

CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE CATÉGORIQUES

DOMINIQUE BOURN

Une autre propriété universelle pour le champ associé

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 21, n° 4 (1980), p. 403-410

http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1980__21_4_403_0

© Andrée C. Ehresmann et les auteurs, 1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

UNE AUTRE PROPRIETE UNIVERSELLE POUR LE CHAMP ASSOCIE

par Dominique BOURN

Dans [3], M. Bunge donne, dans le cas d'un topos élémentaire E , une construction du champ associé \tilde{C} à une catégorie interne C pour la topologie des épimorphismes. Une analyse approfondie de sa construction permet de montrer que \tilde{C} classifie un certain type de distributeurs internes : les distributeurs faiblement représentables, c'est-à-dire ceux qui sont représentables à une équivalence faible près (voir plus loin la définition précise). Ce résultat s'étend même aux champs définis sur un site. On prendra garde qu'ici on utilise l'orientation de [0], à savoir qu'un distributeur interne de C vers D est un élément de $E^{D^{op} \times C}$ et que, pour éviter d'alourdir les résultats par des dualités, une 2-flèche entre morphismes géométriques $f \Rightarrow g$ est donnée par une transformation naturelle $f_* \Rightarrow g_*$; ce qui est l'inverse de [5], mais est, après tout, la convention de SGA IV (cf. pages 347 et 416).

Pour donner une idée de ce résultat, on va reprendre point par point la construction de [3]. Les démonstrations détaillées se trouvent dans [2].

1. MORPHISMES ESSENTIELS.

La principale notion utilisée dans [3] est la notion de morphisme essentiel entre E -topos :

$$\begin{array}{ccc}
 F_1 & \xrightarrow{h} & F_2 \\
 & \searrow f_1 & \swarrow f_2 \\
 & & E
 \end{array}$$

Le morphisme géométrique de E -topos h est dit *essentiel* lorsque le morphisme cartésien \underline{h}^* déterminé par h^* entre les fibrations \underline{F}_1 et \underline{F}_2 au-dessus de E (on rappelle que $\underline{F}_{1I} = F_{1I}/f_{1I}^*(I)$) admet un adjoint $\underline{h}!$ dans la 2-catégorie $Fib(E)$ des fibrations au-dessus de E .

EXEMPLE. Si $h : A \rightarrow B$ est un foncteur interne à E , alors $h : E^{A^{op}} \rightarrow E^{B^{op}}$ est essentiel. Plus généralement si $\phi : A \dashrightarrow B$ est un distributeur interne qui admet un coadjoint ψ , alors le morphisme géométrique $E^{A^{op}} \rightarrow E^{B^{op}}$ (que l'on notera aussi ϕ) déterminé grâce au théorème de Diaconescu par le distributeur plat ψ est encore essentiel.

Notons Ess/E la sous-2-catégorie de Top/E dont les morphismes sont essentiels, et $Dist_{CA}(A, B)$ la sous-catégorie de $Dist(A, B)$ dont les points sont les distributeurs admettant un coadjoint. On peut alors énoncer le résultat suivant :

PROPOSITION 1. *On a une équivalence de catégories :*

$$Dist_{CA}(A, B) \approx Ess/E(E^{A^{op}}, E^{B^{op}}).$$

En effet, si $h : E^{A^{op}} \rightarrow E^{B^{op}}$ est essentiel, il détermine un distributeur plat $\psi : A \dashleftarrow B$ et l'existence du $h!$ permet de calculer pour toute catégorie interne C un adjoint à $\psi \otimes C$, naturel en C , et donc un adjoint ϕ à ψ , qui est précisément l'extension de I_A .

REMARQUE. Cette équivalence identifie la composition des morphismes essentiels avec celle des distributeurs, puisque ce résultat est une précision de celui obtenu sur les morphismes géométriques ([5], page 114).

2. LA FIBRATION DES POINTS ESSENTIELS.

Soit $f : F \rightarrow E$ un topos au-dessus de E ; on appelle [3] *fibration des points essentiels de F* la fibration scindée dont la fibre en I est définie par :

$$Pointess(F)_I = Ess/E(E/I, F).$$

PROPOSITION 2. *Le 2-foncteur $Pointess : Ess/E \rightarrow Fib(E)$ admet le 2-foncteur $E^{(\)^{op}} : Cat(E) \rightarrow Ess/E$ comme 2-adjoint partiel; c'est-à-dire que pour tout catégorie interne C et tout E -topos F , on a une équivalence naturelle: $Fib(C, Pointess(F)) \approx Ess/E(E^{C^{op}}, F)$.*

REMARQUE. Cette adjonction détermine en particulier un morphisme cartésien $i_C : C \rightarrow Pointess(E^{C^{op}})$. On a clairement

$$i_C(I \xrightarrow{f} C) = E/I \xrightarrow{f} E^{C^{op}},$$

et i_C est pleinement fidèle.

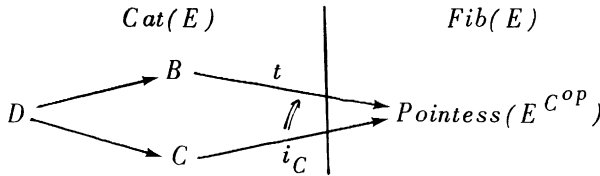
Réunissant les Propositions 1 et 2, on peut démontrer le résultat suivant qui précise le théorème de Diaconescu.

THEOREME 1. *La fibration $Pointess(E^{C^{op}})$ classe les distributeurs de but C qui admettent un coadjoint.*

En effet, pour toute catégorie interne B , on obtient :

$$Fib(B, Pointess(E^{C^{op}})) \approx Ess/E(E^{B^{op}}, E^{C^{op}}) \approx Dist_{CA}(B, C).$$

Plus précisément, étant donné $t: B \rightarrow Pointess(E^{C^{op}})$, on retrouve le distributeur en prenant le span associé à l'objet comma de i_C et t :



Son coadjoint est d'ailleurs obtenu en prenant l'objet comma de t et i_C .

3. LE CHAMP ASSOCIE POUR LA TOPOLOGIE DES EPIMORPHISMES.

Soit maintenant $q: X \twoheadrightarrow Y$ un épimorphisme de E et Rq la relation d'équivalence associée (considérée comme un groupoïde interne à E); on a alors un foncteur $\hat{q}: Rq \rightarrow Y$ pleinement fidèle et surjectif sur les objets.

Un champ pour la topologie des épimorphismes [4] est une fibration K au-dessus de E telle que, pour tout épimorphisme q , le morphisme

$$Fib(Y, K) \xrightarrow{Fib(\hat{q}, K)} Fib(Rq, K)$$

est une équivalence de catégories.

REMARQUE. Le foncteur \hat{q} est une équivalence dans les distributeurs. En effet, le morphisme géométrique $\hat{q}: E^{Rq^{op}} \rightarrow E/Y$ est une équivalence, mais il est aussi essentiel, donc son inverse est essentiel et \hat{q} est une équivalence dans $Dist$ (en particulier le foncteur \hat{q} est toujours complètement fidèle).

On montre dans [3] que $Pointess(E^{C^{op}})$ est un champ. Ici la démonstration devient très simple :

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Fib}(Y, \text{Pointess } E^{C^{op}}) & \xrightarrow{\text{Fib}(\hat{q}, \text{Pointess } E^{C^{op}})} & \text{Fib}(Rq, \text{Pointess } E^{C^{op}}) \\
 \parallel & & \parallel \\
 \text{Dist}_{CA}(Y, C) & \xrightarrow{- \otimes \hat{q}} & \text{Dist}_{CA}(Rq, C)
 \end{array}$$

or \hat{q} est une équivalence dans $Dist$, d'où le résultat.

En fait on démontre dans [4] qu'on obtient la même notion de champ si on remplace, dans la définition, la famille des \hat{q} par l'une quelconque des familles suivantes :

- i) les foncteurs internes pleinement fidèles et surjectifs sur les objets,
- ii) les équivalences faibles : composés d'une équivalence interne avec un foncteur du type i),
- iii) les équivalences faibles entre fibrations : un morphisme cartésien $\tau : L \rightarrow H$ étant une équivalence faible si, pour tout $l \in E$, le foncteur $\tau_l : L_l \rightarrow H_l$ est pleinement fidèle et si pour tout $J \in E$ et $Y \in H_J$, il existe un épimorphisme $k : I \rightarrow J$, un objet $X \in L_I$ et un isomorphisme de $k^*(Y)$ vers $\tau_I(X)$.

Un foncteur interne f est une équivalence faible au sens de ii) ssi, vu dans $\text{Fib}(E)$, c'est une équivalence faible au sens de iii).

On construit alors le champ associé \tilde{C} en décomposant i_C [3] :

$$\begin{array}{ccc}
 C & \xrightarrow{i_C} & \text{Pointess}(E^{C^{op}}) \\
 & \searrow \text{ch}_C & \nearrow e_C \\
 & & \tilde{C}
 \end{array} \quad (*)$$

où e_C est un monomorphisme pleinement fidèle et saturé pour les isomorphismes (ce qui entraîne, $\text{Pointess}(E^{C^{op}})$ étant un champ, que \tilde{C} est un champ), et ch_C une équivalence faible (ce qui entraîne que \tilde{C} est le champ associé).

Précisément, \tilde{C}_J est la sous-catégorie pleine des points x de $\text{Pointess}(E^{C^{op}})_J$ tels qu'il existe un épimorphisme $k : I \rightarrow J$, un foncteur $f : I \rightarrow C$ et un isomorphisme de $x.k$ vers f .

UNE AUTRE PROPRIÉTÉ UNIVERSELLE POUR LE CHAMP ASSOCIÉ

On peut alors se demander si \tilde{C} classe une certaine classe de distributeurs parmi ceux qui admettent un coadjoint. Pour cela introduisons la définition suivante :

DEFINITION. Un distributeur $\phi : A \dashrightarrow B$ est dit *faiblement représentable* s'il existe une équivalence faible $k : A' \rightarrow A$, un foncteur $f : A' \rightarrow B$ et un isomorphisme $n : \phi \otimes k \cong f$.

Un distributeur faiblement représentable admet un coadjoint puisque dans *Dist*, k est une équivalence et f admet un coadjoint.

THEOREME 2. Le champ associé \tilde{C} classe les distributeurs faiblement représentables de but C .

REMARQUE 1. Si G est un groupe interne à E , on sait qu'un distributeur $\phi : I \dashrightarrow G$ est exactement un $I^*(G)$ -objet à gauche de E/I . C est un $I^*(G)$ -torseur lorsque ϕ est plat. En fait on peut montrer que, dans cette situation, ϕ est plat ssi il est faiblement représentable. Ce qui prouve bien que le champ $TORS(G)$, [6], est le champ associé à G .

REMARQUE 2. Ainsi on a deux propriétés universelles pour \tilde{C} :

- \tilde{C} | - champ associé à C
- | - classe les distributeurs faiblement représentables de but C

A-t-on la même situation pour $Pointess(E^{C^{op}})$?

- $Pointess(E^{C^{op}})$ | - ?
- | - classe les distributeurs de but C ayant un coadjoint

On peut répondre à cette question de la façon suivante :

DEFINITIONS. On appellera :

- *distéquivalence* un foncteur interne $f : A \rightarrow B$ qui est une équivalence dans *Dist* ;

- *brave fibration* une fibration K telle que, pour toute distéquivalence $f : A \rightarrow B$, le foncteur

$$Fib(B, K) \xrightarrow{Fib(f, K)} Fib(A, K)$$

est une équivalence de catégories.

EXEMPLES. Une équivalence faible est évidemment une distéquivalence. La fibration $Pointess(F)$ est brave.

PROPOSITION 3. La fibration $Pointess(E^{C^{op}})$ est la brave fibration associée à C .

4. UNE BONNE PROPRIÉTÉ POUR UN TOPOS.

Pour finir, dans [3], on construit à partir d'une catégorie interne C une catégorie interne \hat{C} , appelée enveloppe karoubienne de C et telle que le champ associé à \hat{C} soit $Pointess(E^{C^{op}})$, ce qui permet d'affirmer :

PROPOSITION 4. Pour un topos E , les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

- 1° Pour toute catégorie interne C le champ associé est représentable.
- 2° Pour toute catégorie interne C la fibration $Pointess(E^{C^{op}})$ est représentable.
- 3° Pour toute catégorie interne C il existe une catégorie interne \hat{C} qui classifie les distributeurs de but C ayant un coadjoint.

Il est clair que 1 entraîne 2 et que 2 entraîne 3. Si on a 3, nécessairement \hat{C} est un représentant de $Pointess(E^{C^{op}})$ et il reste à vérifier que le sommet de la décomposition (*) qui sert à construire \tilde{C} est interne lorsque le but de i_C est interne, ce qui est aisé.

On dira que le topos E vérifie (BA) s'il vérifie l'une des trois propriétés précédentes. Cette propriété nous est familière, car elle est vérifiée dans le topos des ensembles. De plus elle a une bonne stabilité ; en effet, on peut montrer qu'elle est stable

- par localisation : si E vérifie (BA), alors E/χ vérifie (BA) ;
- par cotriple exact : si E vérifie (BA), alors E_{\top} vérifie (BA) ;
- par passage aux faisceaux : si E vérifie (BA), alors $sh_j E$ vérifie (BA), pour j topologie sur E .

Ainsi tout topos de Grothendieck vérifie (BA).

Si un topos E vérifie (BA) et si G est un groupe interne, alors le champ $TORS(G)$ est représentable, ce qui permettrait de développer une cohomologie au-dessus de E et non plus seulement au-dessus des ensem-

bles comme dans [5].

5. LES CHAMPS SUR UN SITE.

Enfin, grâce au résultat précédent et au résultat suivant, dû à Penon [8] :

Soit (C, J) un petit site. Alors la 2-catégorie des champs sur ce site [6] est 2-équivalente à la 2-catégorie des champs représentables sur la catégorie des faisceaux (\widetilde{C}, J) pour la topologie des épimorphismes, on peut donc conclure que *le champ associé, construit dans [6], a aussi dans le topos (\widetilde{C}, J) la propriété universelle mise en évidence dans ce travail.*

REFERENCES.

0. BENABOU, J., *Les distributeurs*, Rapport 33, Univ. Louvain-la-Neuve, 1973.
1. BENABOU, J., *Séminaire 74-75 sur les fibrations*, Paris.
2. BOURN, D., *Distributeurs et champ associé*, Multigraphié Amiens, 1979.
3. BUNGE, M., Stack completions and Morita equivalence for categories in a topos, *Cahiers Topo. et Géom. Diff.* XX-4 (1979), 401-436.
4. BUNGE, M. & PARE, R., Stacks and equivalences of indexed categories, *Cahiers Topo. et Géom. Diff.* XX-4 (1979), 373-400.
5. JOHNSTONE, P. T., *Topos Theory*, Academic press, 1977.
6. GIRAUD, J., *Cohomologie non abélienne*, Springer Verlag, 1971.
7. PARE, R. & SCHUMACHER, D., Abstract families and the adjoint functor theorem, *Lecture Notes in Math.* 661, Springer (1978).
8. PENON, J., *Caractérisation des catégories fibrées*, Multigraphié Amiens, 1979.
9. WRAITH, G., *Locally equivalent toposes*, Preprint, Univ. of Sussex, 1977.

U. E. R. de Mathématiques
33 Rue Saint-Leu
80039 AMIENS CEDEX.