uparrow m' \\ N & \xrightarrow[n']{} & M & \xrightarrow[p']{} & M/N \end{array}$$

qui le montre, en même temps, comme quotient d'un sous-objet (M) et sous-objet d'un quotient (A/N) de A.

Le carré à droite de (1) étant bicartésien (pullback et pushout), il en résulte *une* relation

$$(2) \qquad \mu = m\tilde{p}' = \tilde{p}m' : M/N \to A,$$

c'est-à-dire un morphisme de la catégorie involutive $\mathcal{G}^O$ des relations entre groupes abéliens ($\alpha \mapsto \tilde{\alpha}$ dénotant l'involution); μ est en effet un monomorphisme de $\mathcal{G}^O$ et l'application $(M, N) \mapsto \mu$ ainsi décrite réalise une correspondance biunivoque entre couples décroissants de sous-groupes de A et $\mathcal{G}^O$-sous-objets de A (voir [4, n° 6.12]). Il est donc légitime d'appeler *sous-quotients de* A (par rapport à $\mathcal{G}$) les sous-objets de A par rapport à $\mathcal{G}^O$.

L'involution de $\mathcal{G}^O$ étant régulière ($\alpha\tilde{\alpha}\alpha = \alpha$ pour toute relation α) on a encore une correspondance biunivoque

$$(3) \qquad \mu \mapsto \mu\tilde{\mu}$$

entre sous-quotients de A et *projections de* A

$$(\eta \in \mathcal{G}^O(A, A), \quad \eta = \tilde{\eta} = \eta\eta).$$

3. ISOMORPHISMES PSEUDO-CANONIQUES ENTRE SOUS-QUOTIENTS.

Si $\mu : M/N \to A$ et $\nu : M'/N' \to A$ sont des sous-quotients du même objet, on peut considérer la relation $\tilde{\nu}\mu : M/N \to M'/N'$: si c'est un isomorphisme (ceux de $\mathcal{G}$ et de $\mathcal{G}^O$ coïncident), on l'appellera *isomorphisme pseudo-canonique de* μ *à* ν ; cela se produit ssi [9, n° 2.14] :

$$(1) \qquad M \wedge N' = M' \wedge N, \quad M \vee N' = M' \vee N,$$

et alors $\tilde{\nu}\mu$ est le composé de deux isomorphismes de Noether de deuxième espèce:

$$(2)\qquad \frac{M}{N} = \frac{M}{M\wedge(N\vee N')} \tilde{\to} \frac{M\vee N'}{N\vee N'} = \frac{M'\vee N}{N\vee N'} \tilde{\to} \frac{M'}{M'\wedge(N\vee N')} = \frac{M'}{N'}$$

tandis que tout isomorphisme de Nœther de deuxième espèce est pseudo-canonique [9, Section VI].

Toutefois, ces isomorphismes *ne sont pas* composables (si μ, ν, ξ sont des sous-quotients de A et si $\tilde{\nu}\mu$, $\tilde{\xi}\nu$ sont des isomorphismes, $(\tilde{\xi}\nu)(\tilde{\nu}\mu)$ ne coïncide pas nécessairement avec $\tilde{\xi}\mu$ [11, page 53]), la relation (1) entre sous-quotients de A n'est généralement pas transitive, et il n'est pas intéressant de la prolonger par transitivité, étant donné que deux sous-quotients de A peuvent être liés par différents isomorphismes composés d'isomorphismes canoniques.

Il paraît plus utile de restreindre les sous-quotients de l'objet A qu'on considère: en effet, soit X un sous-treillis du treillis modulaire des sous-groupes de A, $\hat{X}$ l'ensemble des sous-quotients de A ayant numérateur et dénominateur dans X et S le sous-semi-groupe (involutif) de $\mathcal{G}O(A, A)$ engendré par les projections $\mu\tilde{\mu}$ ($\mu \in \hat{X}$).

THEOREME [10, n° 3.16]. *Les conditions suivantes sont équivalentes:*

a) les isomorphismes pseudo-canoniques entre éléments de $\hat{X}$ sont composables.

b) la relation (1) entre éléments M/N, M'/N' de $\hat{X}$ est transitive.

c) X est un treillis distributif.

d) S est un semi-groupe idempotent.

e) S est idempotent et quasi-inverse ($xyxzx = xyzx$ pour tout x, y, z de S). ■

4. LA CATÉGORIE EXACTE DISTRIBUTIVE ASSOCIÉE À $\mathcal{G}$.

Pour utiliser de façon souple le choix du treillis distributif, on introduit en [9] la catégorie $\mathcal{G}^{\#}$: les objets sont les couples (A, X), où A est un groupe abélien et X un sous-treillis distributif du treillis des sous-objets de A, contenant 0 et 1; les morphismes

$$(u, X, Y): (A, X) \to (B, Y)$$

sont déterminés par les homomorphismes $u: A \to B$ qui envoient X dans Y (par image directe de sous-objets) et Y dans X (par image inverse); la composition est évidente. $\mathcal{G}^{\#}$ est une catégorie exacte *distributive* (à treillis distributifs de sous-objets) puisque le treillis des $\mathcal{G}^{\#}$-sous-objets de (A, X) est canoniquement isomorphe à X, moyennant le foncteur canonique

$$r: \mathcal{G}^{\#} \to \mathcal{G}: (A, X) \mapsto A.$$

$\mathcal{G}^{\#}$ n'est pas abélienne (une catégorie abélienne distributive est forcément nulle), mais en tant que catégorie exacte, elle possède une catégorie de relations $\mathcal{G}^{\#O}$ [3, 1, 2, 4]; en outre, le foncteur exact et fidèle $r: \mathcal{G}^{\#} \to \mathcal{G}$ s'étend de façon unique en un foncteur fidèle $r^O: \mathcal{G}^{\#O} \to \mathcal{G}^O$ préservant l'involution [4; n° 4.10, 6.15], et il est facile de voir que celui-ci identifie les sous-quotients de A appartenant à $\hat{X}$ avec les $\mathcal{G}^{\#}$-sous-quotients de (A, X), c'est-à-dire les $\mathcal{G}^{\#O}$-sous-objets de (A, X) ; par le théorème précédent les isomorphismes pseudo-canoniques entre sous-quotients de $\mathcal{G}^{\#}$ sont toujours composables.

5. EXTENSION AUX CATÉGORIES EXACTES.

Il paraît maintenant naturel de placer cette étude dans le cadre des catégories exactes; en effet, les énoncés qu'on a résumés ici sont formulés pour ce genre de catégories (ou sous des hypothèses plus générales).

Le théorème rappelé au n° 3 a alors pour conséquence :

COROLLAIRE. *Si $\mathcal{E}$ est une catégorie exacte, les conditions suivantes sont équivalentes:*

a) les isomorphismes pseudo-canoniques entre sous-quotients de $\mathcal{E}$ sont composables.

b) la relation 3(1) entre sous-quotients de $\mathcal{E}$ est transitive.

c) $\mathcal{E}$ est distributive.

d) $\mathcal{E}^O$ est orthodoxe (i. e. tout composé d'endomorphismes idempotents est idempotent). ■

Si $\mathfrak{E}$ est distributive, les isomorphismes pseudo-canoniques seront appelés *canoniques.*

L'équivalence entre *a* et *d* est encore généralisable en remplaçant $\mathfrak{E}^O$ par une catégorie $\mathcal{H}$ munie d'une involution régulière (et les sous-quotients de $\mathfrak{E}$ par les sous-objets de $\mathcal{H}$) : voir [7 ; n° 3.17].

6. RELATIONS INDUITES POUR LES CATÉGORIES EXACTES DISTRIBUTIVES.

Soit $\mathfrak{D}$ une catégorie exacte distributive (par exemple $\mathfrak{D} = \mathfrak{E}^{\#}$, où $\mathfrak{E}$ est une catégorie exacte) et $\mathcal{H} = \mathfrak{D}^O$ la catégorie des relations sur $\mathfrak{D}$; ce qui suit serait encore valable pour toute catégorie $\mathcal{H}$ munie d'une involution régulière, et orthodoxe.

THEOREME [5, n° 1.27 ; et 6, n° 2.13]. *Il existe sur* $\mathcal{H}$ *un préordre* $\alpha \not\subset \beta$ *(domination) compatible avec la composition et l'involution, caractérisé par les conditions équivalentes suivantes :*

a) $\alpha = \alpha\tilde{\beta}\alpha$.

b) $\alpha = (\alpha\tilde{\alpha})\beta(\tilde{\alpha}\alpha)$.

c) il existe deux projections ϵ, η *telles que* $\alpha = \eta\beta\epsilon$.

d) il existe deux idempotents σ, τ *tels que* $\alpha = \tau\beta\sigma$.

En outre, si $\alpha \not\subset \beta$ *et* α *est un isomorphisme, alors* $\alpha = \beta$. ■

Maintenant, si $\alpha : A \to B$ est une relation (morphisme de $\mathcal{H}$) et $\mu : M \to A$, $\nu : N \to B$ des sous-quotients, on appellera *relation induite par* α *sur* μ *et* ν toute relation $\alpha' : M \to N$ telle que $\alpha' \not\subset \tilde{\nu}\alpha\mu$ [7, n° 3.8]. De cette façon on renonce à l'unicité de la relation induite, mais (grâce à l'orthodoxie de $\mathcal{H}$) on a de manière immédiate la composabilité des relations induites : Si dans le diagramme

(3)
$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "\alpha"] & \cdot \arrow[r, "\beta"] & \cdot \\ \cdot \arrow[u, "\mu"] \arrow[r, "\alpha'"'] & \cdot \arrow[u, "\nu"'] \arrow[r, "\beta'"'] & \cdot \arrow[u, "\xi"'] \end{tikzcd}$$

on a $\alpha' \not\subset \tilde{\nu}\alpha\mu$ et $\beta' \not\subset \tilde{\xi}\beta\nu$, alors

(2) $\beta'a' \mathrel{\not\subset} (\bar{\xi}\beta\nu)(\tilde{\nu}a\mu) = \bar{\xi}\beta(\nu\tilde{\nu})a\mu \mathrel{\not\subset} \bar{\xi}\beta 1 a\mu = \bar{\xi}(\beta a)\nu$

ce qui prouve que $\beta'a'$ est induit par βa sur μ et ξ.

En outre, grâce à la demière affirmation du théorème précédent, un éventuel isomorphisme induit $a' \mathrel{\not\subset} \tilde{\nu}a\mu$ est univoquement déterminé, puisque $a' = \tilde{\nu}a\mu$; les isomorphismes induits sont uniques et composables. Les isomorphismes canoniques entre sous-quotients de A sont évidemment les isomorphismes induits par 1_A.

7. LA SYMETRISATION INVERSE D'UNE CATÉGORIE EXACTE DISTRIBUTIVE.

La congruence associée au préordre $\mathrel{\not\subset}$:

(1) $$a\,\Phi\,\beta \quad .\Leftrightarrow. \quad a \mathrel{\not\subset} \beta \text{ et } \beta \mathrel{\not\subset} a$$

donne lieu à une catégorie *inverse* $\mathcal{K} = \mathcal{H}/\Phi$: tout morphisme $\bar{a}$ de $\mathcal{K}$ a un et un seul *inverse généralisé* $\bar{\beta}$ ($\bar{a}\bar{\beta}\bar{a} = \bar{a}$ et $\bar{\beta}\bar{a}\bar{\beta} = \bar{\beta}$); évidemment $\bar{\beta} = \bar{\bar{a}}$. Comme toute catégorie inverse, $\mathcal{K}$ a une et une seule involution régulière, déterminée par l'inverse généralisé; en outre ses idempotents coïncident avec les projections et commutent entre eux, donc $\mathcal{K}$ est encore orthodoxe [5; n° 1.25-27].

Le foncteur composé

(2) $$\mathfrak{D} \longrightarrow \mathfrak{D}^{o} \longrightarrow \mathfrak{D}^{\Theta} = \mathfrak{D}^{o}/\Phi$$

est aussi un plongement de $\mathfrak{D}$ dans une catégorie involutive ayant les mêmes objets, voire une symétrisation de $\mathfrak{D}$ [8; n° 1.2]. On prouve que deux sous-quotients μ, ν de A sont canoniquement isomorphes ssi leurs images $\bar{\mu}$, $\bar{\nu}$ dans $\mathfrak{D}^{\Theta}$ sont des monomorphismes équivalents ; on peut donc identifier les Θ-sous-quotients de A (sous-objets de A par rapport à $\mathfrak{D}^{\Theta}$) aux classes de sous-quotients de A canoniquement isomorphes; ils forment un demi-treillis par rapport à l'intersection. La catégorie $\mathcal{K} = \mathfrak{D}^{\Theta}$ étant orthodoxe, on peut considérer les morphismes induits entre Θ-sous-quotients de la même façon qu'au n° 6 ; ici, même les monomorphismes induits sont uniques (et composables) [10, n° 3.21].

REFERENCES.

1. H.B. BRINKMANN, Relations for exact categories, *J. Algebra* 13 (1969), 465-480.
2. H.B. BRINKMANN & D. PUPPE, Abelsche und exact Kategorien, Korrespondenzen, *Lecture Notes in Math.* 96, Springer (1969).
3. M.S. CALENKO, Correspondences over a quasi-exact category, *Mat. Sbornik* 73 (1967), 564-584; *Math. USSR Sb.* 2 (1967), 501-519.
4. M. GRANDIS, Symétrisations de catégories et factorisations quaternaires, *Atti Accad. Naz. Lincei Mem.* 14 (1977), 133-207.
5. M. GRANDIS, Canonical preorder and congruence in orthodox semigroups and categories (Orthodox categories 1), *Boll. Un. Mat. Ital.* 13-B (1976), 634-650.
6. M. GRANDIS, Regular and orthodox involution categories (Orthodox categories 2), *Ibidem* 14-A (1977), 38-48.
7. M. GRANDIS, Induction in orthodox involution categories (Orthodox categories 3), *Ann. Mat. Pura Appl.* 116 (1978), 87-99.
8. M. GRANDIS, Quaternary categories having orthodox symmetrizations (Orthodox symmetrizations 1), *Boll. Un. Mat. Ital.* 14-B (1977), 605-629.
9. M. GRANDIS, Exact categories and distributive lattices (Orthodox symmetrizations 2), *Ann. Mat. Pura Appl.* 118 (1978), 325-341.
10. M. GRANDIS, Exact categories and orthodox symmetrizations (Orthodox symmetrizations 3), *Boll. Un. Mat. Ital.* 16-B (1979), 178-195.
11. S. MAC LANE, *Homology*, Springer, 1963.
12. B. MITCHELL, *Theory of categories*, Academic Press, 1965.
13. E.C. ZEEMAN, On the filtered differential group, *Ann. Math.* 66 (1957), 557-585.

Istituto Matematico dell' Università
Via L. B. Alberti 4
I-16132 GENOVA. ITALIE