CAHIERS DE
TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
CATÉGORIQUES

EDUARDO J. DUBUC

Sur les modèles de la géométrie différentielle synthétique

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 20, nº 3 (1979), p. 231-279

<http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1979__20_3_231_0>

CAHIERS DE TOPOLOGIE
ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE

Vol. XX-3 (1979)

SUR LES MODELES DE LA GEOMETRIE DIFFERENTIELLE SYNTHETIQUE

par Eduardo J. DUBUC *)

Je me propose de développer ici la construction de modèles pour la Géométrie Différentielle Synthétique (voir Définition 0 plus bas) possédant une interprétation des variétés différentiables C^∞ classiques et d'établir quelques unes de leurs propriétés.

Ces études ont pour but de démontrer que la Géométrie Différentielle Synthétique, dans laquelle s'exprime l'exacte adéquation d'une théorie mathématique à l'intuition géométrique, est également adéquate à l'étude du Calcul différentiel sur les variétés classiques. Il serait prématuré d'affirmer dès à présent que ce but soit atteint, mais j'espère que l'étude bien plus approfondie des *modèles adaptés (pleinement bien adaptés)* (voir Définition I plus bas) et plus particulièrement des modèles construits dans cet article conduira vers le développement de modèles possédant des propriétés qui nous permettront d'affirmer, un jour, que le but a été atteint.

J'ai profité, dans ces recherches, de plusieurs conversations avec G. Reyes, à qui je dois également d'avoir attiré mon attention sur la Géométrie Différentielle Synthétique.

Dans tout ce qui suit, les variétés sont toujours «infiniment différentiables», et on convient de dire simplement «différentiables», et même d'omettre le plus souvent ce qualificatif. Egalement, les applications différentiables seront toujours de classe C^∞.

On rappelle qu'une catégorie $\mathcal{E}$ munie d'un objet anneau A est *un modèle de la Géométrie Différentielle Synthétique* si elle possède des limites projectives finies, si le sous-objet $D \subset A$ des «éléments à carré nul» est exponentiable, et si:

*) Recherche subventionnée par le Matematisk Institut, Aarhus Universitet, et le Conseil National de Recherche du Canada.

DEFINITION 0. 1. L'anneau A est de *type ligne* ; c'est-à-dire le morphisme canonique $a: A\times A \to A^D$ décrit par la formule $a(x,y)(d) = x + yd$ est un isomorphisme.

2. L'objet D est petit, c'est-à-dire l'exponentiation avec D préserve les limites inductives quelconques.

Cette théorie a été introduite par A. Kock dans [4], où l'on trouve la condition 1 de la Définition 0. La condition 2 apparaît plus tard, dans un travail en collaboration avec G. Reyes [5]. Les idées directrices ont été tracées dans une conférence (non publiée) de F.W. Lawvere au Printemps 1967 à l'Université de Chicago, où l'on trouve déjà l'égalité $A\times A = A^D$.

On rappelle deuxièmement que, dans une catégorie à limites projectives finies, une famille de sous-objets $U_\alpha \rightarrowtail M$ est dite *épimorphe effective* (cf. [1]) si la donnée d'une flèche $M \to H$ équivaut à celle d'une famille de flèches $U_\alpha \to H$ satisfaisant à des conditions de compatibilité avec les intersections. Ft elle est dite *universelle* si, pour toute flèche $f: H \to M$, la famille de ses pré-images $f^{-1}(U_\alpha) \rightarrowtail H$ possède également la même propriété.

Soit $\mathfrak{M}$ la catégorie des variétés différentielles paracompactes et $\mathfrak{W}$ celle des algèbres de Weil (voir Définition 1.4). On dira qu'une catégorie $\mathcal{E}$ munie d'un objet anneau A est *pleinement bien adaptée* à l'étude des variétés différentielles si:

DEFINITION I. (1) Elle est munie d'un foncteur pleinement fidèle $\mathfrak{W}^{op} \to \mathcal{E}$ qui préserve les limites projectives finies et tel que l'image de l'algèbre des nombres duaux $R[\epsilon]$ soit le sous-objet $D\subset A$ des «éléments à carré nul». De plus, toute algèbre de Weil doit être exponentiable (dans $\mathcal{E}$) et petite.

(2) Elle est munie d'un foncteur pleinement fidèle $\mathfrak{M} \to \mathcal{E}$ tel que l'image du corps des nombres réels R soit l'objet anneau A, et tel que les trois conditions suivantes soient satisfaites :

(i) Les sous-variétés ouvertes deviennent des sous-objets w-étalés dans $\mathcal{E}$ (voir Définition II).

(ii) Les unions quelconques de sous-variétés ouvertes (en particulier, les recouvrements par des ouverts euclidiens) deviennent des familles épimorphes effectives universelles dans $\mathfrak{E}$.

(iii) Les produits fibrés transversaux sont préservés (voir Remarque 2.17).

3° Quelle que soit l'algèbre de Weil $X \in \mathfrak{W}$ et la variété $M \in \mathfrak{M}$, le prolongement d'espèce X de M, noté ${}^X M$ (voir Section 3) est canoniquement identifié à l'exponentielle de M avec $\bar{X}$: ${}^X M = M^{\bar{X}}$.

On dira que $\mathfrak{E}$ est, simplement, *bien adapté* si le foncteur $\mathfrak{M} \to \mathfrak{E}$ est (seulement) fidèle et si, de plus, pour toute variété $M \in \mathfrak{M}$ ses points $1 \to M$ dans $\mathfrak{E}$ coïncident avec ses points originaux $1 \to M$ dans $\mathfrak{M}$. (On vérifie facilement que la fidélité résulte de cette dernière condition.) Evidemment, toute catégorie pleinement bien adaptée est, en particulier, bien adaptée.

Si $X \in \mathfrak{W}$, on note $\bar{X}$ son image dans $\mathfrak{E}$ et on imagine $\bar{X}$ comme étant une variété *infinitésimale* (avec un seul point $\pi_0 : 1 \to \bar{X}$ correspondant à l'unique morphisme $\pi_0 : X \to \mathrm{R}$ dans $\mathfrak{C}$). Remarquer que $\bar{\mathrm{R}} = 1$ et que, pour tout $F \in \mathfrak{E}$ et $X \in \mathfrak{W}$, l'exponentielle $F^{\bar{X}}$ est munie d'une projection canonique $\pi_0 : F^{\bar{X}} \to F$ induite par le morphisme $\pi_0 : X \to \mathrm{R}$. Si $M \in \mathfrak{M}$, on notera également M, par abus de langage, son image dans $\mathfrak{E}$. Quelle que soit l'algèbre de Weil X, le prolongement d'espèce X de R est égal à l'ensemble sous-jacent à X muni de la structure différentielle canonique d'espace vectoriel de dimension finie, c'est-à-dire :

$$ {}^X\mathrm{R} = \mathrm{R}^{k+1}, \quad \text{où } k+1 = \text{dimension linéaire de } X $$

(voir Section 3). Il s'ensuit que A est de type ligne :

$$ A^D = \mathrm{R}^{\overline{\mathrm{R}[\epsilon]}} = {}^{\mathrm{R}[\epsilon]}\mathrm{R} = \mathrm{R} \times \mathrm{R} = A \times A , $$

ce qui démontre que *toute catégorie bien adaptée est un modèle de la Géométrie Différentielle Synthétique.*

On explique maintenant ce qu'on entend par la notion de w-étalé. Ce concept généralise (et implique) naturellement la notion de 1-étalé introduite dans [5].

DEFINITION II. Soit $\mathcal{E}$ un modèle bien adapté. On dit qu'une flèche $G \to F$ dans $\mathcal{E}$ est *w-étalée* si, pour toute algèbre de Weil $\pi_0 : X \to \mathrm{R}$, le carré commutatif suivant est un produit fibré :

$$\begin{tikzcd} G^{\bar{X}} \arrow[r] \arrow[d, "\pi_0"'] & F^{\bar{X}} \arrow[d, "\pi_0"] \\ G \arrow[r] & F \end{tikzcd}$$

Ceci revient à dire que, quels que soient l'objet $H \in \mathcal{E}$ et le carré

$$\begin{tikzcd} H \times \bar{X} \arrow[r] \arrow[dr, dashed] & F \\ H \arrow[u, "(id, \pi_0)"] \arrow[r] & G \arrow[u] \end{tikzcd}$$

il existe une unique flèche $H \times \bar{X} \to G$ qui rend les deux triangles commutatifs.

On en déduit facilement, par exemple, que dans tout modèle bien adapté la connaissance d'une flèche $\xi : D \to M$ équivaut à celle d'un vecteur tangent à M au-dessus du point

$$1 \xrightarrow{0} D \xrightarrow{\xi} M,$$

et celle d'une section $M \to M^D$ de $\pi_0 : M^D \to M$ équivaut à celle d'une transformation infinitésimale au sens classique, autrement dit, à un champ de vecteurs. Si de plus le modèle est pleinement bien adapté, le champ sera différentiable. Ceci, par définition même de l'exponentielle, équivaut à la donnée d'un *flux infinitésimal* $\xi : D \times X \to M$ dans M, concept qui ne peut pas être exprimé rigoureusement dans le langage classique.

On vérifie aussitôt sans difficulté que, si une variété est définie globalement par un système $h = (h_1, \dots, h_k)$ d'équations indépendantes :

$$M \longrightarrow \mathrm{R}^{m+k} \xrightarrow{h} \mathrm{R}^k \text{ dans } \mathcal{M}, \quad M = \{ p \mid h(p) = 0 \},$$

elle le sera également dans $\mathcal{E}$. De plus, si le modèle est pleinement bien adapté, tout système d'équations indépendantes dans $\mathcal{E}$ définit un sous-objet

$$M \longrightarrow \mathrm{R}^{m+k} \longrightarrow \mathrm{R}^k \quad \text{décrit par} \quad M = \{ p \mid h(p) = 0 \},$$

$M \in \mathcal{E}$, qui est l'image d'une unique variété différentielle $M \in \mathfrak{M}$. Dans un modèle bien adapté, pour construire une flèche partant d'une variété M vers un objet quelconque de $\mathcal{E}$, il suffira de la construire compatiblement pour un quelconque recouvrement ouvert de M.

Dans cet article, nous construisons deux modèles. Le premier, de description simple, est bien adapté. Le deuxième, plus élaboré, est pleinement bien adapté. Tous les deux seront des topos. Les techniques que nous utilisons sont déjà classiques dans le domaine de la Géométrie Algébrique. Il s'agit de bien choisir une catégorie d'anneaux, et d'interpréter les variétés comme des préfaisceaux définis sur cette catégorie. Il est approprié de remarquer que l'utilisation de ces techniques dans l'étude des êtres géométriques avait été anticipée par la théorie des points proches de A. Weil [9], qui trouve sa source dans la théorie des jets développée par C. Ehresmann [2].

Le texte se divise en quatre sections, à savoir :

1. Les algèbres C^∞ et les algèbres de Weil.
2. Le premier modèle : Le topos de Weil.
3. Les prolongements de Weil.
4. Le deuxième modèle.

Le tout est précédé d'une Section 0 où l'on rappelle quelques propriétés de base des variétés différentielles. Ceci a pour but d'isoler les propriétés qui, seules, nous seront nécessaires. Ainsi, en plus d'avoir une référence précise pour les démonstrations dans le texte, on aura établi clairement, parmi nos résultats, ceux qui pourront être généralisés directement (sans changer les techniques) à d'autres types de variétés.

Pour la lecture de cet article n'est nécessaire que la connaissance de quelques rudiments de la théorie classique des variétés différentielles et de la théorie des catégories. Même au risque de paraître trop élémentaire au lecteur expérimenté, tous les autres concepts utilisés seront introduits ou expliqués dans le texte (sauf dans le cas de quelques commentaires qui ne seront utilisés ni dans les énoncés, ni dans leurs démonstrations).

AARHUS, Août 1978.

SECTION 0.

0.1. PROPOSITION *([3] page 20. Corollaire du Théorème de la fonction inverse). Soit* $h: \mathbb{R}^{m+k} \to \mathbb{R}^k$ *une application différentiable et* $p \in \mathbb{R}^{m+k}$ *un point régulier de* h *tel que* $h(p) = 0$. *Alors il existe des voisinages* W *de* p, V *de* 0 *et un difféomorphisme*

$$\psi: V \to W, \quad \psi(0) = p \quad \text{tels que} \quad h\psi = \pi \quad \text{sur } W.$$

On a noté π la projection sur les dernières k coordonnées. Un point p est un *point régulier de* h, si le Jacobien de h en p est de rang k.

0.2. PROPOSITION *([3] page 7, Exercice 18, Corollaire de l'existence de fonctions plates). Soit* M *une variété quelconque,* $U \subset M$ *un ouvert et* $p \in U$. *Alors il existe un ouvert* V, $p \in V$, $V \subset U$ *et une application différentiable* $f: M \to \mathbb{R}$ *telle que*

$$f = 0 \quad \text{sur } V \quad \text{et} \quad f = 1 \quad \text{au-dehors de } U.$$

COROLLAIRE 1. Soit M une variété, $U \subset M$ un ouvert et $K \subset U$ un sous-ensemble compact. Alors il existe une application différentiable $f: M \to \mathbb{R}$, telle que $f = 0$ sur K et $f = 1$ au-dehors de U.

COROLLAIRE 2. Soit M une variété, $U \subset M$ un ouvert et $p \in U$. Alors pour toute application différentiable $f: U \to \mathbb{R}$, il existe un ouvert V avec $p \in V$, $V \subset U$, et une application différentiable $\hat{f}: M \to \mathbb{R}$ telle que $\hat{f} = f$ sur V.

COROLLAIRE 3. Soit M, N des variétés et $f: M \to N$ une application. Si pour toute application différentiable $h: N \to \mathbb{R}$ l'application composée hf est différentiable, alors f est différentiable.

0.3. PROPOSITION. *Soit* M *une variété,* $F \subset M$ *une sous-variété (fermée),* $p \in F$ *et* $l: F \to \mathbb{R}$ *une application. Alors* l *est différentiable en* p *ssi il existe un ouvert* H *de* M, $p \in H$, *et une application différentiable*

$$\hat{l}: H \to \mathbb{R} \quad \text{telle que} \quad l = \hat{l} \quad \text{sur } F \cap H.$$

0.4. PROPOSITION *([3] page 24). Soit* M *une variété,* $F \subset M$ *une sous-variété (fermée) et* $p \in F$. *Alors il existe un ouvert* U *de* M, $p \in U$, *et* *une application différentiable* $h : U \to \mathbb{R}^k$ *telle que*

$$F \cap U = \{ p \mid h(p) = 0 \}$$

et telle que le Jacobien de h *soit de rang* k *en tous les points de* $F \cap U$.

0.5. DEFINITION. Soit M une variété,

$$h : M \to \mathbb{R}^k, \quad h = (h_1, h_2, \dots, h_k)$$

une application différentiable et

$$F \subset M, \quad F = \{ p \in M \mid h(p) = 0 \}.$$

On dit que les applications h_i *sont indépendantes* si le Jacobien de h est de rang k en tout point p de F. Plus généralement, on dit que deux applications différentiables quelconques $f : M \to N$, $g : S \to N$ de même but N *sont transversales* si, quel que soit

$$(x, y) \in M \times S \quad \text{tel que} \quad f(x) = g(y) = z \in N,$$

les images des vecteurs tangents en x et en y engendrent l'espace tangent en z. Il s'ensuit que, dans le cas précédent, h est transversal à zéro ssi les h_i sont indépendants.

0.6. PROPOSITION. *Soit* $f : M \to N$, $g : S \to N$ *deux applications différentiables de même but* N ; *alors elles sont transversales ssi l'application* $f \times g : M \times S \to N \times N$ *est transversale à l'inclusion de la diagonale* $\Delta \rightarrowtail N \times N$. *Si* f *et* g *sont transversales, le produit fibré*

$$F = \{ (x, y) \mid f(x) = g(y) \},$$

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r] \arrow[d] & S \arrow[d, "g"] \\ M \arrow[r, "f"] & N \end{tikzcd}$$

possède une structure canonique de sous-variété fermée de la variété produit $F \rightarrowtail M \times S$.

Cette structure est celle des *préimages transversales* ([3] page 28) obtenue dans le produit fibré $F = (f \times g)^{-1}(\Delta)$,
$$\begin{tikzcd} F \arrow[r] \arrow[d, tail] & \Delta \arrow[d, tail] \\ M \times S \arrow[r, "f \times g"] & N \times N \end{tikzcd} .$$

Si M est une variété, on désigne par $C^\infty(M)$ la R-algèbre des applications différentiables $M \to R$. On démontre ensuite un résultat qui sera fondamental :

0.7. PROPOSITION *(Milnor's Exercise) ([6] Problem 1C page 11). Soit M une variété paracompacte et $\phi: C^\infty(M) \to R$ un morphisme de R-algèbres. Alors il existe un point $x_0 \in M$ tel que $\phi = \hat{x}_0$, c'est-à-dire tel que, pour tout f dans $C^\infty(M)$, $\phi(f) = f(x_0)$.*

DEMONSTRATION. Soit

$$K_0 \subset U_0 \subset K_1 \subset U_1 \ldots K_i \subset U_i \subset K_{i+1} \ldots$$

une suite dénombrable de compacts K_i (U_i des ouverts) tels que leur réunion soit M (cf. [3] page 52), et soit $h_i: M \to R$ tels que

$$h_i|_{K_i} = 0 \quad \text{et} \quad h_i|_{M-U_i} = 1$$

(0.2, Corollaire 1). Alors $h = \overset{\infty}{\Sigma} h_i$ satisfait :

$$\forall s \in R, \quad s \geq 0, \quad \emptyset \neq h^{-1}(s) \subset K_i$$

pour i suffisamment grand. Si $l = h - \phi h$, alors $l \in Ker(\phi)$ et $l^{-1}(0)$ est compact. Il est facile aussi de vérifier que :

$$\forall f, g \in Ker(\phi), \quad f^{-1}(0) \cap g^{-1}(0) = (f^2 + g^2)^{-1}(0)$$

et que $f^{-1}(0) \neq \emptyset$ (si $fx \neq 0$ pour tout $x \in M$, f serait inversible ce qui contredit le fait que $\phi f = 0$). Ainsi, la famille

$$l^{-1}(0) \cap f^{-1}(0), \quad f \in Ker(\phi),$$

est une famille de fermés avec la propriété de l'intersection finie, tous contenus dans le compact $l^{-1}(0)$. Il s'ensuit que :

$$\exists x_0 \in f^{-1}(0) \quad \forall f \in Ker(\phi).$$

Si $g \in C^\infty(M)$, alors $x_0 \in (g - \phi(g))^{-1}(0)$, c'est-à-dire $g(x_0) = \phi(g)$.

0.8. CONTR'EXEMPLE si M n'est pas paracompacte: *La ligne longue:* Soit Ω le premier ordinal non dénombrable. La ligne longue est l'ensemble $L = [0\,\Omega) \times [0\,1)$ muni de la topologie de l'ordre lexicographique :

$$\underset{1}{[0\,1)}\underset{2}{[0\,1)}\underset{3}{[0\,1)} \ldots \underset{\omega}{[0\,1)}\underset{\omega+1}{[0\,1)} \ldots \underset{\alpha}{[0\,1)}\underset{\alpha+1}{[0\,1)} \ldots \quad \alpha < \Omega$$

Si on veut s'assurer que cet espace est effectivement une variété, il faut soit démontrer l'existence de cartes en tout point, soit encore se convaincre, d'une manière ou d'une autre, que ceci est le cas. Dans cette optique, il est clair que les seuls points douteux sont les zéros des intervalles placés sur des ordinaux limites. Supposons que, pour tout $a < \beta$, $\beta < \Omega$ l'espace $[0\,a)$ est muni d'une injection $[0\,a) \rightarrowtail [0\,1)$ qui préserve l'ordre. Démontrons qu'il en est de même pour $[0\,\beta)$. Si $\beta = a+1$, alors il suffit de placer β un peu plus loin que a. Si β est un ordinal limite comme $\beta < \Omega$, il existe une suite

$$a_k < a_{k+1} < \beta \quad \text{et} \quad a_k \to \beta .$$

Nous pouvons donc placer:

$$[0\beta) = [0a_1)[a_1a_2)\ldots[a_ka_{k+1})\ldots \to [0\,1)[0\,1)\ldots = [0\infty) \approx [0\,1)$$

(à remarquer que l'ordinal du segment $[a_ka_{k+1})$ est aussi plus petit que β). Ceci démontre que pour tout $a < \Omega$, l'espace $[0a)$ est muni d'une injection $[0a) \to [0\,1)$ qui préserve l'ordre. Soit maintenant $p \in L$ le zéro placé sur un $a < \Omega$. Prenons l'injection $i: [0\,a+1) \to [0\,1)$ et plaçons une copie réduite de l'intervalle $[0\,1)$ entre les points $i\beta$ et $i\,\beta{+}1$ pour tous les $\beta \leq a$ ($[0\,1) \approx [i\beta\ i\beta{+}1)$). On voit que p a un voisinage euclidien de dimension 1. Maintenant, toute fonction continue (en particulier différentiable) $g: L \to \mathrm{R}$ devient constante dans une queue (voir Lemme). Ceci définit un morphisme de R-algèbres

$$\phi: C^\infty(L) \to \mathrm{R}, \qquad \phi(g) = \text{la valeur constante},$$

qui n'est pas donné par l'évaluation en un point p_0 de L (ce serait l'évaluation en un point à l'infini, qui n'appartient pas à L).

LEMME. $\forall g: L \to \mathrm{R},\ \exists a \in \mathrm{R},\ \exists p \in L \mid g(x) = a \ \ \forall x \geq p.$

DEMONSTRATION. Soit $L_\alpha = [\alpha\Omega) \times [0\,1)$. On a $L_\alpha \subset L_0 = L$. On se convainc facilement que L_α est un espace séquentiellement compact. Alors $g(L_\alpha) \subset \mathrm{R}$ est un sous-ensemble compact de R (pour tout α) et les $g(L_\alpha)$ forment une chaîne décroissante de compacts (donc fermés). Il existe donc $a \in \mathrm{R}$, $a \in g(L_\alpha)$ pour tout $\alpha < \Omega$. Ceci montre que l'ensemble $g^{-1}(a)$ n'est pas borné. Soit

$$W_n \subset L, \quad W_n = \{ x \mid |g(x)-a| \geq 1/n \}.$$

W_n est borné. (Sinon, prenons une suite

$$x_i \leq y_i \leq x_{i+1} \quad \text{avec} \quad x_i \in W_n \quad \text{et} \quad y_i \in g^{-1}(a).$$

Alors $x_i \to s$ et y_i converge aussi vers le même point s. Donc

$$|g(s)-a| \geq 1/n \quad \text{et} \quad g(s) = a.)$$

Prenons $p \in L$, borne pour tous les W_n. Alors, si $x \geq p$, $x \notin W_n$ pour tout n, c'est-à-dire $|g(x) - a| < 1/n$ pour tout n, d'où $g(x) = a$.

0.9. PROPOSITION. *Soit M une variété. Alors, pour toute fonction différentiable $h: M \times \mathrm{R} \to \mathrm{R}$, il existe une unique fonction différentiable g, $g: M \times \mathrm{R} \times \mathrm{R} \to \mathrm{R}$, telle que l'équation suivante soit satisfaite pour tout $p \in M$ et $x, y \in \mathrm{R}$:*

$$h(p, x+y) = h(p,x) + g(p,x,y)y.$$

DEMONSTRATION.

$$h(p, x+y) - h(p,x) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} h(p, x+yt)\, dt,$$

alors

$$g(p,x,y) = \int_0^1 h'(p, x+yt)\, dt,$$

où h' est la dérivée de h par rapport à sa variable dans R. L'unicité découle immédiatement de l'unicité de la solution pour les équations différentielles ordinaires. Remarquer que $h'(p,x) = g(p,x,0)$.

En jouant sur le paramètre $p \in M$, on en déduit formellement sans avoir besoin d'utiliser à nouveau le Calcul différentiel la propriété suivante :

COROLLAIRE. *Pour toute fonction différentiable à n variables $h: \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$ et pour tout entier $m \geq 0$, il existe des fonctions différentiables uniques :*

f_k *à n variables* $\{ k = (\alpha, \beta, \ldots, \gamma) \mid \alpha + \beta + \gamma \leq m \}$,

l_k *à $2n$ variables* $\{ k = (\alpha, \beta, \ldots, \gamma) \mid \alpha + \beta + \gamma = m+1 \}$,

telles que l'équation suivante soit satisfaite pour tout $p, q \in \mathrm{R}^n$:

$$h(p+q) = \sum_k f_k(p)\, q^k + \sum_k l_k(p,q)\, q^k$$

(où, si $q = (x, y, \ldots, z)$*, on écrit* $q^k = x^\alpha y^\beta \ldots z^\gamma$ *).*

Je remercie M. C. Minguez de m'avoir signalé une erreur dans la formule qu'on trouve dans la version préliminaire de ce texte.

SECTION 1.

Les algèbres C^∞.

Une algèbre C^∞ sera, par définition, une R-algèbre dans laquelle on peut évaluer, non seulement les polynomes à coefficients réels, mais aussi toute autre fonction différentiable ; c'est-à-dire, une algèbre pour la théorie algébrique de Lawvere T dans laquelle

$$T(n, k) = C^\infty(R^n, R^k)$$

(cf. [8]). Pour fixer les idées, on va rappeler ici quelques propriétés qui nous seront utiles plus tard.

1.1. EXEMPLE. Pour toute variété M la R-algèbre $C^\infty(M)$ est une algèbre C^∞. En effet, si $f \in C^\infty(R^n)$ est une opération n-aire et $h_1, h_2, \ldots, h_n$ des éléments de $C^\infty(M)$, on définit $f(h_1 \ldots h_n) \in C^\infty(M)$ comme étant la composée

$$M \xrightarrow{(h_1, \ldots, h_n)} R^n \xrightarrow{f} R .$$

Cette définition, pour $M = R^m$, coïncide avec la structure canonique d'algèbre C^∞ libre sur m générateurs de $C^\infty(R^m)$ (les générateurs étant les projections).

On remarque que le produit tensoriel sur R de deux algèbres C^∞ n'aura pas, en général, une structure d'algèbre C^∞. Alors, sauf notamment dans le cas des algèbres de Weil (voir plus loin), les coproduits d'algèbres C^∞ ne sont pas donnés par le produit tensoriel. Par exemple,

$$C^\infty(R) \amalg C^\infty(R) = C^\infty(R^2) \neq C^\infty(R) \otimes C^\infty(R).$$

1.2. OBSERVATION. L'algèbre libre sur un générateur

$$F1 = T(1, 1) = C^\infty(R)$$

est un objet coalgèbre C^∞ dans la catégorie $\mathfrak{A}_\infty$ des algèbres C^∞. En particulier, c'est un objet anneau dans $\mathcal{A}_\infty^{op}$.

DEMONSTRATION. On rappelle qu'une algèbre C^∞ X est identifiée à un foncteur X défini sur T qui préserve les produits. Ainsi, par abus de langage, on a $X = X(1)$, $1 \in$ T . Considérons l'objet algèbre C^∞ dans Ens^{op} : $T(-,1): T \to Ens^{op}$. On a, pour tout $n \in$ T ,

$$T(n,1) = \mathcal{A}_\infty(F1, Fn) = Ens(1, |Fn|) = |Fn|$$

(où la notation «valeur absolue» indique l'ensemble sous-jacent). C'est-à-dire que $T(-,1)$ se factorise à travers le foncteur d'oubli :

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{A}_\infty^{op} \arrow[d] \\ T \arrow[ur] \arrow[r, "T(-{,}1)"'] & Ens^{op} \end{tikzcd}$$

ce qui définit un modèle de T dans $\mathcal{A}_\infty^{op}$.

1.3. REMARQUE. Il résulte immédiatement du Corollaire de la Proposition 0.9 que, si $a_i \in X$ est une famille d'éléments d'une algèbre C^∞, alors l'ensemble des $x \in X$ tels que $x \sim 0$ dans la congruence d'algèbre C^∞ engendrée par les a_i est égal à l'idéal (de R-algèbre) engendré par les a_i . C'est-à-dire, si nous notons (a_i) cet idéal, la relation

$$x \sim y \qquad \Longleftrightarrow \qquad x - y \in (a_i)$$

est une congruence d'algèbre C^∞. *Ceci permet de calculer les quotients d'algèbres C^∞ comme dans les* R-*algèbres*. Tout morphisme de R-algèbres $\phi : X \to Y$ entre algèbres C^∞ se factorise sous la forme

$$\phi = i\psi, \quad \psi : X \to Z, \quad i : Z \rightarrowtail Y,$$

où ψ est surjectif et morphisme d'algèbres C^∞ et où i est l'inclusion d'une sous-R-algèbre. Cependant, la structure d'algèbre C^∞ de Z induite par celle de X peut ne pas être la même que celle de Y . C'est-à-dire, Z pourrait ne pas être une C^∞-sous-algèbre. On ne connait pas d'exemple où ceci est le cas et, en particulier, on ignore s'il existe deux algèbres C^∞ qui soient isomorphes en tant que R-algèbres sans être isomorphes en tant qu'algèbres C^∞. Il serait intéressant d'étudier cette question, particulièrement dans le cas des algèbres de germes d'applications. Tout morphisme de R-algèbres entre algèbres d'applications est un morphisme d'algèbres C^∞ (Corollaire 3 de 0.2, 0.7 et 1.1).

Les algèbres de Weil.

Elles forment l'outil principal de ce travail et ont été introduites en Géométrie Différentielle par A. Weil [9]. Elles généralisent tout naturellement les jets d'ordre fini de C. Ehresmann [2]. Voici leur définition :

1.4. DEFINITION. Une *algèbre de Weil* est une R-algèbre (possédant un élément unité) X telle que :

1° Elle est locale avec idéal maximal I et $X/I \approx R$.

2° La dimension de X comme R-espace vectoriel est finie.

3° $I^{m+1} = 0$ pour un entier m (le plus petit m tel qu'il en soit ainsi s'appelle *hauteur de* X : $m = h(X)$).

On identifiera R au sous-espace de X formé des multiples scalaires de $1 \in X$. Si $x \in X$, alors x s'écrit de façon unique $x = x_0 + x_1$, où x_0 est un scalaire (la partie finie de x) et x_1 est nilpotent (la partie infinitésimale de x). Ainsi $X = R \oplus I$, et X est munie d'un morphisme canonique $\pi_0 : X \to R$. Si Z est une R-algèbre quelconque, un morphisme $\phi : Z \to X$ s'écrit $\phi = \phi_0 + \phi_1$, où $\phi_0 = \pi_0 \phi$ est un morphisme $Z \to R$, et ϕ_1 est linéaire dans I (mais pas multiplicatif). Un morphisme d'algèbres de Weil est simplement un morphisme de R-algèbres qui préserve l'élément unité. Ainsi R est un objet initial *et final* dans la catégorie $\mathfrak{W}$ des algèbres de Weil. Si $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k$ sont des éléments quelconques de I qui engendrent X, on peut écrire $X = R[\eta_1 \dots \eta_k]$, où les η_i satisfont un ensemble (fini) d'équations polynomiales. Si on prend $\eta_1, \dots$ $\dots, \eta_l$ de façon que leurs images dans l'espace vectoriel I/I^2 forment une base de cet espace, on vérifie sans difficulté que les η_i engendrent X, et que toute autre présentation nécessite au moins l = dimension I/I^2 éléments. On appellera ce nombre la *largeur de* X.

Dans les algèbres de Weil, on peut évaluer les fonctions différentiables, c'est-à-dire : ce sont des algèbres C^∞. Plus précisément :

1.5. PROPOSITION (cf. [8]). *Soit $X \in \mathfrak{W}$ de hauteur m ; alors X possède* *une unique structure d'algèbre C^∞ telle que pour toute algèbre C^∞ Z , les morphismes de* R*-algèbres $Z \to X$ et $X \to Z$ deviennent des morphismes d'algèbres C^∞ .*

DEMONSTRATION. Ceci découle, après des calculs évidents mais laborieux, du fait que, pour toute opération k-aire $h: \mathrm{R}^k \to \mathrm{R}$ de T , tout k-uple $(x_0, y_0, \dots, z_0) \in \mathrm{R}^k$ et tout entier m , d'après le Corollaire de la Proposition 0.9, il existe un unique polynome f de degré $\leq m$ tel qu'il y ait une équation :

$$h(x_0 + x, y_0 + y, \dots, z_0 + z) =$$
$$f(xy\dots z) + \sum_{\alpha+\beta+\dots\gamma=m+1} l_{\alpha\beta\dots\gamma}(xy\dots z)x^\alpha y^\beta \dots z^\gamma$$

vraie dans T (où les $l_{\alpha\beta\dots\gamma}$ sont des fonctions différentiables, une pour chaque

$$(\alpha, \beta, \dots, \gamma) \in \mathrm{N}^k \quad \text{tel que} \quad \alpha + \beta + \dots + \gamma = m + 1 \text{).}$$

Si $x_0 + x_1, y_0 + y_1, \dots, z_0 + z_1 \in X$, on interpréte

$$h(x_0 + x_1, y_0 + y_1, \dots, z_0 + z_1) = f(x_1, y_1, \dots, z_1).$$

Ainsi, par exemple, si $X = \mathrm{R}[\epsilon]$ est l'algèbre des nombres duaux, et si $h: \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ est une fonction C^∞ , on a

$$h(a + b\epsilon) = h(a) + h'(a)b\epsilon .$$

On a :

1.6. PROPOSITION. *Le diagramme*

$$\begin{array}{ccccc} C^\infty(\mathrm{R}) & \rightrightarrows & C^\infty(\mathrm{R}) & \longrightarrow & \mathrm{R}[\epsilon] \\ f(x) & \begin{array}{c}\longmapsto f(x^2) \\ \longmapsto f(0)\end{array} & & f \longmapsto & f(0) + f'(0)\epsilon \end{array}$$

est un coégalisateur dans la catégorie des algèbres C^∞ .

DEMONSTRATION. Si $\xi: C^\infty(\mathrm{R}) \to X$ coégalise les deux flèches du diagramme, alors $\xi(id)^2 = 0$ dans X . Ceci permet de définir

$$\phi : \mathrm{R}[\epsilon] \to X, \qquad \phi(a + b\epsilon) = a + b(\xi\, id).$$

Remarquer que $C^\infty(\mathrm{R})$ est libre sur le générateur $id \in C^\infty(\mathrm{R})$.

1.7. REMARQUE. Soit X une algèbre de Weil. Toute présentation de X, $X = \mathrm{R}[\eta_1 \dots \eta_k]$, détermine un épimorphisme dnas la catégorie des algèbres C^∞ :

$$\coprod_{k \text{ fois}} C^\infty(\mathrm{R}) = C^\infty(\mathrm{R}^k) \twoheadrightarrow X, \quad f \mapsto f(\eta_1 \dots \eta_k)$$

qui fait de X, interprété comme objet de la catégorie duale et noté $\bar{X}$, un un sous-objet de $\overline{C^\infty(\mathrm{R})}^k$. Si on note $\overline{C^\infty(\mathrm{R})} = \mathrm{R}$, on a simplement $\bar{X} \subset \mathrm{R}^k$. Ainsi, si on imagine $\bar{X}$ comme une variété infinitésimale (avec un seul point), la largeur de X est la *dimension euclidienne de* X.

La catégorie $\mathfrak{W}$ des algèbres de Weil possède toutes les colimites finies, qui se calculent simplement comme dans les R-algèbres.

1.8. PROPOSITION. *Soit $X \in \mathfrak{W}$ de hauteur m ; alors, toute algèbre quotient de X est une algèbre de Weil de hauteur $\leq m$. Soit X et $Y \in \mathfrak{W}$ de hauteurs respectives m et n ; alors leur produit tensoriel $Y \otimes X$ (sur R) est une algèbre de Weil de hauteur $m+n$. (Cf. [9].)*

DEMONSTRATION. La première partie de l'énoncé est intuitivement claire. Pour se convaincre de la vérité de la deuxième partie, observons que, si $xy \in X \otimes Y$, alors

$$xy = x_0 y_0 + (x_0 y_1 + y_0 x_1 + x_1 y_1).$$

$x_0 y_0 \in \mathrm{R}$ et, de la loi de binôme (ou du trinôme !), il découle que l'expression entre parenthèses élevée à sa $(m+n+1)^{\text{ième}}$ puissance est égale à zéro.

Si X a une présentation $X = \mathrm{R}[\eta_1 \dots \eta_k]$, alors $Y \otimes X$ est obtenu de la même façon, mais avec les coefficients pris dans Y. On peut donc écrire :

$$Y \otimes X = Y[\eta_1 \dots \eta_k] = Y[X].$$

Si X est une algèbre de Weil quelconque, on désignera par ${}^X\mathrm{R}$ l'ensemble sous-jacent à X muni de sa structure différentielle canonique d'espace vectoriel de dimension finie sur R.

Soit M une variété et $X \in \mathfrak{W}$. On désigne par $C^\infty(M, X)$ l'ensemble des applications différentiables $M \to {}^X\mathrm{R}$ muni de la structure d'algèbre

C^∞ induite (ponctuellement) par celle de X. Ainsi, en particulier, on a $C^\infty(M) = C^\infty(M, \mathrm{R})$ (voir Exemple 1.1).

1.9. OBSERVATION. Si $X \in \mathfrak{C}$ et $M \in \mathfrak{M}$, on vérifie facilement qu'il y a un isomorphisme $C^\infty(M) \otimes X \to C^\infty(M, X)$ défini par la formule

$$(fx)(p) = f(p)x, \quad p \in M \quad \text{et} \quad x \in X.$$

Ceci fait de $C^\infty(M, X)$ le coproduit des algèbres C^∞ $C^\infty(M)$ et X. Si X a une présentation $X = \mathrm{R}[\eta_1 \dots \eta_k]$, alors $C^\infty(M, X)$ est obtenu de la même façon, mais avec coefficients pris dans $C^\infty(M)$. On peut donc écrire:

$$C^\infty(M, X) = C^\infty(M)[\eta_1 \dots \eta_k] = C^\infty(M)[X].$$

Si M est une variété quelconque et $p \in M$, on dira qu'un morphisme $\phi: C^\infty(M) \to X$ *est de caractère local en* p si, chaque fois qu'une fonction $f \in C^\infty(M)$ est égale à zéro dans un voisinage U de p, on a $\phi(f) = 0$. Dans la proposition suivante, on établit une propriété fondamentale des algèbres de Weil.

1.10. PROPOSITION. *Soit X une algèbre de Weil, M une variété, $p \in M$ et $\phi: C^\infty(M) \to X$ un morphisme tel que $\phi(f) = f(p) + \phi_1(f)$. Alors ϕ est de caractère local en p.*

DEMONSTRATION. On a déjà remarqué (page 13) que ϕ_1 est linéaire; dire que ϕ est un morphisme revient alors à dire que, quels que soient f, g, on a:

$$\phi_1(fg) = \phi_1(f)g(p) + f(p)\phi_1(g) + \phi_1(f)\phi_1(g).$$

D'où, si $f(p) = 0 = g(p)$,

$$\phi_1(fg) = \phi_1(f)\phi_1(g).$$

Il s'ensuit que, pour tout entier k, si $g(p) = 0$, alors $\phi_1(g^k) = \phi_1(g)^k$. Soit maintenant f tel que $f = 0$ dans un voisinage U de p. Prenons g tel que

$$g(p) = 0 \quad \text{et} \quad g = 1_{|M-U}$$

(Proposition 0.2). Il est clair que

$$f = fg^k, \text{ d'où } \phi_1(f) = \phi_1(f)\phi_1(g)^k.$$

Ainsi la démonstration s'achève simplement en prenant $k \geq$ hauteur de X.

COROLLAIRE 1. *Si* $f: \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$ *est une opération n-aire et*

$$(x, y, \ldots, z) = (x_0 + x_1, y_0 + y_1, \ldots, z_0 + z_1) \in X^n$$

n éléments d'une algèbre de Weil X, *la valeur* $f(xy\ldots z) \in X$ *ne dépend que des valeurs de* f *sur un voisinage* U *de* $(x_0, y_0, \ldots, z_0) \in \mathrm{R}^n$. *C'est-à-dire si* $(f = g)|_U$, *alors* $f(xy\ldots z) = g(xy\ldots z)$.

DEMONSTRATION. Il suffit de prendre, dans la proposition,

$$M = \mathrm{R}^n \quad \text{et} \quad \phi = \text{évaluation en } (x_0, y_0, \ldots, z_0).$$

COROLLAIRE 2. *Quels que soient l'algèbre de Weil* X *et l'ouvert* U *de* R^n *l'ensemble de morphismes* $\{\phi: C^\infty(U) \to X\}$ *est canoniquement en bijection avec l'ensemble*

$$(\pi_0^{-1})^n(U) = \{(x_0 + x_1, \ldots, z_0 + z_1) \mid (x_0, \ldots, z_0) \in U\}$$

contenu dans X^n. *On notera* $U(X)$ *cet ensemble.*

DEMONSTRATION. On sait que $C^\infty(\mathrm{R}^m)$ est libre sur n générateurs. L'énoncé résulte alors de la proposition.

1.11. PROPOSITION. *Soit* $\pi_0: X \to \mathrm{R}$ *une algèbre de Weil et* M *une variété paracompacte. Alors, pour tout morphisme* $\phi: C^\infty(M) \to X$ *il existe un unique point* p *de* M *tel que* $\phi(f) = f(p) + \phi_1(f)$ *et* ϕ *est de caractère local en* p. *On remarque que* $\hat{p} = \pi_0 \phi$.

DEMONSTRATION. Immédiate d'après l'Exercice de Milnor (Proposition 0.7) et la proposition précédente.

SECTION 2.

Le premier modèle : le Topos de Weil.

On notera A l'objet anneau du modèle et, comme d'habitude, on désigne par $D \rightarrowtail A$ l'égalisateur des flèches $A \underset{0}{\overset{(\ )^2}{\rightrightarrows}} A$.

Le modèle que nous considérerons ici est le topos $Ens^{\mathfrak{W}}$ des préfaisceaux définis sur la catégorie (duale) des algèbres de Weil munie du foncteur d'oubli $\mathfrak{W} \to Ens$ comme objet anneau. On interpréte celles-ci, tout naturellement, au moyen du plongement de Yoneda. Soit $\mathfrak{M}$ la catégorie des variétés paracompactes; le foncteur $\mathfrak{M} \to Ens^{\mathfrak{W}}$ est défini par l'identification de toute variété $M \in \mathfrak{M}$ avec le préfaisceau «représentable» déterminé par l'algèbre $C^\infty(M)$. C'est-à-dire, pour toute algèbre de Weil X, $M(X)$ est l'ensemble des morphismes entre $C^\infty(M)$ et X, appelés points d'espèce X (ou X-points) de M dans [9]. Remarquer que $\emptyset(X) = \emptyset$ pour tout X. On interprétera, à l'occasion, de la même façon, les variétés non paracompactes. On a une première observation :

2.1. OBSERVATION. La flèche

$$\mathrm{R}(X) \xrightarrow{\approx} A(X) = X, \quad \phi \mapsto \phi(id)$$

est un isomorphisme d'objets algèbres C^∞ dans $Ens^{\mathfrak{W}}$, c'est-à-dire, les opérations ponctuelles de A coïncident avec celles de R induites par la structure d'algèbre C^∞ de $C^\infty(\mathrm{R})$ (Observation 1.1). De ceci on déduit, par exemple, que la flèche $(\ )^2 : A \to A$ est induite par la flèche

$$C^\infty(\mathrm{R}) \to C^\infty(\mathrm{R}), \quad f(x) \mapsto f(x^2).$$

Dorénavant, on identifiera A avec R. De ces observations et de la Proposition 1.6, il découle immédiatement que $D = \overline{\mathrm{R}[\epsilon]}$ et alors, en particulier, D est représentable. Noter que A ne l'est pas, puisque $C^\infty(\mathrm{R})$ n'appartient pas à $\mathfrak{W}$. On vérifie immédiatement que dans une catégorie de préfaisceaux tout foncteur représentable est petit. De ceci, de l'observation précédente et des propriétés bien connues du plongement de Yoneda, il découle que l'interprétation des algèbres de Weil dans $Ens^{\mathfrak{W}}$ est pleinement bien adaptée, c'est-à-dire :

2.2. PROPOSITION. *Le topos de Weil satisfait la condition 1 de la Définition 1.*

La Proposition 0.7 dit exactement que, quelle que soit la variété $M \in \mathfrak{M}$, ses points $1 \to M$ dans le topos de Weil coïncident avec ses points originaux. Avant de s'attaquer aux autres conditions de la Définition 1, on va démontrer un cas particulier de la condition 3 . Ceci va nous permettre de la considérer dans l'optique des concepts familiers, ce qui nous permettra de mieux comprendre la démonstration du cas général.

L'observation suivante découle immédiatement du fait que le produit tensoriel est le coproduit dans $\mathfrak{W}$.

2.3. OBSERVATION. Soit $F \in Ens^{\mathfrak{W}}$ et soit $X, Y \in \mathfrak{W}$. Alors, pour l'exponentielle dans le topos de Weil on a :

$$F^{\bar{X}}(Y) = F(X \otimes Y).$$

2.4. PROPOSITION. *Quelle que soit la variété $M \in \mathfrak{M}$, le fibré tangent $TM \in \mathfrak{M}$ s'identifie canoniquement avec M^D dans le topos de Weil.*

DEMONSTRATION. On doit démontrer que $TM = M^D$, c'est-à-dire, d'après l'observation précédente, que pour tout $X \in \mathfrak{W}$, il y a une bijection naturelle :

$$\frac{C^\infty(TM) \xrightarrow{\xi} X}{C^\infty(M) \xrightarrow{\eta} X[\epsilon]} \quad .$$

Quand $X = \mathrm{R}$, ceci n'est autre que l'identification classique entre vecteurs tangents et dérivations. On se rappelle que, si ξ est un vecteur tangent en $p \in M$ et si $f \in C^\infty(M)$, on a :

$$(1) \qquad \eta(f) = f(p) + df_p(\xi)\epsilon ,$$

où

$$df_p : T_pM \to T_{fp}\mathrm{R} \approx \mathrm{R}$$

est la dérivée de f en p . Dans le cas général, on procède exactement de la même façon. Si $\zeta : C^\infty(TM) \to X$, on définit $\eta : C^\infty(M) \to X[\epsilon]$ au moyen de la formule

$$(2) \qquad \eta(f) = \zeta(\pi_0\ df) + \zeta(\pi_1\ df)\epsilon ,$$

où

$$df : TM \to T\mathrm{R} \quad \text{et} \quad T\mathrm{R} \xrightarrow{<\pi_0, \pi_1>} \mathrm{R} \times \mathrm{R} .$$

On remarque que, si $X = \mathrm{R}$, d'après la Proposition 0.7 le morphisme ζ est l'évaluation en un vecteur tangent $\xi \in TM$, ce qui réduit la formule

(2) à la formule (1). On définit ainsi une transformation naturelle canonique $TM \to M^D$. Reste à montrer que cette transformation est une identification du premier faisceau avec le deuxième. On renvoie le lecteur à la preuve du Théorème 3.2, dont ceci n'est qu'un cas particulier.

Si $f: U \to M$ est une fonction différentiable entre deux variétés, on constate (d'après l'Observation 2.3) que dire qu'elle est w-étalée (Définition II) dans le topos de Weil revient à dire que, quels que soient X, $Y \in \mathfrak{W}$ et ζ, ϕ tels que dans le diagramme

$$
(1) \qquad
\begin{tikzcd}
C^\infty(M) \arrow[r, "\zeta"] \arrow[d, "f^*"'] & X \otimes Y \arrow[r, "X \otimes \pi_0"] \arrow[d, "\pi_0 \otimes Y"] & X \arrow[d, "\pi_0"] \\
C^\infty(U) \arrow[r, "\phi"'] \arrow[ur, dashed, "\eta"'] & Y \arrow[r, "\pi_0"'] & \mathrm{R}
\end{tikzcd}
$$

alors il existe un unique η rendant les deux triangles commutatifs. On constate immédiatement que ceci est une conséquence du cas particulier où $Y = \mathrm{R}$. A la lumière de la Proposition 2.4, on voit que, si $X = \mathrm{R}[\epsilon]$, l'énoncé signifie exactement que f est étalé au sens classique, c'est-à-dire, que f induit un isomorphisme entre les fibres des fibrés tangents.

2.5. PROPOSITION *(Condition 2i de la Définition I). Si $f: U \rightarrowtail M$ est une sous-variété ouverte (U paracompacte), alors elle est un sous-objet w-étalé dans le topos de Weil.*

DEMONSTRATION. Soit X, ζ, ϕ tels que dans le diagramme

$$
\begin{tikzcd}
C^\infty(M) \arrow[r, "\zeta"] \arrow[d, "f^*"'] & X \arrow[d, "\pi_0"] \\
C^\infty(U) \arrow[r, "\phi"'] \arrow[ur, dashed, "\eta"] & \mathrm{R}
\end{tikzcd}
$$

et soit $h \in C^\infty(U)$. De la Proposition 1.11 il suit que ϕ est de caractère local en un point $p \in U$, $\hat{p} = \pi_0 \phi$. La commutativité du carré dit que $\hat{p} = \pi_0 \zeta$, et alors, de la Proposition 1.10, il suit que ζ est également de caractère local en p. On prend $l \in C^\infty(M)$, $l = h$ sur un voisinage

V de p, $V \subset U$ (Corollaire 2, Proposition 0.2) et on définit $\eta h = \zeta l$. Que η est bien défini et qu'il est un morphisme découle immédiatement du caractère local de ζ en p. Finalement, $U \to M$ (dans le topos de Weil) est un monomorphisme parce que, comme on l'a vu, f^* est «localement surjectif».

2.6. OBSERVATION. *Si $f: A \rightarrowtail M$ est une sous-variété (A paracompacte) ouverte ou fermée, alors $f: A \rightarrowtail M$ est encore un sous-objet dans le topos de Weil.*

DEMONSTRATION. On a déjà démontré l'énoncé dans le cas où A est ouvert. Si A est fermé, on le démontre de la même façon, mais cette fois-ci en utilisant la Proposition 0.3.

Si $\pi_0 : X \to R$ est une algèbre de Weil et si $\zeta \in A(X)$, on va donc écrire $\zeta f^* = \zeta \in M(X)$ par abus de langage lorsqu'aucune confusion n'est à craindre. Ainsi, si $U \rightarrowtail M$ est une sous-variété ouverte, le fait qu'elle soit w-étalée dans le topos de Weil s'écrit :

$$U(X) = \{ \zeta \in M(X) \mid \pi_0 \zeta \in U \}.$$

2.7. PROPOSITION *(Condition 2ii de la Définition 1). Si $U_\alpha \rightarrowtail M$ est un recouvrement par des sous-variétés ouvertes d'une variété (paracompacte) M, alors $U_\alpha \rightarrowtail M$ est une famille épimorphe effective universelle, dans le topos de Weil.*

DEMONSTRATION. Soit $X \in \mathfrak{W}$ et $\zeta \in M(X)$. Alors, de la Proposition 1.11, il suit que $\pi_0 \zeta \in U_\alpha$ pour un α, et on en déduit que $\zeta \in U_\alpha(X)$. Ceci montre que la famille U_α est épimorphe. On constate sans difficulté qu'elle est effective et universelle (ce que nous savons, d'ailleurs, car dans un topos toute famille épimorphe est effective et universelle).

Remarquons que, si H est une variété et $f: H \to M$ une flèche dans le topos de Weil, les pré-images $f^{-1} U_\alpha \rightarrowtail H$ ne seront pas, en général, des sous-variétés de H.

La Proposition 2.7 est fausse si M n'est pas paracompacte. Par exemple, la ligne longue (Contr'exemple 0.8) est recouverte, comme toute variété, par des ouverts euclidiens, mais elle possède un point dans le modèle (évaluation à l'infini) qui n'appartient à aucun de ces ouverts.

2.8. CONJECTURE. Une variété est paracompacte ssi elle est réunion, dans le topos de Weil, d'ouverts euclidiens.

On s'attaque maintenant, par étapes successives, à démontrer que les produits fibrés transversaux sont préservés.

2.9. PROPOSITION *(Préservation des produits, voir [9]). Quelles que soient les variétés $M, N \in \mathfrak{M}$, la variété produit $M \times N$ est également le produit de M et N dans le topos de Weil.*

DEMONSTRATION. On démontre que la transformation naturelle canonique

$$(M \times N)(X) \to M(X) \times N(X)$$

est une bijection pour tout $X \in \mathfrak{W}$. Soit $U_\alpha \rightarrowtail M$ et $V_\beta \rightarrowtail N$ des recouvrements par des ouverts euclidiens $U_\alpha \subset \mathrm{R}^n$, $V_\beta \subset \mathrm{R}^m$. Alors d'après le Corollaire 2 de la Proposition 1.10, on a :

$$(U_\alpha \times V_\beta)(X) = (\pi_0^{-1})^{n+m}(U_\alpha \times V_\beta) =$$
$$= (\pi_0^{-1})^n (U_\alpha) \times (\pi_0^{-1})^m (V_\beta) = U_\alpha(X) \times V_\beta(X).$$

La preuve s'achève donc en utilisant la Proposition 2.7 qui dit, en particulier, que $M(X)$ et $N(X)$ sont la réunion, respectivement, des $U_\alpha(X)$ et des $V_\beta(X)$.

Dans le cas où $X = \mathrm{R}[\epsilon]$, l'égalité $(M \times N)(X) = M(X) \times N(X)$ signifie exactement que le fibré tangent à la variété produit est le produit des fibrés tangents :

$$T(M \times N) = T(M) \times T(N).$$

Ceci illustre certaines limites dans les applications de la géométrie différentielle synthétique à l'étude des variétés classiques. Par exemple, si on veut démontrer que $T(M \times N) = T(M) \times T(N)$ en utilisant l'identification de T avec une exponentielle $T(M) = M^D$ (Proposition 2.4), il faut tenir compte du fait que cette exponentielle est prise dans une autre catégorie ; et alors il faut au préalable constater que le produit $M \times N$

est encore un produit dans cette autre catégorie. Mais ceci revient à démontrer que $T(M\times N) = T(M)\times T(N)$. Le but de la géométrie différentielle synthétique n'est pas de démontrer des propositions de ce type (ou encore d'autres beaucoup plus difficiles) mais de les placer dans un contexte dans lequel elles sont évidentes (une flèche $D \to M\times N$ est la même chose, évidemment, qu'une paire de flèches $D \to M$, $D \to N$).

2.10. PROPOSITION. *Soit $M \in \mathfrak{M}$ une variété, $U \rightarrowtail M$ une sous-variété ouverte et $A \rightarrowtail M$ une sous-variété fermée. Alors l'intersection $A \cap U$ est également l'intersection de A et U dans le topos de Weil.*

DEMONSTRATION. Soit $\pi_0 : X \to \mathrm{R}$ une algèbre de Weil et soit ζ un élément de $A(X)\cap U(X)$. Alors

$$\pi_0 \zeta \in A\cap U \quad \text{et} \quad \zeta \in A(X).$$

Comme $A\cap U$ est une sous-variété ouverte de A, il résulte de la Proposition 2.5 que $\zeta \in (A\cap U)(X)$.

2.11. PROPOSITION. *Soit $V \subset \mathrm{R}^{n+k}$ un ouvert de R^{n+k}, $0 \in V$, et soit L l'ouvert de R^n suivant:*

$$L = \{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathrm{R}^n \mid (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0) \in V \},$$

c'est-à-dire L est l'égalisateur

$$L \rightarrowtail V \underset{0}{\overset{\pi}{\rightrightarrows}} \mathrm{R}^k$$

où π désigne la projection sur les k dernières coordonnées. Alors L est également l'égalisateur de π et 0 dans le topos de Weil.

DEMONSTRATION. Soit $\pi = (\pi_{n+1}, \dots, \pi_{n+k})$ *et soit* $\zeta \in V(X)$ *tel que:*

$$\zeta(\pi_{n+1}) = \dots = \zeta(\pi_{n+k}) = 0.$$

Alors $\pi_0 \zeta \in L$ et $\zeta \in \mathrm{R}^n(X)$. D'après la Proposition 2.5, $\zeta \in L(X)$.

2.12. PROPOSITION. *(Préservation des égalisateurs définis par un système d'équations indépendantes). Soit $F \rightarrowtail U$, $U \subset \mathrm{R}^{n+k}$ ouvert, une sous-variété définie par un système de k applications différentiables*

$$h : U \to \mathrm{R}^k,\ h = (h_1, \dots, h_k),\ \ F = \{ p \in \mathrm{R}^{n+k} \mid h_i(p) = 0 \quad \forall i \},$$

tel que le jacobien de h soit de rang k en tout point p de F ([3] page 23). Alors l'égalisateur

$$F \rightarrowtail U \underset{0}{\overset{h}{\rightrightarrows}} \mathbb{R}^k$$

est aussi un égalisateur dans le topos de Weil.

DEMONSTRATION. Soit $\zeta \in U(X)$ tel que $\zeta(h_i) = 0$ pour tout i. Alors $\pi_0 \zeta = \hat{p} \in F$. Soit

$$\psi : V \to W \subset U, \quad \psi(0) = p,$$

tels que donnés par la Proposition 0.1. On a la situation suivante :

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r] & U \arrow[r, shift left, "h"] \arrow[r, shift right, "0"'] & \mathbb{R}^k \\ L \arrow[u, "\psi"] \arrow[r] & V \arrow[u, "\psi"] \arrow[r, shift left, "\pi"] \arrow[r, shift right, "0"'] & \mathbb{R}^k \arrow[u, "Id"'] \end{tikzcd}$$

où

$$L = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0) \in V\}$$

et où π est la projection sur les k dernières coordonnées. Quel que soit $(x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0) \in V$, on a

$$\psi(x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0) = \pi(x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0) = 0,$$

d'où il résulte que $\psi(x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0) \in F$. Donc

$$L \overset{\psi}{\rightarrowtail} W \cap F \subset F$$

définit un difféomorphisme sur l'ouvert $W \cap F$ de F. Alors comme $\hat{p} = \pi_0 \zeta$ et $\psi(0) = p$, on a $\pi_0 \zeta = \hat{0}\psi^*$, et il s'ensuit qu'il existe un unique

$$\zeta' \in V(X) \text{ tel que } \zeta'\psi^* = \zeta.$$

Mais alors

$$\zeta'(\pi_{n+i}) = \zeta(h_i) = 0.$$

On en déduit, d'après la Proposition 2.11, que $\zeta' \in L(X)$, et alors on a $\zeta'\psi^* = \zeta \in F(X)$. Ceci termine la démonstration.

Il serait intéressant de savoir si l'idéal des fonctions congruentes à zéro coïncide avec celui des **fonctions nulles sur** F. **Autrement dit,** si le diagramme

$$C^\infty(\mathrm{R}^k) \overset{h^*}{\underset{0^*}{\rightrightarrows}} C^\infty(\mathrm{R}^{n+k}) \longrightarrow C^\infty(F)$$

est un coégalisateur dans la catégorie des algèbres C^∞. Dans la section 4, on étend le résultat obtenu dans la **Proposition 2.12 à une classe** d'algèbres C^∞ beaucoup plus vaste que celle des algèbres de **Weil** (Théorème 4.6 iii), mais l'énoncé général nous échappe encore.

Une question qui se pose tout naturellement est de savoir si l'énoncé réciproque de la Proposition 2.12 est vrai. Ceci est effectivement le cas dans tout modèle bien adapté.

2.13. REMARQUE. Soit $\mathfrak{M} \to \mathcal{E} \leftarrow \mathfrak{W}^{op}$ un modèle bien adapté et soit

$$h : \mathrm{R}^{n+k} \to \mathrm{R}^k, \quad h = (h_1, \ldots, h_k)$$

un système de k applications différentiables. Si l'ensemble

$$F = \{\, p \in \mathrm{R}^{n+k} \mid h_i(p) = 0,\ i = 1, 2, \ldots, k \,\}$$

possède une structure de variété telle que l'inclusion $F \rightarrowtail \mathrm{R}^{n+k}$ soit différentiable et que le diagramme

$$F \rightarrowtail \mathrm{R}^{n+k} \overset{h}{\underset{0}{\rightrightarrows}} \mathrm{R}^k$$

soit un égalisateur dans $\mathcal{E}$, alors les applications h_i sont indépendantes.

DEMONSTRATION. D'après la condition 3 de la Définition I, si on prend $X = \mathrm{R}[\epsilon]$, pour tout $p \in F$ on a une suite exacte d'espaces vectoriels

$$0 \longrightarrow T_p F \longrightarrow T_p \mathrm{R}^{n+k} \xrightarrow{dh_p} T_{h(p)} \mathrm{R}^k \longrightarrow 0 .$$

Ceci montre que dh_p est surjectif, c'est-à-dire que les applications h_i sont indépendantes.

Un cas intéressant de la Proposition 2.12 est celui des ouverts euclidiens :

2.14. EXEMPLE. Soit $U \subset \mathrm{R}^n$. Prenons $g: \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$ tel que

$$x \in U \iff g(x) = 0$$

(cf. [3], page 33, Exercice 11). On a donc

$$U \rightarrowtail^{s} \mathrm{R}^{n+1} \xrightarrow{h} \mathrm{R}$$

défini ainsi: si $p = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$:

$p \overset{s}{\longmapsto} (p, g(p)^{-1})$ pour $p \in U$,

$(p, x_{n+1}) \overset{h}{\longmapsto} g(p)x_{n+1} - 1$ pour (p, x_{n+1}) quelconque dans R^{n+1}.

On vérifie immédiatement que

$$U \rightarrowtail^{s} \mathrm{R}^{n+1} \underset{0}{\overset{h}{\rightrightarrows}} \mathrm{R}$$

est un égalisateur, puis que $\dfrac{\partial h}{\partial x_{n+1}}(s(p)) = g(p)$. Il s'ensuit que le jacobien de h est de rang 1 en tout point p de U.

Toute variété définie globalement par un système de fonctions différentiables indépendantes est orientable (ce qui peut se déduire précisément de la Proposition 2.12 en prenant $X = \mathrm{R}[\epsilon]$ (cf. [3], page 100)). Il s'ensuit donc qu'il y a des variétés M (comme la bande de Möbius) qui ne sont l'égalisateur d'aucun système de fonctions différentiables dans les modèles bien adaptés. Ceci implique que l'algèbre $C^\infty(M)$ n'est pas de *présentation finie* (sinon M serait un égalisateur dans, par exemple, le topos de Weil). On remarque que, contrairement, toute variété paracompacte est l'égalisateur d'un système de fonctions différentiables dans $\mathfrak{M}$. En effet, ceci est une conséquence immédiate du théorème d'immersion de Whitney ([3], page 53) et du fait, déjà utilisé dans l'Exemple 2.14, que tout fermé est le zéro d'une application différentiable.

2.15. PROPOSITION *(Préservation des pré-images transversales). Soit* $f: M \to N$ *une application différentiable quelconque (dans* $\mathfrak{M}$*) et* $A \rightarrowtail N$ *une sous-variété transversale à* f *(voir Définition 0.5). Alors le produit fibré*

(1)
$$\begin{tikzcd} F \arrow[r] \arrow[d, tail] & A \arrow[d, tail] \\ M \arrow[r, "f"] & N \end{tikzcd}$$

$F = f^{-1}(A)$ est également un produit fibré dans le topos de Weil.

DEMONSTRATION. De la Proposition 0.4 il résulte qu'il existe un recouvrement $U_\alpha \rightarrowtail N$ par des ouverts euclidiens tels que, pour chaque α, le carré

(2)
$$\begin{tikzcd} U_\alpha \cap A \arrow[r] \arrow[d, tail] & 1 \arrow[d, tail, "0"] \\ U_\alpha \arrow[r] & \mathrm{R}^k \end{tikzcd}$$

soit un produit fibré transversal. On peut choisir les U_α de façon qu'il existe des ouverts euclidiens $V_\alpha \rightarrowtail M$ recouvrant M et tels que le carré

$$\begin{tikzcd} V_\alpha \arrow[r] \arrow[d, tail] & U_\alpha \arrow[d, tail] \\ M \arrow[r] & N \end{tikzcd}$$

commute. On a alors pour chaque α les carrés

(3)
$$\begin{tikzcd} V_\alpha \cap F \arrow[r] \arrow[d, tail] & U_\alpha \cap A \arrow[d, tail] \\ V_\alpha \arrow[r, "f"] & U_\alpha \end{tikzcd}$$

et

(4)
$$\begin{tikzcd} V_\alpha \cap F \arrow[r] \arrow[d, tail] & U_\alpha \cap A \arrow[r] & 1 \arrow[d, tail, "0"] \\ V_\alpha \arrow[r] & U_\alpha \arrow[r] & \mathrm{R}^k \end{tikzcd} .$$

On constate sans difficulté que ce sont aussi des produits fibrés transversaux. Il résulte de la Proposition 2.12 que les carrés (2) et (4) sont des produits fibrés dans le topos de Weil. On en déduit que le carré (3) l'est également. La démonstration s'achève maintenant: Soit $\pi_0 : X \to \mathrm{R}$ une algèbre de Weil, et $\zeta \in M(X)$ tel que $\zeta f^* \in A(X)$. D'après la Proposition 2.7, $\zeta \in V_\alpha(X)$ pour un certain α . Donc $\zeta f^* \in U_\alpha(X)$. Il résulte alors de la Proposition 2.10 que $\zeta f^* \in (U_\alpha \cap A)(X)$. Comme le carré (3) est un produit fibré, on en déduit $\zeta \in (V_\alpha \cap F)(X)$. En particulier, on a $\zeta \in F(X)$. Ceci montre que le carré (1) est un produit fibré dans le topos de Weil.

2.16. THEOREME *(Condition 2 iii de la Définition I). Les produits fibrés transversaux quelconques entre variétés (paracompactes) sont préservés dans le topos de Weil.*

DEMONSTRATION. Immédiate d'après les Propositions 0.6, 2.9 et 2.15.

La nature générale de cette démonstration est évidente. On peut donc établir la remarque suivante :

2.17. REMARQUE. La condition 2 iii de la Définition I est équivalente à la conjonction des cas particuliers suivants :

1° Préservation de produits d'ouverts euclidiens.

2° Préservation d'égalisateurs définis par un système d'équations indépendantes sur un ouvert euclidien.

3° Préservation des intersections de sous-variétés fermées avec les sous-variétés ouvertes euclidiennes.

Bien entendu, ceci est vrai pourvu que la condition 2 ii soit satisfaite.

Le Théorème 2.16 termine la démonstration du fait que le topos de Weil est un modèle bien adapté (on démontrera dans la Section 3 la condition 3 de la Définition I dont la Proposition 2.4 n'est qu'un cas particulier). Cependant le plongement des variétés est loin d'être plein. Comme dans tout modèle bien adapté, une flèche dans le topos de Weil entre deux variété paracompactes $f: M \to N$ détermine une application $f: M \to N$ (entre les ensembles sous-jacents) possédant une dérivée

$$df_p : T_p(M) \to T_{f(p)}(N).$$

L'application f ne serait pas en général différentiable pour les structures de variétés de M et N . De plus, lorsque f est différentiable, la dérivée

df ne sera pas, en général, la vraie dérivée. R. Paré nous a montré comment par exemple, dans le cas où $M = N = \mathrm{R}$, une fonction quelconque $f\colon \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ est déterminée par une fonction dans le modèle de dérivée nulle. Il suffit de définir la transformation naturelle

$$\mathrm{R} = A \xrightarrow{f} A\colon\ X \xrightarrow{f_X} X, \quad f_X(x_0 + x_1) = f(x_0).$$

En fait, on peut choisir arbitrairement la dérivée. Si $g\colon \mathrm{R} \to \mathrm{R}$, il suffit de définir $f_X : X \to X$ par

$$f_X(x_0 + x_1) = f(x_0) + g(x_0)x_1 .$$

On a:

2.18. PROPOSITION. $\mathrm{R}^{\mathrm{R}}[[X]] = Ens^{\mathfrak{W}}(A, A)$, *et ceci est un isomorphisme d'algèbres* C^∞ *(en particulier, d'anneaux)* $(A = \mathrm{R})$.

DEMONSTRATION. Soit $f_X : X \to X$, $X \in \mathfrak{W}$, une transformation naturelle de A dans A. On définit $f_0 = f_{\mathrm{R}}$. On définit f_1 au moyen de l'équation

$$f_{\mathrm{R}[\epsilon]}(x_0 + \epsilon) = g(x_0) + f_1(x_0)\epsilon .$$

Par naturalité du morphisme π_0 on voit que $g = f_0$:

$$g(x_0) = \pi_0\, f_{\mathrm{R}[\epsilon]}(x_0 + \epsilon) = f_{\mathrm{R}}\, \pi_0(x_0 + \epsilon) = f_{\mathrm{R}}(x_0) = f_0(x_0).$$

Ensuite, on définit f_2 par l'équation:

$$f_{\mathrm{R}[\delta]}(x_0 + \delta) = g(x_0) + h(x_0)\delta + f_2(x_0)\delta^2$$

(où $\mathrm{R}[\delta]$ est engendré par un élément δ satisfaisant $\delta^3 = 0$). En utilisant le morphisme

$$\mathrm{R}[\delta] \xrightarrow{\pi} \mathrm{R}[\epsilon], \quad \delta \xmapsto{\pi} \epsilon ,$$

on voit comme ci-dessus que $g = f_0$ et $h = f_1$. On continue ainsi de suite pour définir $f_3, f_4, \ldots, f_k, \ldots$ telles que

$$f_{\mathrm{R}[\tau]}(x_0 + \tau) = f_0(x_0) + f_1(x_0)\tau + \ldots + f_k(x_0)\tau^k ,$$

où $\mathrm{R}[\tau]$ est engendré par un élément τ satisfaisant $\tau^{k+1} = 0$. Soit maintenant $x_0 + x_1 \in X$ quelconque, et soit k tel que $x_1^{k+1} = 0$. Par naturalité du morphisme

$$\mathrm{R}[\tau] \xrightarrow{\phi} X, \quad \tau \xmapsto{\phi} x_1 ,$$

il découle immédiatement que

$$(1) \qquad f_X(x_0 + x_1) = f_0(x_0) + f_1(x_0)x_1 + \dots + f_k(x_0)x_1^k.$$

Ceci montre qu'il existe une et une seule série formelle

$$f_0 + f_1 x + f_2 x^2 + \dots$$

avec coefficients dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ qui induit f_X au moyen de la formule (1) ci-dessus. Il reste à démontrer que cette bijection est un isomorphisme d'algèbres C^∞. Ceci découle, après des calculs plus ou moins laborieux, de la définition de la structure C^∞ de A (Définition donnée dans la Proposition 1.5) et de celle de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}[[X]]$, qui est obtenue de la façon suivante :

On imagine les éléments

$$f_0 + f_1 X + \dots + f_k X^k + \dots \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}[[X]]$$

comme de vraies fonctions C^∞

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{telles que} \quad f^{(k)} = k!\, f_k .$$

Alors, si l est une opération n-aire, pour calculer l'action de l sur un n-tuple

$$(f_0 + f_1 X + \dots,\ g_0 + g_1 X + \dots,\ \dots,\ h_0 + h_1 X + \dots) \in (\mathbb{R}^{\mathbb{R}}[[X]])^n,$$

on écrit simplement, en dérivant formellement, la série de Taylor de la composée $l(f, g, \dots, h)$.

Je finis temporairement le développement de ce modèle par quelques observations. La catégorie $\mathfrak{W}$ ne possède pas de limites inductives filtrantes et elle n'est donc pas celle des modèles de sa théorie géométrique (géométrique = cohérente + disjonctions quelconques), c'est-à-dire, de la théorie formée par l'ensemble des formules vraies dans les algèbres de Weil. Cette théorie est axiomatisable par le seul axiome déterminé par la formule :

$$(\exists\lambda)(\exists n)(\exists z)(x = \lambda + z \wedge z^n = 0), \quad \text{autrement dit,} \quad \bigvee_{\lambda,n} (x-\lambda)^n = 0,$$

où λ parcourt l'ensemble des nombres réels et n celui des entiers ; et elle possède comme *topos classifiant* le topos de Weil ; c'est-à-dire, le topos $Ens^{\mathfrak{W}}$, muni du foncteur d'oubli A, classifie la *théorie des algè-*

bres de Weil. Cette dernière affirmation résulte du fait que les algèbres de Weil, par conséquence immédiate de l'axiome ci-dessus, recouvrent le modèle générique. Pour plus de détails, voir [7].

On signale que le modèle générique $A \in Ens^{\mathbb{W}}$ ($A = \mathrm{R} =$ foncteur d'oubli) n'est pas un objet algèbre de Weil (sur les réels constants) ni une colimite filtrante de ces objets. Il l'est seulement dans le sens interne du mot.

SECTION 3.

Les prolongements de Weil.

3.1. DEFINITION. Soit M une variété paracompacte (à n dimensions), et $\pi_0 : X \to \mathrm{R}$ une algèbre de Weil (de dimension linéaire $k+1$ sur R); si $\mathrm{R}^n \supset U_a \rightarrowtail M$ est une famille de cartes définissant la structure différentielle de M , d'après le Corollaire 2 de la Proposition 1.10 et la Proposition 2.7, on obtient une famille :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{R}^{n(k+1)} \arrow[d] & = & X^n \arrow[d] & \supset & (\pi_0^{-1})^n(U_a) \arrow[d] & = & U_a(X) \arrow[d] \arrow[r, tail] & M(X) \arrow[d] \\
\mathrm{R}^n & = & \mathrm{R}^n & \supset & U_a & = & U_a(\mathrm{R}) \arrow[r, tail] & M(\mathrm{R})
\end{tikzcd}$$

qui définit une structure de variété différentielle de dimension $n(k+1)$ (plus précisément, de variété différentielle fibrée de base M) sur l'ensemble $M(X)$, qui, lorsqu'il sera muni de cette structure, s'appellera: *le prolongement d'espèce X de M* (cf. [9]) et se notera ${}^X M$. Ainsi, ${}^X\mathrm{R}$ est l'ensemble $\mathrm{R}(X) = X$ muni de sa structure différentielle canonique d'espace vectoriel de dimension finie sur R . Si $f: M \to N$ est une application différentiable, en choisissant des cartes $U_a \rightarrowtail M$ et $V_a \rightarrowtail N$ telles que le carré

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[rr, "f"] & & N \\
U_a \arrow[u, tail] \arrow[rr] & & V_a \arrow[u, tail]
\end{tikzcd}$$

commute, on vérifie immédiatement que l'application $\zeta \mapsto \zeta f^*$ entre ${}^X M$ et ${}^X N$ est différentiable. Elle se notera ${}^X f : {}^X M \to {}^X N$.

Si M n'est pas paracompacte, alors $M(X)$ n'aura pas en général de structure différentiable. Par exemple, si $M = L$ est la ligne longue (contr'exemple 0.8), le point à l'infini dans $L(\mathrm{R})$ ne possède aucun voisinage euclidien.

On remarque que, si $X = \mathrm{R}$ alors ${}^X M = M$, et que si $X = \mathrm{R}[\epsilon]$ on a ${}^X M = T(M)$, fibré tangent muni de sa structure différentielle. On est maintenant en mesure de démontrer la condition 3 de la Définition I pour le topos de Weil.

3.2. THEOREME *(Première propriété universelle fondamentale des prolongements). Quelles que soient l'algèbre de Weil* $Y \in \mathfrak{W}$ *et la variété* $M \in \mathfrak{M}$, ${}^{Y}M$ *est canoniquement identifié dans le topos de Weil avec l'exponentielle* M^Y.

DEMONSTRATION. D'après l'observation 2.3, on doit vérifier que, pour tout $X \in \mathfrak{W}$, il y a une bijection naturelle :

$$\frac{C^\infty({}^Y M) \xrightarrow{\ \xi\ } X}{C^\infty(M) \xrightarrow{\ \eta\ } X \otimes Y = X[Y]} .$$

On a déjà, dans la Proposition 2.4, construit une transformation naturelle canonique $\xi \mapsto \eta$ dans le cas particulier où $Y = \mathrm{R}[\epsilon]$. Dans le cas général, on procède exactement de la même façon. Si $f \in C^\infty(M)$, on considère ${}^Y f \colon {}^Y M \to {}^Y \mathrm{R}$ et on vérifie que l'application

$$C^\infty(M) \xrightarrow{\ d\ } C^\infty({}^Y M, Y), \quad f \mapsto {}^Y f,$$

est un morphisme. D'après l'observation 1.8,

$$C^\infty({}^Y M, Y) = C^\infty({}^Y M) \otimes Y.$$

On définit η au moyen de la formule : $\eta = (\xi \otimes id_Y) \circ d$. Si $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots$ $\ldots, \epsilon_k$ est une base (linéaire) de l'idéal $I \subset Y$, on a un isomorphisme

$${}^Y \mathrm{R} \xrightarrow{(\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_k)} \mathrm{R}^{k+1},$$

et pour tout $f \in C^\infty(M)$,

$${}^Y f \in C^\infty({}^Y M, Y) = C^\infty({}^Y M)[\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_k]$$

s'écrit sous la forme

$$^{Y}f = \pi_0\, {}^{Y}f + (\pi_1\, {}^{Y}f)\epsilon_1 + \dots + (\pi_k\, {}^{Y}f)\epsilon_k .$$

Il s'ensuit que

$$\eta(f) = (\xi \otimes id_Y)({}^{Y}f\,) \in X[\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_k]$$

s'écrit sous la forme

$$(1) \quad \eta(f) = \xi(\pi_0\, {}^{Y}f) + \xi(\pi_1\, {}^{Y}f)\epsilon_1 + \dots + \xi(\pi_k\, {}^{Y}f)\epsilon_k ,$$

et on retrouve la formule (2) de la démonstration de la Proposition 2.4. Reste à montrer que l'application $\xi \mapsto \eta$ ainsi définie est bijective. Soit $U \rightarrowtail M$ un ouvert euclidien, $U \subset \mathrm{R}^n$. On a le diagramme commutatif:

$$\begin{tikzcd} {}^{Y}M(X) \arrow[r] & M(X \otimes Y) \\ {}^{Y}U(X) \arrow[r] \arrow[u] & U(X \otimes Y) \arrow[u] \end{tikzcd} .$$

D'après la Propostiion 2.7, il suffira de démontrer la bijectivité dans le cas d'un ouvert euclidien U. Pour se convaincre que ceci est vrai dans ce cas, il suffira de le montrer quand U est de dimension 1 ; pour les autres dimensions, le phénomène se produit exactement de la même façon, (avec une notation nécessairement plus encombrante, ce qui détruit la transparence de la preuve). Soit donc $U \subset \mathrm{R}$ et $\xi\colon C^\infty({}^{Y}U) \to X$. D'après le Corollaire de la Proposition 1.10, ξ est déterminé par un $(k+1)$-uplet

$$(\xi(\pi_0), \xi(\pi_1), \dots, \xi(\pi_k)) = (x_0 + x_1, y_0 + y_1, \dots, z_0 + z_1) \in X^{k+1}$$

tel que $(x_0, y_0, \dots, z_0) \in {}^{Y}U$, c'est-à-dire:

$$x_0 + y_0\, \epsilon_1 + \dots + z_0\, \epsilon_k \in Y \quad \text{et} \quad x_0 \in U .$$

Si on applique la formule (1) à $f = i =$ inclusion de U dans R, $U \subset \mathrm{R}$, on obtient:

$$\eta(i) = (x_0 + x_1) + (y_0 + y_1)\epsilon_1 + \dots + (z_0 + z_1)\epsilon_k ,$$

ce qui détermine, encore par le Corollaire 2 de la Proposition 1.10 un morphisme typique $\eta\colon C^\infty(U) \to X \otimes Y$.

On a le corollaire suivant:

3.3. THEOREME *(Théorème fondamental de transitivité des prolongements (cf. [9])). Quelles que soient la variété paracompacte M et les algèbres de Weil X, Y, il existe un difféomorphisme canonique ${}^X({}^YM) = {}^{X\otimes Y}M$ entre le prolongement d'espèce X du prolongement d'espèce Y de M et le prolongement d'espèce $X \otimes Y$ de M.*

DEMONSTRATION. D'après la définition de la structure différentiable des prolongements (Définition 3.1), la bijection établie dans le théorème précédent est clairement un difféomorphisme.

3.4. PROPOSITION. *Soit $M \in \mathfrak{M}$ et $X \in \mathfrak{W}$; alors, quelle que soit la variété S, une application $\phi : S \to {}^XM$ est différentiable ssi, pour toute $f \in C^\infty(M)$, l'application composée $({}^Xf)\phi : S \to {}^XM \to {}^X\mathrm{R}$ est différentiable.*

DEMONSTRATION. La proposition se vérifie facilement dans le cas d'un ouvert euclidien $U \subset \mathrm{R}^n$. Supposons que $M = U$ et que $({}^Xf)\phi$ soit différentiable pour tout $f \in C^\infty(U)$. Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} {}^XU \subset {}^X(\mathrm{R}^n) \arrow[drr, "{}^X\pi_i"'] & = & ({}^X\mathrm{R})^n \arrow[d, "\pi_i"] \\ & & {}^X\mathrm{R} \end{tikzcd}$$

où π_i sont les n projections. Il suffit de prendre $f = \pi_i$ pour en déduire la différentiabilité de ϕ. On passe maintenant au cas général. Supposons donc que $({}^Xg)\phi$ est différentiable quel que soit $g \in C^\infty(M)$. Du diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & {}^XM \arrow[r, "{}^Xg"] \arrow[d, "\pi_0"] & {}^X\mathrm{R} \arrow[d, "\pi_0"] \\ S \arrow[ur, "\phi"] \arrow[r, "h"'] & M \arrow[r, "g"'] & \mathrm{R} \end{tikzcd}$$

et du Corollaire 3 de la Proposition 0.2, il résulte que l'application composée $h = \pi_0\,\phi$ est différentiable. Soit $p \in S$ et soit $V \rightarrowtail S$, $U \rightarrowtail M$ des ouverts euclidiens tels que $p \in V$ et que le diagramme

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "h"] & M \\ V \arrow[u, tail] \arrow[r, "h|_V"] & U \arrow[u, tail] \end{tikzcd}$$

commute. Si $x \in V$ et $f \in C^\infty(U)$, prenons $g \in C^\infty(M)$ tel que $g = f$ sur un ouvert $W \subset U$, $h(x) \in W$ (Corollaire 2 de la Proposition 0.2). Soit $H \subset V$, $x \in H$, un ouvert tel que $h|_V(H) \subset W$. Par hypothèse $({}^X g)\phi$ est différentiable, d'où on déduit que $({}^X f)\phi|_H$ l'est également, ce qui prouve la différentiabilité de $({}^X f)\phi|_V$. On en déduit que $\phi|_V$ est différentiable, ce qui à son tour prouve la différentiabilité de ϕ. Ceci achève la démonstration.

La correspondance classiquement établie entre dérivations de l'algèbre $C^\infty(M)$ et champs différentiables de vecteurs sur M se généralise en une deuxième propriété universelle des prolongements. Considérons une famille $\phi_s : C^\infty(M) \to X$ de X-points de M indexés différentiablement par un paramètre appartenant à une variété S, $s \in S$; c'est-à-dire, une application diffétentiable $\phi : S \to {}^X M$. Pour chaque $f \in C^\infty(M)$, on a une application différentiable composée

$$S \xrightarrow{\phi} {}^X M \xrightarrow{{}^X f} {}^X \mathrm{R}.$$

Ceci définit un morphisme

$$\psi : C^\infty(M) \to C^\infty(S, X), \quad \psi(f)(s) = \phi(s)(f).$$

Réciproquement, étant donné un morphisme $\psi : C^\infty(M) \to C^\infty(S, X)$ l'équation $\phi(s)(f) = \psi(f)(s)$ définit une application $\phi : S \to {}^X M$. La différentiabilité de cette application se vérifie immédiatement en utilisant la Proposition 3.4. On a donc établi :

3.5. THEOREME *(Deuxième propriété universelle fondamentale des prolongements). Quelles que soient les variétés $M, S \in \mathfrak{M}$ et l'algèbre de Weil $X \in \mathfrak{W}$, il y a une bijection naturelle :*

$$\frac{S \xrightarrow{\phi} {}^X M \quad \textit{applications différentiables}}{C^\infty(M) \xrightarrow{\psi} C^\infty(S, X) \quad \textit{morphismes } C^\infty}$$

définie par la formule $\phi(s)(f) = \psi(f)(s)$. *De plus, le diagramme*

$$\begin{tikzcd} & {}^X M \arrow[d, "\pi_0"] \\ S \arrow[ur, "\phi"] \arrow[r, "h"'] & M \end{tikzcd}$$

commute ssi le diagramme

$$\begin{tikzcd} & C^\infty(S, X) \arrow[d, "\pi_0"] \\ C^\infty(M) \arrow[ur, "\psi"] \arrow[r, "h^*"'] & C^\infty(S) \end{tikzcd}$$

commute.

On vérifie immédiatement que la condition 2 de la Définition I, établie dans la Section 2 pour les ensembles sous-jacents aux prolongements (Propositions 2.5, 2.7 et Théorème 2.16) reste encore vraie après l'introduction de la structure différentiable (Définition 3.1) sur ces ensembles. On peut donc énoncer:

3.6. THEOREME. *i) Si* $U \rightarrowtail M$ *est une sous-variété ouverte d'une variété (paracompacte) quelconque* M, *alors, quelle que soit l'algèbre de Weil* $X \in \mathfrak{W}$, *le carré commutatif*

$$\begin{tikzcd} {}^X U \arrow[r, tail] \arrow[d] & {}^X M \arrow[d] \\ U \arrow[r, tail] & M \end{tikzcd}$$

est un produit fibré.

ii) Si $U_\alpha \rightarrowtail M$ *est un recouvrement ouvert d'une variété (paracompacte) quelconque* M, *alors, quelle que soit l'algèbre de Weil* $X \in \mathfrak{W}$, *la famille* ${}^X U_\alpha \rightarrowtail {}^X M$ *est un recouvrement ouvert de* ${}^X M$.

iii) Si

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r] \arrow[d] & S \arrow[d] \\ M \arrow[r] & N \end{tikzcd}$$

est un produit fibré transversal quelconque entre variétés paracompactes), alors, quelle que soit l'algèbre de Weil $X \in \mathfrak{W}$, le carré

$$\begin{array}{ccc} X_F & \longrightarrow & X_S \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_M & \longrightarrow & X_N \end{array}$$

est un produit fibré de variétés (qu'on peut vérifier être également transversal).

SECTION 4.

Le modèle pleinement bien adapté.

4.1. Dans une première étape, ce modèle sera une catégorie $\mathfrak{A}$, duale d'une catégorie d'algèbres C^∞. Par définition, une algèbre C^∞ Z appartient à $\mathfrak{A}^{op}$ ssi elle est de la forme $Z = C^\infty(M, X)$, pour une variété $M \in \mathfrak{M}$ et une algèbre de Weil $X \in \mathfrak{W}$. Toute algèbre de Weil $X = C^\infty(1, X)$ appartient à $\mathfrak{A}^{op}$, ainsi que l'algèbre

$$\{0\} = C^\infty(\emptyset, \mathrm{R}) = C^\infty(\emptyset, X).$$

La proposition suivante nous permettra de décrire la catégorie $\mathfrak{A}$ d'une façon géométrique.

4.2. PROPOSITION. *Quels que soient $X, Y \in \mathfrak{W}$, $M, N \in \mathfrak{M}$ et le morphisme $\phi: C^\infty(M, X) \to C^\infty(N, Y)$ d'algèbres C^∞, il existe une unique application différentiable $h: N \to M$ telle que le carré suivant soit commutatif:*

$$(1) \qquad \begin{array}{ccc} C^\infty(M, X) & \xrightarrow{\phi} & C^\infty(N, Y) \\ {\scriptstyle \pi_0}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_0} \\ C^\infty(M) & \xrightarrow[h^*]{} & C^\infty(N) \end{array} .$$

DEMONSTRATION. Soit $i: C^\infty(M) \to C^\infty(M, X)$ le morphisme $f \mapsto f$ obtenu par identification de R avec le sous-espace de X formé des multiples scalaires de $1 \in X$. Alors, d'après le Théorème 3.5, il existe une unique application différentiable $h: M \to N$ telle que le diagramme

$$\begin{tikzcd} & C^\infty(N,Y) \arrow[d, "\pi_0"] \\ C^\infty(M) \arrow[ur, "\phi i"] \arrow[r, "h^*"'] & C^\infty(N) \end{tikzcd}$$

commute. Pour démontrer que le diagramme (1) commute, il suffira de vérifier que: $\pi_0 \phi i \pi_0 = \pi_0 \phi$. Ceci est évident si on tient compte du fait que toute application $f: M \to {}^X\mathrm{R} = X$ est de la forme $f = f_0 + f_1$ avec f_1 prenant ses valeurs dans l'idéal maximal (nilpotent) de X. Alors $\phi(f_1)$ est nilpotente et elle prendra donc ses valeurs dans l'idéal maximal (nilpotent) de Y ; c'est-à-dire $\pi_0 \phi(f_1) = 0$.

Contrairement au cas des morphismes entre algèbres de Weil, un morphisme $\phi: C^\infty(M,X) \to C^\infty(N,Y)$ *mélange* en général la partie finie de f_0. C'est-à-dire, $\phi(f_0): N \to {}^Y\mathrm{R} = Y$, en général, ne prendra pas ses valeurs dans la partie finie $\mathrm{R} \rightarrowtail Y$ de Y. Autrement dit, elle a une composante infinitésimale non nulle. Le diagramme

$$\begin{tikzcd} C^\infty(M,X) \arrow[r, "\phi"] & C^\infty(N,Y) \\ C^\infty(M) \arrow[u, "i"] \arrow[r, "h^*"] & C^\infty(N) \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd}$$

ne commute pas.

Dorénavant, on adopte la notation suivante pour les objets et les morphismes de la catégorie $\mathfrak{A}$:

$C^\infty(M,X) \in \mathfrak{A}^{op}$	: $(X,M) \in \mathfrak{A}$,
$C^\infty(M,X) \xrightarrow{\phi} C^\infty(N,Y)$ dans $\mathfrak{A}^{op}$	: $(Y,N) \xrightarrow{\phi} (X,M)$ dans $\mathfrak{A}$,
$C^\infty(M) \in \mathfrak{A}^{op}$	: $(\mathrm{R},M) = M \in \mathfrak{A}$,
$X \in \mathfrak{W} \subset \mathfrak{A}^{op}$	: $(X,\mathrm{R}) = \bar{X} \in \mathfrak{A}$.

Tout objet $(X,M) \in \mathfrak{A}$ est muni d'une injection canonique π_0, $\pi_0: M \to (X,M)$, et, d'après l'observation 1.9, il est de la forme $(X,M) = \bar{X} \times M$. Ainsi, si on imagine les algèbres de Weil $\bar{X}$ comme des variétés infinitésimales, les objets de $\mathfrak{A}$ sont donc des extensions infinitésimales *triviales* des variétés classiques, et les morphismes sont des morphismes d'extensions ; c'est-à-dire, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} (Y,N) \arrow[r, "\phi"] & (X,M) \\ N \arrow[u, "\pi_0"] \arrow[r, "h"] & M \arrow[u, "\pi_0"'] \end{tikzcd}$$

D'après l'observation 1.2, l'objet $A = (\mathrm{R}, \mathrm{R}) = \mathrm{R}$ est un objet anneau dans $\mathfrak{A}$. On a :

4.3. PROPOSITION. *Le diagramme suivant est un égalisateur dans* $\mathfrak{A}$:

$$\overline{\mathrm{R}[\epsilon]} \rightarrowtail^{\phi} \mathrm{R} \underset{0}{\overset{(\ )^2}{\rightrightarrows}} \mathrm{R}$$

où ϕ *est le morphisme* $\phi : C^\infty(\mathrm{R}) \to \mathrm{R}[\epsilon]$ *défini par la formule*

$$\phi(f) = f(0) + f'(0)\epsilon .$$

DEMONSTRATION. Ceci est une conséquence directe de la Proposition 1.6 dû au fait que $\mathfrak{A}$ est la catégorie duale d'une catégorie d'algèbres C^∞.

De la Proposition 1.8 et de celle-ci, on déduit que le plongement $\mathfrak{W}^{op} \to \mathfrak{A}$ (sauf pour la condition de l'exponentiabilité) est pleinement bien adapté.

4.4. PROPOSITION *(Condition 1 de la Définition 1 pour* $\mathfrak{A}$ *). Le plongement* $\mathfrak{W}^{op} \to \mathfrak{A}$, $X \mapsto \overline{X}$ *est pleinement fidèle, préserve les limites projectives finies et l'image de l'algèbre des nombres duaux est le sous-objet* $D \subset A = \mathrm{R}$ *des « éléments à carré nul ».*

Les algèbres de Weil ne sont pas, en général, exponentiables dans $\mathfrak{A}$, mais l'exponentielle avec une variété classique quelconque existe toujours.

4.5. THEOREME *(Condition 3 de la Définition 1 pour* $\mathfrak{A}$ *). Quelles que soient l'algèbre de Weil* $X \in \mathfrak{W}$ *et la variété* $M \in \mathfrak{M}$, *l'exponentielle* $M^{\overline{X}}$ *existe dans* $\mathfrak{A}$, *et elle est canoniquement identifiée au prolongement d'espèce* X *de* M.

DEMONSTRATION. L'énoncé est équivalent à la conjonction des deux propriétés fondamentales des prolongements (Théorèmes 3.3 et 3.5). Fn effet, quel que soit l'objet $(Z,S)\in\mathfrak{A}$, on a une chaîne de bijections naturelles:

$$\frac{\dfrac{\dfrac{(Z,S)\to {}^{X}M}{S\to {}^{Z}({}^{X}M)}\ (\text{Théorème } 3.5)}{S\to {}^{Z\otimes X}M}\ (\text{Théorème } 3.3)}{(Z\otimes X,S)\to M}\ (\text{Théorème } 3.5)$$

Comme

$$(Z\otimes X,\ S)=(Z,S)\times\overline{X}\quad \text{dans } \mathfrak{A},$$

ceci démontre que ${}^{X}M$ est l'exponentielle $M^{\overline{X}}$.

On est maintenant en état de démontrer facilement que le plongement de la catégorie $\mathfrak{M}$ des variétés paracompactes dans $\mathfrak{A}$ (qui est évidemment pleine)

$$\mathfrak{M}\to\mathfrak{A},\quad M\mapsto(\mathrm{R},M)=M,$$

est pleinement bien adapté. Dû à la Condition 2-ii qui dit, en partie, que les recouvrements ouverts doivent être des familles épimorphes *universelles* dans $\mathfrak{A}$, on est obligé d'établir un énoncé plus général, duquel la bonne adaptabilité du plongement $\mathfrak{M}\to\mathfrak{A}$ ne sera qu'un cas particulier. Soit $Y\in\mathfrak{W}$ une algèbre de Weil quelconque. Alors:

4.6. THEOREME *(Condition 2 de la Définition 1 pour le plongement*

$$\mathfrak{M}\to\mathfrak{A},\quad M\mapsto(Y,M)\ ).$$

(i) Si $f\colon U\rightarrowtail M$ est une sous-variété ouverte d'une variété (paracompacte) quelconque M, alors le morphisme $i^*\colon(Y,U)\to(Y,M)$ est w-étalé dans $\mathfrak{A}$.

(ii) Si $i_\alpha\colon U_\alpha\rightarrowtail M$ est un recouvrement ouvert d'une variété (paracompacte) quelconque M, alors la famille $i_\alpha^*\colon(Y,U_\alpha)\to(Y,M)$ est épimorphe effective universelle dans $\mathfrak{A}$.

(iii) Si l'on a un produit fibré transversal quelconque entre variétés (paracompactes)

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r] \arrow[d] & S \arrow[d] \\ M \arrow[r] & N \end{tikzcd}$$

alors le carré

$$\begin{tikzcd} (Y,F) \arrow[r] \arrow[d] & (Y,S) \arrow[d] \\ (Y,M) \arrow[r] & (Y,N) \end{tikzcd}$$

est un produit fibré dans $\mathfrak{A}$.

DEMONSTRATION. i) Considérons d'abord le cas $Y = \mathrm{R}$. Soit (Z,S) un objet quelconque de $\mathfrak{A}$, et soit

$$\begin{tikzcd} (Z,S) \arrow[r] \arrow[d] & M^{\bar{X}} \arrow[d] \\ U \arrow[r, tail] & M \end{tikzcd}$$

un carré commutatif. Comme $(Z,S) = \bar{Z} \times S$, ceci équivaut au carré

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r] \arrow[d] & (M^{\bar{Z}})^{\bar{X}} \arrow[d] \\ U^{\bar{Z}} \arrow[r, tail] & M^{\bar{Z}} \end{tikzcd}$$

qui, par la proposition précédente, est équivalent au carré

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r] \arrow[d] & {}^{X}({}^{Z}M) \arrow[d] \\ {}^{Z}U \arrow[r, tail] & {}^{Z}M \end{tikzcd} .$$

Mais ${}^{Z}U \rightarrowtail {}^{Z}M$ est ouverte et alors, d'après le Théorème 3.6 i, il existe un unique morphisme $S \to {}^{X}({}^{Z}U)$. Par le cheminement inverse à celui qu'on vient de décrire, ce morphisme équivaut à un morphisme $(Z,S) \to U^{\bar{X}}$. Ceci achève la démonstration du cas $Y = \mathrm{R}$. Pour le cas général, on utilise la deuxième forme de la Définition II (la première étant exclue à cause du manque des exponentielles requises). On doit donc vérifier que, quels que soient l'objet $(Z,S) \in \mathfrak{A}$, l'algèbre de Weil $X \in \mathfrak{W}$ et le carré commutatif

$$\begin{tikzcd}
(Z,S)\times\bar{X} \arrow[r] \arrow[dr, dashed, "\xi"] & (Y,M) \\
(Z,S) \arrow[u] \arrow[r] & (Y,U) \arrow[u, "i^*"']
\end{tikzcd}$$

il existe un unique morphisme ξ qui rend les deux triangles commutatifs. On observe que les deux carrés dans le diagramme suivant commutent :

$$\begin{tikzcd}
\bar{Y} & (Y,M) \arrow[l] \arrow[r] & M \\
\bar{Y} \arrow[u, "Id"'] & (Y,U) \arrow[l] \arrow[r] \arrow[u, "i^*"'] & U \arrow[u, "i"']
\end{tikzcd}$$

L'énoncé découle alors du cas particulier $Y = \mathrm{R}$ précédemment établi (utilisé dans sa deuxième forme).

ii) On démontre premièrement que la famille $i^*_\alpha : (Y, U_\alpha) \to (Y, M)$ est épimorphe effective. Soit donc $\xi_\alpha : (Y, U_\alpha) \to (Z, S)$ une famille satisfaisant les conditions de compatibilité pour les intersections (qui sont les intersections ordinaires dans $\mathfrak{M}$ à cause de (iii) ci-dessous). Tout $f \in C^\infty(S, Z)$ détermine une famille compatible d'applications différentiables $\xi_\alpha(f) : U_\alpha \to {}^Y\mathrm{R}$, ce qui détermine une application différentiable $\xi(f) : M \to {}^Y\mathrm{R}$. On vérifie facilement que $f \mapsto \xi(f)$ définit un morphisme $\xi : (Y, M) \to (Z, S)$.

On démontre ensuite que la famille est universelle. Soit donc un morphisme $\phi : (Z, S) \to (Y, M)$ quelconque de $\mathfrak{A}$, et soit $h : S \to M$ l'application différentiable qui rend le carré

$$\begin{tikzcd}
(Z,S) \arrow[r, "\phi"] & (Y,M) \\
S \arrow[u, "\pi_0"] \arrow[r, "h"] & M \arrow[u, "\pi_0"']
\end{tikzcd}$$

commutatif. Pour chaque α , il existe un morphisme

$$\xi_\alpha : (Z, h^{-1} U_\alpha) \to (Y, U_\alpha)$$

tel que le carré ci-après soit un produit fibré. En effet, l'existence de ξ_α, résulte facilement du fait que $i^*_\alpha : (Y, U_\alpha) \to (Y, M)$ est w-étalé. En-

$$\begin{tikzcd}
(Z, h^{-1} U_a) \arrow[r, "\xi_a"] \arrow[d, "i_a^*"'] & (Y, U_a) \arrow[d, dash, "i_a^*"] \\
(Z, S) \arrow[r, "\phi"] & (Y, M)
\end{tikzcd}$$

suite, et de la même façon, on démontre que le carré est un produit fibré en utilisant cette fois le fait que $i_a^* : (Z, h^{-1} U_a) \to (Z, S)$ est w-étalé et que le carré

$$\begin{tikzcd}
h^{-1} U_a \arrow[r, "h"] \arrow[d, tail] & U_a \arrow[d, tail] \\
S \arrow[r, "h"] & M
\end{tikzcd}$$

est un produit fibré dans $\mathcal{M}$.

iii) La technique de démonstration est la même que celle déjà utilisée dans la vérification de i. Le cas particulier $Y = \mathrm{R}$ résulte de la proposition précédente et du Théorème 3.6 iii. On en déduit ensuite le cas général, cette fois simplement par multiplication cartésienne avec l'objet $\bar{Y} \in \mathfrak{A}$. Ceci achève la démonstration du théorème.

La catégorie $\mathfrak{A}$ munie des plongements $\mathcal{M} \to \mathfrak{A}$ et $\mathfrak{W}^{op} \to \mathfrak{A}$ ne fournit pas encore un modèle pleinement bien adapté à cause des deux problèmes suivants, encore non résolus :

4.7. PROBLEME I (Exponentiabilité des variétés infinitésimales). Soit $\bar{X} \in \mathfrak{W}^{op}$. Bien que l'exponentielle $M^{\bar{X}}$ existe dans $\mathfrak{A}$ quel que soit $M \in \mathcal{M}$, $\bar{X}$ n'est pas exponentiable. En effet, si $(Z, S) \in \mathfrak{A}$, la connaissance de $(Z, S)^{\bar{X}}$ équivaut à celle de $Z^{\bar{X}} \times S^{\bar{X}}$; c'est-à-dire, il suffira de connaître l'exponentielle $Z^{\bar{X}}$. Or celle-ci ne semble pas être un objet de $\mathfrak{A}$. Si on considère le cas particulier où $\bar{X} = \overline{\mathrm{R}[\epsilon]} = D$, on vérifie au moyen d'un argument simple que l'ensemble des sections globales $1 \to \bar{Z}^D$ possède une structure de variété isomorphe à l'espace euclidien de dimension l , où l = largeur (Z) (voir Définition 1.4). Alors, si $\bar{Z}^D$ est une extension infinitésimale d'une variété, elle devrait l'être de la variété R^l . D'après la Remarque 1.7, on a la situation :

$$\mathrm{R}^l \rightarrowtail \bar{Z}^D \rightarrowtail (\mathrm{R}^l)^D = \mathrm{R}^{2l}.$$

Or si $\bar{Z} = D$, on a $l(Z) = 1$ et on devrait avoir une extension

$$\mathrm{R} \rightarrowtail D^D \subset \mathrm{R}^D = \mathrm{R} \times \mathrm{R}.$$

Mais D^D a la description

$$\begin{aligned} D^D &= \{ (x,y) \mid x^2 = 0 \quad \text{et} \quad xy = 0 \} \\ &= \{ (d,y) \mid dy = 0 \} \subset D \times \mathrm{R}. \end{aligned}$$

Or ceci est un sous-objet propre de l'extension triviale $D \times \mathrm{R} \in \mathfrak{A}$, qui n'est évidemment pas représentable dans $\mathfrak{A}$.

4.8. PROBLEME II (Limites projectives finies). Bien que la catégorie $\mathfrak{A}$ possède les limites projectives finies quelconques de variétés infinitésimales, les produits fibrés transversaux entre variétés, et bien d'autres limites projectives (notamment l'égalisateur qui sert à définir l'objet $D = \overline{\mathrm{R}[\epsilon]} \subset \mathrm{R}$ et les produits fibrés construits dans la démonstration de 4.6 ii), l'existence des limites projectives finies quelconques dans $\mathfrak{A}$ pose des problèmes épineux. Premièrement, une notion de transversalité applicable aux morphismes de $\mathfrak{A}$, de même que la notion de morphisme étalé, semblent reliés au problème des produits fibrés qui sont représentables dans $\mathfrak{A}$. Deuxièmement, et ce qui est plus intéressant, se pose le problème de ceux qui, vraisemblablement, ne le sont pas ; par exemple, l'égalisateur de la paire de morphismes

$$\mathrm{R} \underset{0}{\overset{e^{-1/x^2}}{\rightrightarrows}} \mathrm{R}.$$

Cet égalisateur devrait être un sous-objet de R possédant des infinitésimaux plus grands que tous les infinitésimaux d'ordre fini. Or, dans $\mathfrak{A}$, tous les infinitésimaux de R sont nilpotents.

4.9. REMARQUE (sur les deux problèmes précédents). L'algèbre C^∞ de présentation finie $\mathrm{R}\{\epsilon,\delta\}$, où

$$\epsilon^2 = 0 \quad \text{et} \quad \epsilon\delta = 0, \quad C^\infty(\mathrm{R}\times\mathrm{R}) \twoheadrightarrow \mathrm{R}\{\epsilon,\delta\},$$

c'est-à-dire l'algèbre $C^\infty(\mathrm{R}\times\mathrm{R})$ divisée par la congruence C^∞ engendrée par les relations $x^2 = 0$ et $xy = 0$, est munie d'un épimorphisme

$$\mathrm{R}\{\epsilon,\delta\} \twoheadrightarrow C^\infty(\mathrm{R}), \quad \epsilon \mapsto 0, \quad \delta \mapsto id.$$

Ceci détermine, dans la catégorie duale à celle des algèbres C^∞, une extension de R contenue dans $\mathrm{R}\times\mathrm{R}$:

$$\mathrm{R} \rightarrowtail \overline{\mathrm{R}\{\epsilon,\delta\}} \rightarrowtail \mathrm{R}\times\mathrm{R},$$

et on vérifie que $\overline{\mathrm{R}\{\epsilon,\delta\}} = D^D$.

L'algèbre C^∞ de présentation (finie) $\mathrm{R}\{\theta\}$, où

$$e^{-1/\theta^2} = 0, \quad C^\infty(\mathrm{R}) \twoheadrightarrow \mathrm{R}\{\theta\},$$

c'est-à-dire l'algèbre $C^\infty(\mathrm{R})$ divisée par la congruence C^∞ engendrée par la relation $e^{-1/x^2} = 0$, détermine dans la catégorie duale à celle des algèbres C^∞ un sous-objet de R, $\overline{\mathrm{R}\{\theta\}} \rightarrowtail \mathrm{R}$, qui est, par définition même, l'égalisateur

$$\begin{tikzcd} \overline{\mathrm{R}\{\theta\}} \arrow[r, tail] & \mathrm{R} \arrow[r, shift left, "e^{-1/x^2}"] \arrow[r, shift right, "0"'] & \mathrm{R} \end{tikzcd}.$$

La considération de ces deux exemples indique que la solution des deux problèmes précédents pourrait se trouver dans une étude approfondie des algèbres C^∞ de présentation finie. Elle indique aussi l'importance d'une telle étude. Bien entendu, par «solution», on n'entend pas seulement la construction d'un modèle bien adapté (ou pleinement bien adapté) dans lequel on trouve les objets désirés. Par exemple, dans le topos de Weil l'égalisateur de e^{-1/x^2} et 0 existe évidemment. Mais il existe mal. En particulier il ne possède pas d'infinitésimaux qui ne soient pas nilpotents. On vérifie facilement qu'il est égal à l'objet $D_\infty \subset \mathrm{R}$ décrit par la formule :

$$D_\infty = \{ x \in \mathrm{R} \mid \exists n,\ x^n = 0 \}.$$

(Soit $a = a_0 + a_1 \in X \in \mathfrak{W}$ et $\mathrm{R}\{\theta\} \to X$, $\theta \mapsto a$. Comme la partie finie de e^{-1/a^2} est e^{-1/a_0^2}, il s'ensuit que $e^{-1/a_0^2} = 0$, ce qui donne $a_0 = 0$. Réciproquement, si $a \in X$ est tel que $a^{n+1} = 0$, on prendra g tel que $e^{-1/x^2} = x^{n+1} g(x)$. Donc $e^{-1/a^2} = 0$, et on peut définir

$$R\{\theta\} \longrightarrow X, \quad \theta \mapsto a).$$

Dans le deuxième modèle, que nous construirons plus loin, on peut vérifier qu'exactement le même phénomène se répéte (ceci est dû au fait que tout objet (X, M) de $\mathfrak{A}$ possède assez de X-points).

On évite les Problèmes I et II en plongeant $\mathfrak{A}$ dans une catégorie de faisceaux. Le Théorème 4.6 ii établit que les familles de la forme $(Y, U_a) \to (Y, M)$, où $i_a : U_a \rightarrowtail M$ est un recouvrement ouvert de M dans $\mathfrak{M}$, sont les familles couvrantes d'une topologie (cf. [1]) dans $\mathfrak{A}$, qu'on appellera la *topologie des recouvrements ouverts*. De plus, il établit aussi que pour cette topologie les foncteurs représentables sont des faisceaux. Ceci nous permet de construire immédiatement un modèle pleinement bien adapté.

4.10. THEOREME. *Soit $\mathfrak{E} \subset Ens^{\mathfrak{A}^{op}}$, $\mathfrak{M} \to \mathfrak{E}$ et $\mathfrak{W}^{op} \to \mathfrak{E}$ la catégorie des faisceaux sur $\mathfrak{A}$ pour la topologie des recouvrements ouverts, munie des foncteurs pleinement fidèles*

$$\mathfrak{M} \longrightarrow \mathfrak{A} \xrightarrow{h} \mathfrak{E} \quad et \quad \mathfrak{W}^{op} \longrightarrow \mathfrak{A} \xrightarrow{h} \mathfrak{E},$$

où h est le plongement de Yoneda (h se factorise à travers $\mathfrak{E}$ car les foncteurs représentables sont des faisceaux). Alors, $\mathfrak{E}$ est un modèle pleinement bien adapté.

DEMONSTRATION. Le plongement de Yoneda préserve les exponentielles et toutes les limites projectives. Alors, le théorème découle immédiatement des résultats établis (Proposition 4.4, Théorèmes 4.5 et 4.6). La condition 2-ii découle du Théorème 4.6, 2-ii, car tout recouvrement ouvert d'une variété est une famille couvrante de la topologie sur $\mathfrak{A}$. Finalement, les algèbres de Weil $\bar{Y}$ sont petites, dû au fait qu'elles sont représentables et que la multiplication cartésienne $\bar{Y} \times (-) : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ par $\bar{Y}$ est un foncteur continu et cocontinu au sens des sites. Dans notre cas, on peut démontrer directement cette dernière affirmation. Dans ce but, on vérifie d'abord que, pour tout faisceau $F \in Ens^{\mathfrak{A}^{op}}$, on a $(\# F)^{\bar{Y}} = \#(F^{\bar{Y}})$ où $\#$ indique le faisceau associé. En effet, $\# F$ est obtenu par itération de la construction $+F$ suivante (voir [1]): Si $(X,M)\in\mathcal{A}$, alors $(+F)(X,M)$ est la limite inductive du diagramme $p_F:\mathfrak{D}^{op}_{(X,M)}\to Ens$., où $\mathfrak{D}_{(X,M)}$ est l'ensemble des familles couvrantes de (X,M) ordonnées par la relation :

$$(W_i \rightarrowtail M)_i \leqslant (U_\alpha \rightarrowtail M)_\alpha \iff \exists\, \alpha_i \text{ et } W_i \rightarrowtail U_{\alpha_i},$$

et où $p_F(U_\alpha \rightarrowtail M)$ est l'ensemble des familles compatibles $(\zeta_\alpha)_\alpha$, $\zeta_\alpha\in F(X,U_\alpha)$. Alors, $++F = \#F$. Par définition de la topologie de $\mathcal{A}$, il s'ensuit immédiatement qu'il y a un isomorphisme d'ensembles ordonnés : $\mathfrak{D}_{(X,M)}\approx\mathfrak{D}_{(Y\otimes X,M)}$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{D}^{op}_{(X,M)} \arrow[d, phantom, "\wr"] \arrow[dr, "p_{(F^{\bar{Y}})}"] & \\
\mathfrak{D}^{op}_{(Y\otimes X,M)} \arrow[r, "p_F"'] & Ens
\end{tikzcd}$$

commute (remarquer que $F^{\bar{Y}}(X,U_\alpha) = F(Y\otimes X, U_\alpha)$). On a alors

$$(+F)^{\bar{Y}} = +(F^{\bar{Y}}), \text{ d'où } (\#F)^{\bar{Y}} = \#(F^{\bar{Y}}).$$

Ceci étant démontré, on vérifie facilement que $(-)^{\bar{Y}}:\mathcal{E}\to\mathcal{E}$ préserve les limites inductives. On sait que, si F est un faisceau, l'exponentielle $F^{\bar{Y}}$ calculée dans $\mathcal{E}$ coïncide avec celle prise dans $Ens^{\mathcal{A}^{op}}$, et que, parce que $\bar{Y}$ est représentable, le foncteur $(-)^{\bar{Y}}: Ens^{\mathcal{A}^{op}}\to Ens^{\mathcal{A}^{op}}$ préserve les limites inductives. Soit $Colim\, F_\lambda$ une limite inductive dans $\mathcal{E}$, $Colim\, F_\lambda = \#\, Colim\, F_\lambda$ où cette dernière limite est prise dans $Ens^{\mathcal{A}^{op}}$. Alors on a :

$$(Colim\, F_\lambda)^{\bar{Y}} = (\#\, Colim\, F_\lambda)^{\bar{Y}} = \#(Colim\, F_\lambda)^{\bar{Y}} =$$
$$= \#\, Colim(F_\lambda^{\bar{Y}}) = Colim(F_\lambda^{\bar{Y}}).$$

Ceci achève la démonstration.

La catégorie $\mathcal{E}$ *est bien un topos*. En effet elle est égale au topos de faisceaux $\tilde{\mathcal{O}}$ défini sur le petit site $\mathcal{O}\subset\mathcal{A}$ qui a comme objets les objets (X,U) de $\mathcal{A}$ où $U\subset\mathbb{R}^n$ est un ouvert euclidien et comme topologie la trace de celle de $\mathcal{A}$. Alors, l'affirmation résulte du lemme de comparaison de Verdier. Dans les faits, on la vérifie sans difficulté. Tout faisceau $F: \mathfrak{A}^{op} \to Ens$ définit par restriction un faisceau $F: \mathcal{O}^{op} \to Ens$. Réciproquement, si $F: \mathcal{O}^{op} \to Ens$ est un faisceau sur $\mathcal{O}$, on définit un faisceau F' sur $\mathfrak{A}$ de la façon suivante: Soit $(X, M) \in \mathfrak{A}$, alors $F'(X,M)$ est l'ensemble des familles compatibles $(\xi_\alpha)_\alpha$, $\xi_\alpha \in F(X, U)$, indexées par l'ensemble de *tous* les ouverts euclidiens $\alpha: U \rightarrowtail M$ de M. Lorsque F est déjà un faisceau sur $\mathfrak{A}$, comme la famille $\alpha^*: (X, U) \to (X, M)$ est couvrante, on en déduit $F'(X,M) = F(X,M)$. Le même argument montre que la restriction de F' à $\mathcal{O}$ est, dans tous les cas, égale à F. Reste à démontrer que F' est toujours un faisceau. Soit $U_\beta \rightarrowtail M$ un recouvrement ouvert de M et soit $(\xi_\beta)_\beta$, $\xi_\beta \in F'(X, U_\beta)$ une famille compatible. Ici $\xi_\beta = (\xi_{\beta\alpha})_\alpha$, où $\alpha: U \rightarrowtail M$, $U \subset \mathrm{R}^n$ est un ouvert euclidien quelconque de M, et on a considéré $\alpha^{-1} U_\beta \rightarrowtail U_\beta$ comme la famille de tous les ouverts euclidiens de U_β. Ainsi, une famille compatible

$$(\xi_{\beta\alpha})_\alpha, \quad \xi_{\beta\alpha} \in F(X, \alpha^{-1} U_\beta),$$

définit un unique élément ξ_β de $F'(X, U_\beta)$. La famille $\alpha^{-1} U_\beta \rightarrowtail U$ indexée par β est un recouvrement de U, et $(\xi_{\beta\alpha})_\beta$ est par hypothèse compatible. Comme F est un faisceau, il existe une unique famille

$$(\xi_\alpha)_\alpha, \quad \xi_\alpha \in F(X, U),$$

et on vérifie immédiatement qu'elle est compatible. On a donc un élément $\xi \in F'(X, M)$, $\xi = (\xi_\alpha)_\alpha$ qui, par définition même, est l'unique tel que $\xi \mapsto \xi_\beta$. Ceci termine la preuve de $\mathfrak{S} = \tilde{\mathcal{O}}$.

REFERENCES.

1. ARTIN, M., *Grothendieck topologies*, Seminar Notes, Harvard Univ. 1967.
2. EHRESMANN, C., Les prolongements d'une variété différentiable, *C. R. A. S. Paris* 233 (1951), pp. 598, 777 et 1081.
3. GUILLEMIN, V. and POLLACK, A., *Differential Topology*, Prentice Hall Inc., New Jersey, 1974.
4. KOCK, A., A simple axiomatics for differentiation, *Math. Scand.* 40 (1977), 183-193.
5. KOCK, A. and REYES, G., *Manifolds in formal differential Geometry*, Proceed. of the Durham meeting, July 1977. *Lecture Notes in Math.* Springer (to appear).
6. MILNOR, J. W., *Characteristic classes*, Ann. Math. Studies, Princeton, n° 76.
7. DUBUC, E. J. and REYES, G., Subtoposes of the ring classifier, *Proceed. of the May 1978 Aarhus Open House*, Aarhus Lecture Notes (to appear).
8. REYES, G. and WRAITH, G., A note on tangent bundles in a category with a ring object, *Math. Scand.* (to appear).
9. WEIL, A., Théorie des points proches sur les variétés différentiables, *Coll. Topo. et Géo. Diff., Strasbourg 1953*, 111-117.

Facultad de Ciencias Exactas
Departamento de Matematicas
Ciudad Universitaria, Pabellon 1
1428- BUENOS AIRES, ARGENTINE