

# CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE CATÉGORIQUES

YVES DIERS

## **Sur les familles monomorphiques régulières de morphismes**

*Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques*, tome  
21, n° 4 (1980), p. 411-425

[http://www.numdam.org/item?id=CTGDC\\_1980\\_\\_21\\_4\\_411\\_0](http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1980__21_4_411_0)

© Andrée C. Ehresmann et les auteurs, 1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## SUR LES FAMILLES MONOMORPHIQUES REGULIERES DE MORPHISMES

par Yves DIERS

### 0. INTRODUCTION.

On introduit des procédés de construction de familles monomorphiques régulières de morphismes d'une catégorie: finition régulière, équivalence, composition et décomposition régulières, finalité régulière. Appliqués aux familles d'algèbres quotients dans les catégories algébriques, ils donnent toutes les versions généralisées du théorème chinois sur les systèmes de congruences. Ils permettent aussi de découvrir d'autres familles monomorphiques régulières. On montrera dans un prochain article comment l'usage de ces familles peut se substituer avantageusement à l'usage des théorèmes chinois dans les critères de représentabilité par des faisceaux.

Les familles monomorphiques régulières de morphismes sont encore appelées familles monomorphiques strictes ou effectives dans [4]. Quand elles sont réduites à un morphisme, on dit monomorphismes réguliers [1, 3, 8]. Ces familles ne sont pas stables par les procédés habituels de construction des familles de morphismes de même source: finition (=saturation), composition, décomposition, image directe. En outre, dans la catégorie des ensembles par exemple, ces familles ne coïncident pas avec les familles globalement injectives et cela contrairement aux familles épimorphiques régulières de morphismes qui coïncident avec les familles globalement surjectives. Ainsi on montre qu'un couple de deux applications surjectives  $(f: E \rightarrow F, g: E \rightarrow G)$  est monomorphique régulier ssi il est globalement injectif et si les deux relations d'équivalence définies sur  $E$  par  $f$  et  $g$  commutent. De même, une famille finie de surjections

$$(f_1: E \rightarrow F_1, \dots, f_n: E \rightarrow F_n)$$

est monomorphique régulière si elle est globalement injective et si les  $n$  relations d'équivalence sur  $E$  définies par  $f_1, \dots, f_n$  commutent deux à

deux et ont une composition distributive par rapport à l'intersection.

Les résultats acquis dans la catégorie des ensembles s'étendent en une certaine mesure aux catégories d'algèbres usuelles. Dans la catégorie des anneaux commutatifs unitaires, le théorème chinois sur les systèmes de congruences [2] exprime précisément la présence d'une famille monomorphique régulière d'homomorphismes. Il en est de même de toutes ses versions généralisées. Dans les catégories arithmétiques, i. e. algébriques au sens de F. W. Lawvere dans lesquelles la composition des relations d'équivalence est commutative et distributive par rapport à l'intersection, toute famille monomorphique finie d'algèbres quotients est monomorphique régulière.

Parmi d'autres familles monomorphiques régulières de morphismes, citons les familles d'anneaux de fractions

$$(A \rightarrow A[a_1^{-1}], \dots, A \rightarrow A[a_n^{-1}]),$$

où  $a_1, \dots, a_n$  engendrent le  $A$ -module  $A$ .

### 1. FAMILLES MONOMORPHIQUES REGULIERES [4].

Dans toute la suite on considère une catégorie complète et cocomplète  $B$  et des familles de morphismes de  $B$  ayant une source commune.

Une famille  $(f_i: X \rightarrow X_i)_{i \in I}$  se factorise (resp. uniquement) par une famille  $(g_i: Y \rightarrow X_i)_{i \in I}$  s'il existe un morphisme (resp. et un seul)  $f: X \rightarrow Y$  vérifiant  $g_i f = f_i$  pour tout  $i \in I$ .

Une famille  $(f_i: X \rightarrow X_i)_{i \in I}$  domine une famille  $(g_i: Y \rightarrow X_i)_{i \in I}$  si pour tout couple  $(i, j) \in I \times I$  et en notant  $(f_{ij}^i: X_i \rightarrow X_{ij}, f_{ij}^j: X_j \rightarrow X_{ij})$  la somme amalgamée de  $(f_i: X \rightarrow X_i, f_j: X \rightarrow X_j)$ , on a  $f_{ij}^i g_i = f_{ij}^j g_j$ .

Une famille de morphismes de même source est *monomorphique régulière* si toute famille de morphismes qu'elle domine se factorise uniquement par elle. Elle est alors monomorphique.

### 2. FINITION REGULIERE.

Une famille  $(f_i: X \rightarrow X_i)_{i \in I}$  est plus fine qu'une famille de morphismes  $(g_j: X \rightarrow Y_j)_{j \in J}$  si tout membre de la seconde se factorise par un

membre au moins de la première.

L'image directe d'une famille  $(f_i: X \rightarrow X_i)_{i \in I}$  par un morphisme  $g: X \rightarrow Y$  est la famille  $(g_i: Y \rightarrow Y_i)_{i \in I}$  où  $g_i$  est obtenu à partir de  $f_i$  par somme amalgamée avec  $g$ .

2.0. DEFINITION. Une famille  $(f_i: X \rightarrow X_i)_{i \in I}$  est *régulièrement plus fine* qu'une famille  $(g_j: X \rightarrow Y_j)_{j \in J}$  si elle est plus fine et si l'image directe de  $(g_j)$  par chaque membre de  $(f_i)$  est monomorphique.

2.1. PROPOSITION. *Toute famille régulièrement plus fine qu'une famille monomorphique régulière est monomorphique régulière.*

PREUVE. Soit  $(g_j: X \rightarrow Y_j)_{j \in J}$  une famille monomorphique régulière et  $(f_i: X \rightarrow X_i)_{i \in I}$  une famille régulièrement plus fine que  $(g_j)$ . Pour chaque  $j \in J$  choisissons  $i \in I$  et  $m_{ji}: X_i \rightarrow Y_j$  tels que  $g_j = m_{ji} f_i$ . La famille  $(f_i)$  est monomorphique puisque si

$$m, n: Z \rightrightarrows X \text{ vérifient } f_i m = f_i n \text{ pour tout } i \in I,$$

alors ils vérifient

$$g_j m = m_{ji} f_i m = m_{ji} f_i n = g_j n \text{ pour tout } j \in J,$$

et par suite  $m = n$ . Soit  $(h_i: Z \rightarrow X_i)_{i \in I}$  une famille dominée par  $(f_i)$ . Pour  $j \in J$ , posons  $h_j = m_{ji} h_i$ . Le morphisme  $h_j$  ne dépend pas du choix de  $m_{ji}: X_i \rightarrow Y_j$  puisque, si  $m_{ji}': X_i \rightarrow Y_j$  vérifie  $m_{ji}' f_i = g_j$ , alors on a  $m_{ji}' h_i = m_{ji} h_i$ . La famille  $(g_j)$  domine la famille  $(h_j: Z \rightarrow Y_j)_{j \in J}$ . En effet, soit

$$(j, j') \in J \times J, \quad g_j = m_{ji} f_i, \quad g_{j'} = m_{j'i'} f_{i'}$$

et  $(g_{jj'}^i: Y_j \rightarrow Y_{jj'}, g_{jj'}^{i'}: Y_{j'} \rightarrow Y_{jj'})$  la somme amalgamée de

$$(g_j: X \rightarrow Y_j, g_{j'}: X \rightarrow Y_{j'});$$

les relations

$$g_{jj'}^i m_{ji} f_i = g_{jj'}^i g_j = g_{jj'}^{i'} g_{j'} = g_{jj'}^{i'} m_{j'i'} f_{i'}$$

impliquent la relation

$$g_{jj'}^i m_{ji} h_i = g_{jj'}^{i'} m_{j'i'} h_{i'} \text{ soit } g_{jj'}^i h_j = g_{jj'}^{i'} h_{j'}.$$

La famille  $(h_j)$  se factorise donc par la famille  $(g_j)$  en un morphisme  $h: Z \rightarrow X$ . Soit  $k \in I, j \in J$  et  $(g_{kj}^k: X_k \rightarrow Y_{kj}, f_{kj}^i: Y_j \rightarrow Y_{kj})$  la somme

amalgamée de  $(f_k: X \rightarrow X_k, g_j: X \rightarrow Y_j)$ . La relation

$$\hat{g}_{kj}^k f_k = f_{kj}^j g_j = f_{kj}^j m_{ji} f_i$$

implique la relation  $\hat{g}_{kj}^k h_k = f_{kj}^j m_{ji} h_i$  et par suite

$$\hat{g}_{kj}^k h_k = f_{kj}^j h_j = f_{kj}^j g_j h = \hat{g}_{kj}^k f_k h.$$

Or la famille  $(\hat{g}_{kj}^k: X_k \rightarrow Y_{kj})_{j \in J}$  est l'image directe de la famille  $(g_j)$  par  $f_k$ . Elle est donc monomorphique et cela implique  $h_k = f_k h$ . Ainsi la famille  $(h_i)$  se factorise par la famille  $(f_i)$  en  $h$ . Ceci achève de prouver que la famille  $(f_i)$  est monomorphique régulière.

### 3. DECOMPOSITION REGULIERE.

Soit  $(f_i: X \rightarrow X_i)_{i \in I}$  une famille de morphismes de source  $X$  et pour chaque  $i \in I$ , soit  $(f_{ij}: X_i \rightarrow X_{ij})_{j \in J_i}$  une famille de morphismes de source  $X_i$ . La famille composée de la famille  $(f_i)_{i \in I}$  avec les familles  $(f_{ij})_{j \in J_i}$  est la famille  $(f_{ij} f_i: X \rightarrow X_{ij})_{(i,j) \in \coprod_{i \in I} J_i}$ .

3.0. PROPOSITION. *Si la famille composée  $(f_{ij} f_i)$  est monomorphique régulière et si toutes les familles  $(f_{ij})$  sont monomorphiques, alors la famille  $(f_i)$  est monomorphique régulière.*

PREUVE. La famille  $(f_i)$  est plus fine que la famille composée  $(f_{ij} f_i)$ . En outre l'image directe de la famille composée  $(f_{ij} f_i)$  par un morphisme  $f_i$  contient l'image directe  $(s_{ij})_{j \in J_i}$  de la famille  $(f_{ij} f_i)_{j \in J_i}$  par  $f_i$ , où chacun des morphismes  $s_{ij}$  factorise le morphisme  $f_{ij}$ . Puisque les familles  $(f_{ij})_{j \in J_i}$  sont monomorphiques, les familles  $(s_{ij})_{j \in J_i}$  le sont aussi, de même que l'image directe de  $(f_{ij} f_i)$  par  $f_i$ . La famille  $(f_i)$  est donc régulièrement plus fine que la famille composée  $(f_{ij} f_i)$  et le résultat se déduit de la Proposition 2.1.

### 4. COMPOSITION REGULIERE.

Avec les notations du 3, pour chaque  $(i, i') \in I \times I$  on note

$$(f_{ii'}^i: X_i \rightarrow X_{ii'}, f_{ii'}^{i'}: X_{i'} \rightarrow X_{ii'})$$

la somme amalgamée de  $(f_i: X \rightarrow X_i, f_{i'}: X \rightarrow X_{i'})$  et pour chaque quadru-

plet  $(i, j, i', j')$  tel que  $j \in J_i$  et  $j' \in J_{i'}$ , on note

$$(f_{ij}^{ij}: X_{ij} \rightarrow X_{ij}, f_{ij'}^{i'j'}: X_{i'j'} \rightarrow X_{i'j'})$$

la somme amalgamée de

$$(f_{ij}f_i: X \rightarrow X_{ij}, f_{i'j'}f_{i'}: X \rightarrow X_{i'j'})$$

et on note  $f_{ij'}^{i'j'}: X_{ii'} \rightarrow X_{ij'}$ , le morphisme canoniquement défini par ces deux sommes amalgamées.

4.0. DEFINITION. La famille  $(f_{ij}f_i)$  est régulièrement composée de la famille  $(f_i)$  avec les familles  $(f_{ij})$  si pour tout  $(i, i') \in I \times I$  la famille

$$(f_{ij'}^{i'j'}: X_{ii'} \rightarrow X_{ij'})_{(j, j') \in J_i \times J_{i'}}$$

est monomorphique.

4.1. PROPOSITION. Toute famille de morphismes régulièrement composée de familles monomorphiques régulières est monomorphique régulière.

PREUVE. Avec les notations précédentes, soit  $(g_{ij}: Y \rightarrow X_{ij})_{(i, j) \in \coprod_{i \in I} J_i}$  une famille dominée par la famille composée  $(f_{ij}f_i)$ . Pour chaque  $i \in I$ , la famille  $(g_{ij}: Y \rightarrow X_{ij})_{j \in J_i}$  est dominée par la famille  $(f_{ij})_{j \in J_i}$  et par suite elle se factorise par  $(f_{ij})$  en un morphisme  $g_i: Y \rightarrow X_i$ . Montrons que la famille  $(f_i)$  domine la famille  $(g_i)$ . Soit  $(i, i') \in I \times I$  et  $(i, j, i', j')$  tel que  $j \in J_i$  et  $j' \in J_{i'}$ . On a

$$\begin{aligned} f_{ij'}^{i'j'} \circ f_{ii'}^i \circ g_i &= f_{ij'}^{i'j'} \circ f_{ij} \circ g_i = f_{ij'}^{i'j'} \circ g_{ij} = f_{ij'}^{i'j'} \circ g_{i'} \circ f_{i'j'} = \\ &= f_{ij'}^{i'j'} \circ f_{i'j'} \circ g_{i'} = f_{ij'}^{i'j'} \circ f_{ii'}^i \circ g_{i'}. \end{aligned}$$

La famille  $(f_{ij'}^{i'j'}: X_{ii'} \rightarrow X_{ij'})_{(j, j') \in J_i \times J_{i'}}$ , étant monomorphique, on en déduit  $f_{ii'}^i \circ g_i = f_{ii'}^i \circ g_{i'}$ . La famille  $(g_i)$  se factorise donc par la famille  $(f_i)$  en un morphisme  $g: Y \rightarrow X$ . Le morphisme  $g$  factorise alors la famille  $(g_{ij})$  par la famille composée  $(f_{ij}f_i)$ . Puisque par ailleurs la composée de familles monomorphiques est monomorphique, il s'ensuit que la famille  $(f_{ij}f_i)$  est monomorphique régulière.

## 5. EQUIVALENCE.

5.0. DEFINITION. Deux familles de morphismes de source  $X$  sont équi-

*valentes* si chaque membre de chacune d'elles se factorise par un membre au moins de l'autre.

5.1. PROPOSITION. *Pour deux familles de morphismes de source  $X$ , les assertions suivantes sont logiquement équivalentes :*

- (1) *elles sont équivalentes ;*
- (2) *elles engendrent le même cocrible de  $X$  ;*
- (3) *chacune d'elles est régulièrement plus fine que l'autre.*

PREUVE. Les implications (1)  $\Leftrightarrow$  (2) et (3)  $\Rightarrow$  (1) sont immédiates. Soit  $(f_i: X \rightarrow X_i)_{i \in I}$  et  $(g_j: X \rightarrow Y_j)_{j \in J}$  deux familles équivalentes. Montrons que  $(f_i)$  est régulièrement plus fine que  $(g_j)$ . Soit  $i \in I$ . Il existe  $j \in J$  et  $m_{ij}: Y_j \rightarrow X_i$  vérifiant  $m_{ij}g_j = f_i$ . Si  $(s_{ij}: X_i \rightarrow X_{ij}, t_{ij}: Y_j \rightarrow X_{ij})$  est la somme amalgamée de  $(f_i: X \rightarrow X_i, g_j: X \rightarrow Y_j)$ , il existe un unique morphisme  $n_{ij}: X_{ij} \rightarrow X_i$  vérifiant

$$n_{ij}s_{ij} = 1_{X_i} \quad \text{et} \quad n_{ij}t_{ij} = m_{ij}$$

et par suite  $s_{ij}$  est monomorphique. Or l'image directe de  $(g_j)$  par le morphisme  $f_i$  contient le morphisme  $s_{ij}$ , elle est donc monomorphique.

5.2. COROLLAIRE. (1) *Toute famille de morphismes équivalente à une famille monomorphique régulière est monomorphique régulière.*

(2) *Une famille de morphismes de source  $X$  est monomorphique régulière ssi le cocrible de  $X$  engendré par cette famille est monomorphique régulier.*

5.3. DEFINITION. Une famille  $(f_i: X \rightarrow X_i)_{i \in I}$  est *projective* s'il existe une catégorie  $I$  ayant  $I$  pour classe d'objets et un diagramme  $(X_i)_{i \in I}$  de  $B$  tel que  $(f_i: X \rightarrow X_i)_{i \in I}$  soit la limite de  $(X_i)_{i \in I}$ .

5.4. PROPOSITION. *Une famille de morphismes est monomorphique régulière ssi elle est équivalente à une famille projective de morphismes.*

PREUVE. Soit  $(f_i: X \rightarrow X_i)_{i \in I}$  une famille monomorphique régulière de morphismes. La sous-catégorie pleine  $R$  de la catégorie  $X/B$  ayant pour objets les morphismes de source  $X$  qui se factorisent par un morphisme de  $(f_i)$  est telle que

$$\lim_{\leftarrow} R = (f: X \rightarrow Y)_{f \in R}.$$

SUR LES FAMILLES MONOMORPHIQUES REGULIERES DE MORPHISMES

Alors la famille  $(f: X \rightarrow Y)_{f \in \text{Obj}(\mathbf{R})}$  est projective et équivalente à la famille  $(f_i)$ . Réciproquement toute famille projective de morphismes est monomorphique régulière, ainsi que toute famille équivalente à une famille projective.

**6. FINALITE REGULIERE.**

6.0. PROPOSITION. *Une famille de morphismes de même source, telle que toute sous-famille finie est contenue dans une sous-famille finie monomorphique régulière, est monomorphique régulière.*

PREUVE. Soit  $(f_i: X \rightarrow X_i)_{i \in I}$  une telle famille. Il existe une sous-famille finie monomorphique régulière  $(f_i)_{i \in I_0}$  contenant la sous-famille vide. La famille  $(f_i)_{i \in I}$  est donc monomorphique. Soit  $(g_i: Y \rightarrow X_i)_{i \in I}$  une famille dominée par  $(f_i)_{i \in I}$ . Alors  $(g_i)_{i \in I_0}$  est dominée par  $(f_i)_{i \in I_0}$  et par suite elle se factorise par  $(f_i)_{i \in I_0}$  en un morphisme  $g: Y \rightarrow X$ . Soit  $i' \in I$ . Il existe une sous-famille finie monomorphique régulière  $(f_i)_{i \in I'}$  qui contient la sous-famille finie  $(f_i)_{i \in I_0 \cup \{i'\}}$ . La sous-famille  $(g_i)_{i \in I'}$  étant dominée par la sous-famille  $(f_i)_{i \in I'}$  se factorise par elle en un morphisme  $g': Y \rightarrow X$ . Mais on a nécessairement  $g = g'$ , ce qui implique  $f_{i'}g = g_{i'}$ . La famille  $(g_i)_{i \in I}$  se factorise donc par la famille  $(f_i)_{i \in I}$ .

**7. FAMILLES MONOMORPHIQUES REGULIERES D'ALGEBRES QUOTIENTS.**

7.0. Familles d'ensembles quotients.

7.0.0. PROPOSITION. *Si R et S sont deux relations d'équivalence sur un ensemble E, le couple des deux applications quotients :*

$$(E/R \cap S \rightarrow E/R, E/R \cap S \rightarrow E/S)$$

*est monomorphique régulier dans Ens ssi R et S commutent, i. e. ssi*

$$S \circ R = R \circ S.$$

PREUVE. Il est immédiat que le couple est monomorphique. Notons  $[R \circ S]$  la relation d'équivalence sur E engendrée par  $R \circ S$ . Les applications quotients  $(E/R \rightarrow E/[R \circ S], E/S \rightarrow E/[R \circ S])$  forment la somme amalgamée de  $(E/R \cap S \rightarrow E/R, E/R \cap S \rightarrow E/S)$ . Le couple



$$(E/R \cap S \rightarrow E/R, E/R \cap S \rightarrow E/S)$$

sera monomorphique régulier ssi il est le produit fibré de

$$(E/R \rightarrow E/[R \circ S], E/S \rightarrow E/[R \circ S]).$$

a) Supposons que le couple est monomorphique régulier. Soit  $(x, y)$  un élément de  $S \circ R$ , i. e. il existe  $z \in E$  tel que  $(x, z) \in S$  et  $(z, y) \in R$ . La classe d'équivalence  $V$  de  $x$  suivant  $R$  a pour image dans  $E/[R \circ S]$  la classe d'équivalence de  $x$  suivant  $[R \circ S]$ . La classe d'équivalence  $W$  de  $y$  suivant  $S$  a pour image dans  $E/[R \circ S]$  la classe d'équivalence de  $y$  suivant  $[R \circ S]$ . Or ces deux images sont égales. Il existe donc une classe d'équivalence  $T \in E/R \cap S$  ayant  $V$  pour image dans  $E/R$  et  $W$  pour image dans  $E/S$ . Si  $t \in T$ , alors  $t \in V \cap W$ , donc

$$(x, t) \in R \text{ et } (t, y) \in S \text{ et par suite } (x, y) \in R \circ S.$$

Ainsi  $S \circ R \subset R \circ S$ . D'une façon analogue on a  $R \circ S \subset S \circ R$  et on en déduit  $S \circ R = R \circ S$ .

b) Supposons  $S \circ R = R \circ S$ . Alors  $R \circ S$  est une relation d'équivalence sur  $E$  et  $[R \circ S] = R \circ S$ . Soit  $V \in E/R$  et  $W \in E/S$  ayant des images égales dans  $E/R \circ S$ . Soit  $x \in V$  et  $y \in W$ . Il existe  $z \in E$  tel que  $(x, z) \in R$  et  $(z, y) \in S$ . La classe d'équivalence de  $z$  suivant  $R \cap S$  a pour image dans  $E/R$  la classe d'équivalence de  $z$  suivant  $R$ , c'est-à-dire  $V$ , et elle a pour image dans  $E/S$  la classe d'équivalence de  $z$  suivant  $S$ , c'est-à-dire  $W$ . On en déduit que  $(E/R \cap S \rightarrow E/R, E/R \cap S \rightarrow E/S)$  est le produit fibré de  $(E/R \rightarrow E/R \circ S, E/S \rightarrow E/R \circ S)$ .

7.0.1. PROPOSITION. Si  $R_1, \dots, R_n$  sont des relations d'équivalence sur un ensemble  $E$ , dont la composition est commutative et distributive par rapport à l'intersection, alors la famille des applications quotients

$$(E/R_1 \cap \dots \cap R_n \rightarrow E/R_1, \dots, E/R_1 \cap \dots \cap R_n \rightarrow E/R_n)$$

est monomorphique régulière.

PREUVE. La proposition est vraie pour  $n = 2$  d'après la Proposition 7.0.0. Supposons la proposition démontrée pour  $n-1$ . La famille

$$(E/R_1 \cap \dots \cap R_{n-1} \rightarrow E/R_1, \dots, E/R_1 \cap \dots \cap R_{n-1} \rightarrow E/R_{n-1})$$

est monomorphique régulière. La relation

$$\begin{aligned} R_n \circ (R_1 \cap \dots \cap R_{n-1}) &= (R_n \circ R_1) \cap \dots \cap (R_n \circ R_{n-1}) = \\ &= (R_1 \circ R_n) \cap \dots \cap (R_{n-1} \circ R_n) = (R_1 \cap \dots \cap R_{n-1}) \circ R_n \end{aligned}$$

implique que le couple

$$(E/R_1 \cap \dots \cap R_n \rightarrow E/R_1 \cap \dots \cap R_{n-1}, E/R_1 \cap \dots \cap R_n \rightarrow E/R_n)$$

est monomorphique régulier. Or la famille

$$(E/R_1 \cap \dots \cap R_n \rightarrow E/R_1, \dots, E/R_1 \cap \dots \cap R_n \rightarrow E/R_n)$$

est composée des deux familles précédentes. Elle est même régulièrement composée puisque l'image directe de  $E/R_1 \cap \dots \cap R_n \rightarrow E/R_1 \cap \dots \cap R_{n-1}$  par  $E/R_1 \cap \dots \cap R_n \rightarrow E/R_n$  est  $E/R_n \rightarrow E/(R_1 \cap \dots \cap R_{n-1}) \circ R_n$ , que l'image directe de  $E/R_1 \cap \dots \cap R_n \rightarrow E/R_i$  par  $E/R_1 \cap \dots \cap R_n \rightarrow E/R_n$  est  $E/R_n \rightarrow E/R_i \circ R_n$  et que la famille

$$\begin{aligned} (E/(R_1 \cap \dots \cap R_{n-1}) \circ R_n \rightarrow E/R_1 \circ R_n, \dots, \\ E/(R_1 \cap \dots \cap R_{n-1}) \circ R_n \rightarrow E/R_{n-1} \circ R_n) \end{aligned}$$

est monomorphique puisque

$$(R_1 \circ R_n) \cap \dots \cap (R_{n-1} \circ R_n) = (R_1 \cap \dots \cap R_{n-1}) \circ R_n.$$

Le résultat se déduit alors de la proposition 4.1.

7.0.2. REMARQUE. Dans les conditions de la Proposition 7.0.1, si

$$x \equiv a_1 \pmod{R_1}, \dots, x \equiv a_n \pmod{R_n}$$

sont  $n$  congruences qui possèdent deux à deux une solution commune et si l'on note  $V_i \in E/R_i$  la classe d'équivalence de  $a_i$  modulo  $R_i$ , alors pour tout  $i, j \in [1, n]$  les images de  $V_i$  et  $V_j$  dans  $E/R_i \circ R_j$  sont égales, et par suite il existe  $T \in E/R_1 \cap \dots \cap R_n$  dont l'image dans chaque  $E/R_i$  est  $V_i$ , et alors tout  $t \in T$  est solution commune aux  $n$  congruences. C'est une forme du théorème chinois pour les systèmes de congruences [2, 9].

### 7.1. Familles d'algèbres quotients.

On se place dans une catégorie  $\text{Alg}(T)$  algébrique au sens de F.W.

Lawvere [6]. En notant  $U_T : \text{Alg}(T) \rightarrow \text{Ens}$  le foncteur ensemble sous-jacent, une relation d'équivalence sur une  $T$ -algèbre  $A$  s'identifie à une relation d'équivalence  $U_T R$  sur  $U_T A$  compatible avec les opérations de  $T$ , cette identification préservant en outre les intersections et compositions.

7.1.0. PROPOSITION. Si  $R_1, \dots, R_n$  sont des relations d'équivalence sur une  $T$ -algèbre  $A$ , dont la composition est commutative et distributive par rapport à l'intersection, la famille des  $T$ -homomorphismes quotients

$$(A/R_1 \cap \dots \cap R_n \rightarrow A/R_1, \dots, A/R_1 \cap \dots \cap R_n \rightarrow A/R_n)$$

est monomorphique régulière dans  $\text{Alg}(T)$ .

PREUVE. C'est une conséquence de la Proposition 7.0.1 si l'on note que la somme amalgamée de

$$(A/R_1 \cap \dots \cap R_n \rightarrow A/R_i, A/R_1 \cap \dots \cap R_n \rightarrow A/R_j)$$

est  $(A/R_i \rightarrow A/R_i \circ R_j, A/R_j \rightarrow A/R_i \circ R_j)$  et qu'elle est préservée par  $U_T$  et que le foncteur  $U_T$  reflète les limites.

On appelle *catégorie arithmétique* une catégorie algébrique au sens de F.W. Lawvere dans laquelle la composition des relations d'équivalence est commutative et distributive par rapport à l'intersection [9].

7.1.1. PROPOSITION. Dans une catégorie arithmétique toute famille monomorphique finie d'algèbres quotients est monomorphique régulière.

PREUVE. C'est une conséquence de la Proposition 7.1.0 puisque, si

$$(A \rightarrow A/R_1, \dots, A \rightarrow A/R_n)$$

est une famille monomorphique finie d'algèbres quotients de  $A$  elle se factorise par la famille

$$(A/R_1 \cap \dots \cap R_n \rightarrow A/R_1, \dots, A/R_1 \cap \dots \cap R_n \rightarrow A/R_n)$$

en le morphisme quotient  $A \rightarrow A/R_1 \cap \dots \cap R_n$  qui doit être monomorphique donc un isomorphisme.

## 8. EXEMPLES.

8.0. Familles d'anneaux de fractions. Si  $A$  est un anneau unitaire commu-

tatif et  $a_1, \dots, a_n$  sont des éléments qui engendrent le  $A$ -Module  $A$ , alors la famille des anneaux de fractions

$$(A \rightarrow A[a_1^{-1}], \dots, A \rightarrow A[a_n^{-1}])$$

est monomorphique régulière dans la catégorie  $\text{Anc}$  des anneaux commutatifs unitaires.

PREUVE. Les éléments  $a_1, \dots, a_n$  satisfont une relation de la forme :  $a_1 b_1 + \dots + a_n b_n = 1$  et par suite pour tout  $p \in \mathbb{N}$  ils satisfont une relation de la forme  $a_1^p c_1 + \dots + a_n^p c_n = 1$ . La famille est monomorphique puisque, si  $x, y \in A$  ont des images égales dans chaque  $A[a_i^{-1}]$ , on a :

$$\forall i \in [1, n], \exists p_i \in \mathbb{N}, \quad x a_i^{p_i} = y a_i^{p_i}$$

donc

$$\exists p \in \mathbb{N}, \quad \forall i \in [1, n], \quad x a_i^p = y a_i^p$$

et par suite

$$x = x(a_1^p c_1 + \dots + a_n^p c_n) = y(a_1^p c_1 + \dots + a_n^p c_n) = y.$$

En outre l'image directe de cette famille par un homomorphisme  $f: A \rightarrow B$  est monomorphique puisque c'est la famille

$$(B \rightarrow B[(f(a_1))^{-1}], \dots, B \rightarrow B[(f(a_n))^{-1}]),$$

où  $f(a_1), \dots, f(a_n)$  engendrent le  $B$ -module  $B$ . Cela implique que les finitions et compositions de familles de cette forme sont toujours régulières. Démontrons la propriété pour  $n = 2$ . La somme amalgamée de

$$(A \rightarrow A[a_1^{-1}], A \rightarrow A[a_2^{-1}])$$

est

$$(A[a_1^{-1}] \rightarrow A[(a_1 a_2)^{-1}], A[a_2^{-1}] \rightarrow A[(a_1 a_2)^{-1}]).$$

Soit

$$\frac{x}{a_1^n} \in A[a_1^{-1}] \quad \text{et} \quad \frac{y}{a_2^n} \in A[a_2^{-1}]$$

ayant des images égales dans  $A[(a_1 a_2)^{-1}]$ , i. e. il existe  $m \in \mathbb{N}$  tel que

$$x a_2^n (a_1 a_2)^m = y a_1^n (a_1 a_2)^m.$$

Si on pose  $p = n + m$ , l'élément  $x a_1^p c_1 + y a_2^p c_2$  de  $A$  a pour image dans  $A[a_1^{-1}]$  l'élément  $\frac{x}{a_1^n}$  et pour image dans  $A[a_2^{-1}]$  l'élément  $\frac{y}{a_2^n}$ . Ceci prou-

ve que le couple  $(A \rightarrow A[a_1^{-1}], A \rightarrow A[a_2^{-1}])$  est monomorphique régulier. Supposons la propriété démontrée pour  $n-1$ . La famille

$$(A[(a_1 b_1 + \dots + a_{n-1} b_{n-1})^{-1}] \rightarrow A[(a_i (a_1 b_1 + \dots + a_{n-1} b_{n-1}))^{-1}])_{i \in [1, n-1]}$$

est monomorphique régulière, de même que le couple

$$(A \rightarrow A[(a_1 b_1 + \dots + a_{n-1} b_{n-1})^{-1}], A \rightarrow A[a_n^{-1}]).$$

D'après la Proposition 4.1, la famille composée

$$(A \rightarrow A[(a_1 (a_1 b_1 + \dots + a_{n-1} b_{n-1}))^{-1}], \dots, \\ A[(a_{n-1} (a_1 b_1 + \dots + a_{n-1} b_{n-1}))^{-1}], A \rightarrow A[a_n^{-1}])$$

est monomorphique régulière. La famille  $(A \rightarrow A[a_i^{-1}], \dots, A \rightarrow A[a_n^{-1}])$  étant plus fine que la précédente, elle est donc monomorphique régulière d'après la Proposition 2.1.

8.1. *Familles d'anneaux d'entiers modulo  $p$ . Si  $p_1, \dots, p_n$  est une suite de nombres entiers positifs ou nuls ayant  $m$  pour PPCM, la famille des anneaux quotients  $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/p_1\mathbb{Z}, \dots, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/p_n\mathbb{Z})$  est monomorphique régulière dans  $\text{Anc}$ .*

PREUVE. Pour chaque  $i \in [1, n]$ , on note  $R_i$  la relation de congruence modulo  $p_i$  sur  $\mathbb{Z}$ . Alors  $R_i \circ R_j$  est la congruence modulo le PGCD de  $p_i$  et  $p_j$  et  $R_i \cap R_j$  est la congruence modulo le PPCM de  $p_i$  et  $p_j$ . Or le PGCD de nombres entiers est commutatif et distributif par rapport au PPCM. Donc la composition des relations d'équivalence  $R_1, \dots, R_n$  est commutative et distributive par rapport à l'intersection. Le résultat découle alors de la Proposition 7.1.0.

8.2. *Familles d'anneaux quotients par des idempotents. Si  $e_1, \dots, e_n$  sont des idempotents d'un anneau  $A \in \text{Anc}$  vérifiant  $e_1 \dots e_n = 0$ , la famille des anneaux quotients  $(A \rightarrow A/e_1 A, \dots, A \rightarrow A/e_n A)$  est monomorphique régulière dans  $\text{Anc}$ .*

PREUVE. Pour chaque  $i \in [1, n]$ , on note  $R_i$  la relation de congruence modulo  $e_i$  sur  $A$ . Alors  $R_i \circ R_j$  est la congruence modulo  $e_i + e_j - e_i e_j$ , notée  $e_i \vee e_j$  et  $R_i \cap R_j$  est la congruence modulo  $e_i e_j$ . Or l'opération  $\vee$  est commutative et distributive par rapport au produit. On peut donc appli-

quer la Proposition 7.1.0.

8.3. *Familles d'ensembles quotients.* Deux relations d'équivalence  $R$  et  $S$  sur un ensemble  $E$  sont dites premières entre elles si chaque élément de  $E$  est seul dans sa classe d'équivalence suivant  $R$  ou suivant  $S$ . Alors

$$R \circ S = R \cup S \quad \text{et} \quad R \cap S = \Delta_E .$$

Si  $R_0, R_1, \dots, R_n$  sont des relations d'équivalence sur  $E$  telles que  $R_0$  soit première avec  $R_1, \dots, R_n$ , alors la famille des ensembles quotients  $(E \rightarrow E/R_0, \dots, E \rightarrow E/R_n)$  est monomorphique régulière dans  $\text{Ens}$ .

PREUVE. Le couple  $(E \rightarrow E/R_0, E \rightarrow E/R_1)$  est monomorphique régulier d'après la Proposition 7.0.0. Montrons que la famille

$$(E \rightarrow E/R_0, \dots, E \rightarrow E/R_n)$$

est régulièrement plus fine que le couple précédent. Pour chaque  $i$  dans  $[2, n]$ , l'image directe du couple  $(E \rightarrow E/R_0, E \rightarrow E/R_1)$  par le morphisme  $E \rightarrow E/R_i$  est le couple  $(E/R_i \rightarrow E/R_0 \circ R_i, E/R_i \rightarrow E/R_1 \circ R_i)$  qui est monomorphique puisque l'on a

$$\begin{aligned} (R_0 \circ R_i) \cap (R_1 \circ R_i) &= (R_0 \cup R_i) \cap (R_1 \circ R_i) = \\ (R_0 \cap (R_1 \circ R_i)) \cup (R_i \cap (R_1 \circ R_i)) &= R_i . \end{aligned}$$

Le résultat découle de la Proposition 2.1.

8.4. *Familles d'espaces vectoriels quotients.* Si  $X_0, X_1, \dots, X_n$  sont des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel réel  $E$  vérifiant

$$X_0 \cap (X_1 + \dots + X_n) = 0,$$

la famille des espaces vectoriels quotients  $(E \rightarrow E/X_0, \dots, E \rightarrow E/X_n)$  est monomorphique régulière dans la catégorie  $\text{Vect}(\mathbb{R})$  des espaces vectoriels réels.

PREUVE. Le couple  $(E \rightarrow E/X_0, E \rightarrow E/X_1)$  est monomorphique régulier d'après la Proposition 7.0. Pour  $i \in [2, n]$ , son image directe par le morphisme  $E \rightarrow E/X_i$  est le couple  $(E/X_i \rightarrow E/X_0 + X_i, E/X_i \rightarrow E/X_1 + X_i)$  qui est monomorphique puisque  $(X_0 + X_i) \cap (X_1 + X_i) = X_i$ . La famille  $(E \rightarrow E/X_0, \dots, E \rightarrow E/X_n)$  étant régulièrement plus fine que le couple  $(E \rightarrow E/X_0, E \rightarrow E/X_1)$  est donc monomorphique régulière (Proposition 2.1).

8.5. *Exemples de catégories arithmétiques.*

8.5.0. Dans la catégorie des groupes, les relations d'équivalence sur un groupe  $G$  correspondent biunivoquement aux sous-groupes distingués de  $G$  et la composition correspond au produit des sous-groupes distingués. On en déduit que la composition des relations d'équivalence est commutative dans toute catégorie d'algèbres ayant une structure de groupe sous-jacente. Dans la catégorie des anneaux unitaires, les relations d'équivalence sur un anneau  $A$  correspondent aux idéaux et la composition correspond à la somme. En outre pour les idéaux engendrés par un ensemble d'idempotents centraux, la somme est distributive par rapport à l'intersection. On en déduit que les catégories suivantes sont arithmétiques [0, 9] .

Anc Reg : anneaux commutatifs unitaires réguliers et homomorphismes.

An Bi Reg : anneaux unitaires biréguliers et homomorphismes.

An Fort Reg : anneaux unitaires fortement réguliers et homomorphismes.

8.5.1. Dans la catégorie des treillis distributifs, la composition des relations d'équivalence est distributive par rapport à l'intersection. On a donc la même propriété dans toute catégorie d'algèbres ayant une structure de treillis distributif sous-jacente. D'où les catégories arithmétiques [5, 9] :

Ab Ret : groupes abéliens réticulés et homomorphismes.

Anc Ret : anneaux commutatifs unitaires réticulés et homomorphismes.

Anc Fort Ret : anneaux commutatifs fortement réticulés unitaires et homomorphismes.

Bool : algèbres de Boole et homomorphismes.

8.5.2. Dans la catégorie des treillis distributifs les relations d'équivalence associées aux filtres commutent deux à deux. La catégorie Heyt est donc arithmétique

Heyt : algèbres de Heyting et homomorphismes.

**REFERENCES.**

0. ARENS, R. F. & KAPLANSKY, J., Topological representation of algebras, *Trans. A. M. S.* 63 ( 1949 ), 457- 481.
1. BARR, M., Exact categories, *Lecture Notes in Math.* 236, Springer ( 1971), 1-120.
2. BOURBAKI, N., *Algèbre, Chapitres 6 et 7*, Hermann, 1964.
3. GRILLET, A.P., Regular categories, *Lecture Notes in Math.* 236, Springer (1971) 121- 222.
4. GROTHENDIECK, A. & VERDIER, J. M., Théorie des topos et cohomologie étale des schémas, *Lecture Notes in Math.* 269, Springer (1972).
5. KEIMEL, K., The representation of lattice-ordered groups and rings by sections in sheaves, *Lecture Notes in Math.* 248, Springer ( 1971), 1-98.
6. LAWVERE, F.W., Functorial semantics of algebraic theories, *Proc. Nat. Acad. Sc. U. S. A.* 50 ( 1963 ), 869- 873.
7. PIERCE, R. S., Modules over commutative regular rings, *Mem. A. M. S.* 70 ( 1967 ).
8. VAN OSDOL, D. H., Sheaves in regular categories, *Lecture Notes in Math.* 236, Springer ( 1971), 223- 269.
9. WOLFF, A., Sheaf representation of arithmetical algebras, *Mem. A. M. S.* 148 ( 1974 ), 87- 93.

Département de Mathématiques  
U. E. R. des Sciences  
Université de Valenciennes  
Le Mont-Houy  
F-59326 VALENCIENNES.