

CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE CATÉGORIQUES

JORGE BOSCH

MARTA SAGASTUME

Catégories de variétés abstraites

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome
19, n° 4 (1978), p. 369-385

http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1978__19_4_369_0

© Andrée C. Ehresmann et les auteurs, 1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

CATEGORIES DE VARIETES ABSTRAITES

par Jorge BOSCH et Marta SAGASTUME

1. INTRODUCTION.

1.1. Terminologie.

Cet article est le développement de notre Note [0], avec quelques légers changements. Les topologies de Grothendieck seront appelées G -topologies; leur définition est celle de [2]. Dans tout ce qui suit, Ens est la catégorie des ensembles et des fonctions et $G-Ens$ est la G -topologie qu'on obtient sur Ens en ajoutant, comme $Cov(G-Ens)$, la famille des ensembles Φ de morphismes tels que, pour chaque Φ , les images des fonctions appartenant à Φ recouvrent au sens habituel un certain ensemble U_Φ . On fera usage des foncteurs et transformations généralisés introduits par Ehresmann [3]: Un foncteur généralisé F , de la catégorie C dans la catégorie C' , associe à chaque morphisme de C une classe non vide de morphismes de C' , de telle façon que, si e est l'unité de l'objet A de C , $F(e)$ est la classe des unités des objets de $F(A)$; et si $h = g \circ f$ dans C , alors

$$F(h) = F(g) \circ F(f) = \{ z \mid \exists u \in F(f) \text{ et } \exists v \in F(g) \text{ avec } z = v \circ u \}.$$

Notre définition de transformation généralisée sera légèrement différente de celle de Ehresmann: Si F et F' sont des foncteurs généralisés de C dans C' , une transformation généralisée t de F dans F' associe à chaque objet A de C une classe de morphismes qui ont pour source un objet de $F(A)$ et pour but un objet de $F'(A)$ de telle manière que:

(i) Pour tout $X \in F(A)$, il existe au moins une flèche de $t(A)$ dont la source est X ;

(ii) Si $X \in F(A)$, $X' \in F(B)$, $Y \in F'(A)$, $Y' \in F'(B)$, $u: X \rightarrow Y$ avec $u \in t(A)$, $v: X' \rightarrow Y'$ avec $v \in t(B)$ et $g \in F(f)$ avec $f: A \rightarrow B$ et $g: X \rightarrow X'$, alors il existe $f': A \rightarrow B$ et $h: Y \rightarrow Y'$ tels que $h \in F'(f')$ et $h \circ u = v \circ g$.

On compose les transformations généralisées de C dans C' par la formule :

$$(t_2 \circ t_1)(A) = t_2(A) \circ t_1(A).$$

On obtient ainsi une catégorie dont les objets sont les foncteurs généralisés de C dans C' et dont les morphismes sont les transformations généralisées entre ces foncteurs. Si le second foncteur F' est constant, alors pour chaque $X \in F(A)$ il y a exactement un morphisme appartenant à $t(A)$ dont la source est X .

Une transformation généralisée $t: F \rightarrow F'$ (foncteurs généralisés de C dans C') telle que, pour tout objet A de C et pour tout $h \in t(A)$, h soit un isomorphisme dans C' sera dite *équivalence faible de F dans F'* .

Un foncteur généralisé de la G -topologie T dans la G -topologie T' est un foncteur généralisé $F: \text{Cat } T \rightarrow \text{Cat } T'$ tel que les deux conditions suivantes soient remplies :

(i) Pour tout ensemble

$$\{ \phi_i: V_i \rightarrow V \} \in \text{Cov } T$$

et pour chaque $X \in F(V)$, si Φ est la famille de tous les morphismes de la forme $g: Y \rightarrow X$ avec $g \in F(\phi_i)$ pour au moins un indice i , alors $\Phi \in \text{Cov } T'$.

(ii) Soit

$$V_1 \xrightarrow{g_1} V \xleftarrow{g_2} V_2, \quad g_i \in F(f_i) \quad (i = 1, 2), \quad f_i: U_i \rightarrow U;$$

s'il existe dans $\text{Cat } T'$ un objet non-initial A et des morphismes

$$a_i: A \rightarrow V_i \quad \text{tels que} \quad g_1 \circ a_1 = g_2 \circ a_2,$$

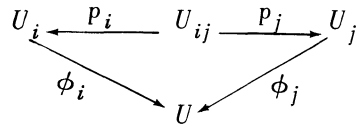
alors il existe

$$\bar{U}, \bar{V} \in F(U), \quad h_i: \bar{U} \rightarrow U_i, \quad k_i \in F(h_i)$$

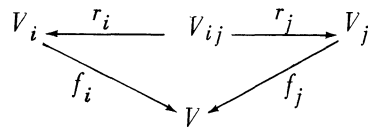
tels que le diagramme suivant soit un produit fibré dans $\text{Cat } T'$:

$$\begin{array}{ccccc} & & \bar{V} & & \\ & \xleftarrow{k_1} & & \xrightarrow{k_2} & \\ V_1 & & & & V_2 \\ & \searrow g_1 & & \swarrow g_2 & \\ & & V & & \end{array}$$

Si on a un diagramme qui est un produit fibré dans $\text{Cat } T$:



alors il existe un diagramme de produit fibré dans $Cat T'$:



avec r_i, r_j valeurs du foncteur F et $f_i \in F(\phi_i), f_j \in F(\phi_j)$.

1.2. Théorème de Kan sur l'existence de limites.

Il y a une notion évidente de limite pour un foncteur (ou un co-foncteur) généralisé par rapport à une transformation généralisée, et le théorème d'existence de Kan [4] est valable sous la forme suivante :

Théorème de Kan pour les foncteurs généralisés dans Ens. A tout foncteur généralisé $F : C \rightarrow Ens$ on peut associer, de façon canonique, un ensemble A et une transformation généralisée t de sorte que A soit limite directe de F par rapport à t .

La démonstration suit le schéma de celle de [4]. Dans l'ensemble des triplets (U, V, x) tels que

$$U \in Ob(C), V \in F(U) \text{ et } x \in V,$$

on définit une relation (réflexive et transitive), notée \sim , par la condition suivante :

$$(U, V, x) \sim (U', V', x') \text{ ssi il existe des morphismes } f: U \rightarrow U' \text{ et } g: V \rightarrow V' \text{ tels que } g \in F(f) \text{ et } g(x) = x'.$$

Soit R la relation d'équivalence engendrée par \sim :

$$(U, V, x) R (U', V', x') \text{ ssi il existe une suite finie de triplets } t_0, \dots, t_n \text{ telle que}$$

$$t_0 = (U, V, x), t_n = (U', V', x'), t_0 S t_1, \dots, t_{n-1} S t_n,$$

où S est définie par : $t S t'$ ssi $t \sim t'$ ou $t' \sim t$.

Soit A l'ensemble quotient par R . On définit une transformation généralisée t de F dans le foncteur «constant» de domaine C et «valeur» A en définissant $t(U)$ comme étant l'ensemble des applications

$$t(U)_V: V \rightarrow A \quad (\text{où } V \in F(U)) \text{ données par } t(U)_V(x) = \overline{(U, V, x)},$$

où la barre indique la classe d'équivalence par rapport à R . Alors A est la limite directe de F par rapport à t .

Dans la suite, nous écrivons simplement «limite» au lieu de «limite directe».

2. ATLAS ABSTRAITS.

2.1. DEFINITION. *Un atlas abstrait est un triplet (F, X, s) , où F est un foncteur généralisé de la G -topologie T dans la G -topologie \bar{T} , où X est une limite de F par rapport à une transformation généralisée t et où s est une équivalence faible de F dans le foncteur identique sur $Cat T$; ceci implique que $Cat T$ doit être une sous-catégorie de $Cat \bar{T}$. Nous dirons que X est le support de l'atlas abstrait et que t est la transformation associée à cet atlas.*

2.2. Application aux atlas différentiables.

Nous dirons qu'un atlas \mathcal{A} différentiable de classe C^r ou C^r -atlas au sens de [5], est *héréditaire* si les deux conditions suivantes sont remplies :

(i) Si $\phi \in \mathcal{A}$, avec $\phi: A \rightarrow U$, si $B \subset A$ est un ouvert et $V \subset U$ un ouvert, alors $\phi|_B \in \mathcal{A}$ et $\phi|_{\phi^{-1}(V)} \in \mathcal{A}$.

(ii) Si $\phi \in \mathcal{A}$, avec $\phi: A \rightarrow U$, pour tout espace de Banach E intervenant dans la définition de \mathcal{A} , pour tout ouvert $V \subset E$ et pour tout C^r -isomorphisme $f: U \rightarrow V$, on a $f \circ \phi \in \mathcal{A}$.

Soit \mathcal{A} un C^r -atlas héréditaire. Nous appellerons $Cat T$ la catégorie dont les objets sont les buts des cartes de \mathcal{A} et dont les morphismes sont: les changements de carte de \mathcal{A} , les inclusions entre objets de $Cat T$, et les composés (en nombre fini quelconque) de tels morphismes. Soit $Cov T$ la famille des ensembles de morphismes de $Cat T$ qui

recouvrent un certain objet de $Cat T$ au sens habituel. On obtient ainsi la G -topologie T .

Soit \bar{T} la G -topologie que nous avons appelée G -Ens (1.1). Soit F le foncteur généralisé de T dans \bar{T} construit de la façon suivante :

- Si U est un objet de $Cat T$, $F(U)$ est la classe des sources des cartes dont le but est U .

- Pour un morphisme $\phi : U \rightarrow V$ dans $Cat T$, on envisage trois cas : si ϕ est une équivalence (changement de carte), $F(\phi)$ est la classe des identités des objets appartenant à $F(U) \cap F(V)$; si ϕ est une inclusion, alors pour tout V' tel que $f_V : V' \rightarrow V$ soit une carte de $\bar{\mathcal{U}}$, on posera $U' = f_V^{-1}(U)$, et l'on définit $F(\phi)$ comme étant la classe de toutes les inclusions de la forme $U' \subset V'$; si ϕ est un composé d'équivalences et d'inclusions, on définit $F(\phi)$ de manière évidente, en prenant tous les composés possibles.

Soit X l'ensemble sous-jacent à l'atlas $\bar{\mathcal{U}}$. Alors X est limite de F par rapport à une transformation généralisée t qui, à chaque objet U de $Cat T$, associe l'ensemble des inclusions $U' \subset X$, où U' parcourt $F(U)$. Soit maintenant s la transformation généralisée de F dans le foncteur identique sur $Cat T$ qui, à chaque objet U de $Cat T$, associe la classe des cartes de $\bar{\mathcal{U}}$ dont le but est U : c'est une équivalence faible.

Le triplet (F, X, s) est un atlas abstrait, de support X et de transformation associée t .

2.3. Sous-catégories inclusives.

Nous appellerons ainsi toute sous-catégorie D de C telle que $Ob(D) = Ob(C)$ et que, pour des objets quelconques A et B de D , l'ensemble $D(A, B) \cup D(B, A)$ ait au plus un élément.

L'exemple typique de sous-catégorie inclusive est la sous-catégorie de Ens dont les morphismes sont toutes les inclusions.

2.4. C^r -catégories.

Soit S un ensemble d'espaces de Banach ; une catégorie sera dite C^r -catégorie de type S si ses objets sont des ouverts des espaces de S

et si ses morphismes sont soit des C^r -isomorphismes, soit des inclusions, soit des composés de tels morphismes (en nombre fini quelconque), avec la propriété suivante :

Tout ouvert inclus dans un objet est un objet, toutes les inclusions entre des objets sont des morphismes et tout C^r -isomorphisme d'un objet sur un ouvert d'un espace appartenant à S est un morphisme.

Une C^r - G -topologie de type S est une G -topologie T telle que $Cat T$ soit une C^r -catégorie de type S et que $Cov T$ soit la famille des ensembles de morphismes recouvrant au sens usuel un objet de $Cat T$.

2.5. THEOREME. Soit (F, X, s) , avec $F: T \rightarrow G\text{-Ens}$, un atlas abstrait, de transformation associée t , tel que :

- (i) T est une C^r - G -topologie de type S .
- (ii) F prend ses valeurs dans une sous-catégorie inclusive de

$$Cat \bar{T} = Ens.$$

Alors il existe un C^r -atlas héréditaire $\bar{\mathcal{A}}$ de type S , dont l'ensemble sous-jacent est X et dont les cartes sont les composés de la forme

$$h \circ \hat{g}^{-1}, \text{ avec } h \in s(U), g \in t(U),$$

et où \hat{g} est la restriction de g à son image.

DEMONSTRATION. Nous prouverons d'abord que, pour tout $f: U_1 \rightarrow U_2$ dans $Cat T$ et pour tout $g \in F(f)$, l'application g est injective. Supposons $g: V_1 \rightarrow V_2$. Comme s est une transformation généralisée de F dans le foncteur identique sur $Cat T$, il existe

$$h \in s(U_1), k \in s(U_2) \text{ avec } h: V_1 \rightarrow U_1, k: V_2 \rightarrow U_2.$$

Par définition d'une transformation généralisée, il existe un morphisme

$$f': U_1 \rightarrow U_2 \text{ tel que } f' \circ h = k \circ g.$$

Mais f' (étant un morphisme de $Cat T$) est injectif, et h est injectif parce que s est une équivalence faible. Donc g est injectif.

Soit maintenant $V \in F(U)$ et appelons $t(U)_V: V \rightarrow X$ l'unique application de source V appartenant à $t(U)$. Nous prouverons que cette

application est injective. Il suffit de faire la démonstration dans le cas où X est la limite de F par rapport à t construite de manière canonique par application du Théorème de Kan (1.2). Supposons

$$t(U)_V(x) = t(U)_V(y), \text{ donc } (\overline{U, V, x}) = (\overline{U, V, y}).$$

Alors il existe une suite de triplets t_0, \dots, t_n , telle que, avec les notations de 1.2,

$$t_{i-1} S t_i \text{ pour } i = 1, \dots, n, \quad t_0 = (U, V, x) \text{ et } t_n = (U, V, y).$$

Pour $n = 0$, on a $x = y$. Supposons $n = 1$; donc il existe $f: U \rightarrow U$ et $g: V \rightarrow V$ avec

$$g \in F(f) \text{ et } g(x) = y \text{ ou bien } g(y) = x.$$

Par l'hypothèse (ii) de l'énoncé du théorème, on a $g = I_V$, donc $x = y$. Supposons maintenant $n = 2$. Alors il existe (U_1, V_1, x_1) tel que l'un des cas suivants soit vérifié:

- (a) $(U, V, x) - (U_1, V_1, x_1) - (U, V, y)$;
- (b) $(U, V, y) - (U_1, V_1, x_1) - (U, V, x)$;
- (c) $(U, V, x) - (U_1, V_1, x_1)$ et $(U, V, y) - (U_1, V_1, x_1)$;
- (d) $(U_1, V_1, x_1) - (U, V, x)$ et $(U_1, V_1, x_1) - (U, V, y)$.

Dans la suite, on suppose toujours $g_i \in F(f_i)$, $i = 1, 2$.

Dans le cas (a), on a

$$f_1: U \rightarrow U_1, \quad f_2: U_1 \rightarrow U, \quad g_1: V \rightarrow V_1, \quad g_2: V_1 \rightarrow V,$$

avec $g_2(g_1(x)) = y$. Mais $g_2 \circ g_1 = I_V$, donc $x = y$. Le cas (b) est analogue. Dans le cas (c), il existe

$$f_1, f_2: U \rightarrow U_1, \quad g_1, g_2: V \rightarrow V_1 \text{ avec } g_1(x) = g_2(y).$$

Mais d'après ce qu'on a prouvé au début de cette démonstration, g_1 est injective, et d'après l'hypothèse (ii), $g_1 = g_2$; donc $x = y$. Le cas (d) est analogue.

On démontrera par induction que, s'il existe une suite de n triplets t_0, \dots, t_n avec les propriétés déjà énoncées, alors $x = y$. Ceci vient d'être démontré pour $n = 0, 1, 2$. Supposons-le vrai pour $n \geq 2$, et supposons qu'il existe une suite t_0, \dots, t_{n+1} de longueur $n + 1$ avec les

propriétés énoncées. S'il existait un indice j tel que

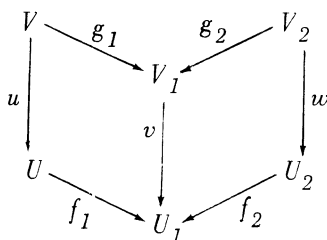
$$1 \leq j \leq n \text{ et } t_{j-1} \sim t_j \sim t_{j+1} \text{ ou } t_{j+1} \sim t_j \sim t_{j-1},$$

on aurait une suite de longueur n avec les mêmes propriétés, car la relation \sim est transitive; donc, en vertu de l'hypothèse d'induction, le théorème serait démontré. Alors, en remplaçant le symbole \sim par une flèche, il ne reste à considérer que les deux cas suivants :

$$(1) (U, V, x) \rightarrow (U_1, V_1, x_1) \leftarrow (U_2, V_2, x_2) \rightarrow (U_3, V_3, x_3) \dots$$

$$(2) (U, V, x) \leftarrow (U_1, V_1, x_1) \rightarrow (U_2, V_2, x_2) \leftarrow (U_3, V_3, x_3) \dots$$

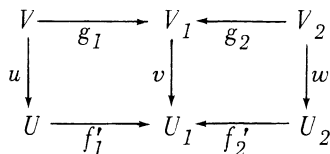
Dans le cas (1) on a un diagramme non nécessairement commutatif



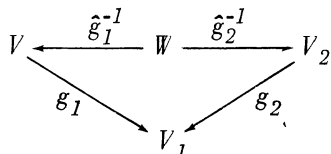
avec

$$u \in s(U), \quad v \in s(U_1), \quad w \in s(U_2).$$

Mais, comme s est une transformation généralisée, il existe f'_1, f'_2 dans $Cat T$ tels que le diagramme suivant commute :



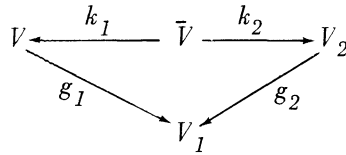
Comme $g_1(x) = g_2(x_2) = x_1$, on a $W = g_1(V) \cap g_2(V_2)$ non vide. g_1, g_2 étant injectives, le diagramme suivant est un produit fibré :



où \hat{g}_i ($i = 1, 2$) est la restriction de g_i à son image. Donc, par définition d'un foncteur généralisé d'une G-topologie dans une autre (1.1), il existe un objet \bar{U} de $Cat T$ et un $\bar{V} \in F(\bar{U})$ tels que, si

$$k_i \in F(h_i) \quad (i = 1, 2), \quad h_1: \bar{U} \rightarrow U, \quad h_2: \bar{U} \rightarrow U_2$$

on a un diagramme de produit fibré



Soit $h: W \rightarrow \bar{V}$ tel que $k_i \circ h = \hat{g}_i^{-1}$ ($i = 1, 2$), donné canoniquement parce que \bar{V} est un produit fibré $V \times_{V_1} V_2$ et soit $x'_1 = h(x_1)$. Alors

$$k_1(x'_1) = x, \quad k_2(x'_1) = x_2.$$

Ainsi, on a la suite suivante de $n+1$ termes, allant de (U, V, x) vers (U, V, y) :

$$(U, V, x) \leftarrow (\bar{U}, \bar{V}, x'_1) \rightarrow (U_2, V_2, x_2) \rightarrow (U_3, V_3, x_3) \dots$$

où l'on a deux flèches consécutives de même sens; on est donc ramené à une suite de longueur n , ce qui donne $x = y$. Pour le cas (2), la démonstration est analogue.

On a prouvé que, pour tout objet U de $Cat T$ et pour tout $g \in t(U)$, g est injective. Si l'on appelle \hat{g} la restriction de g à son image, il existe des cartes $h \circ \hat{g}^{-1}$, avec $h \in s(U)$, et leurs domaines recouvrent X . Il reste à examiner les changements de cartes. Soit des cartes $h_1 \circ \hat{g}_1^{-1}$ et $h_2 \circ \hat{g}_2^{-1}$ de même domaine A et de buts U_1, U_2 respectivement. On doit démontrer que le composé

$$k = h_2 \circ \hat{g}_2^{-1} \circ \hat{g}_1 \circ h_1^{-1}: U_1 \rightarrow U_2$$

est une C^r -équivalence. Il est évidemment bijectif, donc il suffit de montrer que c'est localement un isomorphisme de classe C^r . Soient

$$x_1 \in U_1, \quad x_2 = k(x_1), \quad y_1 = h_1^{-1}(x_1), \quad y_2 = h_2^{-1}(x_2).$$

D'où $g_1(y_1) = g_2(y_2)$, et comme $g_i \in t(U_i)_{V_i}$, on a

$$(U_1, V_1, y_1) R (U_2, V_2, y_2).$$

Il y a donc une suite

$$(W_1, Z_1, z_1) S (W_2, Z_2, z_2) S \dots S (W_n, Z_n, z_n),$$

avec

$$(\mathbb{W}_1, Z_1, z_1) = (U_1, V_1, y_1) \quad \text{et} \quad (\mathbb{W}_n, Z_n, z_n) = (U_2, V_2, y_2).$$

Alors, pour chaque $i = 1, \dots, n-1$, il existe un morphisme f_i appartenant à

$$\text{Cat } T(\mathbb{W}_i, \mathbb{W}_{i+1}) \cup \text{Cat } T(\mathbb{W}_{i+1}, \mathbb{W}_i)$$

et un morphisme a_i appartenant à

$$\text{Cat } \bar{T}(Z_i, Z_{i+1}) \cup \text{Cat } \bar{T}(Z_{i+1}, Z_i),$$

avec $a_i \in F(f_i)$ tel que

$$(*) \quad a_i(z_i) = z_{i+1} \quad \text{ou} \quad a_i(z_{i+1}) = z_i.$$

Par définition d'une transformation généralisée, pour chaque $i = 1, \dots, n$, il y a un isomorphisme $m_i: Z_i \rightarrow \mathbb{W}_i$ tel que $m_i \in s(\mathbb{W}_i)$ dans $\text{Cat } \bar{T}$; nous prendrons $m_1 = h_1$, $m_n = h_2$. Encore par la définition d'une transformation généralisée, il existe f'_i , de même source et même but que f_i (pour $i = 1, \dots, n-1$), tel que le carré formé par

$$m_i, \quad a_i, \quad m_{i+1}, \quad f'_i$$

est commutatif. Compte tenu de ce fait et de (*), on voit qu'il existe des ouverts

$$\mathbb{W}'_i \subset \mathbb{W}_i \quad (i = 1, \dots, n) \quad \text{avec} \quad x_1 \in \mathbb{W}'_1, \quad x_2 \in \mathbb{W}'_n,$$

et des C^r -isomorphismes f''_i ($i = 1, \dots, n-1$) tels que f''_i soit la restriction de f'_i à \mathbb{W}'_i et \mathbb{W}'_{i+1} , et les f''_i ou leurs inverses (convenablement choisis pour chaque i) donnent par composition un C^r -isomorphisme

$$f'': \mathbb{W}'_1 \rightarrow \mathbb{W}'_n \quad \text{avec} \quad f''(x_1) = x_2.$$

Soit maintenant $x'_1 \in \mathbb{W}'_1$ et soit $y'_1 = h_1^{-1}(x'_1)$. Par commutativité des carrés m_i, a_i, m_{i+1}, f'_i , il existe $y'_2 \in Z_n$, $x'_2 \in \mathbb{W}'_n$ tels que

$$(**) \quad f''(x'_1) = x'_2, \quad h_2(y'_2) = x'_2.$$

Mais, comme $a_i \in F(f_i)$, on a

$$(U_1, V_1, y'_1) R (U_2, V_2, y'_2),$$

donc

$$(***) \quad g_1(y'_1) = g_2(y'_2).$$

De la seconde formule (***) et de (**) on déduit :

$$(h_2 \circ \hat{g}_2^{-1} \circ \hat{g}_1 \circ h_1^{-1})(x'_1) = x'_2.$$

Alors le C^r -isomorphisme f'' coïncide avec k dans un voisinage de x_1 , ce qui montre que k est localement un C^r -isomorphisme.

2.6. PROPOSITION. Soit $\hat{\mathcal{A}}$ un C^r -atlas héréditaire (au sens de 2.2), d'ensemble sous-jacent X , et soit (F, X, s) l'atlas abstrait qui lui est associé par la méthode de 2.2, avec $F: T \rightarrow G\text{-Ens}$. Alors, (F, X, s) vérifie les hypothèses du Théorème 3.1, et l'application de ce théorème à (F, X, s) donne l'atlas \mathcal{A} .

En effet, si S est l'ensemble des espaces de Banach intervenant dans la définition de l'atlas $\hat{\mathcal{A}}$, la G -topologie T vérifie la condition (i) de 2.5 puisque $\hat{\mathcal{A}}$ est héréditaire, et le foncteur F vérifie la condition (ii) de 2.5 par construction (2.2). Le reste de la preuve est évident.

3. MORPHISMES D'ATLAS ABSTRAITS.

3.1. DEFINITION. Etant donné une classe C d'atlas abstraits

$$\{(F_i, X_i, s_i)\}, \text{ pour } i \in I,$$

telle que F_i , pour tout $i \in I$, soit un foncteur généralisé de la G -topologie T_i dans la G -topologie \bar{T} (avec \bar{T} constante), on dira que la G -topologie K est intermédiaire pour la classe C si les conditions suivantes sont satisfaites :

- (i) K est une sous- G -topologie de \bar{T} .
- (ii) Pour tout $i \in I$, T_i est une sous- G -topologie de K .
- (iii) Pour tout $i \in I$ et pour tout objet U de $Cat T_i$, si

$$\{\phi_j: U_j \rightarrow U\} \in Cov K,$$

alors

$$\{\phi_j: U_j \rightarrow U\} \in Cov T_i.$$

3.2. EXEMPLE. Si C est une classe de C^r -atlas héréditaires, on peut prendre comme $Ob(Cat K)$ la réunion des classes d'objets des catégories $Cat T_i$ obtenues par la méthode de 2.2, comme morphismes de $Cat K$ tou-

tes les applications C^r -différentiables entre ces objets, et comme $CovK$ la réunion de tous les $CovT_i$. On obtient ainsi une G -topologie K , intermédiaire pour la classe C .

3.3. DEFINITION. Soit (F_1, X_1, s_1) , (F_2, X_2, s_2) des atlas abstraits avec $F_1: T_1 \rightarrow \bar{T}$, $F_2: T_2 \rightarrow \bar{T}$, et transformations associées t_1, t_2 . Soit K une G -topologie intermédiaire pour la classe formée par ces atlas. Un K -morphisme de (F_1, X_1, s_1) dans (F_2, X_2, s_2) est un morphisme de $Cat\bar{T}$, soit $f: X_1 \rightarrow X_2$, tel que, pour tout diagramme de $Cat\bar{T}$:

$$U \xleftarrow{m} U' \xrightarrow{h} X_1$$

avec $U' \in F_1(U)$, $h \in t_1(U)$, $m \in s_1(U)$, il existe

$$\{ \phi_j: U_j \rightarrow U \}_{j \in J} \in CovT_1$$

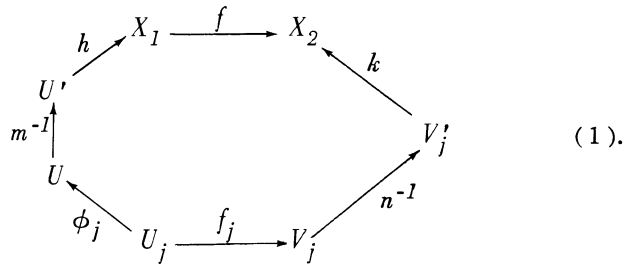
tel que, pour chaque $j \in J$, il existe un diagramme dans $Cat\bar{T}$:

$$V_j \xleftarrow{n} V_j' \xrightarrow{k} X_2$$

avec

$$V_j' \in F_2(V_j), \quad k \in t_2(V_j), \quad n \in s_2(V_j),$$

et un morphisme $f_j: U_j \rightarrow V_j$ de $CatK$ de sorte que le diagramme suivant soit commutatif:



3.4. PROPOSITION. Soit C une classe d'atlas abstraits, et soit K une G -topologie intermédiaire pour C . Si l'on prend comme classe d'objets la classe C , comme morphismes les K -morphisms entre atlas de C au sens de 3.3, et comme composition celle de \bar{T} (\bar{T} étant la G -topologie «but» de tous les atlas de C) alors on obtient une catégorie.

En effet, pour tout atlas $(F, X, s) \in C$, l'application 1_X est un K -morphisme de cet atlas dans lui-même; pour le voir, il suffit de pren-

dre pour $\{ \phi_j: U_j \rightarrow U \}$ la classe à un élément $\{ I_U \}$, pour V_j le même objet U , pour f_j l'identité I_U , et $n = m$, $k = h$. De plus, si

$$f: (F_1, X_1, s_1) \rightarrow (F_2, X_2, s_2), \quad g: (F_2, X_2, s_2) \rightarrow (F_3, X_3, s_3)$$

sont des K -morphisms, le composé $g \circ f$ est un K -morphisme dans le troisième. Pour le voir, soit dans $Cat T_1$ le diagramme

$$U \xleftarrow{m} U' \xrightarrow{h} X_1$$

comme dans 3.3. Puisque f est un K -morphisme, il existe

$$\{ \phi_j: U_j \rightarrow U \}_{j \in J} \in Cov T_1$$

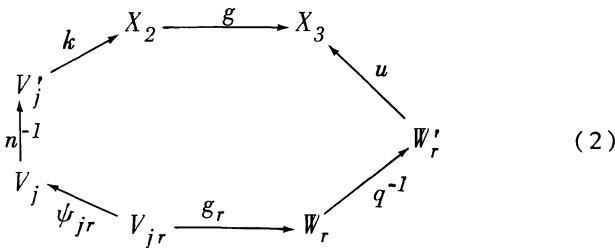
tel que, pour tout $j \in J$, il existe $f_j: U_j \rightarrow V_j$ dans $Cat K$ et un diagramme commutatif (1). Mais, étant donné le diagramme

$$V_j \xleftarrow{n} V_j' \xrightarrow{k} X_2$$

dans $Cat \bar{T}$, et puisque g est un K -morphisme, il existe

$$\{ \psi_{jr}: V_{jr} \rightarrow V_j \}_{r \in R} \in Cov T_2$$

et pour chaque $r \in R$ un morphisme $g_r: V_{jr} \rightarrow W_r$ de $Cat K$, de façon qu'il y ait un diagramme commutatif



avec $u \in t_3(W_r)$, $q \in s_3(W_r)$. Comme

$$\Psi = \{ \psi_{jr}: V_{jr} \rightarrow V_j \} \in Cov T_2,$$

on a $\Psi \in Cov K$ puisque T_2 est une sous-G-topologie de K . Donc, si l'on appelle $V_{jr} \times U_j$ le produit fibré de V_{jr} par U_j sur V_j par rapport à ψ_{jr} et f_j , on a

$$\Phi = \{ V_{jr} \times U_j \rightarrow U_j \}_{r \in R} \in Cov K.$$

Mais K est intermédiaire et $U_j \in Ob(Cat T_1)$; donc $\Phi \in Cov T_1$. Alors:

$$\Sigma = \{ V_{jr} \times U_j \rightarrow U_j \xrightarrow{\phi_j} U \}_{j,r} \in Cov T_1.$$

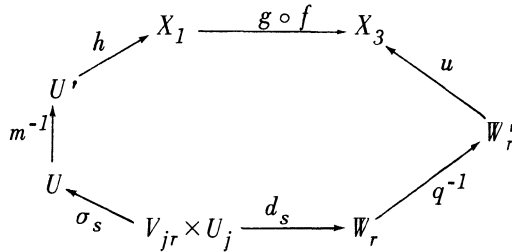
Posons $\Sigma = \{\sigma_s\}$ pour $s \in S$. Pour chaque $s \in S$ il existe un morphisme

$$d_s : V_{jr} \times U_j \rightarrow W_r \text{ de } \text{Cat } K$$

obtenu par composition de la projection de produit fibré

$$V_{jr} \times U_j \rightarrow V_{jr} \text{ avec } g_r : V_{jr} \rightarrow W_r.$$

On voit alors facilement que le diagramme suivant est commutatif :



ce qui prouve la proposition.

3.5. PROPOSITION. Soit $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ des C^r -atlas héréditaires, de type S , dont les ensembles sous-jacents sont X_1, X_2 respectivement. Soit A_i ($i = 1, 2$) l'atlas abstrait obtenu à partir de \mathcal{A}_i par application de 2.2; soit K la G -topologie intermédiaire décrite en 3.2 en prenant pour C la classe $\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2\}$, et $f: X_1 \rightarrow X_2$ une fonction. Alors f est une C^r -application différentiable de la structure de C^r -variété différentiable définie par \mathcal{A}_1 dans celle définie par \mathcal{A}_2 si et seulement si f est un K -morphisme de A_1 dans A_2 au sens de 3.3.

3.6. PROPOSITION. Soit A_1, A_2 des atlas abstraits qui satisfont les hypothèses (i) et (ii) du Théorème 2.5, $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ les C^r -atlas correspondants par application du Théorème 2.5, K la G -topologie intermédiaire pour la classe $\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2\}$ décrite dans 3.2 et $f: X_1 \rightarrow X_2$ une fonction (X_i étant le support de A_i , $i = 1, 2$). Soit \mathcal{U}_i la C^r -variété définie par l'atlas \mathcal{A}_i . Alors f est un K -morphisme de A_1 dans A_2 , au sens de 3.3, si et seulement si f est une application C^r -différentiable de \mathcal{U}_1 dans \mathcal{U}_2 .

4. VARIETES ABSTRAITES.

4.1. DEFINITION. Soit C une classe d'atlas abstraits et soit K une G -

topologie intermédiaire pour C . Soit

$$A_i = (F_i, X_i, s_i) \in C, \text{ pour } i = 1, 2.$$

On dira que A_1 est K -équivalent à A_2 si et seulement si $X_1 = X_2$ et si l_X est un K -morphisme de A_1 dans A_2 et de A_2 dans A_1 (et c'est donc un isomorphisme).

On a ainsi défini une relation d'équivalence dans C .

4.2. DEFINITION. Avec les conditions de 4.1, on appelle K -variété abstraite chacune des classe d'équivalence dans C pour la relation de K -équivalence. Un K -morphisme entre telles variétés est un K -morphisme entre des représentants respectifs.

4.3. THEOREME. Avec les conditions de 4.2, les K -variétés abstraites et les K -morphisms entre elles forment une catégorie.

4.4. PROPOSITION. Soit A un atlas abstrait qui satisfasse (i) et (ii) de 2.5. Soit \hat{A} le C^r -atlas obtenu par application de 2.5, et A' l'atlas abstrait déduit de \hat{A} par application de 2.2. Alors A et A' sont K -équivalents (K étant comme dans 3.2) et ils appartiennent donc à la même K -variété abstraite.

En effet, soit

$$U \xleftarrow{m} U' \xrightarrow{h} X$$

dans $Cat \bar{T}$, avec

$$U' \in F(U), \quad m \in s(U), \quad h \in t(U).$$

Il existe

$$\{ l_U : U \rightarrow U \} \in Cov T,$$

le diagramme

$$U \xleftarrow{m \circ \hat{h}^{-1}} h(U') \hookrightarrow X,$$

dans $Cat T_2 = Cat T$ et le morphisme l_U (à la place de f_j), tels que l_X satisfasse à la définition de morphisme 3.3.

Réciproquement, étant donné le diagramme

$$U \xleftarrow{m \circ \hat{h}^{-1}} h(U') \hookrightarrow X,$$

le recouvrement $\{I_U: U \rightarrow U\}$, le diagramme

$$U \xleftarrow{m} U' \xrightarrow{h} X,$$

et le morphisme $I_U: U \rightarrow U$ de $CatK$ permettent d'établir que I_X est un morphisme de A' dans A .

4.5. THEOREME. Soit S une classe d'espaces de Banach, et soit K la G -topologie définie comme suit: Les objets de $CatK$ sont les ouverts des espaces de S , les morphismes de $CatK$ sont les applications C^r -différentiables entre ces objets, et les éléments de $CovK$ sont les classes de morphismes qui sont des isomorphismes C^r dans leur image et recouvrent U au sens habituel (où U parcourt $Ob(CatK)$).

Soit V^r la catégorie des C^r -variétés de type S et des C^r -morphisms et soit VA^r la catégorie suivante: Les objets de VA^r sont les variétés abstraites construites sur des C^r - G -topologies de type S (au sens de 2.4) à l'aide de foncteurs généralisés qui prennent leurs valeurs dans des sous-catégories inclusives de Ens ; les morphismes de VA^r sont les K -morphisms entre ces objets.

Alors la construction 2.2 et la Proposition 3.5 définissent un foncteur ordinaire de V^r dans VA^r , et le Théorème 2.5 et la Proposition 3.6 définissent un foncteur de VA^r dans V^r .

Ces foncteurs sont inverses l'un de l'autre, et les catégories V^r et VA^r sont donc isomorphes.

4.6. REMARQUE. Dans tout cet article, on peut remplacer «espaces de Banach» par «espaces localement convexes», et « C^r -variété» par «variété différentiable» au sens de [6].

REFERENCES.

0. J. BOSCH et M. SAGASTUME, *C. R. A. S. Paris* 270, n° 24, série A (1970), 1565.
1. S. LANG, *Introduction to differentiable manifolds*, Intersc., New-York, 1962.
2. M. ARTIN, *Grothendieck Topologies*, Harvard University, 1962.
3. C. EHRESMANN, *Catégories et structures*, Dunod, Paris, 1965.
4. D. KAN, Functors involving c. s. s. complexes, *Trans. A. M. S.* 87 (1958), 330.
5. N. BOURBAKI, *Variétés différentielles et analytiques*, Fascicule de résultats, Hermann, Paris.
6. A. BASTIANI, Applications différentiables et variétés différentiables de dimension infinie, *J. Analyse Math. Jérusalem* XIII (1964), 1-114.

Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matematica, Estatística
e Ciencia da Computação
Caixa Postal 1170
CAMPINAS (S. P.)
BRESIL