CAHIERS DE
TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
CATÉGORIQUES

RENÉ GUITART
LUC VAN DEN BRIL

Décompositions et Lax-complétions

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 18, nº 4 (1977), p. 333-407

<http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1977__18_4_333_0>

CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE *Vol. XVIII-4 (1977)*

DECOMPOSITIONS ET LAX-COMPLETIONS

par René GUITART et Luc VAN DEN BRIL

Ce travail fait suite à «*Remarques sur les machines et les structures*» [9] et n'aurait pu être mené à bien sans les idées sur les lax-limites que nous avons étudiées dans D. Bourn [2], J.W. Gray [7], G.M. Kelly [12] et R.H. Street [19]. Une version préliminaire circule depuis Juillet 1976 sous le titre «Fibrations, diagrammes et décompositions». On a exposé à l'Isle of Thorns en Juillet 1976 [9b] et à Louvain-la-Neuve en Juin 1977 les principaux résultats obtenus qui sont:

1° Les caractères coalgébrique et algébrique de la théorie des décompositions de catégories en fibres recollées le long d'une base.

2° Un lemme de recollement d'extensions de Kan dans les 2-catégories quasi-commas qui étend le théorème d'extension de Kan avec paramètres de [9] et s'applique par exemple aux relèvements de monades.

3° Le théorème de lax-cocomplétion d'une catégorie X, et les calculs d'extensions et quasi-extensions de Kan au-dessus d'une 2-catégorie de la forme $\mathrm{D}X$.

4° Les conditions de changement de base (ou localisation) des résultats précédents le long d'un foncteur $\Gamma: M \to Cat$.

Plus en détails, les résultats se présentent chapitre par chapitre comme suit (pour les énoncés précis, voir le cœur du texte).

Dans le n° 1, on donne une nouvelle preuve de l'adjonction $K \dashv D$ de [9], où $D: CAT \to CAT/_{Cat}$ est le foncteur diagramme et K le foncteur produit croisé (cf. 1.19 ici), et cette adjonction est fondamentale dans tout le travail. On observe que des localisations bien choisies de $K \dashv D$ donnent sans effort les calculs relatifs aux actions et automorphismes intérieurs dans la catégorie des groupes, ou les calculs primordiaux dans le topos *Ens*.

Dans le n° 2, partant du résultat du n° 1, on observe que, si les relations d'équivalence sont dans *Ens* les coalgèbres de la comonade des parties pointées et si (1.20.5) les décompositions en facteurs semi-directs de groupes sont des structures coalgébriques sur *Gr*, c'est simplement en vertu de localisations bien choisies d'un phénomène plus général : Les catégories munies d'une décomposition en base et fibres sont les coalgèbres de la comonade associée à $K \dashv D$. On prouve donc cette coalgébricité, montrant ainsi que dans *CAT* les cofibrations sont l'analogue des relations d'équivalence dans *Ens*. On achève le paragraphe en montrant comment la théorie des lax-décompositions se ramène à la théorie « stricte » et en indiquant une variante qui donne un caractère algébrique des décompositions en rapport avec les catégories internes à $CAT/_{Cat}$.

Dans le n° 3 une analyse de la preuve du n° 1 conduit (3.5) à une formulation abstraite de l'adjonction $K \dashv D$ de 1.19 en termes de stabilité et densité, qui offre l'intérêt de s'appliquer directement, outre le cas initial du n° 1, aussi bien au Lemme de Yoneda qu'aux topos élémentaires, aux cosmos, aux ditopos ou encore aux 2-catégories et transformations 3-quasi-naturelles.

Dans le n° 4 on montre d'abord que l'adjonction $K \dashv D$ est en fait une 2-adjonction. En reprenant la preuve de la Proposition 2 de [9], ceci conduit à montrer que, pour certains $\Gamma : M \to Cat$ - à savoir ceux qui sont K-stables (voir 4.2.2) - on a non seulement une localisation de $K \dashv D$ modulo Γ mais on a même une localisation du théorème d'isomorphisme de [9] entre *Mac* et *Diag*. Pour de tels Γ on obtient donc une théorie des Γ-machines qui est raisonnable, i. e. définie, associative à isomorphismes près et représentable à la Kleisli.

Dans le n° 5 on commence l'étude des extensions de Kan au-dessus des catégories de diagrammes $\mathfrak{D}X$. Pour juger de l'importance de la question on observera que (voir 3.6.2) dans un topos l'existence des π_f équivaut à l'existence des extensions au-dessus des objets Ω^X, et que donc, si les $\mathfrak{D}X$ jouent dans *CAT* le rôle des Ω^X dans un topos, les « extensions » au-dessus des $\mathfrak{D}X$ doivent exister. Mais en fait les extensions au-dessus des Ω^X auxquelles on pense en 3.6.2 sont relatives à la structure ordonnée de Ω^X, et le «bon analogue» pour les $\mathfrak{D}X$ sera examiné au n° 7, où l'on verra qu'il s'agit des quasi-extensions naturelles fortes, relativement à la structure $\mathrm{D}X$ de 2-catégorie de $\mathfrak{D}X$. Cependant dans ce n° 5 on indique comment dans certains cas on peut calculer des extensions de Kan ordinaires au-dessus de $\mathfrak{D}X$, et on précise la structure des catégories d'extensions $Ext\,X$ (5.2) vis à vis de l'opérateur $K_X : \mathfrak{D}^2 X \to \mathfrak{D}X$ qui n'est pas un opérateur *colim* mais (n° 7) un opérateur *quasi-colim* ou *lax-colim*. On voit que $\mathfrak{D}X$ n'est pas cocomplète en général, et on montre comment les types de limites et colimites possédés par X se transfèrent à $\mathfrak{D}X$.

Dans le n° 6, toujours par analogie avec le caractère complet des ensembles ordonnés $\mathrm{P}X = (\mathcal{P}X, \subset)$, on s'intéresse à l'existence d'extensions de Kan dans la 2-catégorie $\mathrm{D}X$. Les théorèmes 2 et 2 bis de [9] d'extensions de Kan paramétrées (i.e. d'extensions de Kan dans $\mathrm{D}X$) sont repris suivant l'amélioration donnée en [20] des résultats de la Thèse de Leroux. Notre lemme de localisation 6.2.5 permet d'énoncer un critère de recollement d'extensions de Kan qui redonne le théorème d'extensions paramétrées. On termine le paragraphe par une application, due à Rosićkỳ, à la construction de monades de codensité généralisées.

Dans le n° 7, comme suggéré plus haut à propos du n° 5, on prouve que, de même que ce n'est pas l'ensemble $\mathcal{P}X$ mais l'ensemble ordonné $\mathrm{P}X$ qui est une «complétion» de X, de même ce n'est pas la catégorie $\mathfrak{D}X$ mais la 2-catégorie $\mathrm{D}X$ qui a une bonne propriété : $\mathrm{D}X$ est la «quasi-cocomplétion forte» de X (Théorème 7.10). De là suit immédiatement la construction de la «limit monad» de Kock [14] en passant aux 2-composantes connexes. On termine en montrant qu'au-dessus de $\mathrm{D}X$ on peut faire ou bien les quasi-extensions fortes le long de cofibrations, ou bien les quasi-extensions naturelles fortes le long de foncteurs arbitraires, ce qui peut donc être considéré comme un calcul de π_f.

Cette étude des catégories $\mathfrak{D}X$ et $\mathrm{D}X$ autorise la comparaison entre *Ens* et *CAT* suivant le schéma (où *Fam* est défini en [6] (voir ici 1.20. 2) et où $j_X : \mathfrak{D}X \to Cat^{X^{op}}$ est l'injection qui associe

$$(-)\downarrow p : X^{op} \to Cat \quad \text{à} \quad p : A \to X :$$

$$
\begin{tikzcd}
2 \arrow[r] & \mathbf{2} \arrow[r] & \mathbf{2} \arrow[r] & Ens/_{(-)} \arrow[r] & Ens/_{(-)} & \\
Fam \arrow[r] \arrow[d] & Fam \arrow[r] \arrow[d] & Ens^{(-)^{op}} \arrow[d] & & & \text{dim } 1 \\
\mathfrak{D} \arrow[r] & \mathrm{D} \arrow[r, "j"] & Cat^{(-)^{op}} \arrow[r] & Fib(-) \arrow[r] & CAT/_{(-)} & \text{dim } 2
\end{tikzcd}
$$

Plus précisément, on peut établir une correspondance entre notions ensemblistes et notions catégoriques sous la forme du «dictionnaire» :

DICTIONNAIRE

Ens	*CAT*
Ensemble, application	Catégorie, foncteur
Partie $A \subset X$ de X	Diagramme $p : A \to X$ sur X
Ensemble $\mathcal{P}X$ des parties de X et foncteur $\mathcal{P}$	Catégorie $\mathfrak{D}X$ des diagrammes sur X et foncteur $\mathfrak{D}$
Union $U_X : \mathcal{P}^2 X \to \mathcal{P} X$	Produit croisé $K_X : \mathfrak{D}^2 X \to \mathfrak{D} X$
Relation $X \to \mathcal{P} Y$	Famille de diagrammes $X \to \mathfrak{D} Y$
Relation sous la forme $X \leftarrow A \to Y$	Famille de diagrammes sous la forme de machine $X \xleftarrow{cof} K \to Y$
Composition des relations avec U_X ou par produits fibrés	Composition des machines avec K_X ou par produits fibrés
Comonade $\mathcal{P}^{\cdot}$ des parties pointées	Comonade $\mathfrak{D}^{\cdot}$ des diagrammes pointés
Relation d'équivalence sur X comme coalgèbre de $\mathcal{P}^{\cdot}$ en X	Décomposition de X, i.e. cofibration de source X comme coalgèbre de $\mathfrak{D}^{\cdot}$ en X
Monade des parties $(\mathcal{P}, \{\}, U)$	Bimonade des diagrammes $(\mathfrak{D}, \mathrm{U}, K)$
L'ordre $\mathrm{P}X = (\mathcal{P}X, \subset)$	La 2-catégorie $\mathrm{D}X$
La structure de treillis complet de $\mathrm{P}X$ et le calcul des π_f ou extensions au-dessus des $\mathrm{P}X$	La structure de 2-catégorie quasi-cocomplète forte de $\mathrm{D}X$ et le calcul des quasi-extensions naturelles fortes au-dessus des $\mathrm{D}X$
Propriété universelle de $\mathrm{P}X$ (ordre complet libre sur X) et construction de la monade des parties	Propriété universelle de $\mathrm{D}X$ (2-catégorie quasi-cocomplète forte libre sur X) et construction de la bimonade des diagrammes

Le but initial de ce travail était de renforcer l'analogie ([9], page 2)

«*Ens* et monade des parties / *CAT* et bimonade des diagrammes»

et de convaincre que machines et diagrammes jouent dans *CAT* le rôle des relations et des parties dans *Ens*. On peut considérer D comme une «approximation» localement petite de $Cat^{(-)^{op}}$ et la théorie des machines $X \to \mathfrak{D} Y$ comme une partie de la théorie des foncteurs $X \to Cat^{Y^{op}}$. Une autre partie de cette théorie des foncteurs $X \to Cat^{Y^{op}}$ est la théorie des distributeurs $X \to Ens^{Y^{op}}$, qui jouent plutôt dans *CAT* le rôle des relations ordonnées dans *Ord*, puisque $Ens^{X^{op}}$ est - à des questions de taille près - une complétion de X «interne» à *CAT*, ne tenant pas compte explicitement de l'aspect 2-dimensionnel non trivial de la théorie des catégories.

Actuellement il semble raisonnable de dire que, avec les machines *et* les distributeurs (i.e. avec D et $Ens^{(-)^{op}}$), nous avons les fondements de la théorie des relations entre catégories (i.e. celle de $Cat^{(-)^{op}}$).

REMARQUE. Dans tout le texte on dit «extension» pour «extension de Kan à gauche» et «cofibration» pour «cofibration normale scindée» (ce qui était appelé «fibration» dans [9]). Les composés de foncteurs ou de transformations naturelles sont indifféremment notés sans symbole de composition ou avec un «.». La valeur d'une application ou d'un foncteur F en x est désignée par Fx, ou $F(x)$, ou parfois F_x.

SOMMAIRE.

1. Preuve globale des adjonctions $K\Sigma_\Gamma \dashv \Gamma^* D$
2. Coalgebricité de la décomposition des catégories
3. Construction de $K \dashv D$ dans $Fib(CAT)$
4. Composition des Γ-machines, des Γ-diagrammes
5. Extension de Kan au-dessus d'une catégorie $\mathfrak{D}X$
6. Extension de Kan dans une 2-catégorie DX
7. Lax-extension de Kan au-dessus d'une 2-catégorie DX et propriété universelle de DX.

1. PREUVE GLOBALE DES ADJONCTIONS $K\Sigma_\Gamma \dashv \Gamma^* D$.

On donne ici une preuve globale de l'adjonction $K \dashv D$ de [9] qui sera exploitée au paragraphe 3; en localisant suivant un préfaisceau Γ, on peut obtenir des exemples variés d'adjonctions de la forme $K\Sigma_\Gamma \dashv \Gamma^* D$: on retrouve ainsi directement la propriété universelle des produits semi-directs de groupes relativement aux actions par automorphismes intérieurs, de même que la démonstration que *Ens* est un topos élémentaire.

On reprend ou adapte les notations et la terminologie de [9] ; on utilise aussi les concepts et notions de [2, 7, 12, 19].

Soit $X \in |CAT|$ et $\pi : X \to CAT$ un foncteur ; on pose

$$E_\pi = \sum_{x \in |X|} \pi(x) \quad \text{et} \quad X * E = \{ (f, z) \mid z \in \pi(\alpha(f)) \},$$

et on définit

$$a_\pi : X * E \to E : (f, z) \mapsto \pi(f)(z)$$

qui est une action ou opération de X sur la catégorie E au sens de [5 a] .

Le *produit croisé de* a_π ou simplement de π est la catégorie $K\pi$ ayant pour morphismes les triplets (z, f, u), où

$$f \in X, \quad u \in |\pi(\alpha(f))|, \quad z \in \pi(\beta(f)) \quad \text{et} \quad \pi(f)(u) = \alpha(z),$$

la composition étant définie, si $u' = \beta(z)$, par

1.1. $$(z', f', u').(z, f, u) = (z'.\pi(f')(z), f'.f, u).$$

Le foncteur

$$k_\pi : K\pi \to X : (z, f, u) \mapsto f$$

est appelé la *cofibration associée à* π (dans [9] on disait, contrairement à l'usage, fibration).

Pour tout $(z, f, u) \in K\pi$ on désigne par $a(z, f, u)$ la transformation naturelle

1.2.
$$\begin{tikzcd} & \pi(x) \arrow[d, "\pi(f)"] \\ 1 \arrow[ur, "u"] \arrow[r, "u'"'] & \pi(y) \arrow[u, phantom, shift right=3, "\swarrow z"] \end{tikzcd}$$

de sorte que a est une *transformation quasi-naturelle* ou «lax-natural transformation» ou «catadèse» (voir [7] p. 25, [12] p. 189, [2], et voir aussi le rappel, paragraphe 7.1) donnant le diagramme

1.3.
$$\begin{tikzcd} K\pi \arrow[r, "k_\pi"] \arrow[d] & X \arrow[d, "\pi"] \\ 1 \arrow[r, "1^\wedge"'] \arrow[ur, phantom, "a"] & CAT \end{tikzcd}$$

qui détermine $K\pi$ comme étant la catégorie 2-comma $[1, \pi]$, au sens de [7] p. 30 (ou «lax-comma category $1//\pi$» avec la terminologie de [12] p. 196). Ceci signifie donc que l'on a une bijection naturelle de l'ensemble des foncteurs de Y vers $K\pi$ sur l'ensemble des couples (F, f), où F est un foncteur de Y vers X et f une transformation quasi-naturelle du foncteur $1^\wedge : Y \to CAT$ (constant sur 1) vers πF ; on indique l'existence d'une telle bijection sous la forme

1.4.
$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr] \arrow[dr, "1^\wedge"'] & \arrow[d, phantom, ""] & X \arrow[dl, "\pi"] \\ & CAT & \end{tikzcd} \qquad vs \qquad Y \longrightarrow K\pi .$$

Cette propriété 1.4 sera appelée *propriété projective de* $K\pi$.

Si X est une 2-catégorie, on désignera, comme dans [12] p. 192, par $CAT\int X$ la catégorie ayant pour objets les foncteurs $\Gamma : A \to X_1$ (où X_1 est la catégorie des 1-morphismes de X et où $A \in |CAT|$), un morphisme $(T, t) : (A, \Gamma) \to (A', \Gamma')$ étant défini par un foncteur $T : A \to A'$ et une transformation quasi-naturelle $t : \Gamma \dashrightarrow \Gamma' T$. La composition de ces morphismes se fait comme l'indique la juxtaposition des diagrammes

1.5.
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "T"] \arrow[dr, "\Gamma"'] & A' \arrow[r, "T'"] \arrow[d, "\Gamma'"] & A'' \arrow[dl, "\Gamma''"] \\ \arrow[r, phantom, "t"] & X_1 \arrow[r, phantom, "t'"] & \ \end{tikzcd}$$

On désigne par $CAT//X_1$ la sous-catégorie de $CAT\int X$ ayant pour morphismes les (T, t) où t est naturelle et, comme dans [9], on désigne par $\mathfrak{D}X_1$ la sous-catégorie pleine de $CAT//\, X_1$ ayant pour objets les

$$\Gamma : A \to X_1 \quad \text{tels que} \quad A \in |\, Cat|$$

(Cat étant l'objet de CAT ayant pour objets les petites catégories). Alors en posant $\gamma(\Gamma) = \Gamma : A \to X_1$ pour tout $\Gamma \in |\, CAT//X_1|$, le diagramme

1.6.
$$\begin{tikzcd} CAT//X_1 \arrow[r] \arrow[d, "d_{X_1}"'] & 1 \arrow[d, "X_1^\wedge"] \\ CAT \arrow[r, equal] \arrow[ur, dashed, phantom, "\gamma"] & CAT \end{tikzcd}$$

détermine $CAT//X_1$ comme étant la catégorie 2-comma $[Id_{CAT}, X_1^\wedge]$.

On désigne par $\mathbf{U}_{X_1} : X_1 \to CAT//X_1$ le foncteur associé par la propriété universelle de $CAT//X_1$ à la transformation quasi-naturelle

$u : 1^\wedge \dashrightarrow X_1^\wedge$ prenant en $x \in |X_1|$ la valeur $u_x = 1 \xrightarrow{x^\wedge} X_1$.

Le foncteur

$$X_1 \xrightarrow{\mathbf{U}_{X_1}} CAT//X_1 \hookrightarrow CAT\!\int\! X$$

sera noté $\underline{T}_X : X_1 \to CAT\!\int\! X$.

La propriété projective de $K\pi$ peut alors s'énoncer :

1.7. *Le foncteur* $\underline{T}_{CAT} : CAT \to CAT\!\int\! CAT$ *admet un adjoint à droite* K_{CAT} *tel que pour tout* $\pi \in |\, CAT\!\int\! CAT|$ *on ait* $\mathrm{K}_{CAT}(\pi) = K\pi$.

Toujours avec $X = CAT$, si $(T, t) : (X, \pi) \to (X', \pi')$ est un morphisme de $CAT\!\int\! CAT$, on définit donc un foncteur $\mathrm{K}_{CAT}(T, t)$ noté simplement $K<T, t> : K\pi \to K\pi'$ (et déjà utilisé en [9] p. 4 pour t naturelle); ce foncteur est celui envoyant $(z, f, u) \in K\pi$ sur $(t_y(z).t_f(u),\ t_f,\ t_x(u))$ conformément au diagramme

1.8.
$$\begin{tikzcd} & \pi(x) \arrow[r, "t_x"] \arrow[d, "\pi(f)"] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow t_f"] & \pi'(T(x)) \arrow[d, "\pi'(T(f))"] \\ 1 \arrow[ur, "u"] \arrow[dr] \arrow[r, phantom, "z"] & \pi(y) \arrow[r, "t_y"'] & \pi'(T(y)) \end{tikzcd}$$

On vérifie que $T \cdot k_\pi = k_{\pi'} . K<T, t>$, et que l'application

$$(T,t) \longmapsto (T, K\langle T,t\rangle)$$

détermine une bijection de $CAT\int CAT(\pi,\pi')$ vers $CAT^2(k_\pi, k_{\pi'})$ (voir [7] p. 86 ou [12] p. 210, théorème 6.1) :

1.9.
$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr] \arrow[dr, "\pi"'] & \arrow[d, phantom, "\dashrightarrow"] & X' \arrow[dl, "\pi'"] \\ & CAT & \end{tikzcd} \qquad vs \qquad \begin{tikzcd} K\pi \arrow[r] \arrow[d, "k_\pi"'] \arrow[dr, phantom, "="] & K\pi' \arrow[d, "k_{\pi'}"] \\ X \arrow[r] & X' \end{tikzcd}$$

De plus on notera que

1.10. Le diagramme

$$\begin{tikzcd} K\pi \arrow[r, "K\langle T,t\rangle"] \arrow[d, "k_\pi"'] & K\pi' \arrow[d, "k_{\pi'}"] \\ X \arrow[r, "T"] & X' \end{tikzcd}$$

est cartésien ssi $t \approx Id$.

On notera aussi comme cas particulier de 1.9 que l'on a une bijection induite

1.11.
$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, bend right=60, "\pi"'] \arrow[d, bend left=60, "\pi'"] \arrow[d, phantom, "\dashrightarrow"] \\ CAT \end{tikzcd} \qquad vs \qquad \begin{tikzcd} K\pi \arrow[rr] \arrow[dr, "k_\pi"'] & \arrow[d, phantom, "="] & K\pi' \arrow[dl, "k_{\pi'}"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

On remarque aussi que 1.9 permet de retrouver 1.4.

Soit maintenant

$$\pi : X \to CAT, \quad f : x \to y \in X \quad \text{et} \quad u \in |\pi(x)|.$$

On pose (comme dans [9] p. 6) $\lambda_f(u) = (\pi(f)(u), f, u)$, de sorte que l'on a une transformation naturelle $\bar{\lambda}(f)$

1.12.
$$\begin{tikzcd} \pi(x) \arrow[dr, "i_x"] \arrow[dd, "\pi(f)"'] & \\ \arrow[r, phantom, "\lambda_f \Downarrow"] & K\pi \\ \pi(y) \arrow[ur, "i_y"'] & \end{tikzcd}$$

En associant à tout f de X la transformation $\bar{\lambda}(f)$ on détermine une transformation quasi-naturelle $\bar{\lambda} : \pi \dashrightarrow K\pi^{\wedge}$ (correspondant au foncteur l_π de X vers $\mathfrak{D}K\pi$ de [9] p. 6) donnant le diagramme

1.13.
$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr] \arrow[dr, "\pi"'] \arrow[rr, phantom, shift right=4ex, "\bar{\lambda}\ \dashrightarrow"] & & 1 \arrow[dl, "K\pi^{\wedge}"] \\ & CAT & \end{tikzcd}$$

Alors en considérant la quasi-extension de Kan

$$\begin{tikzcd} K\pi \arrow[rr] \arrow[dr, "1^{\wedge}"'] \arrow[rr, phantom, shift right=4ex, "\dashrightarrow"] & & 1 \arrow[dl, "K\pi^{\wedge}"] \\ & CAT & \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} K\pi \arrow[r] \arrow[dr, "1^{\wedge}"'] \arrow[dr, phantom, shift left=3ex, "\alpha \dashrightarrow"] & X \arrow[r] \arrow[d, "\pi"] \arrow[dr, phantom, shift right=3ex, "\bar{\lambda} \dashrightarrow"] & 1 \arrow[dl, "K\pi^{\wedge}"] \\ & CAT & \end{tikzcd}$$

on déduit de 1.16 ci-après que $\bar{\lambda} : \pi \dashrightarrow K\pi^{\wedge}$ définit $K\pi$ comme quasi-colimite de π ; on a donc une bijection naturelle :

1.14.
$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr] \arrow[dr, "\pi"'] \arrow[rr, phantom, shift right=4ex, "\dashrightarrow"] & & 1 \arrow[dl, "Z^{\wedge}"] \\ & CAT & \end{tikzcd} \quad vs \quad K\pi \longrightarrow Z .$$

Cette propriété 1.14 sera appelée *propriété inductive de* $K\pi$. Par ailleurs de 1.4 on déduit aisément que l'on a une bijection naturelle

1.15.
$$\begin{tikzcd} K\pi \arrow[rr, "k_\pi"] \arrow[dr, "1^{\wedge}"'] \arrow[rr, phantom, shift right=4ex, "\dashrightarrow"] & & X \arrow[dl, "\pi'"] \\ & CAT & \end{tikzcd} \quad vs \quad \begin{tikzcd} K\pi \arrow[rr] \arrow[dr, "k_\pi"'] \arrow[rr, phantom, shift right=4ex, "="] & & K\pi' \arrow[dl, "k_{\pi'}"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

et en tenant compte de 1.11, il vient la moitié de

1.16. Un diagramme

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "1^{\wedge}"'] \arrow[rr, phantom, shift right=4ex, "\beta\ \dashrightarrow"] & & X \arrow[dl, "\pi"] \\ & CAT & \end{tikzcd}$$

est une quasi-extension de Kan (au sens de [7] p. 237) ssi $F \approx k_\pi$, et alors $\beta \approx \alpha$ (1.2).

NOTA. 1.16 et 1.4 permettent aussi de retrouver 1.11.

Par ailleurs, 1.6 nous donne la bijection naturelle

1.17.
$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr] \arrow[dr, "\pi"'] & & 1 \arrow[dl, "\hat{X}_1"] \\ & CAT & \end{tikzcd} \quad vs \quad \begin{tikzcd} X \arrow[rr] \arrow[dr, "\pi"'] \arrow[r, phantom, shift right=4, "="] & & Cat//X_1 \arrow[dl, "d_{X_1}"] \\ & CAT & \end{tikzcd}$$

et en tenant compte de la propriété inductive 1.14, on obtient la bijection naturelle

1.18
$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr] \arrow[dr, "\pi"'] \arrow[r, phantom, shift right=4, "="] & & CAT//Z \arrow[dl, "d_Z"] \\ & CAT & \end{tikzcd} \quad vs \quad K\pi \longrightarrow Z.$$

Il s'ensuit, en notant encore $d_Z : \mathfrak{D}Z \to CAT$ la restriction de d_Z à $\mathfrak{D}Z$, que l'on a une bijection naturelle

$$CAT/_{Cat}(\pi, d_Z) \approx CAT(K\pi, Z)$$

si bien que, si $(\mathfrak{D}Z, d_Z)$ est noté DZ , on a (voir aussi [9]):

1.19. *Le foncteur* $D: CAT \to CAT/_{Cat}$ *admet le foncteur* K *pour adjoint à gauche.*

Soit alors $M \in |CAT|$ une catégorie et $\Gamma : M \to Cat$ un foncteur arbitraire. Le produit fibré le long de Γ , soit $\Gamma^*: CAT/_{Cat} \to CAT/_M$ admet pour adjoint à gauche le foncteur Σ_Γ défini par la composition avec Γ , de sorte que :

1.20. THEOREME. *Pour tout* $\Gamma : M \to Cat$ *on a l'adjonction*

$$(CAT/_M \xrightarrow{K\Sigma_\Gamma} CAT) \dashv (CAT \xrightarrow{\Gamma^* D} CAT/_M).$$

NOTATIONS. Pour $X \in CAT$, Γ^*DX sera noté $\mathfrak{D}_\Gamma X \xrightarrow{\mu_X} M$ et pour tout $\pi: A \to M$, $K\Sigma_\Gamma(\pi)$ sera noté $K\Gamma\pi$.

EXEMPLES.

1.20.1. Si $\Gamma = 1 \xrightarrow{\hat{A}} Cat$, alors

$$K\Gamma \approx (-)^A \quad \text{et} \quad \Gamma^*D \approx (-)\times A \ ;$$

1.20 exprime donc l'adjonction $(-)^A \dashv (\ )\times A$ et ceci, pour tout $A \in Cat$, dit que *Cat est cartésienne fermée.*

1.20.2. Si $\Gamma = Ens \hookrightarrow Cat$, alors $\mathfrak{D}_\Gamma X$ est la catégorie notée $Fam(X)$ dans [6] et pour tout $\xi : X \to Ens$, $K\Gamma\xi$ est la *cofibration discrète associée à* ξ (que l'on notera ici comme dans [9] par $H\xi$).

1.20.3. Si $\Gamma = Arb \hookrightarrow Cat$, où Arb est la sous-catégorie pleine de Cat ayant pour objets les arbres (avec un premier élément), alors pour tout arbre A et toute représentation $\rho : A \to Arb$, $K\Gamma\rho$ est l'arbre obtenu par *greffe sur* A *de* ρ.

1.20.4. Soit 2 la catégorie discrète à 2 objets 0 et 1 et $\Gamma : 2 \to Cat$ le foncteur défini par $\Gamma 0 = \emptyset$ et $\Gamma 1 = 1$. Alors, si X est un ensemble, on a

$$\mathfrak{D}_\Gamma X = X + 1 = \tilde{X} ,$$

et si l'on exprime 1.20 seulement pour des ensembles, on obtient exactement le fait que *l'insertion* $Ens \hookrightarrow Part\,Ens$ *de* Ens *dans la catégorie des morphismes partiels de* Ens *admet un adjoint à droite.*

Compte tenu de ce que 1.20.1 est vrai en particulier si $A \in Ens$ et de ce que 1.20 pour $\Gamma : A \xrightarrow{1^\wedge} Cat$ exprime la propriété universelle des produits cartésiens $A \times X$, on voit donc que, une fois admis l'existence des limites et colimites finies dans Ens, toute la structure de ce topos élémentaire se déduit par des «localisations» suivant des Γ convenables du Théorème 1.20.

1.20.5. Soit enfin $\Gamma : Gr \hookrightarrow Cat$ le foncteur d'insertion de la catégorie des groupes dans Cat. Si l'on exprime l'adjonction 1.20 seulement pour les catégories qui sont des groupes, on obtient le résultat suivant, qui est probablement la propriété qui a fait remarquer le produit semi-direct de groupes :

Soit Act la catégorie ayant pour objets les actions $a : G \times H \to H$ d'un groupe G sur un groupe H, et où un morphisme de a vers $a' : G' \times H' \to H'$ est défini par une paire (g, h), où $g : G \to G'$ et $h : H \to H'$ sont des homomorphismes tels que $a' \circ (g \times h) = h \circ a$. En associant au groupe G l'action

$$int_G : G \times G \to G : (x, y) \mapsto x y x^{-1} \quad \text{de } G \text{ sur } G$$

par automorphismes intérieurs, on détermine un foncteur $int : Gr \to Act$.

L'adjonction 1.20 entraîne que l'on détermine un adjoint à gauche cr (de Act vers Gr) au foncteur int en associant à chaque action $a: G \times H \to H$ son produit semi-direct ou croisé, i.e. (voir [9]) si l'on note $\tilde{a}: G \to Gr$ le foncteur qui associe H à 1 et $a(g,-)$ à tout g de G,

$$cr(a) = K(\, G \xrightarrow{\tilde{a}} Gr \hookrightarrow Cat \,).$$

Le cotriple $\mathrm{T} = (T, \beta, \delta)$ sur Gr induit par cette adjonction a la la forme simple suivante : $T(G)$ est l'ensemble $G \times G$ muni de la loi

$$(y_2, y_1)(y'_2, y'_1) = (y_2 y_1 y'_2 y_1^{-1}, \; y_1 y'_1),$$

$\beta_G: T(G) \to G$ est l'homomorphisme de groupes $(y_2, y_1) \mapsto y_2 \cdot y_1$, et $\delta_G: T(G) \to T^2(G)$ est défini par

$$\delta_G(y_2, y_1) = ((y_2, 1), (1, y_1)).$$

On montre qu'une T-coalgèbre en G est la donnée d'une décomposition de G en le produit semi-direct d'une sous-action $a: G_1 \times G_2 \to G_2$ de l'action $int_G: G \times G \to G$.

2. COALGEBRICITE DE LA DECOMPOSITION DES CATEGORIES.

Les données d'une partition d'un ensemble ou d'une présentation d'un groupe comme produit semi-direct (voir 1.20.5) sont deux cas particuliers d'un unique type de donnée à savoir celui d'une décomposition d'une catégorie C, c'est-à-dire d'un isomorphisme $y: C \approx K\pi$ de C sur une catégorie «décomposée» $k_\pi : K\pi \to B$ en base et fibre ; ceci équivaut encore à la donnée d'une cofibration*: $C \to B$ de source C.*

Dans ce n° 2 on définit les décompositions d'objets X d'une catégorie $\mathbf{C}$ de type un morphisme donné de $\mathbf{C}$, et puis, en partant de l'adjonction 1.20, on démontre que les décompositions dans CAT de type une cofibration surjective (à petites fibres) donnée constituent une catégorie coalgébrique sur CAT. Cela est appliqué ensuite aux décompositions «lax» suivant un graphe cartésien (cf. 2.4.3, 11 et 14). On termine (2.5.4 et 5) par la définition des cofactorisations modulo un cotriple, la comparaison avec les décompositions, et l'énoncé d'un caractère algébrique des décompositions.

2.1. Définition des décompositions.

Soit **C** une catégorie et $m: L \to M$ un morphisme de **C**. On désigne par $dec_m \mathbf{C}$ la catégorie ayant pour objets les produits fibrés (p, q, π, m) :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"'] & L \arrow[d, "m"] \\ B \arrow[r, "\pi"] & M \end{tikzcd}$$

et ayant pour morphismes de (p, q, π, m) vers (p', q', π', m') les $h: B \to B'$ tels que $\pi'.h = \pi$.

On désigne par $Dec_m \mathbf{C}$ le quotient de $dec_m \mathbf{C}$ par la relation ρ qui identifie

$$h: (p, q, \pi, m) \to (p', q', \pi', m) \quad \text{et} \quad h_1: (p_1, q_1, \pi_1, m) \to (p_1', q_1', \pi_1', m)$$

ssi on a des isomorphismes $\gamma: B \to B_1$ et $\gamma': B' \to B_1'$ tels que

$$\gamma'.p' = p_1', \quad \pi_1'.\gamma' = \pi', \quad \gamma.p = p_1, \quad \pi_1.\gamma = \pi$$

$$(\text{et donc } X = X_1 \text{ et } X' = X_1') \text{ et } h_1.\gamma = \gamma'.h.$$

La classe de h modulo ρ sera désignée par

$$(f, [h]): (X, [p, q, \pi]) \to (X', [p', q', \pi']),$$

où $f: X \to X'$ est l'unique morphisme tel que $p'.f = h.p$ et $q'.f = q$.

En associant X à $(X, [p, q, \pi])$ et f à $(f, [h])$ on détermine un foncteur $U_m : Dec_m \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ et on dit que la théorie des m-décompositions est coalgébrique sur **C** si ce foncteur est coalgébrique.

2.2. Décompositions et coalgèbres de $\mathfrak{D}^{\cdot}$.

Dans toute la suite de cet article on notera $\phi: \dot{C}at \to Cat$ la cofibration universelle $k_{Id_{Cat}}$, de sorte que pour tout $\pi: X \to Cat$ on a un carré cartésien

$$\begin{tikzcd} K\pi \arrow[r, "\tilde{\pi}"] \arrow[d, "k_\pi"'] & \dot{C}at \arrow[d, "\phi"] \\ X \arrow[r, "\pi"] & Cat \end{tikzcd}$$

(voir 1.10).

On désigne encore par $\mathfrak{D}^{\cdot} = (\mathfrak{D}^{\cdot}, \beta, \delta)$ le cotriple sur CAT associé à l'adjonction $K \dashv D : CAT \to CAT/_{Cat}$ donnée en 1.19.

Pour tout $X \in |CAT|$, $\mathfrak{D}^{\cdot} X$ est définie par le produit fibré

2.2.2.
$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{D}^{\cdot} X \arrow[r, "\tilde{d}_X"] \arrow[d, "a_X"'] & \dot{Cat} \arrow[d, "\phi"] \\
\mathfrak{D} X \arrow[r, "d_X"'] & Cat
\end{tikzcd}$$

de sorte qu'un morphisme de $\mathfrak{D}^{\cdot} X$ est un triplet

$$\mu = [(p', a'), (F, f, a), (p, a)] : (p, a) \to (p', a')$$

défini par le diagramme

2.2.3.
$$\begin{tikzcd}
& 1 \arrow[dl, "a"'] \arrow[dr, "a'"] \arrow[d, phantom, "\overset{\frown}{\alpha}"] & \\
A \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "p"'] & \arrow[d, phantom, "\overset{f}{\frown}"] & A' \arrow[dl, "p'"] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

Alors $\beta_X : \mathfrak{D}^{\cdot} X \to X$ est défini par

2.2.4.
$$\beta_X[\mu] = p(a) \xrightarrow{f_a} p'F(a) \xrightarrow{p'\alpha} p'(a')$$

tandis que $\delta_X : \mathfrak{D}^{\cdot} X \to \mathfrak{D}^{\cdot}\mathfrak{D}^{\cdot} X$ s'obtient comme étant le foncteur associant à 2.2.3 le diagramme

2.2.5.
$$\begin{tikzcd}
& 1 \arrow[dl, "a"'] \arrow[dr, "a'"] \arrow[d, phantom, "\overset{\frown}{\alpha}"] & \\
A \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "i_p"'] & \arrow[d, phantom, "\overset{\lambda_{(F,f)}}{\frown}"] & A' \arrow[dl, "i_{p'}"] \\
& \mathfrak{D}^{\cdot} X &
\end{tikzcd}$$

où i_p et $\lambda_{(F,f)}$ sont définis par les diagrammes suivants, pour un morphisme $z : a_1 \to a_2$ de A :

2.2.6

$$i_p(z) = \begin{tikzcd} & 1 \arrow[dl, "a_1"'] \arrow[dr, "a_2"] & \\ A \arrow[rr, equal] \arrow[dr, "p"'] \arrow[rr, phantom, bend left=40, "\xrightarrow{z}"] & & A \arrow[dl, "p"] \\ & X \arrow[u, phantom, "="] & \end{tikzcd} \qquad \lambda_{(F,f)}(a_1) = \begin{tikzcd} & 1 \arrow[dl, "a_1"'] \arrow[dr, "F(a_1)"] \arrow[d, phantom, "="] & \\ A \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "p"'] & {} & A' \arrow[dl, "p'"] \\ & X \arrow[u, phantom, "f"] & \end{tikzcd}$$

On vérifie qu'une $\mathfrak{D}^{\cdot}$-coalgèbre en X consiste en la donnée d'un foncteur $\theta: X \to \mathfrak{D}^{\cdot} X$ associant à tout $m: x \to y$ de X un diagramme

2.2.7.

$$\theta m = \begin{tikzcd} & 1 \arrow[dl, "a_x"'] \arrow[dr, "a_y"] \arrow[d, phantom, "\xrightarrow{v_m}"] & \\ Hx \arrow[rr, "Hm"] \arrow[dr, "p_x"'] & {} & Hy \arrow[dl, "p_y"] \\ & X \arrow[u, phantom, "\xrightarrow{h_m}"] & \end{tikzcd}$$

et ceci de sorte que soient satisfaites les quatre conditions

2.2.7.1. Pour tout $x \in |X|$, $p_x(a_x) = x$.

2.2.7.2. Pour tout $m: x \to y$, $m = x \xrightarrow{h_m a_x} p_y Hm\, a_x \xrightarrow{p_y v_m} y$.

2.2.7.3. Pour tout $x \in |X|$, pour tout $z: a \to b \in Hx$,

$$\theta[p_x(z)] = \begin{tikzcd} & 1 \arrow[dl, "a"'] \arrow[dr, "b"] \arrow[d, phantom, "\xrightarrow{z}"] & \\ Hx \arrow[rr, equal] \arrow[dr, "p_x"'] & {} & Hx \arrow[dl, "p_x"] \\ & X \arrow[u, phantom, "="] & \end{tikzcd}$$

2.2.7.4. Pour tout $m: x \to y$, pour tout $a \in H(x)$,

$$\theta[h_m(a)] = \begin{tikzcd} & 1 \arrow[dl, "a"'] \arrow[dr, "Hm(a)"] \arrow[d, phantom, "="] & \\ Hx \arrow[rr, "Hm"] \arrow[dr, "p_x"'] & {} & Hy \arrow[dl, "p_y"] \\ & X \arrow[u, phantom, "\xrightarrow{h_m}"] & \end{tikzcd}$$

Si θ est une coalgèbre en X on définit la *base de* θ comme l'image $B(\theta)$ de

$$a_X \cdot \theta: X \longrightarrow \mathfrak{D}^{\cdot} X \longrightarrow \mathfrak{D} X,$$

i. e. la sous-catégorie de $\mathfrak{D}X$ engendrée par les morphismes de la forme

$$\begin{tikzcd} Hx \arrow[rr, "Hm"] \arrow[dr, "p_x"'] & \arrow[d, phantom, "\overset{h_m}{\curvearrowright}"] & Hy \arrow[dl, "p_y"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

où m parcourt X. On définit alors

$$\pi_\theta = B(\theta) \hookrightarrow \mathfrak{D}X \xrightarrow{d_X} Cat,$$

et un foncteur $\gamma_\theta : X \to K(\pi_\theta)$ comme étant l'unique foncteur rendant commutatif le diagramme

2.2.8.
$$\begin{tikzcd} K(\pi_\theta) \arrow[rr] \arrow[dd] & & \mathfrak{D}^{\cdot} X \arrow[dd, "\alpha_X"] \\ & X \arrow[ul, "\gamma_\theta"] \arrow[ur, "\theta"'] \arrow[dl] & \\ B(\theta) \arrow[rr, hook] & & \mathfrak{D}X \end{tikzcd}$$

Le morphisme γ_θ a un inverse défini par

2.2.9. $\gamma_\theta^{-1}(z,(p_y,(Hm,h_m),p_x),u) = \beta_X((p_y,v),(Hm,h_m,z),(p_x,u)),$

et à la coalgèbre $\theta : X \to \mathfrak{D}^{\cdot} X$ se trouve donc associé un produit fibré

2.2.10.
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\theta"] \arrow[d] & \mathfrak{D}^{\cdot} X \arrow[r, "\tilde{d}_X"] & \dot{Cat} \arrow[d, "\phi"] \\ B(\theta) \arrow[rr, "\pi_\theta"] & & Cat \end{tikzcd}$$

tel que $\pi_\theta(B) \neq \emptyset$ pour tout objet B de $B(\theta)$.

Inversement étant donnés les produits fibrés

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"'] & \dot{Cat} \arrow[d, "\phi"] \\ B \arrow[r, "\pi"] & Cat \end{tikzcd} \quad \text{et} \quad \begin{tikzcd} K\pi \arrow[r, "\tilde{\pi}"] \arrow[d, "k_\pi"'] & \dot{Cat} \arrow[d, "\phi"] \\ B \arrow[r, "\pi"] & Cat \end{tikzcd}$$

on obtient un unique $\gamma' : X \to K\pi$ tel que $k_\pi . \gamma' = p$ et $\tilde{\pi} . \gamma' = q$, puis

$$\theta' = \mathfrak{D}^{\cdot}(\gamma'^{-1}).K\langle 1_\pi, 1_\pi \rangle . \gamma'$$

est l'unique morphisme rendant commutatif le diagramme

2.2.11.
$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rrr, "q"] \arrow[dr, "\theta'"] \arrow[dd, "\gamma'"'] \arrow[ddddd, bend right, "p"'] & & & \dot{Cat} \arrow[ddddd, "\phi"] \\
& \mathfrak{D}^{\bullet} X \arrow[dd] \arrow[dr, "\mathfrak{D}^{\bullet}\gamma'"] & & \\
K\pi \arrow[ddd, "k_\pi"] & & \mathfrak{D}^{\bullet} K\pi \arrow[uur] \arrow[dd] & \\
& \mathfrak{D} X \arrow[dr] & & \\
& & \mathfrak{D} K\pi \arrow[dr, "d_{K\pi}"] & \\
B \arrow[urr, "l_\pi"] \arrow[rrr, "\pi"'] & & & Cat
\end{tikzcd}$$

où $l_\pi : B \to \mathfrak{D}K\pi$ est le morphisme universel associé à π dans l'adjonction 1.19 (on reprend donc les notations de [9]). Ce θ' est une $\mathfrak{D}^{\bullet}$-coalgèbre en $K\pi$, comme ceci résulte des généralités sur les cotriples, et comme ceci peut se voir ici en remarquant que

$$K\langle l_\pi, l_\pi\rangle(z, f, u), \quad \text{où } (z, f, u) \in K\pi,$$

s'obtient en juxtaposant les diagrammes 1.2 et 1.12. Si on calcule le θ' associé au carré fibré associé à une coalgèbre θ on retrouve exactement θ, et d'un autre côté si dans le carré fibré (p, q, π, ϕ) le foncteur π est tel que pour tout objet B de B on ait $\pi(B) \neq \emptyset$, alors on a un isomorphisme $h : B \to B_{\theta'}$ rendant commutatif le diagramme

2.2.12.
$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "\theta'"] \arrow[dr] \arrow[dd, "p"'] & & \mathfrak{D}^{\bullet} X \arrow[dd, "a_X"] \\
& B(\theta') \arrow[dr] & \\
B \arrow[ur, "h"] \arrow[rr, "l_\pi"'] & & \mathfrak{D} X
\end{tikzcd}$$

Soit enfin

$$\dot{Cat} \xrightarrow{\phi'} Cat' \hookrightarrow Cat$$

l'image de ϕ (Cat' est donc constituée des catégories non vides). On vient d'établir que, avec la Définition 2.1, on a :

2.2.13. THEOREME. *La théorie des ϕ'-décompositions est coalgébrique sur CAT, le foncteur $U_{\phi'} : Dec_{\phi'} CAT \to CAT$ étant équivalent au foncteur coalgébrique $K^\infty : (CAT/_{Cat})^\infty \to CAT$ restriction de K aux préfaisceaux π de X dans CAT à fibres non vides.*

2.3. Localisation des résultats.

Soit maintenant $M \in | CAT|$, $\Gamma : M \to Cat$ un foncteur et $\mathfrak{D}^{\cdot}_{\Gamma}$ le cotriple $(\mathfrak{D}^{\cdot}_{\Gamma}, \beta^{\Gamma}, \delta^{\Gamma})$ sur CAT associé à l'adjonction 1.20:

$$K\Sigma_{\Gamma} \dashv \Gamma^{*}D : CAT \to CAT/_{M}.$$

Ce cotriple peut se calculer comme suit: Si pour tout objet X de CAT on considère les produits fibrés

2.3.1.
$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{D}^{\cdot}_{\Gamma}X \arrow[r, "f_X"] \arrow[d, "r_X"'] & \mathfrak{D}^{\cdot}X \arrow[r, "\tilde{d}_X"] \arrow[d, "\alpha_X"] & \dot{Cat} \arrow[d, "\phi"] \\
\mathfrak{D}_{\Gamma}X \arrow[r, "\gamma_X"] \arrow[d, "\mu_X"'] & \mathfrak{D}X \arrow[r, "d_X"] \arrow[d, "d_X"] & Cat \\
M \arrow[r, "\Gamma"] & Cat &
\end{tikzcd}$$

alors pour tout foncteur $F : X \to Y$ de CAT tous les carrés commutatifs du cube

2.3.2.
$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{D}^{\cdot}_{\Gamma}X \arrow[rrr, "f_X"] \arrow[dr, "r_X"] \arrow[ddd, "\mathfrak{D}^{\cdot}_{\Gamma}F"'] & & & \mathfrak{D}^{\cdot}X \arrow[dl, "\alpha_X"'] \arrow[ddd, "\mathfrak{D}^{\cdot}F"] \\
& \mathfrak{D}_{\Gamma}X \arrow[r, "\gamma_X"] \arrow[d, "\mathfrak{D}_{\Gamma}F"'] & \mathfrak{D}X \arrow[d, "\mathfrak{D}F"] & \\
& \mathfrak{D}_{\Gamma}Y \arrow[r, "\gamma_Y"'] & \mathfrak{D}Y & \\
\mathfrak{D}^{\cdot}_{\Gamma}Y \arrow[rrr, "f_Y"'] \arrow[ur, "r_Y"] & & & \mathfrak{D}^{\cdot}Y \arrow[ul, "\alpha_Y"']
\end{tikzcd}$$

sont cartésiens (ceci définit le foncteur $\mathfrak{D}^{\cdot}_{\Gamma}F$).

On voit ensuite que, pour tout X de CAT, on a

2.3.3.
$$\beta^{\Gamma}_{X} = \beta_{X} \cdot f_{X}$$

et on peut montrer que $\delta^{\Gamma}_{X} : \mathfrak{D}^{\cdot}_{\Gamma}X \to \mathfrak{D}^{\cdot}_{\Gamma}\mathfrak{D}^{\cdot}_{\Gamma}X$ s'obtient en considérant les trois produits fibrés

2.3.4.

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{D}^{\cdot}_{\Gamma}\mathfrak{D}^{\cdot}_{\Gamma}X \arrow[r, "f_{\mathfrak{D}^{\cdot}_{\Gamma}X}"] \arrow[d, "r_{\mathfrak{D}^{\cdot}_{\Gamma}X}"'] & \mathfrak{D}^{\cdot}\mathfrak{D}^{\cdot}_{\Gamma}X \arrow[r, "\mathfrak{D}^{\cdot} f_X"] \arrow[d, "\alpha_{\mathfrak{D}^{\cdot}_{\Gamma}X}"] & \mathfrak{D}^{\cdot}\mathfrak{D}^{\cdot}X \arrow[d, "\alpha_{\mathfrak{D}^{\cdot}X}"] \\
\mathfrak{D}_{\Gamma}\mathfrak{D}^{\cdot}_{\Gamma}X \arrow[r, "\gamma_{\mathfrak{D}^{\cdot}_{\Gamma}X}"] \arrow[d, "\mu_{\mathfrak{D}^{\cdot}_{\Gamma}X}"'] & \mathfrak{D}\mathfrak{D}^{\cdot}_{\Gamma}X \arrow[r, "\mathfrak{D}f_X"'] \arrow[d, "d_{\mathfrak{D}^{\cdot}_{\Gamma}X}"] & \mathfrak{D}\mathfrak{D}^{\cdot}X \\
M \arrow[r, "\Gamma"] & Cat &
\end{tikzcd}$$

comme l'unique morphisme rendant commutatifs les trois diagrammes

2.3.5.

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{D}^{\cdot}_{\Gamma}X \arrow[r, "\delta^{\Gamma}_X"] \arrow[d, "r_X"'] & \mathfrak{D}^{\cdot}_{\Gamma}\mathfrak{D}^{\cdot}_{\Gamma}X \arrow[d, "r_{\mathfrak{D}^{\cdot}_{\Gamma}X}"] \\
\mathfrak{D}_{\Gamma}X \arrow[d, "\mu_X"'] & \mathfrak{D}_{\Gamma}\mathfrak{D}^{\cdot}_{\Gamma}X \arrow[dl, "\mu_{\mathfrak{D}^{\cdot}_{\Gamma}X}"] \\
M &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathfrak{D}^{\cdot}_{\Gamma}X \arrow[r, "\delta^{\Gamma}_X"] \arrow[d, "r_X"'] & \mathfrak{D}^{\cdot}_{\Gamma}\mathfrak{D}^{\cdot}_{\Gamma}X \arrow[d, "r_{\mathfrak{D}^{\cdot}_{\Gamma}X}"] \\
\mathfrak{D}_{\Gamma}X \arrow[dr, "l_{\Gamma}\mu_X"] & \mathfrak{D}_{\Gamma}\mathfrak{D}^{\cdot}_{\Gamma}X \arrow[d, "\gamma_{\mathfrak{D}^{\cdot}_{\Gamma}X}"] \\
 & \mathfrak{D}\mathfrak{D}^{\cdot}_{\Gamma}X
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{D}^{\cdot}_{\Gamma}X \arrow[rr, "\delta^{\Gamma}_X"] \arrow[d, "f_X"'] & & \mathfrak{D}^{\cdot}_{\Gamma}\mathfrak{D}^{\cdot}_{\Gamma}X \arrow[d, "f_{\mathfrak{D}^{\cdot}_{\Gamma}X}"] \\
\mathfrak{D}^{\cdot}X \arrow[dr, "\delta_X"'] & & \mathfrak{D}^{\cdot}\mathfrak{D}^{\cdot}_{\Gamma}X \arrow[dl, "\mathfrak{D}^{\cdot}f_X"] \\
 & \mathfrak{D}^{\cdot}\mathfrak{D}^{\cdot}X &
\end{tikzcd}$$

Cette description de $\mathfrak{D}_{\Gamma}$ permet d'établir que :

2.3.6. *Une $\mathfrak{D}^{\cdot}_{\Gamma}$-coalgèbre en X s'identifie à un couple (G, θ), où:*

i) $G: X \to M$ *est un foncteur,*

ii) $\theta: X \to \mathfrak{D}^{\cdot} X$ *est une* $\mathfrak{D}^{\cdot}$*-coalgèbre,*

iii) $\Gamma . G = d_X . a_X . \theta$,

la coalgèbre T *associée à* (G, θ) *étant l'unique* T *tel que*

$$f_X . T = \theta \quad et \quad \mu_X . r_X . T = G.$$

Ensuite, définissant $B^{\Gamma} T$ comme étant le produit fibré

2.3.7.
$$\begin{tikzcd}
B^{\Gamma}T \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[d, "\Gamma"] \\
B\theta \arrow[r, "\pi_\theta"'] & Cat
\end{tikzcd}$$

on voit que dans le diagramme

2.3.8.
$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rrrrr, equal] \arrow[dr, "T"] \arrow[ddddd] & & & & & X \arrow[dl, "\theta"'] \arrow[ddddd] \\
& \mathfrak{D}^{\cdot}_{\Gamma}X \arrow[rrr, "f_X"] \arrow[dr] \arrow[ddd] & & & \mathfrak{D}^{\cdot}X \arrow[dl] \arrow[ddd] & \\
& & \dot{M} \arrow[r, "\tilde{\Gamma}"] \arrow[d, "k_\Gamma"'] & \dot{Cat} \arrow[d, "\phi"] & & \\
& & M \arrow[r, "\Gamma"] & Cat & & \\
& \mathfrak{D}_{\Gamma}X \arrow[ur] \arrow[rrr, "\gamma_X"'] & & & \mathfrak{D}X \arrow[ul] & \\
B^{\Gamma}T \arrow[ur] \arrow[rrrrr] & & & & & B\theta \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

tous les carrés commutatifs sont cartésiens.

Inversement, étant donné un produit fibré

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"'] & \dot{M} \arrow[d, "k_\Gamma"] \\
B \arrow[r, "\pi"'] & M
\end{tikzcd}$$

on a donc

$$X \approx K(\Gamma\pi), \quad \text{d'où} \quad l_{\Gamma\pi}: B \to \mathfrak{D}K\Gamma\pi \approx \mathfrak{D}X,$$

et T est déterminé par ses composantes q, $\pi p = k_\Gamma q$ et $l_{\Gamma\pi}$.

Si enfin on désigne par M' la sous-catégorie pleine de M ayant pour objets les objets X de M tels que $\Gamma(X) \neq \emptyset$, par $\Gamma': M' \to Cat$ la restriction de Γ à M' et par $k_{\Gamma'}: \dot{M}' \to M'$ la cofibration associée on voit que les $\mathfrak{D}_\Gamma^{\cdot}$-coalgèbres s'identifient aux $k_{\Gamma'}$-décompositions :

2.3.9. THEOREME. *Pour une cofibration surjective à petites fibres $\psi: L \to M$ dans CAT la théorie des ψ-décompositions est coalgébrique sur CAT, le foncteur $U_\psi: Dec_\psi CAT \to CAT$ étant équivalent au foncteur coalgébrique $K\Sigma_\Gamma: CAT/_M \to CAT$, où Γ est tel que $\psi \approx k_\Gamma$.*

2.3.10. REMARQUE. On peut voir de quelles théories de décomposition relèvent les exemples 1.20.1 à 1.20.5. Nous nous contenterons d'observer avant de passer aux décompositions «lax» que la «version discrète» (i.e. où toutes les données sont non plus des catégories mais des ensembles) de 2.2.13 s'obtient à partir de 2.3.9 pour $\Gamma = Ens \hookrightarrow Cat$ et s'énonce, comme on peut le trouver dans [2a] :

En associant à tout ensemble l'ensemble de ses parties pointées, on détermine sur *Ens* un cotriple, et une coalgèbre en E de ce cotriple est la donnée d'une relation d'équivalence sur E.

La «version groupe» a été directement formulée en 1.20.5.

Si l'on prend pour Γ le foncteur d'oubli $\mathfrak{D}^{\cdot}\text{-}coalg \to Cat$, $\mathfrak{D}^{\cdot}_{\Gamma}\text{-}coalg$ est la théorie des décompositions «du second ordre».

2.4. Lax-décompositions.

Soit $p: A \to M$ et $q: B \to M$ deux morphismes dans une catégorie C à limites projectives finies, et soit

$$\mathrm{G} = M \xleftarrow{\partial_0} G \xrightarrow{\partial_1} M$$

un graphe interne à C en M.

La limite projective dans C du diagramme

2.4.1. $$A \xrightarrow{p} M \xleftarrow{\partial_0} G \xrightarrow{\partial_1} M \xleftarrow{q} B$$

est désignée par $p \underset{\mathrm{G}}{\downarrow} q$ et appelée *objet comma de* p *et* q *au-dessus de* G.

En particulier si $q = Id_M$ on a un diagramme de limite

2.4.2.
$$\begin{tikzcd}
& & p \underset{\mathrm{G}}{\downarrow} Id_M \arrow[dll, "\check{p}^{\mathrm{G}}"'] \arrow[d] \arrow[drr, "\bar{p}^{\mathrm{G}}"] & & \\
A \arrow[dr] & & G \arrow[dl, "\partial_0"'] \arrow[dr, "\partial_1"] & & M \arrow[dl, equal] \\
& M & & M &
\end{tikzcd}$$

et on pose :

2.4.3. $$Dec_{\bar{p}^{\mathrm{G}}}\mathrm{C} = Dec_p^{\mathrm{G}}\mathrm{C}.$$

Un objet de $Dec_p^{\mathrm{G}}\mathrm{C}$ est alors appelé une *p-décomposition* G*-lax* d'un objet de C, et s'identifie aux données

2.4.3.
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "r"] \arrow[d, "q"'] & A \arrow[d, "p"] \arrow[dl, phantom, "t"] \\ B \arrow[r, "\pi"'] & M \end{tikzcd}$$

(où $t \in G^X$ vérifie $\partial_0 t = pr$ et $\partial_1 t = \pi q$),
représentant X comme isomorphe à l'objet comma $p \underset{G}{\downarrow} \pi$.

Pour que la théorie des p-décompositions G-lax soit coalgébrique, il faut et il suffit que la théorie des $\bar{p}^G$-décompositions soit coalgébrique.

On se place maintenant sur CAT et on va donner des conditions sur (p, G) pour que $Dec_p^G\, CAT$ soit coalgébrique. On commence par trois exemples :

2.4.4. Si $G = (M = M = M)$,
$$Dec_p^G\, CAT = Dec_p\, CAT,$$
et on applique les conditions 2.3.9 à p.

2.4.5. Si
$$G = M \xleftarrow{\partial_0} M^2 \xrightarrow{\partial_1} M,$$
on sait que $p \mapsto \bar{p}^G$ est le triple sur $CAT/_M$ induit par l'adjonction de Gray qui s'énonce

2.4.6.
$$\begin{tikzcd} M \arrow[d, bend right=60, "F\downarrow -"'] \arrow[d, bend left=60, "\pi"] \arrow[d, phantom, "\longrightarrow"] \\ CAT \end{tikzcd} \quad vs \quad \begin{tikzcd} A \arrow[rr] \arrow[dr, "F"'] & \arrow[d, phantom, "="] & K\pi \arrow[dl, "k_\pi"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

c'est-à-dire, compte tenu de 1.9,

2.4.7.
$$\begin{tikzcd} M \arrow[d, bend right=60, "F\downarrow -"'] \arrow[d, bend left=60, "\pi"] \arrow[d, phantom, "\longrightarrow"] \\ CAT \end{tikzcd} \quad vs \quad \begin{tikzcd} A \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "1^{\wedge}"'] & \arrow[d, phantom, "\dashrightarrow"] & M \arrow[dl, "\pi"] \\ & CAT & \end{tikzcd}$$

Nous savons aussi que les algèbres de ce triple sont les cofibrations de base M. Puisque $\bar{p}^G$ est dans ce cas $k_{p\downarrow -}$, on voit que $Dec_p^{M^2}\, CAT$ est coalgébrique dès que A est dans *Cat*.

2.4.8. Si D est une 2-catégorie, on désigne par $Q(\mathrm{D})$ la catégorie (en réalité double) dont les objets sont les 1-morphismes de D et où un morphisme de a vers b est un triplet (f, g, λ) :

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "f"] \arrow[d, "a"'] \arrow[dr, phantom, "\lambda"] & \cdot \arrow[d, "b"] \\ \cdot \arrow[r, "g"'] & \cdot \end{tikzcd}$$

La composition dans $Q(\mathrm{D})$ s'effectue suivant le dessin :

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "f"] \arrow[d, "a"'] \arrow[dr, phantom, "\lambda"] & \cdot \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "b"] \arrow[dr, phantom, "\lambda'"] & \cdot \arrow[d, "c"] \\ \cdot \arrow[r, "g"'] & \cdot \arrow[r, "g'"'] & \cdot \end{tikzcd} \quad = \quad \begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "f'f"] \arrow[d, "a"'] \arrow[dr, phantom, "g'\lambda \circ \lambda'"] & \cdot \arrow[d, "c"] \\ \cdot \arrow[r, "g'g"'] & \cdot \end{tikzcd}$$

On définit $\partial_0, \partial_1 : Q(\mathrm{D}) \to \mathrm{D}$ par

$$\partial_0(f, g, \lambda) = f \qquad \text{et} \qquad \partial_1(f, g, \lambda) = g.$$

Si D est la 2-catégorie CAT ou Cat, on note $Q(\mathrm{D})$ par $QUINT$ ou *quint*.

2.4.9. Si $p = 1^{\wedge} : 1 \to Cat$ et si

$$\mathrm{G} = Cat \xleftarrow{\partial_0} quint \xrightarrow{\partial_1} Cat,$$

on obtient pour $\bar{p}^{\mathrm{G}}$ le foncteur $\phi : \dot{Cat} \to Cat$ et la coalgébricité examinée est donc celle de $K : CAT/_{Cat} \to CAT$.

En réalité les deux exemples 2.4.5 et 2.4.9 sont deux cas particuliers de la situation ci-après.

2.4.10. DEFINITION. Soit k_π et k_σ deux cofibrations de base X. On appelle *morphisme cartésien de* k_π *vers* k_σ tout foncteur $Q : K\pi \to K\pi'$ de la forme $K\langle Id_A, f\rangle$ (voir 1.11), où f est naturelle. Dans [9] un tel foncteur est appelé plat.

D. Bourn a remarqué [2] que (avec nos notations) $\bar{p}^{\mathrm{G}}$ est une cofibration pour tout p si $\partial_1 : G \to M$ est une cofibration et ∂_0 est «transverse» à ∂_1, c'est-à-dire si $[\partial_1, \partial_0] : G \to M \times M$ est un morphisme cartésien (2.4.10) de ∂_1 vers $Proj_1 : M \times M \to M$. Compte tenu de 1.11 et 2.4.10, ceci revient à dire que l'on a un foncteur $R_0 : M \to CAT$ et une transformation naturelle $r: R_0 \to M^\wedge$ tels que $\partial_1 = k_{R_0}$ et que ∂_0 soit défini par

$$\partial_0(z, f, u) = r_Y(z),$$

où Y est le but de f. Alors (R_0, r) détermine un foncteur $R: M \to CAT/_M$ et, en composant R avec l'injection $CAT/_M \overset{i}{\hookrightarrow} CAT//M$, on retrouve $\partial_1 = k_{d_M} . i . R$ et ∂_0 grâce à la bijection 1.18. Le graphe G est alors désigné par $[R]$.

2.4.11. DEFINITION. On appelle *graphe cartésien dans* CAT tout graphe G de la forme $[R]$ associé à un foncteur arbitraire $R: M \to CAT/_M$.

2.4.12. Si l'on prend pour R la restriction D' de D (1.19) à la sous-catégorie Cat de CAT, le graphe cartésien associé est (voir 2.4.9):

$$Cat \xleftarrow{\partial_0} quint \xrightarrow{\partial_1} Cat.$$

2.4.13. Si $M \in |CAT|$ et si R est le foncteur associant à tout $x \in |M|$ la catégorie (au-dessus de M) $M/_x \to M$, le graphe cartésien correspondant est celui décrit en 2.4.5.

2.4.14. THEOREME. *Soit dans* CAT *un foncteur* $p: A \to M$ *et* G *un graphe sur* M. *Pour que la théorie des p-décompositions G-lax soit coalgébrique sur* CAT, *il suffit que* G *soit le graphe cartésien* $[(R_0, r)]$ *associé à un foncteur* $(R_0, r): M \to CAT/_M$ *et que pour tout* $x \in |M|$ *l'ensemble*

$$\{(f, z) \mid f \in A,\ z \in R_0(x),\ r_x(z) = p(f)\}$$

soit petit non vide.

2.5. Variante pour l'étude des $\mathfrak{D}^\cdot$-coalgèbres : Notion de cofactorisation.

Reprenons une $\mathfrak{D}^\cdot$-coalgèbre en X, soit $\theta: X \to \mathfrak{D}^\cdot X$, avec les notations de 2.2.7. On introduit alors le composé :

$$\sigma: X \xrightarrow{\theta} \mathfrak{D}^\cdot X \xrightarrow{a_X} \mathfrak{D} X \xrightarrow{d_X} Cat$$

et les foncteurs

2.5.1. $\qquad V: X \longrightarrow K\sigma \quad$ et $\quad S: K\sigma \longrightarrow X$

définis, pour $m: x \to y \in X$, par

$$V(m) = (v_m, m, a_x), \quad S(z, f, u) = p_y(z).(h_m)_u .$$

On peut vérifier que θ est une $\mathfrak{D}^{\cdot}$-coalgèbre ssi on a :

1° $S.V = Id_X$,

2° $\sigma(S(z,f,u)) = \sigma(f)$,

3° $V(S(z,f,u)) = (z, S(z,f,u), u)$,

4° $S(z', S(z,f,u), v) = S(z', f, v)$.

Si l'on pose $\sigma_1 = \sigma . k_\sigma$ on obtient un morphisme

$$\bar{\sigma} = K\langle k_\sigma, Id_{k_{\sigma_1}} \rangle : K\sigma_1 \to K\sigma ,$$

et grâce aux conditions 1 à 4, on peut montrer :

2.5.2. Le diagramme

$$\begin{tikzcd}
K\sigma_1 \arrow[r, "\bar{\sigma}"] \arrow[dr, "(\sigma_1)_1"'] & K\sigma \arrow[r, bend left, "S"] \arrow[r, bend right, "k_\sigma"'] \arrow[d, "\sigma_1"] & X \arrow[l, "V"'] \arrow[dl, "\sigma"] \\
& Cat &
\end{tikzcd}$$

est une catégorie interne à $CAT/_{Cat}$ ssi θ est une $\mathfrak{D}^{\cdot}$-coalgèbre.

On peut encore interpréter 2.5.2 en utilisant la comonade $- \times \phi$ dans $CAT/_{Cat}$ et la définition ci-après.

2.5.3. Soit C une catégorie, $\mathrm{T} = (T, u, m)$ une monade sur C et $\hat{\mathrm{T}}$ la comonade sur C^{T} associée à l'adjonction $F^{\mathrm{T}} \dashv U^{\mathrm{T}}$, et soit $Fact\,\mathrm{T} = (C^{\mathrm{T}})_{\hat{\mathrm{T}}}$ (voir le début de la construction d'Applegate - Tierney de la tour). Un objet de $Fact\,\mathrm{T}$ sera appelé une T-*factorisation* et identifié à un triplet

(X, K, D), où (X, K) est une T-algèbre, où D vérifie :

$K.D = Id_X, \quad D.K = m_X . T(D) \quad$ et $\quad T(D).D = T(u_X).D$.

Si C est à noyaux, le foncteur de comparaison $V: C \to (C^{\mathrm{T}})_{\hat{\mathrm{T}}}$ est adjoint à gauche au foncteur associant à (X, K, D) le noyau $ker(u_X, D)$, et le triple T_2 sur C associé à cette adjonction est le premier pas dans la construction de l'approximation idempotente de T.

Si G $= (G, \epsilon, \mu)$ est une comonade sur A, une G^{op}-factorisation sur un objet X de A^{op} est appelée une G-cofactorisation, notée (V, S), avec $V: X \to GX$, $S: GX \to X$, $X \epsilon |A|$ (comme en 2.5.1).

2.5.4. THEOREME. *Si* G $= (G, \epsilon, \mu)$ *est un cotriple sur* A *tel que* ϵ *soit cartésienne, alors un couple* (V, S), *où* $V: X \to GX$ *et* $S: GX \to X$, *est une* G-*cofactorisation de* X *ssi le diagramme*

$$\begin{tikzcd} G^2X \arrow[r, "G(\epsilon_X)"] & GX \arrow[r, bend left, "S"] \arrow[r, bend right, "\epsilon_X"'] & X \arrow[l, "V"'] \end{tikzcd}$$

est une catégorie interne à A *pour les produits fibrés résultant du caractère cartésien de* G. *De plus les morphismes de cofactorisation coïncident avec les foncteurs internes entre les catégories internes associées.*

En particulier si $A = CAT/_{Cat}$ et G $= -\times\phi$, une G-coalgèbre en $\sigma: X \to Cat$ est la donnée d'un $T: X \to \dot{Cat}$ tel que $\phi . T = \sigma$ (ou encore d'une section $S: X \to K\sigma$ de k_σ); d'autre part un foncteur $F: K\sigma \to Y$ est d'après l'adjonction $K \dashv D$ de 1.19, déterminé par un foncteur

$$G: X \to \mathfrak{D}Y \quad \text{tel que} \quad d_Y . G = \sigma .$$

Et puisque l'on a le produit fibré 2.2.2, on voit que la donnée d'un (V, F) avec V coalgébrique équivaut à la donnée d'un foncteur $X \to \mathfrak{D}^{\cdot} X$. Alors, 2.5.2 et 2.5.4 conduisent à (compte tenu de 2.1):

2.5.5. Si X est dans CAT la donnée d'une ϕ-décomposition de X équivaut à la donnée d'un foncteur $\sigma: X \to Cat$ et d'une $-\times\phi$-cofactorisation de σ.

On constate que la théorie des m-décompositions (2.1) est contenue dans la théorie des $-\times m$-cofactorisations dans $\mathbf{C}/_M$, de sorte que la Définition 2.5.3 englobe les différentes théories de décomposition. La description des cofactorisations de 2.5.3, et 2.5.5, conduisent au complément suivant de 2.2.13 :

2.5.6. THEOREME. *La théorie des catégories munies d'une* ϕ-*décomposition est algébrique sur* $CAT/_{\dot{Cat}}$.

3. CONSTRUCTION DE $K \dashv D$ DANS $Fib(CAT)$.

Si l'on examine la construction de $K \dashv D$ du n° 1, on observe qu'elle est basée sur la considération de CAT comme objet *et* comme sous-catégorie d'une catégorie suffisamment vaste, à savoir (suivant entre autres les idées de [1, 3 ou 17]) de la catégorie $Fib(CAT)$ des fibrations sur CAT. On observe également qu'un ingrédient primordial est la structure sur CAT de catégorie interne à $Fib(CAT)$ (désignée en 2.4.8 sous le nom de *quint*) déterminant sur tout X de CAT la notion de transformation quasi-naturelle entre foncteurs vers CAT. L'adjonction $K \dashv D$ est alors une question de *stabilité et de densité*, comme ceci est expliqué dans le contexte général ci-après. Une application aux 3-catégories est donnée, ainsi qu'une application aux cosmos.

3.1. Considérons une catégorie C et une sous-catégorie A de C. Soit C un objet de C muni d'une structure de *catégorie* A*-interne*, c'est-à-dire d'un foncteur $\mathbf{C}: \mathrm{A}^{op} \to \mathrm{Cat}$ tel que, pour tout $A \in |\mathrm{A}|$, on ait

$$\mathrm{A}(A, C) = |\mathbf{C}[A]|,$$

et ceci naturellement en A. Cette structure est fixée dans ce qui suit.

Si $A, B \in |\mathrm{A}|$ et si $p: A \to C$ et $q: B \to C$ sont des morphismes, on peut définir $p \downarrow_{\mathbf{C}} q$ comme en 2.4.1 et parler d'extensions de Kan au-dessus de $\mathbf{C}$.

3.2. DEFINITION. Soit $j: A \to C$ un morphisme de C où $A \in |\mathrm{A}|$. On dira que A *est* j*-stable* si pour tout $B \in |\mathrm{A}|$ et tout $f: B \to C$ l'objet $j \downarrow_{\mathbf{C}} f$ existe et appartient à A.

3.3. DEFINITION. On dira que j *est* A*-dense* si, pour tout $B \in |\mathrm{A}|$ et tout $f: B \to C$, l'objet comma $j \downarrow_{\mathbf{C}} f$ existe et est tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} j \downarrow_{\mathbf{C}} f \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, "d_0"'] & B \arrow[d, "f"] \\ A \arrow[r, "j"'] \arrow[ur, phantom, "\phi"] & C \end{tikzcd}$$

détermine le diagramme

$$\begin{tikzcd}
j \downarrow_{\mathbf{C}} f \arrow[rr, "d_1"] \arrow[dr, "j\, d_0"'] & \arrow[d, phantom, "\phi"] & B \arrow[dl, "f"] \\
& C &
\end{tikzcd}$$

comme une extension de Kan au-dessus de $\mathbf{C}$.

REMARQUE. Bien qu'elle ne soit pas explicite dans la notation, la structure $\mathbf{C}$ de catégorie interne à A sur C intervient dans la définition de la densité ci-dessus, comme on peut le voir dans les exemples ci-après.

3.4. THEOREME. *Soit* A *une sous-catégorie pleine de* C *et* C *un objet de* C *muni d'une structure* $\mathbf{C}$ *de catégorie* A*-interne à* C *; soit* $j : A \to C$ *et* $\gamma : M \to C$ *deux morphismes de* C *où* A *et* M *appartiennent à* A*. On suppose que :*

3.4.1. A *est* j*-stable et est* γ*-stable,*

3.4.2. j *est* A*-dense.*

Alors, en désignant pour tout $x, y \in |\mathsf{A}|$ *par* $Span_{\mathsf{A}}(x,y)$ *la sous-catégorie pleine de* $Span(x,y)$ *dont les sommets se trouvent dans* A*, on obtient pour tout* x *de* A *une adjonction partielle :*

$$\begin{tikzcd}
Span_{\mathsf{A}}(x, M) \arrow[rr, "K"] & & Span_{\mathsf{A}}(x, A) \\
& \mathbf{C}[x] \arrow[ul, "\delta_\gamma"] \arrow[ur, "\delta_j"'] &
\end{tikzcd}$$

$$[K(-), \delta_j(\cdot)] \approx [-, \delta_\gamma(\cdot)],$$

où les foncteurs K, δ_γ *et* δ_j *sont définis par*

$$\delta_j(u) = j \downarrow_{\mathbf{C}} u, \quad \delta_\gamma(u) = \gamma \downarrow_{\mathbf{C}} u,$$

$$K(x \xleftarrow{p} z \xrightarrow{q} M) = A \xleftarrow{\bar{q}} \bar{z} \xrightarrow{\bar{p}} x,$$

$\bar{z}$, $\bar{p}$ *et* $\bar{q}$ *s'insérant dans le diagramme*

$$\begin{tikzcd}
& x \\
\bar{z} \arrow[ur, "\bar{p}"] \arrow[r] \arrow[d, "\bar{q}"'] \arrow[ur, phantom, "=" near end, shift right=2] & z \arrow[u, "p"'] \arrow[d, "\gamma q"] \\
A \arrow[r, "j"'] & C
\end{tikzcd}$$

La preuve se schématise par:

$$
\begin{tikzcd}
z \arrow[dr, "="'] \arrow[drr, "p"] \arrow[ddr, "q"'] & & \\
& \delta_\gamma u \arrow[r] \arrow[d] & x \arrow[d, "u"] \arrow[dl, phantom, "\swarrow"] \\
& M \arrow[r, "\gamma"'] & C
\end{tikzcd}
\quad vs \quad
\begin{tikzcd}
z \arrow[drr] \arrow[ddr] & & \\
& & x \arrow[d, "u"] \arrow[dl, phantom, "\swarrow"] \\
& M \arrow[r, "\gamma"'] & C
\end{tikzcd}
$$

$$
vs \quad
\begin{tikzcd}
\bar{z} \arrow[r] \arrow[d, "\bar{q}"'] & z \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\gamma q"] \arrow[dl, phantom, "\swarrow"] & x \arrow[dl, "u"] \\
A \arrow[r, "j"'] & C &
\end{tikzcd}
\quad vs \quad
\begin{tikzcd}
\bar{z} \arrow[r, "\bar{p}"] \arrow[d, "\bar{q}"'] & x \arrow[d, "u"] \arrow[dl, phantom, "\swarrow"] \\
A \arrow[r, "j"'] & C
\end{tikzcd}
$$

$$
vs \quad
\begin{tikzcd}
\bar{z} \arrow[dr, "="'] \arrow[drr] \arrow[ddr, "\bar{q}"'] & & \\
& \delta_j u \arrow[r] \arrow[d] & x \arrow[d, "u"] \arrow[dl, phantom, "\swarrow"] \\
& A \arrow[r, "j"'] & C
\end{tikzcd}
$$

De 3.4 on déduit, avec $x = 1$, $y = id_C$, que:

3.5. THEOREME *(Forme abstraite de l'adjonction $K \dashv D$). Soit* A *une sous-catégorie pleine de* C *ayant un objet final 1 et soit $j : A \to C$ un morphisme de* C, *où $A \in |$A$|$ et où C est muni d'une structure de catégorie* A*-interne* **C**. *On suppose de plus que:*

1° A est j-stable et est Id_C-stable,

2° j est A-dense,

3° Tout objet x de A est de la forme $j \downarrow_{\mathbf{C}} y$.

$$
\begin{tikzcd}
x \arrow[r] \arrow[d] & 1 \arrow[d, "y"] \arrow[dl, phantom, "\swarrow"] \\
A \arrow[r, "j"'] & C
\end{tikzcd}
$$

Alors le foncteur K: A$\downarrow C \to$ A$\downarrow A$ *défini par*

$$K(z \xrightarrow{p} C) = \bar{z} \xrightarrow{\bar{p}} A$$

(avec $\bar{p}$ s'insérant dans le diagramme d'objet comma

$$
\begin{tikzcd}
\bar{z} \arrow[r] \arrow[d, "\bar{p}"'] & z \arrow[d, "p"] \arrow[dl, phantom, "\swarrow"] \\
A \arrow[r, "j"'] & C
\end{tikzcd}
$$

admet un adjoint à droite.

NOTA. Le foncteur K sera noté $j\downarrow_{\mathbf{C}} -$ et son adjoint à droite $D_{j,\mathbf{C}}(-)$:

$$(\mathrm{A}\downarrow C \xrightarrow{j\downarrow_{\mathbf{C}} -} \mathrm{A}\downarrow A) \dashv (\mathrm{A}\downarrow A \xrightarrow{D_{j,\mathbf{C}}(-)} \mathrm{A}\downarrow C).$$

3.6. **Exemples.**

3.6.1. Si

$$\mathrm{C} = CAT, \quad \mathrm{A} = CAT, \quad j = 1 \xrightarrow{1^{\wedge}} Ens$$

et si Ens est considérée comme catégorie interne à CAT avecla structure naturelle

$$Ens \xleftarrow{\partial_0} Ens^{\mathbf{2}} \longrightarrow Ens,$$

alors j est A-dense, et c'est essentiellement le lemme de Yoneda ou *1-lemme de Yoneda.*

3.6.2. Soit E un topos élémentaire et Ω l'objet classant les sous-objets, muni de sa structure d'ordre interne à E. Soit $s: A \to \Omega^X$ et $f: A \to B$ des morphismes de E ; en transposant, dans l'adjonction $(-)^X \dashv (\,)\times X$, le diagramme

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "s"'] & B \\ & \Omega^X \end{tikzcd}$$

, on obtient

$$\begin{tikzcd} X\times A \arrow[rr, "1_X\times f"] \arrow[dr, "\tilde{s}"'] & & X\times B \\ & \Omega & \end{tikzcd}$$

et on a $\pi_{1_X\times f}(\tilde{s}\,) = \tilde{t}$ pour un certain $t: B \to \Omega^X$. Il s'ensuit un diagramme d'extension de Kan

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "s"'] & & B \arrow[dl, "t"] \\ & \Omega^X & \end{tikzcd}$$

L'existence des π_f dans un topos est donc équivalente à celle des extensions de Kan au-dessus des objets Ω^X.

Ceci dit, si l'on prend

$$\mathrm{C} = \mathrm{A} = \mathrm{E} \quad \text{et} \quad j = X \xrightarrow{\{-\}_X} \Omega^X,$$

on peut vérifier que j est dense (pour la structure ordonnée sur Ω^X déduite de celle de Ω).

3.6.3. Soit

$$\mathrm{C} = CAT, \quad \mathrm{A} = Cat, \quad j = 1 \xrightarrow{1^{\wedge}} Cat$$

et équipons Cat de sa structure quasi-naturelle

$$Cat \xleftarrow{\partial_0} quint \xrightarrow{\partial_1} Cat$$

(voir 2.4.8). Alors les Propositions 1.3 et 1.16 du n° 1 permettent précisément de dire que j est A-dense, et de là grâce à 3.5 on retrouve 1.19. La densité de j peut être appelée, vu 3.6.1, le *lemme de Yoneda quasi-naturel*, ou *2-lemme de Yoneda.*

3.6.4. Soit, avec les notations de 2.4.8, D une 2-catégorie dont la catégorie des 1-morphismes est notée D. Soit Cat une catégorie de catégories associée à un univers $\hat{\mathfrak{U}}$ tel que $\mathfrak{U} \in \hat{\mathfrak{U}}$ et $\mathfrak{U} \subset \hat{\mathfrak{U}}$, en désignant par $\mathfrak{U}$ un univers auquel appartient D. On note $Fib\,D$ la catégorie des pseudo-foncteurs de la duale de D vers Cat et on regarde D comme plongée dans $Fib\,D$ en associant à tout $X \in |D|$ le foncteur $D(X,-)$. Alors la structure de 2-catégorie de D permet de considérer la catégorie

$$D \xleftarrow{\partial_0} Q(\mathrm{D}) \xrightarrow{\partial_1} D$$

qui induit, dans $Fib\,D$, une structure de catégorie interne sur l'objet $\overleftarrow{D}$ associant à tout X la catégorie $D{\downarrow}X$. L'étude de l'éventuelle D-densité d'un morphisme $t: 1 \to \overleftarrow{D}$ pour la structure indiquée sur D conduit à la théorie des *cosmos* et des *ditopos*. En particulier, si $p: \dot{\Omega} \to \Omega \in D$, le foncteur $\tilde{p}: D{\downarrow}\Omega \to D^2$ est défini par produit fibré le long de p et si $u: 1 \to \Omega \in D$, on définit $\bar{u}: D \to D{\downarrow}\Omega$ par composition avec u. On peut alors dans $Fib\,D$ prendre pour t le composé $\tilde{p} \cdot \bar{u}: 1 \to \overleftarrow{D}$; on retombe ainsi dans les préoccupations et résultats de Ross Street. Plus particulièrement, si l'on prend :

$$D = CAT, \quad p = \phi: \dot{Cat} \to Cat \quad \text{et} \quad u: 1 \xrightarrow{1^{\wedge}} Cat,$$

on retombe sur 3.6.3.

3.6.5. *Le cas des 2-catégories et transformations 3-quasi-naturelles.*

Soit $\mathfrak{U}$, $\hat{\mathfrak{U}}$ et $\hat{\hat{\mathfrak{U}}}$ trois univers et soit *2-cat*, *2-cât* et *2-cât̂* les catégories pleines de 2-foncteurs ayant pour objets les 2-catégories X telles que

$$|X| \in \mathfrak{U} \quad (\text{resp. } \hat{\mathfrak{U}}, \text{ resp. } \hat{\hat{\mathfrak{U}}})$$

et que, pour tout $x, y \in |X|$, on ait

$$X(x,y) \in Cat \quad (\text{resp. } \hat{Cat}, \text{ resp. } \hat{\hat{Cat}})$$

avec les notations de [9], n° 1. On désigne par $2\text{-}CAT$ (resp. par $2\text{-}\hat{CAT}$) la sous-catégorie pleine de $2\text{-}\hat{cat}$ (resp. de $2\text{-}\hat{\hat{cat}}$) formée des 2-catégories X telles que, pour tout $x, y \in |X|$ on ait $X(x,y) \in Cat$ (resp. Cat). On peut alors introduire (voir aussi [2]) la notion de transformation 3-quasi-naturelle :

3.6.5.1. Soit X une 2-catégorie, M une 3-catégorie et $S, T : X \to M$ deux 2-foncteurs. Une transformation 3-quasi-naturelle de S vers T consiste en :

1° Pour tout $x \in |X|$, un 1-morphisme $a_x : Sx \to Tx$,

2° Pour tout 1-morphisme $f : x \to y \in X$, un 2-morphisme a_f :

$$\begin{tikzcd}
Sx \arrow[r, "a_x"] \arrow[d, "Sf"'] & Tx \arrow[d, "Tf"] \arrow[dl, phantom, "\swarrow a_f"] \\
Sy \arrow[r, "a_y"'] & Ty
\end{tikzcd}$$

3° Pour tout 2-morphisme $\theta : f \Rightarrow g : x \to y$, un trois-morphisme a_θ :

$$\begin{tikzcd}
Tf \circ a_x \arrow[r, "a_f"] \arrow[d, "T\theta\, a_x"'] & a_y \circ Sf \arrow[d, "a_y\, S\theta"] \arrow[dl, phantom, "\swarrow a_\theta"] \\
Tg \circ a_x \arrow[r, "a_g"] & a_y \circ Sg
\end{tikzcd}$$

et ceci de manière que l'on ait :

Q1. $a_{id_1 f} = id_{1\, a_f}$,

Q2. $a_{(\tilde\theta \circ \theta)} = a_{\tilde\theta}\, T(\theta) a_x \circ a_y S(\tilde\theta) a_\theta$,

Q3. $a_{id_2 x} = id_{2\, a_x}$,

Q4. $a_{(\bar\theta * \theta)} = (a_{\bar g}\, S g\, T\bar g\, a_\theta\, T\bar\theta\, T f a_x) \circ (a_z\, S\bar g\, S\theta\, a_{\bar\theta}\, S f\, T\bar f a_f)$

(avec des notations évidentes).

En particulier de Q1 à Q4 il résulte que

$$a_{id_I x} = id_{I a_x} \quad \text{et} \quad a_{(\bar{f} f)} = a_{\bar{f}} S f \circ T \bar{f} a_f .$$

3.6.5.2. Soit $a : S \to T$ et $\beta : T \to V$ deux transformations 3-quasi-naturelles avec $S, T, V : X \to M$. On définit alors la transformation 3-quasi-naturelle composée $\beta a : S \to V$ en posant

$$(\beta a)_x = \beta_x \circ a_x , \quad (\beta a)_f = \beta_y a_f \circ \beta_f a_x ,$$

$$(\beta a)_\theta = \beta_y a_g \beta_\theta a_x \circ \beta_y a_\theta \beta_f a_x .$$

On vérifie que cette composition est associative et unitaire, si bien que l'ensemble des 2-foncteurs $X \to M$ est l'ensemble des objets d'une catégorie ayant pour morphismes les transformations 3-quasi-naturelles. De plus tout 2-foncteur $F : X \to Y$ induit un foncteur

$$[\![F, M]\!] : [\![Y, M]\!] \to [\![X, M]\!]$$

entre les catégories de transformations 3-quasi-naturelles ainsi définies, et l'on obtient un foncteur $[\![-, M]\!] : (2\text{-}\hat{CAT})^{op} \to$ Cat déterminant sur M une structure de catégorie interne à la catégorie $2\text{-}\hat{CAT}$.

3.6.5.3. Si X et Y sont des 2-catégories, M une 3-catégorie et

$$X \xrightarrow{S} M \xleftarrow{T} Y$$

des 2-foncteurs, l'objet comma $S \underset{[\![-, M]\!]}{\downarrow} T$ dans $2\text{-}\hat{CAT}$ existe et est la 3-comma catégorie décrite par Gray dans [7] page 32.

3.6.5.4. En particulier prenons $M = 2\text{-}CAT$, la 3-catégorie des 2-catégories, 2-foncteurs, transformations 2-naturelles et modifications. On obtient ainsi les résultats suivants :

3.6.5.4.1. Pour tout $J : X \to 2\text{-}CAT \in 2\text{-}\hat{CAT}$ tel que $X \in |2\text{-}CAT|$ et que J se factorise à travers $2\text{-}Cat \hookrightarrow 2\text{-}CAT$, la catégorie $2\text{-}CAT$ est J-stable.

3.6.5.4.2. Si $2\text{-}CAT$ est équipé de la structure 3-quasi-naturelle de 3.6.5.3 et 4, dans C = $2\text{-}\hat{CAT}$, avec A = $2\text{-}CAT$, le morphisme $j : 1 \xrightarrow{1^\wedge} 2\text{-}CAT$ est A-dense. Ce résultat peut être appelé le *3-Lemme de Yoneda.*

4. COMPOSITION DES Γ-MACHINES, DES Γ-DIAGRAMMES.

Dans ce paragraphe on commence par montrer que 1.19 est en fait une 2-adjonction, et par préciser quelques points de la démonstration Prop. 2, page 7, de [9]. Ceci nous permet ensuite de démontrer que, si Γ est K-stable (Définition 4.2.2), la composition des Γ-machines est possible et représentable «à la Kleisli» par la composition des Γ-diagrammes (Définition 4.4.4). Le corollaire 4.5.5 sera utile pour le Théorème 7.10 de lax-cocomplétion. Voir aussi 7.12.

4.1. Soit A, C, X des objets de CAT, Π, Σ et F des foncteurs, et une transformation naturelle $f : \pi \to \sigma F$ situés comme sur le dessin ci-dessous ; on a alors une bijection naturelle

4.1.1.
$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "\Pi"'] & \arrow[d, phantom, "\curvearrowright"] & C \arrow[dl, "\Sigma"] \\ & CAT//X \arrow[d, "d_X"'] & \\ & CAT & \end{tikzcd} \quad = \quad \begin{tikzcd} A \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "\pi"'] & \arrow[d, phantom, "\overset{f}{\curvearrowright}"] & C \arrow[dl, "\sigma"] \\ & CAT & \end{tikzcd} \quad vs \quad \begin{tikzcd} K\sigma \arrow[rr, "K<F{,}f>"] \arrow[dr, "\overline{\Pi}"'] & \arrow[d, phantom, "\curvearrowright"] & K\sigma \arrow[dl, "\overline{\Sigma}"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

entre les transformations naturelles $\beta : \Pi \to \Sigma F$ vérifiant $d_X . \beta = f$, et les transformations naturelles $\overline{\beta} : \overline{\Pi} \to \overline{\Sigma} K<F, f>$ où $\overline{\Pi}$ et $\overline{\Sigma}$ sont les correspondants de Π et Σ dans l'adjonction $K \dashv D$ de 1.19 : si β est donné pour tout $a \in |A|$ par

$$\beta_a = \begin{tikzcd} \pi(a) \arrow[rr, "f_a"] \arrow[dr, "p_a"'] & \arrow[d, phantom, "\overset{b_a}{\curvearrowright}"] & \sigma(F(a)) \arrow[dl, "s_{F(a)}"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

on définit $\overline{\beta}$ par $\overline{\beta}_{(a,u)} = (b_a)_u$.

En particulier, on en déduit, en prenant

$$A = C, \quad F = Id_A \quad \text{et} \quad f = 1_\pi ,$$

que *l'adjonction* $K \dashv D$ *est une 2-adjonction* et que l'on a donc une bijection naturelle

4.1.2.
$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, bend right=60, "\Pi"'] \arrow[d, bend left=60, "\Sigma"] \arrow[d, phantom, "\longrightarrow"] \\ CAT//X \arrow[d, "d_X"] \\ CAT \end{tikzcd} \quad = \quad \begin{tikzcd} A \arrow[dd, "\pi"'] \\ \\ CAT \end{tikzcd} \qquad vs \qquad \begin{tikzcd} K\pi \arrow[dd, bend right=60, "\bar{\Pi}"'] \arrow[dd, bend left=60, "\bar{\Sigma}"] \arrow[dd, phantom, "\longrightarrow"] \\ \\ X \end{tikzcd}$$

Si l'on prend seulement $F = Id_A$, on obtient en rapprochant 4.1.1 et 1.11, et compte tenu de la Définition 2.4.10, une bijection naturelle

4.1.3.
$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, bend right=60, "\Pi"'] \arrow[d, bend left=60, "\Sigma"] \arrow[d, phantom, "\longrightarrow"] \\ CAT//X \end{tikzcd} \qquad vs \qquad \begin{tikzcd} & A \arrow[d, phantom, "="] & \\ K\pi \arrow[ur, "k_\pi"] \arrow[rr, "cart"] \arrow[dr, "\bar{\Pi}"'] & {} \arrow[d, phantom, "\frown"] & K\sigma \arrow[ul, "k_\sigma"'] \arrow[dl, "\bar{\Sigma}"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Cette bijection 4.1.1 permet de retrouver la Proposition 2 de [9] en définissant $K_X : \mathfrak{D}^2 X \to \mathfrak{D} X$ par $K_X(\beta) = \bar{\beta}$ et en énonçant 4.1.1 sous la forme

4.1.4. *Pour tout* X *de* CAT *le diagramme*

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{D}^2 X \arrow[r, "\mathfrak{D}(d_X)"] \arrow[d, "K_X"'] & \mathfrak{D}(Cat) \arrow[d, "K_1"] \\ \mathfrak{D} X \arrow[r, "d_X"] & Cat \end{tikzcd}$$

est un produit fibré.

En effet, on déduit de 4.1.4 que $K : \mathfrak{D}^2 \to \mathfrak{D}$ est une transformation naturelle cartésienne, on vérifie que $\mathbf{U} : Id_{CAT} \to \mathfrak{D}$ définie en 1.6 est une transformation naturelle cartésienne, on remarque que $\mathfrak{D}$ est un 2-foncteur préservant les produits fibrés, et on conclut que :

4.1.5. Le triplet $(\mathfrak{D}, \mathbf{U}, K)$ est sur CAT une 2-monade à «isomorphismes près» cartésienne.

On note que, vu les remarques ci-dessus, pour prouver 4.1.5 il suffit presque (à des isomorphismes près) de vérifier les axiomes de triple au seul point $X = 1$.

Le second théorème de [9] suivra alors de 4.1.5 et 4.1.3.

4.2. Soit $\Gamma : M \to Cat$ tel que l'on ait un carré commutatif

4.2.1.
$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{D}_\Gamma M \arrow[r, "\gamma_M"] \arrow[d, "Q"'] & \mathfrak{D} M \arrow[r, "\mathfrak{D}\Gamma"] \arrow[d, phantom, "(1)"] & \mathfrak{D}(Cat) \arrow[d, "K_1"] \\
M \arrow[rr, "\Gamma"'] & & Cat
\end{tikzcd}$$

4.2.2. DEFINITION. Le foncteur Γ est dit *K-stable* s'il existe un produit fibré (1) de la forme 4.2.1.

Par exemple, si Γ est l'insertion de *Ens* , de *Gr* ou de *Ord* dans *Cat* , Γ est K-stable.

Considérons donc Γ et Q tels que (1) commute. En considérant le diagramme

4.2.3.
$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{D}_\Gamma X \arrow[rrrr, "\gamma_X"] \arrow[dddd] & & \arrow[d, phantom, "(4)"] & & \mathfrak{D} X \arrow[dddd, "d_X"] \\
& & {} & & \\
\arrow[r, phantom, "(3)"] & \mathfrak{D}_\Gamma \mathfrak{D}_\Gamma X \arrow[uul, "Q_X"'] \arrow[r, "\mathfrak{D}_\Gamma \gamma_X"] \arrow[d, "\mathfrak{D}_\Gamma \mu_X"] & \mathfrak{D}_\Gamma \mathfrak{D} X \arrow[r, "\gamma_{\mathfrak{D} X}"] \arrow[d, "\mathfrak{D}_\Gamma d_X"] & \mathfrak{D}\mathfrak{D} X \arrow[uur, "K_X"] \arrow[d, "\mathfrak{D} d_X"] \arrow[r, phantom, "(2)"] & {} \\
& \mathfrak{D}_\Gamma M \arrow[r, "\mathfrak{D}_\Gamma \Gamma"] \arrow[dl, "Q"] & \mathfrak{D}_\Gamma Cat \arrow[r, "\gamma_{Cat}"] \arrow[d, phantom, "(1)"] & \mathfrak{D} Cat \arrow[dr, "K_1"] & \\
M \arrow[rrrr] & & {} & & Cat
\end{tikzcd}$$

on voit, puisque $\mathfrak{D}_\Gamma$ préserve les produits fibrés, que $\gamma : \mathfrak{D}_\Gamma \to \mathfrak{D}$ est cartésienne et que (2) est cartésien (4.1.4), qu'il existe un unique Q_X , de $\mathfrak{D}_\Gamma \mathfrak{D}_\Gamma X$ vers $\mathfrak{D}_\Gamma X$ tel que

$$\mu_X \cdot Q_X = Q \cdot \mathfrak{D}_\Gamma \mu_X \quad \text{et} \quad \gamma_X \cdot Q_X = K_X \cdot \gamma_{\mathfrak{D} X} \cdot \mathfrak{D}_\Gamma \gamma_X \, .$$

Le carré (3) est alors cartésien. De plus, si (1) est cartésien, il en est de même de (4).

4.3. Soit X et Y deux éléments de CAT . On appelle *Γ-machine d'entrée X et de sortie Y* la donnée d'un couple $\mathrm{M} = (\pi, S)$, où

$$\pi : X \to M \quad \text{et} \quad S : K \Gamma \pi \to Y$$

sont deux foncteurs. Un foncteur isomorphe à un k_{Γ_π} est appelé une Γ-*cofibration.*

La donnée d'un Q faisant commuter (1), 4.2.1, permet de définir le composé de

$$\mathrm{M} : X \xrightarrow{(\pi, S)} Y \quad \text{et} \quad \mathrm{N} : Y \xrightarrow{(\pi', S')} Z$$

comme étant la Γ-machine $\mathrm{N} \underset{Q}{\bullet} \mathrm{M} : X \xrightarrow{(\pi'', S'')} Z$ définie par

4.3.1. $(\pi'', S'') = (\pi', S') \bullet (\pi, S) = (Q . \mathfrak{D}_\Gamma(\pi' . S) . l^\Gamma_\pi ,\ S' . k^*_{\Gamma_{\pi'}}(S)).$

On a $k_{\Gamma_{\pi''}} = k_{\Gamma_\pi} . S^* k_{\Gamma_{\pi'}}$ et

4.3.2.

$$\begin{tikzcd}
& & T \arrow[dl, "S^*k_{\Gamma_{\pi'}}"'] \arrow[dr, "k^*_{\Gamma_{\pi'}}(S)"] & & \\
& K\Gamma\pi \arrow[dl, "k_{\Gamma_\pi}"'] \arrow[dr, "S"] \arrow[rr, phantom, "\text{produit fibré}"] & & K\Gamma\pi' \arrow[dl, "k_{\Gamma_{\pi'}}"'] \arrow[dr, "S'"] & \\
X & & Y & & Z
\end{tikzcd}$$

En effet, le seul point à vérifier est que les Γ-cofibrations se composent, ce qui résulte du

4.3.3. LEMME. *Soit $\pi : X \to M$ et $\rho : K\Gamma\pi \to M$; alors*

$$k_{\Gamma_\pi} . k_{\Gamma_\rho} = k_{\Gamma Q . \mathfrak{D}_\Gamma \rho . l^\Gamma_\pi} .$$

Cette dernière formule, pour un Γ arbitraire, résulte de ce que d'une part elle est vraie pour $\Gamma = Id_{Cat}$ comme le dit le Lemme 2 de [9], page 13, et de ce que d'autre part γ est naturelle,

$$\gamma_{K\Gamma_\pi} . l^\Gamma_\pi = l_{\Gamma_\pi} \quad \text{et} \quad \Gamma . Q = K_1 . \gamma_{Cat} . \mathfrak{D}_\Gamma \Gamma .$$

4.4. Soit X et Y deux éléments de CAT. On appelle Γ-*diagramme dans* Y *indexé par* X la donnée d'un foncteur $\mu : X \to \mathfrak{D}_\Gamma Y$.

La donnée d'un Q faisant commuter (1) (4.2.1) détermine pour tout X un $Q_X : \mathfrak{D}^2_\Gamma X \to \mathfrak{D}_\Gamma X$ (4.2.3) et permet de définir le composé de

$$\mu : X \to \mathfrak{D}_\Gamma Y \quad \text{et} \quad \nu : Y \to \mathfrak{D}_\Gamma Z$$

par la formule

4.4.1. $\nu \underset{Q}{\circ} \mu = Q_Z . \mathfrak{D}_\Gamma \nu . \mu .$

On désigne par Γ-mac_Q (resp. par Γ-$diag_Q$) le système multiplicatif constitué par l'ensemble des Γ-machines (resp. des Γ-diagrammes) et la composition $\underset{Q}{\bullet}$ (resp. la composition $\underset{Q}{\circ}$). *Ce n'est pas en général une catégorie*, car la composition n'est pas en général associative.

D'après l'adjonction $K\Sigma_\Gamma \dashv \Gamma^* D$ (1.20), en associant à $\mu : X \to \mathfrak{D}_\Gamma Y$ la Γ-machine

$$(d_X^\Gamma . \mu , S), \quad \text{où} \quad S = \beta_Y^\Gamma . a_Y^{\Gamma^*}(\mu)$$

apparait dans le produit fibré

4.4.2.
$$\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, "a_Y^{\Gamma^*}(\mu)"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{produit fibré}"] & \mathfrak{D}_\Gamma^{\cdot} Y \arrow[r, "\beta_Y^\Gamma"] \arrow[d, "a_Y^\Gamma"] & Y \\
X \arrow[r, "\mu"'] & \mathfrak{D}_\Gamma Y &
\end{tikzcd}$$

on détermine une bijection $A : \Gamma\text{-}diag \to \Gamma\text{-}mac$ de l'ensemble des Γ-diagrammes dans l'ensemble des Γ-machines.

Enfin, si $\mathrm{M} = (\pi, S)$ et $\mathrm{N} = (\pi', S')$ sont des Γ-machines de X vers Y, on appelle *bimorphisme* de la première vers la seconde la donnée d'une transformation naturelle $t : F \to G$, où $F, G : X \longrightarrow \mathfrak{D}_\Gamma Y$ sont $A^{-1}\mathrm{M}$ et $A^{-1}\mathrm{N}$ respectivement. Compte tenu de ce que, dans CAT, le foncteur $(-)^2$ commute avec les produits fibrés et compte tenu de 4.1.1, on constate que la donnée d'un bimorphisme équivaut à celle d'un couple (a, ϕ), où

$$a : \pi \to \pi' \quad \text{et} \quad \phi : S \to S' . K\langle 1_X, \Gamma a \rangle$$

sont des transformations naturelles donnant lieu à un diagramme

4.4.3.
$$\begin{tikzcd}
& K\Gamma\pi \arrow[dl, "k_{\Gamma\pi}"'] \arrow[dr, "S"] \arrow[dd, "K\langle 1_X , \Gamma a\rangle"] & \\
X \arrow[r, phantom, "\parallel"] & \arrow[r, phantom, "\phi \Downarrow"] & Y \\
& K\Gamma\pi' \arrow[ul, "k_{\Gamma\pi'}"] \arrow[ur, "S'"'] &
\end{tikzcd}$$

(En effet, on prend $a = \mu_Y t$ et $\phi = \overline{\Gamma a}$ avec la notation de 4.1.1.)

Des machines M et N sont dites *équivalentes* s'il existe un foncteur inversible $h : K\Gamma\pi \to K\Gamma\pi'$ tel que

$$k_{\Gamma\pi'} . h = k_{\Gamma\pi} \quad \text{et} \quad S' . h = S \; ;$$

on écrira alors $\mathrm{M} \approx \mathrm{N}$.

Des machines M et N sont dites *isomorphes* (resp. *strictement isomorphes*) s'il existe des transformations inversibles a et ϕ (resp. et si de plus $\phi = Id_S$) donnant un diagramme 4.4.3.

4.4.4. DEFINITION. On dira que *la composition des* Γ*-machines est définie et représentable par* Q si pour tout $\mathrm{M} : X \dashrightarrow Y$ et $\mathrm{N} : Y \dashrightarrow Z$, on a

$$\mathrm{N} \underset{Q}{\bullet} \mathrm{M} \approx A(A^{-1}\mathrm{N} \underset{Q}{\circ} A^{-1}\mathrm{M}) = A(Q_Z . \mathfrak{D}_\Gamma(A^{-1}\mathrm{N}) . A^{-1}\mathrm{M}) .$$

Si Γ est K-stable, alors Q est uniquement déterminé tel que (1) (4.2.1) soit cartésien, et on convient de supprimer dans la définition et les notations précédentes la lettre Q. Ainsi les systèmes multiplicatifs des Γ-diagrammes et des Γ-machines seront alors désignés par

$$\Gamma\text{-}diag \quad \text{et} \quad \Gamma\text{-}mac .$$

4.5. On vérifie d'abord en définissant pour tout Z les catégories A_Z^Γ et B_Z^Γ comme étant les produits fibrés

4.5.1.

$$\begin{array}{ccc} A_Z^\Gamma & \xrightarrow{r_Z} & \dot{\mathfrak{D}}_\Gamma Z \\ \downarrow{\scriptstyle q_Z} & & \downarrow{\scriptstyle a_Z^\Gamma} \\ \mathfrak{D}_\Gamma \dot{\mathfrak{D}}_\Gamma Z & \xrightarrow[\beta^\Gamma_{\mathfrak{D}_\Gamma Z}]{} & \mathfrak{D}_\Gamma Z \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} B_Z^\Gamma & \xrightarrow{t_Z} & \dot{\mathfrak{D}}_\Gamma Z \\ \downarrow{\scriptstyle s_Z} & & \downarrow{\scriptstyle a_Z^\Gamma} \\ \mathfrak{D}_\Gamma \mathfrak{D}_\Gamma Z & \xrightarrow[Q_Z]{} & \mathfrak{D}_\Gamma Z \end{array}$$

que la composition des Γ-machines est représentable par Q ssi il existe un isomorphisme $h_Z^\Gamma : A_Z^\Gamma \to B_Z^\Gamma$ tel que

$$s_Z . h_Z^\Gamma = a^\Gamma_{\mathfrak{D}_\Gamma Z} . q_Z \quad \text{et} \quad \beta_Z^\Gamma . t_Z . h_Z^\Gamma = \beta_Z^\Gamma . r_Z$$

(mais pas nécessairement $t_Z . h_Z^\Gamma = r_Z$).

Ceci est effectivement vérifié si $\Gamma = Id_{Cat}$, et c'est en fait ce qui a été montré en [9] dans la Proposition 6, page 13. En notant A_Z et B_Z pour $A_Z^{Id_{Cat}}$ et $B_Z^{Id_{Cat}}$ on vérifie que l'on a un produit fibré

4.5.2.
$$\begin{tikzcd}
A_Z^{\Gamma} \arrow[rr] \arrow[d, "q_Z"'] & & A \arrow[d] \\
\mathfrak{D}^{\cdot}_{\Gamma}\mathfrak{D}^{\cdot}_{\Gamma} Z \arrow[d, "a^{\Gamma}_{\mathfrak{D}_{\Gamma} Z}"'] & & \mathfrak{D}^{\cdot}\mathfrak{D} Z \arrow[d, "a_{\mathfrak{D} Z}"] \\
\mathfrak{D}_{\Gamma}\mathfrak{D}_{\Gamma} Z \arrow[r, "\gamma_{\mathfrak{D}_{\Gamma} Z}"'] & \mathfrak{D}\mathfrak{D}_{\Gamma} Z \arrow[r, "\mathfrak{D}\gamma_Z"'] & \mathfrak{D}\mathfrak{D} Z
\end{tikzcd}$$

et que B_Z^{Γ} s'insère dans un cube

4.5.3.
$$\begin{tikzcd}
B_Z^{\Gamma} \arrow[rrrr] \arrow[dr] \arrow[ddd, no head] & & & & B_Z \arrow[dl] \arrow[ddd] \\
& \mathfrak{D}_{\Gamma}\mathfrak{D}_{\Gamma} Z \arrow[r, "\mathfrak{D}_{\Gamma}\gamma_Z"] \arrow[d, "Q_Z"'] \arrow[u, phantom, "(5)"', shift left=0, pos=0.5, start anchor=north east, end anchor=south east] & \mathfrak{D}_{\Gamma}\mathfrak{D} Z \arrow[r, "\gamma\mathfrak{D}Z"] \arrow[d, phantom, "(4)"] & \mathfrak{D}\mathfrak{D} Z \arrow[d, "K_Z"] & \\
& \mathfrak{D}_{\Gamma} Z \arrow[rr, "\gamma_Z"'] & & \mathfrak{D} Z & \\
\mathfrak{D}^{\cdot}_{\Gamma} Z \arrow[rrrr] \arrow[ur] & & & & \mathfrak{D}^{\cdot} Z \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

Si l'on suppose que (1) (4.2.1) est cartésien, alors (4) et donc (5) sont aussi cartésiens. On peut ainsi définir h_Z^{Γ} et $(h_Z^{\Gamma})^{-1}$ à partir de h_Z et de h_Z^{-1} de manière évidente. Il vient :

4.5.4. THEOREME. *Si $\Gamma : M \to Cat$ est un préfaisceau K-stable, alors la composition des Γ-machines est définie et représentable (au sens 4.4.4).*

Soit maintenant, avec des notations identiques à celles de [12], T contenu dans Cat tel que :

4.5.4.1. La catégorie 1 appartient à T.

4.5.4.2. T est une sous-2-catégorie pleine et 2-pleine de Cat.

4.5.4.3. Pour tout $\pi : X \to Cat$, $K\pi \in T$ ssi $X \in T$ et $\pi(X) \subset T$.

Alors, si $\Gamma = T \hookrightarrow Cat$, $\mathfrak{D}_{\Gamma}$ est au sens de [12] le foncteur To- et Γ

est K-stable. En utilisant la monade à isomorphismes près $\mathfrak{D}$ (pseudo-doctrine $Cat_0 \circ -$ dans [12] page 227) et la transformation naturelle cartésienne $\gamma : \mathfrak{D}_\Gamma \rightarrowtail \mathfrak{D}$, on prouve le

4.5.5. COROLLAIRE. *Soit T une sous-catégorie de Cat vérifiant 4.5.4.1, 2 et 3. Alors la composition des T-machines est définie et représentable, est associative à isomorphismes près et donne donc lieu à un triple à isomorphismes près $\mathfrak{D}_T$, sous-triple de $\mathfrak{D}$.*

5. EXTENSION DE KAN AU-DESSUS D'UNE CATEGORIE $\mathfrak{D}X$.

On sait depuis [14] que la «cocomplétion» d'une catégorie X est un quotient de $\mathfrak{D}X$, la catégorie $\mathfrak{D}X$ n'étant pas en général cocomplète et le foncteur $K_X : \mathfrak{D}^2 X \to \mathfrak{D}X$ n'étant pas un foncteur $\varinjlim$ sur $\mathfrak{D}X$. Ce dernier point sera élucidé au paragraphe 7. Cependant un certain nombre de calculs de limites (ou d'extensions) sont valables dans $\mathfrak{D}X$, grâce à l'adjonction $K \dashv D$ (1.19) et au lemme 6.2.5 plus loin, et ceci conduit à préciser la structure des catégories d'extensions $Ext\,X$ en rapport avec $K_X : \mathfrak{D}^2 X \to \mathfrak{D}X$ et à poser le problème de la «spécialisation» des machines par la spécification d'un type de cylindres et de diagrammes. Comme déjà décrit en [9], ceci est lié à l'esquisse des structures, au besoin par des esquisses «locales» comme dans [4]. Voir aussi les questions de cohérence de [12].

5.1.1. Soit $\pi : D^{op} \to CAT$ un foncteur. On désigne par $K'\pi$ la catégorie dont les morphismes sont les triplets (v, f, t), où

$$f \in X, \quad v \in |\pi(\beta(f))|, \quad t \in \pi(\alpha(f)) \quad \text{avec} \quad \pi(f)(v) = \beta(t)\,;$$

autrement dit, $K'\pi = K(\pi_1)^{op}$ avec

$$\pi_1 = D^{op} \xrightarrow{\ \pi\ } CAT \xrightarrow{(-)^{op}} CAT\,.$$

On note $k'_\pi : K'\pi \to D$ le foncteur associant f à (v, f, t).

Si de plus D est une 2-catégorie, notée D, et $\Pi : \mathrm{D}^{op} \to CAT$ un 2-foncteur dont la restriction aux 1-morphismes est π, alors $K'\pi$ est munie d'une structure de 2-catégorie, notée $K'\Pi$, en prenant, si

$$(v, f, t), (v, f', t') : (x, u) \to (y, v),$$
$$K'\Pi((f, t), (f', t')) = \{\, \theta \in \mathrm{D}(f, f') \mid \Pi(\theta)(v).t = t' \,\}.$$

Sa catégorie des 1-morphismes est $K'\pi$.

En particulier en prenant pour Π le 2-foncteur $X^{(-)}: Cat^{op} \to CAT$, on obtient pour k'_π le foncteur $d_X : \mathfrak{D}X \to Cat$.

5.1.2. Si D a des coproduits et si π commute avec les produits (i.e. s'il transforme coproduits dans D en produits dans CAT), alors $K'\pi$ a des coproduits préservés par k'_π.

5.1.3. Si D a des coproduits, si pour tout objet x de D la catégorie $\pi(x)$ a des coproduits, et si pour tout $f: x \to y$ de D le foncteur $\pi(f)$ a un adjoint à gauche, alors $K'\pi$ a des coproduits.

NOTA. Des propositions analogues à 5.1.2 et 3 se trouvent dans Horrent.

Pour la question des sommes fibrées, on démontre d'abord le point suivant sur la colocalisation dans $K'\pi$: Soit

$$\pi: D^{op} \to CAT \quad \text{et} \quad (x,a) \in |K'\pi|$$

On définit un foncteur $\sigma: (x{\downarrow}D)^{op} \to CAT$ en associant à $f: x \to y$ la catégorie $(a{\downarrow}\pi(f))$ et à $h: f \to g$ (tel que $h.f = g$) le foncteur

$$\sigma(h): a{\downarrow}\pi(g) \to a{\downarrow}\pi(f),$$

qui à $m: (c,u) \to (c',u')$ associe

$$\sigma(h)(m): (\pi(h)(c), u) \to (\pi(h)(c'), u').$$

Il vient :

5.1.4. On a un isomorphisme $i: (x,a){\downarrow}K'\pi \to K'\sigma$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd}
(x,a){\downarrow}K'\pi \arrow[rr, "i"] \arrow[d, "proj"'] & & K'\sigma \arrow[d, "k'_\sigma"] \\
K'\pi \arrow[r, "k'_\pi"'] & D & x{\downarrow}D \arrow[l, "proj"]
\end{tikzcd}$$

Alors 5.1.4 permet de donner des conditions pour que $K'\sigma$ possède des coproduits. En particulier, on obtient

5.1.5. Si D a des sommes fibrées, si, pour tout $x \in |D|$, $\pi(x)$ a des sommes fibrées, et si pour tout f le foncteur $\pi(f)$ a un adjoint à gauche, alors $K'\pi$ a des sommes fibrées préservées par k'_π.

Appliquant ceci à $\pi = X^{(-)}$ (cf. 5.1.1), on voit que

5.1.6. *Si X est à petites limites inductives, $\mathfrak{D}X$ l'est aussi.*

En effet, ceci résulte de 5.1.5, puisque pour tout f les extensions de Kan le long de f existent par hypothèse sur X, i. e. $X^f = \pi(f)$ a un adjoint à gauche.

En fait, sans hypothèse sur X, on vérifie :

5.1.7. *Pour tout $X \in |CAT|$, $\mathfrak{D}X$ est à coproduits, et ceux-ci sont préservés par d_X.*

Mais si X n'est pas cocomplète, $\mathfrak{D}X$ ne l'est pas non plus en général ; plus précisément :

5.1.8. *Si X a des conoyaux, $\mathfrak{D}X$ n'en a pas nécessairement*, comme on le voit en prenant pour X une catégorie connexe sans objet faiblement final, par exemple

$$X = \quad \cdot \longleftarrow \cdot \longrightarrow \cdot \quad \cdot$$

Prenons $X = 1$ dans 5.1.6 ; il vient que $\mathfrak{D}1 = Cat$ est cocomplète. On sait (voir Gray, Bourn, Street) que la colimite ordinaire d'un foncteur $\pi : A \to Cat$ peut se calculer à l'aide d'identificateurs ; en fait on peut la décrire par un calcul de fractions «strictes» (un calcul analogue se trouve déjà dans Ehresmann [5 e]) :

5.1.9. Soit $C \in |CAT|$ et Σ une sous-catégorie de C telle que $|\Sigma| = |C|$. Il existe une catégorie D et un foncteur $p: C \to D$ tel que, pour tout $u \in \Sigma$, $p(u)$ soit une identité (et pas seulement un inversible) et soit universel pour cette propriété. p sera noté p_Σ et D sera noté $C\Sigma^{-1}$ ou C/Σ s'il n'y a pas de risque de confusion avec les catégories commas ou les catégories de fractions ordinaires.

En fait, C/Σ peut se calculer comme étant la catégorie quotient de C par la congruence bicompatible engendrée sur C par les identifications élémentaires :

$$f \approx g \quad \text{ssi} \quad f \text{ et } g \text{ sont connectés dans } I{\downarrow}I, \text{ où } I : \Sigma \hookrightarrow C.$$

NOTA. Ce calcul serait à rapprocher de l'usage que R. Street fait du foncteur $\pi_* : 2\text{-}Cat \to Cat$ où pour toute 2-catégorie A, la catégorie $\pi_* A$ a les mêmes objets que A et où

$$\pi * A(X, Y) = \pi_0 (A(X, Y));$$

$\pi_0 : Cat \to Ens$ est le foncteur «composantes connexes».

Désignons comme dans [9] par $H\pi$ la sous-catégorie de $K\pi$ constituée des morphismes «plats», i.e. de la forme $(\pi(f)(u), f, u)$. On a

5.1.10. $\underrightarrow{lim}\, \pi \approx (K\pi)(H\pi)^{-1}$.

Ceci décrit $\underrightarrow{lim}\, \pi$ à l'aide de la lax-colimite $K\pi$ de π. On verra au paragraphe 7 que DX est lax-cocomplète. On peut donc espérer calculer les colimites (et les extensions) à l'aide des lax-colimites, autrement dit, essentiellement à l'aide de l'adjonction $K \dashv D$.

Pour achever ce n° 5.1, on précise 5.1.6 en montrant comment *l'adjonction $K \dashv D$ de 1.19 permet, si X est cocomplète, de calculer les extensions de Kan au-dessus de $\mathfrak{D}X$.*

Soit à calculer l'extension de $G : M \to \mathfrak{D}X$ le long de $V : M \to N$. On forme l'extension au-dessus de Cat (calculable grâce à 5.19 point par point)

5.1.11.
$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "V"] \arrow[dr, "d_X . G"'] & \arrow[d, phantom, "\overset{\phi}{\curvearrowright}"] & N \arrow[dl, "\sigma"] \\ & Cat & \end{tikzcd}$$

et on en déduit $K\langle V, \phi\rangle : K(d_X . G) \to K\sigma$. On considère alors le transposé $\bar{G} : K(d_X . G) \to X$ de G dans l'adjonction $K \dashv D$, et on forme l'extension

5.1.12.
$$\begin{tikzcd} K(d_X . \phi) \arrow[rr, "K\langle V, \phi\rangle"] \arrow[dr, "\bar{G}"'] & \arrow[d, phantom, "\overset{\bar{\beta}}{\curvearrowright}"] & K\sigma \arrow[dl, "\bar{H}"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

d'où l'on déduit (grâce à 4.1.1)

5.1.13.
$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "V"] \arrow[dr, "G"'] & \arrow[d, phantom, "\overset{\beta}{\curvearrowright}"] & N \arrow[dl, "H"] \\ & \mathfrak{D}X & \end{tikzcd}$$

et c'est l'extension cherchée.

5.1.14. On remarque que, inversement, si β est une extension, alors $\bar{\beta}$ est une extension. On en déduit, avec les notations de 5.2 ci-après, que :

5.1.15. PROPOSITION. *On a*

$$\Phi \in Ext\,\mathfrak{D}X \iff (\mathfrak{D}(d_X)(\Phi) \in Ext(Cat) \text{ et } K_X(\Phi) \in Ext\,X).$$

REMARQUE. D'après [7] page 15 (et page 237), on peut préciser que l'extension 1.12 se calcule comme suit : Soit à calculer une extension

5.1.16.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "H"'] & \arrow[d, phantom, "\curvearrowright"] & B \arrow[dl, "R"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

On associe d'abord à F (voir 2.4.2, 6 et 7) le foncteur $F{\downarrow}-: B \to CAT$, la fibration $k_{F\downarrow -}: K(F{\downarrow}-) = F{\downarrow}B \to B$ et le foncteur $V_F: F{\downarrow}B \to E$ (noté $\check{p}^{B^2}$, en 2.4.2). Le problème se réduit à calculer une extension

5.1.17.

$$\begin{tikzcd} F{\downarrow}B \arrow[rr, "k_{F\downarrow -}"] \arrow[dr, "H.V_F"'] & \arrow[d, phantom, "\curvearrowright"] & B \arrow[dl, "R"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Or d'après $K \dashv D$, on a un unique $S: B \to \mathfrak{D}X$ tel que $\bar{S} = H.V_F$; on prend

$$R = \underrightarrow{lim} \,.\, S.$$

On peut faire cette opération 5.1.15-16 dès 5.1.11.

5.2. On désigne par $Ext\,X$ la sous-catégorie de $\mathfrak{D}X$ constituée des morphismes qui sont d_X-*cartésiens*, i.e. des diagrammes

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "p"'] & \arrow[d, phantom, "\overset{\lambda}{\curvearrowright}"] & B \arrow[dl, "q"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

présentant q comme extension de Kan de p le long de F.

5.2.1. Pour tout

$$(A, p) \in |Ext\,X| = |\mathfrak{D}X|,$$

la catégorie $(A,p)\downarrow Ext\,X$ est une sous-catégorie pleine coréflexive de la catégorie $(A,p)\downarrow \mathfrak{D}X$.

Puisque $(A,p)\downarrow\mathfrak{D}X \to \mathfrak{D}X$ crée les limites projectives, il résulte de 5.2.1 que $(A,p)\downarrow Ext\,X$ est aussi complète et cocomplète que $(A,p)\downarrow\mathfrak{D}X$ et donc aussi complète que $\mathfrak{D}X$.

En fait, si X est cocomplète, on a

5.2.2. Deux objets (A,p) et (B,q) de $Ext\,X$ ont même composante connexe dans $Ext\,X$ ssi $\varinjlim p \approx \varinjlim q$.

Il en résulte :

5.2.3. $Ext\,X$ n'a pas en général de coproduits.

5.2.4. Avec les notations de 5.1.9, si X est cocomplète, la catégorie $\bar{X} = (\mathfrak{D}X)(Ext\,X)^{-1}$ est équivalente à X ; si X est quelconque, alors tout foncteur vers X de source petite a une colimite dans $\bar{X}$, et $\bar{X}$ est universelle pour cette propriété.

5.3. Non seulement $Ext\,X$ n'est pas à coproduits en général, mais de plus l'insertion $Ext\,X \hookrightarrow \mathfrak{D}X$ ne préserve pas les coproduits qui existent dans $Ext\,X$. En effet, soit A le groupoïde

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, bend left, "u"] & b \arrow[l, bend left, "u^{-1}"] \end{tikzcd}$$

et considérons le diagramme

5.3.1.
$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "a"] \arrow[dr, "1\hat{}"'] & A \arrow[d, "A(a,-)"] \arrow[dl, phantom, "1_a"] \arrow[dr, phantom, "u"] & 1 \arrow[l, "b"'] \arrow[dl, "1\hat{}"] \\ & Ens & \end{tikzcd}$$

Le lemme de Yoneda pouvant s'énoncer sous la forme :

5.3.2. Pour tout objet x de X le diagramme
$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[rr, "x\hat{}"] \arrow[dr, "1\hat{}"'] & \arrow[d, phantom, "1_x"] & X \arrow[dl, "X(x,-)"] \\ & Ens & \end{tikzcd}$$
est une une extension,

on peut prouver que 5.3.1 est un coproduit dans *Ext(Ens)* non préservé par $Ext(Ens) \hookrightarrow \mathfrak{D}\, Ens$.

5.3.3. En général l'inclusion $Ext\, X \hookrightarrow \mathfrak{D} X$ ne conserve pas les extensions, i. e. ne donne pas lieu à un foncteur $Ext^2 X \to Ext \mathfrak{D} X$.

5.3.4. En général il n'existe pas de factorisation

$$\begin{tikzcd} Ext^2 X \arrow[r, "can_{Ext\, X}"] \arrow[d] & \mathfrak{D}\, Ext\, X \arrow[r, "\mathfrak{D}\, can_X"] & \mathfrak{D}^2 X \arrow[d, "K_X"] \\ Ext\, X \arrow[rr, "can_X"] & & \mathfrak{D} X \end{tikzcd}$$

ni de factorisation

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{D}\, Ext\, X \arrow[r, "\mathfrak{D}\, can_X"] \arrow[d] & \mathfrak{D}^2 X \arrow[d, "K_X"] \\ Ext\, X \arrow[r, "can_X"] & \mathfrak{D} X \end{tikzcd}$$

Par contre on déduit de 5.1.15 que :

5.3.5. Si $d_X : \mathfrak{D} X \to Cat$ préserve les extensions (par exemple si X a un objet final), alors on a une factorisation

$$\begin{tikzcd} Ext\, \mathfrak{D} X \arrow[r, "can_{\mathfrak{D} X}"] \arrow[d] & \mathfrak{D}^2 X \arrow[d, "K_X"] \\ Ext\, X \arrow[r, "can_X"] & \mathfrak{D} X \end{tikzcd}$$

5.4. Une extension

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "\pi"'] & \arrow[d, phantom, "f\,\curvearrowright"] & B \arrow[dl, "\sigma"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

est dite *absolue* si pour tout $G : X \to Y$ le diagramme

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "G\pi"'] & \arrow[d, phantom, "Gf\,\curvearrowright"] & B \arrow[dl, "G\sigma"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

est une extension.

On vérifie que $(F,f): \pi \to \sigma$ est une extension absolue ssi c'est une extension «pointwise» et si la limite que l'on calcule pour obtenir $\sigma(b)$ pour tout $B \in |B|$ est une limite absolue au sens de [16].

On peut montrer aussi que $(F,f): \pi \to \sigma$ est une extension absolue ssi pour tout objet x de X le diagramme

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "X(x,-)\pi"'] & \arrow[d, phantom, "\overset{X(x,-)f}{\curvearrowright}"] & B \arrow[dl, "X(x,-)\sigma"] \\ & Ens & \end{tikzcd}$$

est une extension de Kan au-dessus de Ens, ou encore ssi $Yoneda_X . f$ est une extension.

On désigne par $Exa\,X$ la sous-catégorie de $Ext\,X$ constituée des extensions absolues.

5.4.1. PROPOSITION. *Exa est un sous-foncteur de $\mathfrak{D}$ tel que l'on ait une factorisation*

$$\begin{tikzcd} Exa\,\mathfrak{D} \arrow[r, tail, "can_{\mathfrak{D}}"] \arrow[d] & \mathfrak{D}^2 \arrow[d, "K"] \\ Exa \arrow[r, tail, "can"] & \mathfrak{D} \end{tikzcd}$$

et, à cause de 5.3.4, il n'existe pas de factorisation

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{D}\,Exa \arrow[r, tail, "\mathfrak{D}(can)"] \arrow[d] & \mathfrak{D}^2 \arrow[d, "K"] \\ Exa \arrow[r, tail, "can"] & \mathfrak{D} \end{tikzcd}$$

5.5. Cas de $K\pi$.

Soit $\pi: X \to CAT$ et $K\pi$ la catégorie produit croisé. On a :

5.5.1. $K\pi$ a des coproduits dès que X a des coproduits, que pour tout objet x de X, $\pi(x)$ a des coproduits et que, pour tout $f \in X$, $\pi(f)$ conserve les coproduits.

5.5.2. $K\pi$ a des produits dès que X a des produits, que, pour tout objet x

de X, $\pi(x)$ a des produits et que, pour tout $f \in X$, $\pi(f)$ a un adjoint à droite.

Afin de localiser ces remarques, on prouve l'analogue de 5.1.4 :

5.5.3. Considérons un diagramme

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "\pi"'] & {} \arrow[d, phantom, "f"] & Y \arrow[dl, "\sigma"] \\ & CAT & \end{tikzcd}$$

et un objet (y, b) de $K\sigma$, d'où un diagramme

$$\begin{tikzcd} K\pi \arrow[r, "K<F{,}f>"] \arrow[d] & K\sigma \arrow[d, "k_\sigma"] & 1 \arrow[l, "(y{,}b)"'] \arrow[d, equal] \\ X \arrow[r, "F"'] \arrow[ur, phantom, "="] & Y \arrow[ur, phantom, "="] & 1 \arrow[l, "y"] \end{tikzcd}$$

et un foncteur induit Δ comme en 6.2 ci-après

$$\Delta : K<F, f>\downarrow(y, b) \longrightarrow F\downarrow y.$$

D'autre part, associé à $(F, f): \pi \to \sigma$, on détermine un foncteur

$$\tau : F\downarrow y \longrightarrow CAT$$

en associant à $g: Fx \to y$ la catégorie comma attachée à

$$\pi x \xrightarrow{f_x} \sigma F x \xrightarrow{\sigma g} \sigma y \xleftarrow{b} 1$$

et à $(x, g) \to (\bar{x}, \bar{g})$ le foncteur associé comme en 6.2 au diagramme :

$$\begin{tikzcd} \pi x \arrow[r, "f_x"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, phantom, "="] & \sigma F x \arrow[r, "\sigma g"] \arrow[d, "\sigma F"'] \arrow[dr, phantom, "="] & \sigma y \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "="] & 1 \arrow[l, "b"'] \arrow[d, equal] \\ \pi \bar{x} \arrow[r, "f_{\bar{x}}"] & \sigma F \bar{x} \arrow[r, "\sigma \bar{g}"] & \sigma y & 1 \arrow[l, "b"'] \end{tikzcd}$$

Alors on a un isomorphisme

$$i : K<F, f>\downarrow(y, b) \longrightarrow K\tau \quad \text{tel que} \quad k_\tau . i = \Delta .$$

Ce Lemme 5.5.3, joint à 5.5.1 et 5.5.2, montre soit par une réflexion directe, soit en utilisant le Théorème 6.2.5 (et en réalité seulement dans les cas particuliers envisagés par Leroux) que :

5.5.4. Soit $\pi : X \to CAT$ tel que pour tout f de X, πf admette un adjoint à droite. Alors :

1° Si X a des limites inductives et si pour tout objet x de X la catégorie $\pi(x)$ a des limites inductives, alors $K\pi$ a des limites inductives.

2° Si X a des limites projectives et si pour tout objet x de X la catégorie $\pi(x)$ a des limites projectives, alors $K\pi$ a des limites projectives.

Pour $\mathfrak{D}X$ ceci donne en particulier :

5.5.5. Si X est à petites limites inductives, alors $\mathfrak{D}X$ aussi (voir déjà 5.1.6) ; et si en plus X est à petites limites projectives, il en est de même de $\mathfrak{D}X$. Ainsi si X *est complète et cocomplète, alors* $\mathfrak{D}X$ *est complète et cocomplète.*

5.6. **Problème de la spécialisation des machines.**

On prolonge ici le paragraphe 4 de [9] à la lumière de 4.5.4 et de 5.1 à 5.4 particulièrement.

5.6.1. On dit que Δ est un *type de cylindres (et diagrammes)* si Δ est la donnée pour tout $X \in |CAT|$ d'une sous-catégorie ΔX de $\mathfrak{D}X$. On dit aussi que Δ *est une spécialisation de la théorie des machines.* Une machine $X \to \mathfrak{D}Y$ à valeurs dans ΔY est dite *machine de type* Δ ou Δ-machine.

5.6.2. Si $\mu : I \rightarrowtail \mathfrak{D}X$ est une famille de cônes et cylindres de X indexée par la catégorie I, un foncteur $F : X \to Y$ est appelé Δ-réalisation de μ dans Y ssi on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, tail, "\mu"] \arrow[d] & \mathfrak{D}X \arrow[d, "\mathfrak{D}F"] \\ \Delta Y \arrow[r, hook] & \mathfrak{D}Y \end{tikzcd}$$

En particulier, F sera dit Δ-continu, ou un Δ-*faisceau*, si c'est une Δ-réalisation de $\mu = \Delta X \hookrightarrow \mathfrak{D}X$ dans Y.

On désigne par Δ-$Faisc(X, Y)$ la sous-catégorie pleine de la catégorie $CAT(X, Y)$ constituée des Δ-faisceaux, et on appelle Δ-*faisceau* *associé à* $F \in CAT(X,Y)$ une structure libre $\bar{F}$ engendrée par F relativement au foncteur Δ-$Faisc(X,Y) \hookrightarrow CAT(X,Y)$.

5.6.3. On a *deux problèmes principaux* (qu'on ne résoudra pas ici):

5.6.3.1. Classer les Δ tels que tout $F: X \to Y$ admette un Δ-faisceau associé.

5.6.3.2. Classer les Δ tels que les Δ-machines se composent.

5.6.4. Comme autre exemple de problème, on peut reformuler la définition des *machines adjointes* de [9], page 30, dans le contexte des Δ-machines. L'existence de Δ-machines adjointes résultera de celle de certaines extensions de Kan au-dessus des catégories ΔX : on pourra chercher à énoncer précisément ces conditions. Ainsi un foncteur $F: X \to Y$ vu comme une *Fam*-machine (cf. 1.20.2) admet une adjointe ssi $Fam(F)$ admet une adjointe compatible avec les produits croisés K_X, K_Y (voir [9], page 30). Pour que $Fam(F)$ ait un adjoint, il faut et il suffit que F admette un semi-adjoint au sens de [4], et ceci a lieu ssi pour tout $y \in |Y|$ le foncteur $F_y = Y(y,-).F$ est semi-représentable, i.e. tel qu'il existe une petite famille $(x_i)_{i \in I} = \Phi$ d'objets de X telle que pour tout $x \in |X|$ on ait:

$$F_y(x) = \mathcal{H}^{\Phi}(x) = \coprod_{i \in I} X(x_i, x).$$

5.7. **Exemples de types de cylindres ou spécialisations.**

5.7.1. Pour tout X on note CX la sous-catégorie de $\mathfrak{D}X$ constituée des cônes

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr] \arrow[dr, "p"'] & \arrow[d, phantom, "\lambda"] & 1 \arrow[dl, "x^\wedge"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

5.7.2. Si $\mathfrak{I}$ est une partie de Cat, on désigne (voir [9], page 26) par $\mathfrak{L}^{\mathfrak{I}}X$ la sous-catégorie de CX constituée des cônes $\lambda: p \to x^\wedge$ qui sont des colimites et où $p: A \to X$ avec $A \in \mathfrak{I}$.

5.7.3. Pour tout X, la catégorie $Ext\,X \subset \mathfrak{D}X$ est définie en 5.2 et

$$Ext X \cap CX = \mathfrak{L}^{Cat} X.$$

5.7.4. Pour tout X la catégorie $Exa\,X$ est définie en 5.4.

5.7.5. Pour tout $\mathrm{T} \subset Cat$ la sous-catégorie $\mathfrak{D}_{\mathrm{T}}X$ de $\mathfrak{D}X$ est introduite en 4.5.5.

5.7.6. Pour tout X on définit un foncteur $\theta : \mathfrak{D}(X)^{op} \to Cat$ en associant à tout $p: A \to X \in |\mathfrak{D}(X)^{op}|$ la catégorie des cônes $\lambda : p \to x^{\wedge}$ de base p ; on définit les θ-lentilles («colenses» dans [11]) comme les éléments de $\mathfrak{D}X$ inversés par θ et on note $\Sigma_\theta X$ la catégorie de ces θ-lentilles. On a :

$$\Sigma_\theta X \cap \mathrm{C}X = \mathfrak{L}^{Cat} X.$$

5.7.7. Si $V \subset \mathfrak{D}Ens$, on introduit pour tout X la catégorie $V\text{-}\mathfrak{D}X$ constituée des $(F,f) \in \mathfrak{D}X$ tels que, pour tout $x \in |X|$, on ait

$$\mathfrak{D}(X(x,-))(F,f) \in V.$$

5.7.8. *Les constructions* C, $\mathfrak{L}^{\mathfrak{J}}$, *Ext*, *Exa*, $\mathfrak{D}_{\mathrm{T}}$, Σ_θ, $V\text{-}\mathfrak{D}$, *ci-dessus, sont des exemples de spécialisations* Δ *; on sait (5.4.1) que les Exa-machines se composent et on a vu (en 4.5.5) une condition pour que les* $\mathfrak{D}_{\mathrm{T}}$*-machines se composent.*

Comparer ces spécialisations, et plus généralement fournir une classification des spécialisations, voilà un problème très lié au problème de cohérence et aux clubs de Kelly (voir [12]).

6. EXTENSION DE KAN DANS UNE 2-CATEGORIE DX.

Les Théorèmes 2 et 2bis de [9] d'existence d'extensions de Kan dans les 2-catégories DX (extensions de Kan paramétrées) sont généralisés ici grâce à quelques aménagements des méthodes de localisation d'adjonctions de la Thèse de Leroux [15]. Les résultats des paragraphes 6.1 à 6.4 ont été annoncés en [20]. En 6.5 on en propose une généralisation (utilisable par exemple pour les problèmes de quasi-extensions de Kan paramétrées). En 6.6 on en donne une variante et une application au relèvement des monades qui sont dûes à Rosický [18]. Il semble qu'une application aux situations des deux premiers articles de [22] soit possible.

6.1. Soit dans CAT quatre foncteurs G, S, T, K tels que $GS = TK$. On peut énoncer une propriété des foncteurs à quasi-quotients de [5b] relative à un problème universel étendant celui de la colimite (qui se retrouve ci-après avec $K = T = Id_X$) et qui est un cas particulier de la notion de limite conditionnée de Bourn.

6.1.1. Si la colimite de S existe et est conservée par G, si la colimite de T existe et si G est à quasi-quotients, alors, en notant X la source de G, il existe

$$x \in |X|, \quad \lambda : S \to x^\wedge \quad \text{et} \quad \mu : T \to G(x)^\wedge \quad \text{avec} \quad G\lambda = \mu K$$

et tels que, pour tout

$$x' \in |X|, \quad \lambda' : S \to x'^\wedge \quad \text{et} \quad \mu' : T \to G(x')^\wedge \quad \text{avec} \quad G\lambda' = \mu' K,$$

il existe un unique $t : x \to x' \in X$ vérifiant

$$t^\wedge \lambda = \lambda' \quad \text{et} \quad G t^\wedge \mu = \mu'.$$

En particulier, on a :

6.1.2. Si $G : X \to A$ est à quasi-quotients et si A est à sommes fibrées, G vérifie la condition :

(q) Pour tout

$$x \in |X|, \quad u : a \to G(x) \quad \text{et} \quad v : a \to b \in A,$$

il existe

$$j : x \to y \in X \quad \text{et} \quad i : b \to G(y) \in A \quad \text{tels que} \quad G(j).u = i.v$$

et vérifiant la propriété universelle suivante : pour tout

$$j' : x \to y' \in X, \quad \text{et} \quad i' : b \to G(y') \in A \quad \text{tels que} \quad G(j').u = i'.v,$$

il existe un unique $t : y \to y' \in X$ tel que $t.j = j'$ et $G(t).i = i'$.

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[dd, "G"'] & x \arrow[r, "j"] & y \\
& & \\
{} & Gx \arrow[r, "Gj"] & Gy \\
a \arrow[ur, "u"] \arrow[r, "v"'] & b \arrow[ur, "i"'] \arrow[u, phantom, "="] &
\end{tikzcd}$$

6.1.3. DEFINITION. Un foncteur $G : X \to A$ vérifiant la condition (q) de

6.1.2 sera appelé un *q-foncteur.*

On a alors :

6.1.4. Tout q-foncteur est à quasi-quotients et tout foncteur à quasi-quotients de but une catégorie à sommes fibrées est un q-foncteur. De plus une catégorie A est à sommes fibrées ssi Id_A est un q-foncteur.

6.1.5. Un foncteur $H = H_3 H_2 H_1$ est un q-foncteur dès que H_1 est à quasi-quotients, que H_2 est un q-foncteur et que H_3 a un adjoint à gauche.

6.1.6. Si $G : X \to A$ est un q-foncteur (resp. est à quasi-quotients) et si B est une catégorie, alors $G^B : X^B \to A^B$ est un q-foncteur (resp. est à quasi-quotients).

6.1.7. La notion de foncteur à quasi-quotients est due à Ehresmann [5b] et a été introduite pour l'étude des structures algébriques dans les catégories. On notera qu'un foncteur de la forme $k_\pi : K\pi \to X$ (i.e. foncteur cofibrant) est nécessairement à quasi-quotients, et est donc un q-foncteur si X est à sommes fibrées.

On notera aussi (cf. [9], page 19) qu'un foncteur $G : X \to A$ est à quasi-quotients dès que G admet un adjoint à gauche et que X est à sommes fibrées.

6.2. Soit dans CAT le diagramme (d) ci-après :

(d)
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "G"] \arrow[d, "L"'] \arrow[dr, phantom, "/\!/"] & A \arrow[d, "T"] \arrow[dr, phantom, "\theta"] & Y \arrow[l, "F"'] \arrow[d, "R"] \\ X' \arrow[r, "G'"'] & A' & Y' \arrow[l, "F'"] \end{tikzcd}$$

Les données de (d) déterminent un foncteur

$$\Delta : F{\downarrow}G \to TF{\downarrow}TG \to F'R{\downarrow}G'L \to F'{\downarrow}G'L \to F'{\downarrow}G'$$

(où $F{\downarrow}G$ désigne la catégorie comma de F et G pour la structure usuelle

$$A \xleftarrow{\partial_0} A^2 \longrightarrow A$$

de graphe sur A , voir 2.4.1), défini par

$$\Delta(y, m, x) = (R(y), Id_x . T(m). \theta_y, L(x))$$

et $\Delta(v,u)=(R(v), L(u))$.

6.2.1. Soit $G: X \to A$, F et $H: Y \to A$ des foncteurs, et soit $\theta: F \to H$ une transformation naturelle, où G est un q-foncteur. Alors le foncteur

$$\theta{\downarrow}G: H{\downarrow}G \longrightarrow F{\downarrow}G$$

déduit des données a un adjoint à gauche.

6.2.2. Soit $G: X \to A$, $F: Y \to A$ et $T: A \to B$ des foncteurs, où G est un q-foncteur et où T a un adjoint à gauche. Alors le foncteur induit de $F{\downarrow}G$ vers $TF{\downarrow}TG$ a un adjoint à gauche.

En effet, si $S \dashv T(\epsilon,\eta)$, ce foncteur induit est isomorphe à $\eta F{\downarrow}G$.

6.2.3. Soit $G: X \to A$, $F: Y \to A$ et $R: Z \to Y$ des foncteurs, où G est un q-foncteur et où R admet un adjoint à gauche. Alors le foncteur induit de $FR{\downarrow}G$ vers $F{\downarrow}G$ a un adjoint à gauche.

6.2.4. Soit $G: X \to A$, $F: Y \to A$ et $L: Z \to X$ des foncteurs, où L a un adjoint à gauche. Alors le foncteur induit de $F{\downarrow}GL$ vers $F{\downarrow}G$ a un adjoint à gauche.

En combinant les résultats 6.1.5 et 6.2.1 à 6.2.4, il vient :

6.2.5. THEOREME. *Le foncteur Δ associé en 6.2 au diagramme* (d) *a un adjoint à gauche dès que les trois foncteurs L, T et R ont des adjoints à gauche et que G est un q-foncteur.*

REMARQUE. Le Théorème de Leroux dans [15] (page 165, 3.3) affirme l'existence d'un adjoint à gauche pour le foncteur $a{\downarrow}A \to a'{\downarrow}A'$ induit par $T: A \to A'$ et $f: a' \to T(a)$ dans le cas où T a un adjoint à gauche et où A est à sommes fibrées. On retrouve cette situation à partir de 6.2.5 en y faisant

$$G = Id_A, \quad G' = Id_{A'}, \quad Y = Y' = 1, \quad \theta = f.$$

6.2.6. RAPPEL. On a vu (de 5.5.3 à 5.5.5) une application de 6.2.5 au calcul des colimites dans $\mathfrak{D}X$.

6.3. Soit K une 2-catégorie ayant des objets commas.

6.3.1. DEFINITION. On dira que le 1-morphisme $G: X \to A$ de K est un *q-morphisme* ssi, pour tout 2-morphisme $\theta : F \to H : Y \to A$, le 1-morphisme

$$\theta{\downarrow}G : H{\downarrow}G \longrightarrow F{\downarrow}G$$

déterminé par la propriété universelle des objets commas admet un 1-morphisme adjoint à gauche dans K.

6.3.2. Un foncteur $G : X \to A$ est un q-foncteur ssi c'est un q-morphisme de la 2-catégorie CAT. On démontre alors de manière analogue à 2.5 (ou par le Lemme de Yoneda) que :

6.3.3. Soit dans K le diagramme (d) (cf. 6.2) et soit $\Delta : F{\downarrow}G \to F'{\downarrow}G'$ le 1-morphisme associé à (d) grâce à la propriété universelle des objets commas. Alors Δ admet un adjoint à gauche dès que L, T, R ont des adjoints à gauche et que G est un q-morphisme.

6.3.4. Réciproquement, si G est tel que, pour tout diagramme (d) où L, T, R ont des adjoints à gauche le 1-morphisme Δ associé admette un adjoint, alors G est un q-morphisme. Ceci montre que la notion de q-morphisme est exactement la notion adaptée au transfert d'adjonction.

6.4. Comme indiqué en 5.1.1 et 5.1.5, pour toute catégorie X le 2-foncteur $X^{(-)} : Cat^{op} \to CAT$ détermine une 2-catégorie $K' X^{(-)}$ que l'on notera DX, dont la catégorie des 1-morphismes est $\mathfrak{D}X$ (voir 1.5) et où un 2-morphisme de $(F, f) : (A, p) \to (B, q)$ vers $(G, g) : (A, p) \to (B, q)$ est donné par une transformation naturelle $t : F \to G$ telle que $qt \circ f = g$.

Le théorème d'extension de Kan avec paramètres qui établit des conditions d'existence pour les extensions de Kan dans la 2-catégorie DX des transformations naturelles au-dessus de X peut se retrouver à partir de 6. 2.5 comme suit :

1° Avec les notations de [9], si $(F, f) : (A, p) \to (\bar{A}, \bar{p})$ est un 1-morphisme de DX et $(\hat{A}, \hat{p})$ un objet de $\mathfrak{D}X$ (donc A, $\bar{A}$, $\hat{A} \in Cat$,

$$p : A \to X, \quad \bar{p} : \bar{A} \to X, \quad \hat{p} : \hat{A} \to X, \quad F : A \to \bar{A}$$

sont des foncteurs et $f : p \to \bar{p}F$ est une transformation naturelle), les extensions de Kan le long de (F, f) au-dessus de $(\hat{A}, \hat{p})$ existent ssi le foncteur « composition avec (F, f) » :

$$U : \mathrm{D}X((\bar{A},\bar{p}),(\hat{A},\hat{p})) \to \mathrm{D}X((A,p),(\hat{A},\hat{p}))$$

admet un adjoint à gauche. Mais la source et le but de ce foncteur ne sont autres que les catégories commas $\bar{p}\downarrow\hat{p}^{\bar{A}}$ et $p\downarrow\hat{p}^{A}$, et U est le foncteur Δ associé au diagramme (*):

$$(*)\qquad \begin{tikzcd} \hat{A}^{\bar{A}} \arrow[r, "\hat{p}^{\bar{A}}"] \arrow[d, "\hat{A}^F"'] \arrow[dr, phantom, "//"] & X^{\bar{A}} \arrow[d, "X^f"'] \arrow[dr, phantom, "f"] & 1 \arrow[l, "\bar{p}"'] \arrow[d, equal] \\ \hat{A}^{A} \arrow[r, "\hat{p}^{A}"'] & X^{A} & 1 \arrow[l, "p"] \end{tikzcd}$$

2° Plus généralement, avec les notations de 5.1.1 soit $\Pi : \mathrm{D}^{op} \to CAT$ un 2-foncteur. Si $(f,t) : (x,a) \to (y,b)$ est un 1-morphisme de $K'\Pi$, alors pour tout objet (z,c) de $K'\pi$ le foncteur «composition avec (f,t)» de $K'\Pi((y,b),(z,c))$ vers $K'\Pi((x,a),(z,c))$ est du type Δ défini au paragraphe 6.2. On le voit en construisant le diagramme analogue pour Π de (*), obtenu en remplaçant dans (*):

$$X^{\bar{A}},\ \hat{A}^{A},\ \hat{p}^{\bar{A}},\ etc.. \qquad \text{par} \qquad \pi(y),\ D(y,z),\ Ev_c,\ \ldots$$

Il vient donc le résultat:

6.4.1. *Dans* $K'\Pi$, *les extensions de Kan le long de* (f,t) *au-dessus de* (z,c) *existent si les conditions suivantes sont réalisées:*

1° Dans D *les extensions de Kan le long de* f *au-dessus de* z *existent.*

2° Le foncteur $\pi(f)$ *a un adjoint à gauche.*

3° Le foncteur «évaluation en c*»* $Ev_c : D(y,z) \to \pi(y)$ *est un q-foncteur.*

En particulier, si l'on prend $\Pi = X^{(-)}$ et si l'on tient compte de 6.1.6, ce résultat 6.4.1 redonne le Théorème 2bis de [9].

6.5. Si l'on remarque que la construction de la 2-catégorie $K'\Pi$ est celle d'une 2-catégorie quasi-comma de Π et de $1^{\wedge} : 1 \to CAT$, on peut chercher à adapter 6.4.1 au cas général comme suit:

Soit X, Y et C trois 2-catégories, $F : \mathrm{X} \to \mathrm{C}$ et $G : \mathrm{Y} \to \mathrm{C}$ deux 2-foncteurs. On forme alors (voir Gray [7]) la 2-catégorie quasi-comma

$F \Downarrow G$ s'insérant dans un diagramme

6.5.1.
$$\begin{tikzcd} F \Downarrow G \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d, "G"] \\ X \arrow[r, "F"'] \arrow[ur, phantom, "\nearrow"] & C \end{tikzcd}$$

en définissant :

- Un objet ou 0-morphisme de $F \Downarrow G$ est un triplet (x, u, y), où

$$u : Fx \to Gy \in C, \quad x \in |X|, \quad y \in |Y|.$$

- Un 1-morphisme de (x, u, y) vers $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{y})$ est un triplet (t, a, s), où

$$t : x \to \bar{x} \in X, \quad s : y \to \bar{y} \in Y, \quad a : Gs . u \to \bar{u} . Ft \in C :$$

6.5.2.
$$\begin{tikzcd} Fx \arrow[r, "u"] \arrow[d, "Ft"'] & Gy \arrow[d, "Gs"] \\ Fx \arrow[r, "\bar{u}"'] \arrow[ur, phantom, "\swarrow a"] & Gy \end{tikzcd}$$

Un 2-morphisme de (t, a, s) vers $(\tilde{t}, \tilde{a}, \tilde{s})$ est un couple (θ, λ), où $\theta : t \to \tilde{t} \in X$ et $\lambda : s \to \tilde{s} \in Y$ sont tels que

6.5.3.
$$\begin{tikzcd} Gs . u \arrow[r, "a"] \arrow[d, "G\lambda . u"'] & \bar{u} . Ft \arrow[d, "\bar{u} . F\theta"] \\ G\tilde{s} . u \arrow[r, "\tilde{a}"'] & \bar{u} . F\tilde{t} \end{tikzcd}$$

commute.

Ainsi, pour

$$X = Y = 1, \quad F = \ulcorner A \urcorner, \quad G = \ulcorner B \urcorner, \quad C = CAT,$$

$F \Downarrow G$ est la 2-catégorie discrète A^B.

On observe que

$$(F \Downarrow G)((x, u, y), (\bar{x}, \bar{u}, \bar{y})) = G(-) . u \downarrow \bar{u} . F(-)$$

et que pour un $(\hat{x}, \hat{u}, \hat{y})$ arbitraire le foncteur composition avec (t, a, s) de

$$(F \Downarrow G)((\bar{x}, \bar{u}, \bar{y}), (\hat{x}, \hat{u}, \hat{y})) \quad \text{vers} \quad (F \Downarrow G)((x, u, y), (\hat{x}, \hat{u}, \hat{y}))$$

n'est autre que le foncteur Δ (cf. 6.2) associé au diagramme qui généralise (*):

6.5.4.
$$\begin{tikzcd} \mathrm{X}(\bar{x},\hat{x}) \arrow[r, "\hat{u}.F(-)"] \arrow[d, "\mathrm{X}(t{,}\hat{x})"'] \arrow[dr, phantom, "//"] & \mathrm{C}(F\bar{x},G\hat{y}) \arrow[d, "\mathrm{C}(Ft{,}G\hat{y})"'] & \mathrm{Y}(\bar{y},\hat{y}) \arrow[l, "G(-).\bar{u}"'] \arrow[d, "\mathrm{Y}(s{,}\hat{y})"] \arrow[dl, phantom, "A_a"] \\ \mathrm{X}(x,\hat{x}) \arrow[r, "\hat{u}.F(-)"'] & \mathrm{C}(Fx,G\hat{y}) & \mathrm{Y}(y,\hat{y}) \arrow[l, "G(-).u"] \end{tikzcd}$$

où, pour tout $v:\bar{y}\to\hat{y}$, $(A_a)_v = Gv.a$.

Lorsque, dans l'énoncé suivant on prend

$$F = 1 \xrightarrow{\ 1\ } CAT, \quad \mathrm{D} = \mathrm{Y}^{op} \text{ et } \Pi = (-)^{op}.G,$$

on retrouve 6.4.1.

6.5.5. THEOREME *(recollement d'extensions de Kan). Dans* $F\downarrow G$ *les extensions de Kan le long de* (t,a,s) *au-dessus de* $(\hat{x},\hat{u},\hat{y})$ *existent si les conditions suivantes sont réalisées :*

1° Dans X *les extensions de Kan le long de* t *au-dessus de* $\hat{x}$ *existent.*

2° Dans Y *les extensions de Kan le long de* s *au-dessus de* $\hat{y}$ *existent.*

3° Dans C, *les extensions de Kan le long de* Ft *au-dessus de* $G\hat{y}$ *existent.*

4° Le foncteur $\hat{u}.F(-): \mathrm{X}(\bar{x},\hat{x})\to \mathrm{C}(F\bar{x},G\hat{y})$ *est un q-foncteur (au sens de 6.1.3).*

REMARQUE. En appliquant 6.5.5 avec pour 6.5.1 la situation

$$\begin{tikzcd} & 1 \arrow[d, "X^{\wedge}"] \\ Cat \arrow[r, tail, "inc"] & CAT \end{tikzcd}$$

on retrouve directement (sans passer par 6.4.1) le Théorème 2bis de [9], dit *Théorème d'extensions de Kan avec paramètres* (puisque

$$\mathrm{D}X = \ulcorner 1 \urcorner \downarrow X^{(-)^{op}} = (Cat \rightarrowtail CAT)\downarrow \ulcorner X \urcorner\ ).$$

6.5.6. En réalité, pour parler d'extension de Kan au-dessus d'un objet x d'une catégorie B arbitraire, il suffit, comme on l'a noté en 3, que le seul objet x soit *enrichi* (dans CAT) par un foncteur $X: \mathrm{B}^{op} \to CAT$ (c'est dire que l'on a $|\ |.X = \mathrm{B}(-,x)$).

Soit C une catégorie, soit m un objet de C enrichi par $M: \mathrm{C}^{op} \to CAT$ soit (avec les notations de 5.1.1)

$$\mathfrak{D}<m> = K'M, \quad (z,r) \in |\mathfrak{D}<m>|,$$

Z un enrichissement de z et $R: Z \to M$ un enrichissement du morphisme r. Alors en définissant, pour tout $(x,p) \in |\mathfrak{D}<M>|$,

$$\Lambda(x,p) = p^{\wedge} \downarrow R x,$$

on détermine un foncteur $\Lambda: \mathfrak{D}<m>^{op} \to CAT$ qui est un enrichissement de (z,r). On a ainsi la généralisation suivante de l'extension paramétrée (où les extensions envisagées sont relatives aux enrichissements introduits ci-dessus):

6.5.7. THEOREME *(Extensions de Kan paramétrées généralisées). Soit, avec les notations de 6.5.6, le diagramme*

$$\begin{tikzcd}(x,p) \arrow[r, "(a,a)"] \arrow[dr, "(b,\beta)"'] & (y,q) \\ & (z,r)\end{tikzcd}$$

dans la catégorie $\mathfrak{D}<m>$. L'extension de Kan de (b,β) le long de (a,a) au-dessus de (z,r) (relativement à Λ) existe si les conditions suivantes sont réalisées :

1º L'extension de b le long de a au-dessus de z (relativement à Z) existe.

2º L'extension de p le long de a au-dessus de m (relativement à M) existe.

3º Le foncteur $Ry: Z(y) \to M(y)$ est un q-foncteur.

6.6. **Application aux relèvements de monades, d'après Rosičký [18].**

En Janvier 1976 nous avons exposé à Jiri Rosičký les résultats obtenus sur les extensions de Kan avec paramètres. En liaison avec les problèmes de relèvements de monades auxquels il s'intéressait depuis long-temps, il a mis au point, dans le mois suivant, les illustrations 6.6.1, 2 et 3 ci-après.

On désigne par D'X la 2-catégorie dont les 1-morphismes de (A, p) vers (B, q) sont les (F, f), où $F: A \to B$ est un foncteur et $f: qF \to p$ une transformation naturelle, dont les 2-morphismes de (F, f) vers (G, g) sont les $\alpha: F \to G$ naturelles telles que $g . q\alpha = f$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, bend left, "F"] \arrow[rr, bend right, "G"'] \arrow[rr, phantom, "\downarrow\alpha"] \arrow[dr, "p"'] & & B \arrow[dl, "q"] \\
& X \arrow[u, phantom, "g"] &
\end{tikzcd}$$

Dans D'X les objets commas de paires de la forme

$$(A, UF) \xrightarrow{(F, Id)} (C, U) \xleftarrow{(G, g)} (B, M)$$

existent (de sorte en particulier que D'X est représentable), si bien que la définition de Street des extensions ponctuelles s'adapte :

Etant donnés

$$(T, t): (M, W) \to (A, V) \quad \text{et} \quad (K, k): (M, W) \to (C, U)$$

dans D'X, on dira que l'extension de Kan *ponctuelle* de (T, t) le long de (K, k) existe si, pour tout objet c de C, le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\Phi_c \downarrow (K, k) \arrow[rr, "d_0"] \arrow[d, "d_1"'] & & (1, c) \arrow[d, "{(c^\frown, Id_{Uc}) = \Phi_c}"] \\
(M, W) \arrow[rr, "{(K, k)}"'] \arrow[dr, "{\mathrm{T} = (T, t)}"'] & & (C, U) \arrow[llu, phantom, ""] \\
& (A, V) &
\end{tikzcd}$$

admet une extension de Kan avec paramètres.

Ceci revient à dire que, pour tout objet c de C, on a un objet Rc de A, un $\rho_c: VRc \to Uc$ et une transformation naturelle

$$\beta^c: C(c, K-) \to A(Rc, T-)$$

tels que, pour tout $f: c \to Km$ où $m \in M$, on ait

$$k_m . Uf . \rho_c = t_m . V\beta^c_m(f),$$

et ceci de manière universelle. Si de plus on suppose que $\bar{\beta}^c_m$ est universelle relativement aux β^c_m qui ne sont pas nécessairement naturelles, on dit que l'extension de Kan *fortement ponctuelle de* (T, t) *le long de* (K, k) existe (voir [18]).

6.6.1. Pour que l'extension de Kan fortement ponctuelle de (T, t) le long de (K, k) existe, il suffit que M soit petite, que A et X soient à produits et que $V^{op}: A^{op} \to X^{op}$ soit un q-foncteur (au sens de 6.1.3) et que t soit V-co-engendrant.

$$\begin{tikzcd}
& M \arrow[dl, "T"'] \arrow[r, "K"] \arrow[dd, "W"] \arrow[ddr, phantom, "\overset{k}{\Leftarrow}"] \arrow[ddl, phantom, "\overset{t}{\Rightarrow}"] & C \arrow[ddl, "U"] \\
A \arrow[dr, "V"'] & & \\
& X &
\end{tikzcd}$$

6.6.2. Soit X une catégorie, soit $\mathrm{P} = (P, \eta, \mu)$ une monade sur X et soit les diagrammes

$$\begin{tikzcd}
& M \arrow[dl, "K"'] \arrow[dr, "T"] & \\
C \arrow[d, "V"'] & & C \arrow[d, "V"] \\
X \arrow[rr, "P"'] \arrow[urr, phantom, "\overset{\delta}{\Leftarrow}"] & & X
\end{tikzcd}
\quad \text{et} \quad
\begin{tikzcd}
& M \arrow[dl, "K"'] \arrow[dr, "T"] \arrow[d, phantom, "\overset{\nu}{\Rightarrow}"] & \\
C \arrow[rr, equal] & \, & C
\end{tikzcd}$$

avec $\eta VK = \delta . V\nu$.

On pose $\mathrm{V} = (K, T, V, \delta, \nu)$, et on appelle *relèvement de* P *relativement à* V un couple $(\mathrm{S}, (\sigma, \sigma_0, \sigma_1))$, où $\mathrm{S} = (S, \bar{\eta}, \bar{\mu})$ est une monade sur C, où $\sigma: VS \to PV$, $\sigma_0: SK \to T$ et $\sigma_1: ST \to T$ sont des transformations naturelles, et où l'on a :

(0) $\delta . V\sigma_0 = \sigma K$, $\delta . V\sigma_1 = \mu VK . P\delta . \sigma T$.

(1) $\sigma . V\bar{\eta} = \eta V$, $\sigma . V . \bar{\mu} = \mu V . P\sigma . \sigma S$.

(2) $\sigma_0 . \bar{\eta}K = \nu$, $\sigma_0 . \bar{\mu}K = \sigma_1 . S\sigma_0$.

$$(3)\ \sigma_1 . \bar{\eta} T = 1_T\,, \quad \sigma_1 . \bar{\mu} T = \sigma_1 . S\sigma_1\,.$$

Dans [18] J. Rosický introduit cette notion de relèvement «lax» et prouve entre autres le résultat suivant :

6.6.3 (*Monade de codensité généralisée*). Supposons avec les notations de 6.6.2 que l'extension fortement ponctuelle (R, ρ) de $([T, T], [\delta, \delta])$ le long de $([K, T], [1_{PVK}, \mu VK . P\delta])$ existe et soit déterminée par

$$\bar{\rho} = [\rho_0, \rho_1] : [RK, RT] \to [T, T]\,,$$

et que δ soit V-co-engendrant.

$$\begin{tikzcd}
& M+M \arrow[dl, "{[T,T]}"'] \arrow[dr, "{[K,T]}"] \arrow[dd, "{[PVK,PVK]}"] & \\
C \arrow[dr, "V"'] \arrow[r, phantom, "{[\delta,\delta]}"] & {} & C \arrow[dl, "PV"] \arrow[l, phantom, "{[1_{PVK},\mu VK.P\delta]}"'] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

On détermine alors $\bar{\eta}$ et $\bar{\mu}$ comme les uniques $\bar{\eta}$ et $\bar{\mu}$ satisfaisant (1), (2) et (3) ci-dessus pour

$$S = R, \quad \sigma = \rho, \quad \sigma_0 = \rho_0, \quad \sigma_1 = \rho_1.$$

Alors $(\mathrm{R}, (\rho, \rho_0, \rho_1))$, où $\mathrm{R} = (R, \bar{\eta}, \bar{\mu})$, est un relèvement de P relativement à V qui est universel, i.e. tel que pour tout relèvement $((S, \bar{\eta}, \bar{\mu}), (\sigma, \sigma_0, \sigma_1))$ de P relativement à V, il existe un unique morphisme de monades $a : S \to R$ tel que

$$\sigma = \rho . Va, \quad \sigma_0 = \rho_0 . aK \quad \text{et} \quad \sigma_1 = \rho_1 . aT.$$

Si P est la monade identité sur X et si $\delta = 1_{VK}$, on appelle R *la monade à isomorphismes près de V-codensité de K*. On retrouve la notion usuelle pour $X = 1$.

On notera que ce résultat 6.6.3 est valable, grâce à 6.1.7 et à 6.6.1, dans le cas où

$$M \xrightarrow{K} C \xrightarrow{V} X$$

sont tels que : M est petite, C et X sont à produits, V est de la forme: $k_\pi^{op} : (K\pi)^{op} \to B^{op} = X$.

7. LAX-EXTENSIONS DE KAN AU-DESSUS D'UNE 2-CATEGORIE DX ET PROPRIETE UNIVERSELLE DE DX.

$\mathfrak{D}X$ n'est pas la cocomplétion de X (cf. n° 5). Mais on sait que la « limit monad » Λ de Kock [14] dont les algèbres sont les catégories à limites s'obtient comme quotient de $\mathfrak{D}X$, à savoir $\Lambda X = \pi_0^* \mathrm{D} X$, c'est-à-dire que les morphismes de ΛX sont les 2-composantes connexes dans DX. Ceci suggère que DX - et non plus $\mathfrak{D}X$ - pourrait être une sorte de 2-cocomplétion de X. De même, pour tout ensemble E, l'ensemble $\mathcal{P}E$ n'est pas une « complétion de E », mais l'ensemble ordonné PE $= (\mathcal{P}E, \subset)$ est bien l'ensemble ordonné complet libre sur E. La propriété de « quasi-co-complétion » de DX est expliquée par 7.10, puis on en déduit que les calculs de « quasi-extensions » de Kan sont possibles au-dessus de DX.

Naturellement, en remplaçant DX par $\mathrm{D}(X^{op})^{op}$ on obtiendrait dans tout ce qui suit des limites et quasi-limites à la place de colimites et quasi-colimites.

7.1. Définition.

Soit D une 2-catégorie et D la catégorie des 1-morphismes de D. On dira que D est *quasi-cocomplète forte* si, pour tout $A \in Cat$, tout foncteur $p: A \to D$ admet une *quasi-colimite forte*, ce qui signifie que l'on a une transformation quasi-naturelle (voir 1.1, 1.3,...)

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr] \arrow[dr, "p"'] & \arrow[d, phantom, "\lambda"] & 1 \arrow[dl, "L^\wedge"] \\ & D & \end{tikzcd}$$

définissant L comme quasi-colimite de p (i.e. telle que, pour tout objet M de D et toute transformation quasi-naturelle $\theta: p \dashrightarrow M^\wedge$, il existe un unique morphisme $\bar{\theta}: L \to M$ tel que $\theta = \bar{\theta}\lambda$) *et* telle que, de plus, pour tout objet M de D et toute modification

$$\mu : \theta \Rightarrow \theta' : p \dashrightarrow M^\wedge,$$

il existe une unique cellule $\bar{\mu} : \bar{\theta} \Rightarrow \bar{\theta}'$ telle que $\mu = \bar{\mu}\lambda$.

On rappelle (voir [7], page 82) qu'une *transformation quasi-natu-*

relle $\theta : p \dashrightarrow M^{\wedge}$ est la donnée, pour tout $f : a \to b \in A$ d'une cellule

$$\theta f = \begin{tikzcd} \cdot \arrow[d, "pf"'] \arrow[dr, bend left] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow \theta f"] & \\ \cdot \arrow[r] & M \end{tikzcd}$$

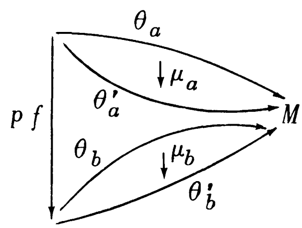
dans D, ces données vérifiant, pour un couple composable (g, f) :

$$\theta(gf) = \theta(g)pf \circ \theta f,$$

et qu'une *modification* $\mu : \theta \Rightarrow \theta'$ est la donnée, pour tout objet a de A, d'une cellule

$$\mu_a : \theta_a \Rightarrow \theta'_a : pa \to M,$$

et ce, de sorte que, pour tout $f : a \to b$, on ait : $\mu_b . pf = \mu_a$.



7.2.1. Si D est quasi-cocomplète forte, ceci n'entraîne pas que, pour

$$F : Y \to X \in Cat \quad \text{et} \quad p : Y \to D,$$

il existe une quasi-extension (néanmoins voir 7.7):

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "p"'] & & X \arrow[dl] \\ & D & \end{tikzcd}$$

7.2.2. Si D est quasi-cocomplète forte, D est à petites sommes (qui, de plus, sont des sommes dans la catégorie D_2 ayant pour objets ceux de D et pour morphismes les 2-morphismes de D). Mais D peut ne pas être à petites colimites quelconques (voir 5.1.8 et Théorème 7.10 ci-après).

7.2.3. Pour ce qui est d'écrire, dans le cas où D est représentable et co-représentable, les quasi-colimites à l'aide de $(-)^2$, $(-)^3$, et de colimites ordinaires, voir [2a] ou [7].

7.2.4. Si on désigne par $\tilde{\mathfrak{D}}\mathrm{D}$ la catégorie des petits diagrammes et transformations quasi-naturelles au-dessus de D, on peut montrer que D est quasi-cocomplète ssi $\tilde{\mathrm{U}}_{\mathrm{D}} : D \to \tilde{\mathfrak{D}}\mathrm{D}$ admet un adjoint à gauche inverse à gauche. Ceci élargit la remarque suivant laquelle X est à petites colimites ssi $\mathrm{U}_X : X \to \mathfrak{D}X$ a un adjoint à gauche.

7.3. Pour tout $(A, p) \in \mathfrak{D}X$ on a une quasi-colimite forte de la forme

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr] \arrow[dr, "p"'] & & 1 \arrow[ddl, "(A,p)^{\wedge}"] \\
& X \arrow[d, "\mathrm{U}_X"'] \arrow[r, phantom, "\dashrightarrow"] & \\
& \mathfrak{D}X &
\end{tikzcd}$$

autrement dit, $\mathrm{U}_X : X \to \mathfrak{D}X$ est fortement quasi-codense.

En effet, 7.3 résulte de ce que, si v est égal à $1^{\wedge} : A \to Cat$, alors

$$l_v : A \to \mathfrak{D}Kv = \mathfrak{D}A$$

est égal à U_A, de ce que $\mathrm{U} : Id_{CAT} \to \mathfrak{D}$ est naturel, de sorte que

$$(A, p) = (K(d_X . \mathrm{U}_X . p),\ \overline{\mathrm{U}_X . p}),$$

et de 7.4.2 ci-après.

7.4.1. Soit $X \in |\, Cat\, |$ et $\pi : X \to Cat$; alors $\overline{\lambda}$ définie en 1.12 permet de définir un diagramme

$$\begin{tikzcd}
\pi x \arrow[rr, "i_x"] \arrow[d, "\pi f"'] \arrow[drr] \arrow[rr, phantom, shift right=3, "\lambda_f \Downarrow"] & & K\pi \arrow[d, equal] \\
\pi y \arrow[urr, "i_y"'] \arrow[rr] \arrow[rr, phantom, shift left=3, "\lambda_f \swarrow"] & & K\pi
\end{tikzcd}$$

déterminant une transformation quasi-naturelle $\tilde{\lambda} : l_\pi \dashrightarrow (K\pi, 1_{K\pi})^{\wedge}$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr] \arrow[dr, "l_\pi"'] \arrow[r, phantom, shift right=4, "\tilde{\lambda}\dashrightarrow"] & & 1 \arrow[dl, "(K\pi, 1_{K\pi})^{\wedge}"] \\
& \mathfrak{D}K\pi &
\end{tikzcd}$$

Si $G : X \to \mathfrak{D}Y$ et si $d_Y . G = \pi$, on note $\overline{G} : K\pi \to Y$ le transposé de G dans l'adjonction $K \dashv D$ de 1.19 et on considère le diagramme

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr] \arrow[dr, "G"'] & \arrow[d, phantom, "\overset{\lambda}{\dashrightarrow}"] & 1 \arrow[dl, "(K\pi{,}\bar{G})^{\wedge}"] \\ & \mathfrak{D}Y & \end{tikzcd} \quad = \quad \begin{tikzcd} X \arrow[rr] \arrow[dr, "l_\pi"'] & \arrow[d, phantom, "\overset{\bar{\lambda}}{\dashrightarrow}"] & 1 \arrow[dl, "(K\pi{,}1_{K\pi})^{\wedge}"] \\ & \mathfrak{D}K\pi \arrow[d, "\mathfrak{D}\bar{G}"] & \\ & \mathfrak{D}Y & \end{tikzcd}$$

(ce qui a un sens, puisque $\mathfrak{D}\bar{G}$ est un 2-foncteur).

7.4.2. $\lambda : G \dashrightarrow (K\pi, \bar{G})^{\wedge}$ est une quasi-colimite forte du foncteur G. On en trouvera une preuve dans Gray [7], page 204; mais ici le résultat va suivre de la remarque :

7.4.3. Pour tout $G : X \to \mathfrak{D}Y$ et tout $p : A \to Y \in \mathfrak{D}Y$, on a une bijection naturelle (avec $d_Y . G = \pi$):

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr] \arrow[dr, "G"'] & \arrow[d, phantom, "\dashrightarrow"] & 1 \arrow[dl, "p^{\wedge}"] \\ & \mathfrak{D}Y & \end{tikzcd} \quad vs \quad \begin{tikzcd} X \arrow[rr] \arrow[dr, "G"'] & \arrow[d, phantom, "\curvearrowright"] & \mathfrak{D}A \arrow[dl, "\mathfrak{D}p"] \\ & \mathfrak{D}Y \arrow[d, "d_Y"] & \\ & Cat & \end{tikzcd} \quad = \quad \begin{tikzcd} X \arrow[rr] \arrow[dr, "\pi"'] & \arrow[d, phantom, "="] & \mathfrak{D}A \arrow[dl, "d_A"] \\ & Cat & \end{tikzcd}$$

d'où, compte tenu de 4.1.1 et vu que $\overline{\mathfrak{D}p} = p . \beta_A$ (où $\beta_A : \mathfrak{D}^{\cdot} A \to A$ est défini en 2.2.4), la bijection

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr] \arrow[dr, "G"'] & \arrow[d, phantom, "\dashrightarrow"] & 1 \arrow[dl, "p^{\wedge}"] \\ & \mathfrak{D}Y & \end{tikzcd} \quad vs \quad \begin{tikzcd} K\pi \arrow[rr, "K<-{,}\, 1_\pi>"] \arrow[ddr, "\bar{G}"'] & & \mathfrak{D}^{\cdot} A \arrow[d, "\beta_A"] \\ & \arrow[d, phantom, "\curvearrowright"] & A \arrow[dl, "p"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

et comme $\beta_A . K< F, 1_\pi >$ est, d'après $K \dashv D$ (1.19) la forme du morphisme général de $K\pi$ vers A, il vient

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr] \arrow[dr, "G"'] & \arrow[d, phantom, "\dashrightarrow"] & 1 \arrow[dl, "p^{\wedge}"] \\ & \mathfrak{D}Y & \end{tikzcd} \quad vs \quad \begin{tikzcd} K\pi \arrow[rr] \arrow[dr, "\bar{G}"'] & \arrow[d, phantom, "\curvearrowright"] & A \arrow[dl, "p"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

d'où 7.4.2. On vérifiera que cette dernière bijection naturelle est bien induite par la composition avec λ . On vérifiera aussi que, si

$$\mu : \theta \Rightarrow \theta' : G \to p^{\wedge}$$

est une modification définie par la donnée pour tout $x \in |X|$ d'une cellule

$$\begin{tikzcd} \pi(x) \arrow[rr, bend left, "\theta_x"] \arrow[rr, bend right, "\theta'_x"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow \mu_x"] & & A \end{tikzcd},$$

alors on a une unique cellule

$$\begin{tikzcd} K\pi \arrow[rr, bend left] \arrow[rr, bend right] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow \bar{\mu}"] & & A \end{tikzcd}$$

telle que $\bar{\mu} . \lambda = \mu$, où $\bar{\mu}$ est défini par $\bar{\mu}_{(x,a)} = (\mu_x)_a$.

7.5. Pour tout $F : M \to N \in CAT$ le foncteur $\mathfrak{D}F : \mathfrak{D}M \to \mathfrak{D}N$ préserve les quasi-colimites fortes. Ceci résulte immédiatement de la description 7.4.1 de $\tilde{\lambda}$.

7.6. Si D est une 2-catégorie quasi-cocomplète forte (cf. 7.1), alors en associant à tout foncteur $p : A \to D$ sa quasi-colimite forte Lp on détermine un foncteur $L : \mathfrak{D}D \to D$ qui se prolonge en un 2-foncteur $\mathrm{L} : \mathrm{D}D \to \mathrm{D}$.

En effet, suivant l'égalité

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[dr, "p"'] \arrow[dr, phantom, bend left, "\lambda_p"] & 1 \arrow[r, equal] \arrow[d, "Lp"] \arrow[d, phantom, shift left=6, "L(F,f)\ \Downarrow\bar{\mu}\ L(G,g)"] & 1 \arrow[dl, "Lq"] \\ & D & \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\theta"] \arrow[dr, "p"'] & B \arrow[r] \arrow[d, "q"] \arrow[dl, phantom, "f\ g"] \arrow[dr, phantom, "\lambda_q"] & 1 \arrow[dl, "Lq"] \\ & D & \end{tikzcd}$$

on définit $\mathrm{L}(\theta) = \bar{\mu}$ avec $\mu = (\lambda_q)\theta . f$ (grâce à la propriété que λ_p est une quasi-colimite forte (7.1)), et on vérifie que L est bien un 2-foncteur.

En comparant avec les calculs 5.1.11 à 5.1.16 d'extensions ordinaires sur une catégorie $\mathfrak{D}X$, on a :

7.7. Soit D une 2-catégorie quasi-cocomplète forte, $\Pi : X \to \mathfrak{D}D$ un foncteur et $\bar{\Pi} : K\pi \to D$ son transposé dans l'adjonction $K \dashv D$, où $\pi = d_D . \Pi$. On pose $\Pi = (\pi, p)$.

Pour tout objet x de X , on calcule la quasi-colimite forte

7.7.1.

$$\begin{tikzcd} \pi x \arrow[rr, no head] \arrow[dr, "p_x"'] \arrow[rr, phantom, shift right=4ex, "\overset{a_x}{\Rightarrow}"] & & 1 \arrow[dl, "L(p_x)"] \\ & D & \end{tikzcd}$$

Alors en définissant

$$\epsilon(x,a) = a_x(a) \quad \text{et} \quad \epsilon(z,f,u) = a_y(z).p_f(a)$$

(on voit le rôle de $\beta_D : \mathfrak{D}^{\cdot} D \to D$ de 2.2.4), on peut montrer que

7.7.2.

$$\begin{tikzcd} K\pi \arrow[rr, "k_\pi"] \arrow[dr, "\bar{\Pi}"'] \arrow[rr, phantom, shift right=4ex, "\overset{\epsilon}{\Rightarrow}"] & & X \arrow[dl, "L.\Pi"] \\ & D & \end{tikzcd}$$

est une quasi-extension de Kan forte.

7.8. Soit D une 2-catégorie quasi-cocomplète forte. Alors le 2-foncteur L de DD vers D préserve les quasi-colimites fortes.

Pour prouver 7.8 on considère une quasi-colimite forte

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[rr, phantom, shift right=4ex, "\overset{\lambda}{\Rightarrow}"] & & 1 \arrow[dl, "(K\pi,\bar{\Pi})^{\wedge}"] \\ & \mathfrak{D}D & \end{tikzcd}$$

et on montre que le diagramme

$$\begin{tikzcd} K\pi \arrow[r, "k_\pi"] \arrow[dr, "\bar{\Pi}"'] \arrow[r, phantom, shift right=5ex, "\overset{\epsilon}{\Rightarrow}"] & X \arrow[r, "X"] \arrow[d, "L.\Pi"] \arrow[r, phantom, shift right=5ex, "\overset{L\lambda}{\Rightarrow}"] & 1 \arrow[dl, "L(\bar{\Pi})"] \\ & D & \end{tikzcd}$$

est une quasi-colimite forte.

7.9. DEFINITION. Soit T $\subset$ *Cat*. Une 2-catégorie D sera dite T-*quasi-cocomplète forte* si, pour tout $A \in$ T, tout foncteur $p : A \to D$ admet une quasi-colimite forte (7.1).

En assemblant 7.1 à 7.8 ci-dessus ainsi que 4.5.5, il vient le théorème suivant, dont on redéduirait aussitôt la construction du triple à isomorphismes près de 4.5.5, et puis la «limit monad» [14] de Kock.

7.10. THEOREME. *Soit* $\mathrm{T} \subset Cat$ *tel que* $1 \in \mathrm{T}$, *que* T *soit une sous-2-catégorie pleine et 2-pleine de* Cat, *et que, pour tout* $\pi: X \to Cat$, $K\pi \in \mathrm{T}$ *ssi* $X \in \mathrm{T}$ *et* $\pi(X) \subset \mathrm{T}$. *Soit* $\mathrm{D_T}X$ *la sous-2-catégorie pleine et 2-pleine de* $\mathrm{D}X$ *ayant pour objets les* $p: A \to X$ *tels que* $A \in \mathrm{T}$. *Alors :*

Pour tout $X \in CAT$ *la 2-catégorie* $\mathrm{D_T}X$ *est la* T*-quasi-cocomplétion forte de* X, *c'est-à-dire que :*

1º $\mathrm{D_T}X$ *est une 2-catégorie* T*-quasi-cocomplète forte.*

2º Pour toute 2-catégorie T*-quasi-cocomplète forte* D *et tout foncteur* $F: X \to D$, *il existe un foncteur* $\bar{F}: \mathfrak{D}X \to D$ *(défini d'ailleurs par*

$$\bar{F}(p) = \text{quasi-colimite}(F.p) \quad \text{pour} \quad p \in \mathrm{D_T}X\ )$$

unique à un isomorphisme naturel près tel que :

a) Le diagramme

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\mathrm{U}_X"] \arrow[dr, "F"'] & & \mathfrak{D}_{\mathrm{T}}X \arrow[dl, "\bar{F}"] \\ & D & \end{tikzcd}$$

est commutatif.

b) Il existe un 2-foncteur $\mathrm{F}: \mathrm{D_T}X \to \mathrm{D}$ *préservant les* T*-quasi-colimites fortes et dont le restriction aux 1-morphismes est* F.

7.11. On appelle *quasi-extension de Kan* au-dessus d'une 2-catégorie D un diagramme

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "J"] \arrow[dr, "F"'] & \arrow[d, phantom, "\phi"] & Y \arrow[dl, "R"] \\ & \mathrm{D} & \end{tikzcd}$$

où J, F et R sont des foncteurs et $\phi: F \dashrightarrow RJ$ une transformation quasi-naturelle tels que, pour tout foncteur $S: Y \to \mathrm{D}$ on ait :

$$\forall \beta: F \overset{q.n.}{\dashrightarrow} SJ \quad \exists!\ \gamma: R \overset{q.n.}{\dashrightarrow} S \quad \beta = (\gamma J)\phi .$$

Si de plus les modifications se relèvent, on dit que l'on a une *quasi-exten-*

sion forte. Si on a

$$\forall\, \beta : F \overset{q.\ n.}{\dashrightarrow} SJ \qquad \exists !\ \ \gamma : R \overset{nat.}{\dashrightarrow} S \qquad \beta = (\gamma J)\phi$$

et en même temps relèvement des modifications, on dit que l'on a une *quasi-extension naturelle forte.*

7.11.1. Par exemple, on peut montrer que $J : Y \to X$ est de la forme k_π ssi on a une quasi-extension

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "\tilde{I}"'] & & X \arrow[dl] \\ & Cat & \end{tikzcd}$$

7.11.2. Si D est quasi-cocomplète forte (cf. 7.1), alors pour tous

$$k_\pi : K\pi \to X \quad \text{et} \quad F : K\pi \to \mathrm{D}\,,$$

on a une quasi-extension forte

$$\begin{tikzcd} K\pi \arrow[rr, "k_\pi"] \arrow[dr, "F"'] & & X \arrow[dl, "R"] \\ & \mathrm{D} & \end{tikzcd}$$

qui se calcule point par point par :

$$R(x) = \textit{quasi-colim}\,(\,k_\pi^{-1}(x) \hookrightarrow K\pi \xrightarrow{F} \mathrm{D}).$$

7.11.3. Si D est quasi-cocomplète forte, alors pour tout

$$J : Y \to X \quad \text{et} \quad F : Y \to \mathrm{D}\,,$$

on a une quasi-extension naturelle forte

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "J"] \arrow[dr, "F"'] & & X \arrow[dl, "R"] \\ & \mathrm{D} & \end{tikzcd}$$

qui se calcule point par point par :

$$R(x) = \textit{quasi-colim}(\,J{\downarrow}x \longrightarrow Y \xrightarrow{F} \mathrm{D}\,).$$

Ces résultats s'appliquent bien entendu à DX.

Comme corollaire de 7.11.2, si D est une 2-catégorie arbitraire, en cherchant à calculer une quasi-colimite

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr] \arrow[dr, "F"'] & & 1 \arrow[dl] \\ & \mathrm{D} & \end{tikzcd}$$

sous la forme

$$\begin{tikzcd} Y = K\pi \arrow[r, "k_\pi"] \arrow[dr, "F"'] & X \arrow[r] \arrow[d] & 1 \arrow[dl] \\ & \mathrm{D} & \end{tikzcd}$$

il vient :

7.12. Soit $\pi : X \to \mathit{Cat}$ un foncteur, et D une 2-catégorie. Si D admet toutes les quasi-colimites indexées par X et toutes les quasi-colimites fortes indexées par les $\pi(x)$, $x \in |X|$, alors D admet les quasi-colimites indexées par $K\pi$.

Ceci montre que la condition de K-stabilité imposée à la classe T de types de diagrammes par rapport à laquelle on fait avec $\mathrm{D}_{\mathrm{T}}X$ la lax-co-complétion de X est en fait indispensable.

REFERENCES.

1. J. BENABOU, Théories relatives à un corpus, *C. R. A. S.* Paris t. 281 (1975), p. 831.
2. D. BOURN, a) Natural anadeses and catadeses, *Cahiers Topo. et Géo. Dif.* XIV - 4, (1973), p. 371.
   b) *Ditopos ou une approche axiomatique de Cat*, I, Publ. Math. Univ. Lille I, n° 40, 1975.
   c) *Idem*, II, n° 85, 1976.
3. J. CELEYRETTE, *Catégories internes et fibrations*, Thèse, Univ. Paris-Nord, 1975.
4. Y. DIERS, *Semifications*, Exposé Sem. Bénabou, Paris, 1976.
5. C. EHRESMANN, a) Produit croisé de catégories, *C. R. A. S.*, t. 258 (1964), p. 2461.
   b) Structures quasi-quotients, *Math. Ann.* 171 (1967), p. 293.
   c) *Catégories et Structures*, Dunod, Paris, 1965.
6. J. GIRAUD, Méthode de la descente, *Bul. Soc. Math. France, Mémoire* n° 2 (1964).
7. J. W. GRAY, Formal Category Theory: Adjointness for 2-categories, *Lecture Notes in Math.* 391, Springer (1974). (On trouvera dans ce livre les références antérieures aux travaux de Gray sur la question.)
8. A. GROTHENDIECK, *Catégories fibrées et descente*, Sém. Géo. Alg., I. H. E. S., Paris 1961.
9. R. GUITART, a) Remarques sur les machines et les structures, *Cahiers Topo. et Géo. Dif.* XV - 2 (1974), p. 113.
   b) Fibrations, Diagrams and Decompositions, *Proc. Conf. on Cat. Alg.*, Isle of Thorns, Sussex, July 1976.
10. J. J. HORRENT, Sur les espèces de morphismes, *Esquisses Math.*, 18 (1973).
11. J. ISBELL, General functorial Semantics I, *Am. J. of Math.* 94 (1972).
12. G. M. KELLY, On clubs and doctrines, Cat. Sem. Sydney 1972-73, *Lecture Notes in Math.* 420, Springer (1974), p. 181.
13. G. M. KELLY and R. H. STREET, Review of the elements of 2-categories, Cat. Sem. Sydney, *Lecture Notes in Math.* 420 (1974), p. 75.
14. A. KOCK, *Limit monads in categories*, Aarhus Univ. Math. Inst., preprint series n° 6, 1967.
15. P. LEROUX, Structure et Sémantique abstraite, *Lecture Notes in Math.* 195, Springer (1971), p. 154.
16. R. PARE, *Thèse*, 1969 (exposé au Col. de Zürich, Août 1970).

17. J. PENON, *Catégories localement internes*, Preprint, Paris 1974.

18. J. ROSICKY, Extensions of functors and their applications, *Cahiers Topo. et Géo. Dif.* (à paraître).

19. R. H. STREET, a) Fibrations and Yoneda's Lemma in a 2-category, Cat. Sem. Sydney, *Lecture Notes in Math.* 420, Springer (1974), p. 104.
b) Elementary cosmoi, *Idem*, p. 134.

20. L. VAN DEN BRIL, Les quasi-quotients dans le transfert d'adjonctions aux catégories commas, *C. R. A. S.* Paris, t. 282 (1976), p. 1139.

21. V. ZOBERLEIN, *Doktrinen auf 2-Kategorien*, Thesis, Zürich 1973.

22. D. PUMPLUN und W. THOLEN (Editors), *Kategorienseminar*, 1, Fernuniversität, Hagen, 1976.

U. E. R. de Mathématiques
Tour 45 - 55, 5^e étage,
Université Paris 7
2 Place Jussieu
75005 PARIS

et

Hogere Zeevaartschool
Slykensteenweg
OSTENDE. BELGIQUE.