CAHIERS DE
TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
CATÉGORIQUES

RENÉ GUITART

Calcul des relations inverses

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 18, n° 1 (1977), p. 67-100

<http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1977__18_1_67_0>

CAHIERS DE TOPOLOGIE
ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE

Vol. XVIII-1 (1977)

CALCUL DES RELATIONS INVERSES

par René GUITART

Soit C un topos et $R \rightarrowtail X \times Y$ une relation de X vers Y dans C. Que signifie $R^{-1}: \Omega^Y \to \Omega^X$? Dans cet article on prouve qu'il y a autant de «bonnes» manières de définir des R^{-1} qu'il y a de manières de munir Ω d'un ordre complet.

En réalité on traite le problème dans le cadre plus général des monades involutives ; cela nous permet de traiter aussi comme exemple le cas des relations «floues» (fuzzy relations).

Dans «Monades involutives complémentées» [2] on a vu comment un calcul des relations et morphismes *duaux* (*) est possible sur une catégorie arbitraire, moyennant la présence d'une monade involutive. On a observé aussi que l'on ne pouvait pas alors décrire l'ordre sur chaque «objet des parties» PX, ni effectuer le calcul des morphismes *adjoints* (*), ni introduire les opérateurs d'*intersection*. Pour pallier cela on a introduit un calcul des *compléments* ; mais des cas aussi intéressants que celui des topos non booléens n'étaient pas couverts par ce procédé.

Ici on enrichit le système des monades involutives de la donnée d'une *transposition* qui (définition I.1) permet a priori d'introduire, pour toute relation $r: X \to PY$, un morphisme transposé (ou inverse)

$$r^t \ (\text{ou } r^{-1}): PY \to PX.$$

Ainsi les calculs des morphismes duaux et adjoints dans le cas ensembliste (ou plus généralement dans le cas de toute monade involutive complémentée) sont deux exemples de transposition (cf. II.1).

Dans la première partie on montre principalement que le *calcul des*

(*) Dans le cas ensembliste originel si $R: X \to PY$ est une relation, son morphisme dual est $R^d(B) = \{ x \in X \mid R(x) \cap B \neq \emptyset \}$, son adjoint $R^*(B) = \{ x \in X \mid R(x) \subset B \}$.

transpositions équivaut à celui des intersections (paragraphe I.3). On montre aussi qu'une transposition permet de définir une relation $\leqslant$ sur PX (qui dans le cas ensembliste devienne l'ordre sur 2^X), et permet d'effectuer un calcul équationnel d'adjonctions formelles en liaison (I.5) avec un concept de complétude locale. On termine (I.4) par un lemme permettant de transférer par un foncteur co-adjoint la donnée d'une transposition.

Dans la deuxième partie nous décrivons les transpositions qui peuvent être construites sur les monades involutives citées en [2]. On voit que le point de vue des transpositions permet de décrire les cas connus d'images réciproques d'un sous-objet par une relation (e.g. image réciproque inférieure, image réciproque supérieure). En particulier s'il s'agit de $\mathbf{L}$-relations dans *Ens* (i.e. applications $X \times Y \to L$, ...), on montre qu'il y a autant de théories de transpositions qu'il y a de structures de $\mathbf{L}$-modules sur L (paragraphe II.3.5). Dans le cas de la théorie des relations dans un topos élémentaire C, il y a autant de théories de transpositions que de structures de *treillis complet* (interne à C) sur Ω (paragraphe II.4).

Dans ces deux cas la donnée d'une transposition correspond donc à celle d'un deuxième ordre complet sur le treillis des propositions (i.e. L ou Ω) «cohérent» avec l'ordre usuel.

Cet article achève le développement de la théorie des relations *sans usage du produit cartésien* amorcée en [1]. Les liens entre calcul des relations et produit cartésien sont examinés dans [3] (où l'on trouve, en application, la classification des types de continuités pour les relations dans un topos). L'étude de ces liens sera poursuivie dans [4].

Une version préliminaire de ce texte et de [3] a été mise en circulation en Juillet 1976, lors du «Category Theory Meeting», Isle of Thorns.

SOMMAIRE

I. CAS GENERAL

1. TRANSPOSITION SUR UNE MONADE INVOLUTIVE.

Une *monade involutive* sur une catégorie C est un couple $(\mathbf{P}, I)$, où $\mathbf{P} = (P, a, S)$ est une monade sur C et où I est une involution sur la catégorie de Kleisli $Kl\,\mathbf{P}$ de $\mathbf{P}$. Les morphismes de $Kl\,\mathbf{P}$ sont appelés $\mathbf{P}$-relations, ou simplement *relations* ; si $r: X \to P\,Y$ est un morphisme de C, le morphisme de $Kl\,\mathbf{P}$ de X vers Y déterminé par r est noté $\bar{r}$. On désigne par $U_{\mathbf{P}}: Kl\,\mathbf{P} \to C$ le foncteur d'oubli canonique, et par $L_{\mathbf{P}}$ son adjoint à gauche.

La théorie des monades involutives a été introduite en [2] ; on se reportera donc là pour les exemples et la terminologie. Il est bon dans la suite d'avoir présent à l'esprit l'exemple *originel* qui a motivé [2], à savoir le cas où $C = Ens$, $P\,X = \{ A \mid A \subset X \}$, $a_X(x) = \{x\}$,

$$S_X(\mathcal{B}) = \cup \mathcal{B} = \{ x \in X \mid \exists B \in \mathcal{B},\ x \in B \},$$

et où, si $r: X \to P\,Y$ est dans C, la $\mathbf{P}$-relation duale $I(\bar{r})$ de $\bar{r}$ est $\bar{s}$, avec $s: Y \to P\,X$ déterminé par

$$s(y) = \{ x \in X \mid y \in r(x) \}.$$

Dans le cas général, rappelons que pour tout objet X de C on a

$$(1) \qquad a_X: X \to P\,X,$$

et que le morphisme $1_{P\,X}: P\,X = P\,X$ de C définit un morphisme de PX vers X dans $Kl\,\mathbf{P}$, noté $\bar{1}_{P\,X}: P\,X \to X$, qui est tel que

$$U_{\mathbf{P}}(\bar{1}_{P\,X}) = S_X: P^2 X \to P\,X.$$

On pose de plus :

$$(2) \qquad (U_{\mathbf{P}} . I)(\bar{1}_{P\,X}) = \psi_X: P\,X \to P^2 X,$$

$$(3) \qquad U_{\mathbf{P}} . I . L_{\mathbf{P}}^{op} = F: C^{op} \to C .$$

On a prouvé dans [2] que (F, a, ψ) détermine complètement $(\mathbf{P}, I)$: si $F: C^{op} \to C$ est un foncteur, si pour tout objet X de C

$$a_X: X \to F X \quad \text{et} \quad \psi_X: F X \to F^2 X$$

sont des morphismes de C, et si ces données satisfont quatre axiomes C_1 à C_4 (voir [2] page 7), alors le triplet (F, a, ψ) est associé comme ci-dessus à une unique monade involutive.

DEFINITION I.1. Soit $U = (\mathbf{P}, I) \approx (F, a, \psi)$ une monade involutive sur une catégorie arbitraire C. On appelle *transposition sur* U la donnée d'une transformation naturelle

$$(4) \qquad \tau : F \to FP$$

telle que pour tout objet X de C on ait

$$(5) \qquad F(S_X).\tau_X = \tau_{FX} \cdot \tau_X,$$

$$(6) \qquad F(a_X).\tau_X = Id_{FX} .$$

Si τ est une transposition sur U, le quadruplet (F, a, ψ, τ) est appelé *contexte relationnel.* Pour tout contexte relationnel (F, a, ψ, τ) on pose, pour $r: X \to PY$:

$$(7) \qquad r^d = F(r).\psi_Y ,$$

$$(8) \qquad r^t = F(r).\tau_Y ;$$

les morphismes r^d et r^t sont dits respectivement *dual* et *transposé de la relation* $\bar{r}$.

Ainsi si $z : Z \to PY$ est un «point» de PY, on définit deux «images réciproques» de z par r, à savoir $r^t.z$ et $r^d.z$:

$$\begin{tikzcd}
PX & & PY \arrow[ll, shift right, "r^t"'] \arrow[ll, shift left, "r^d"] & & Z \arrow[ll, "z"'] \\
X \arrow[urr, "r"'] & & & &
\end{tikzcd}$$

PROPOSITION I.2. *Soit (F, a, ψ) une monade involutive sur C. Il y a équivalence entre les trois données suivantes :*

(i) Une transposition τ sur U ;

(ii) Une transformation naturelle

$$(9) \qquad \theta : P \to F^2$$

déterminant un morphisme de monades de

$$\mathbf{P} = (P, a, S) \ \textit{vers} \ \Pi = (F^2, t, F t_F)$$

(avec $t = \psi . a$ *), donc telle que*

(10) $$\theta_X . S_X = F(\psi_{FX} . a_{FX}) . F^2(\theta_X) . \theta_{FX} ,$$

(11) $$\theta_X . a_X = \psi_X . a_X ;$$

(iii) Un foncteur $T : Kl(\mathbf{P})^{op} \to C$ *tel que*

(12)
$$\begin{tikzcd} C^{op} \arrow[r, "L_{\mathbf{P}}^{op}"] \arrow[dr, "F"'] & Kl(\mathbf{P})^{op} \arrow[d, "T"] \arrow[dl, phantom, "="] \\ & C \end{tikzcd}$$

PREUVE. Pour passer de (i) à (ii) on pose, avec $t_X = \psi_X . a_X$,

(13) $$\theta_X = F(r_X) . t_{FX}$$

et le reste suit aisément.

Pour l'équivalence entre (i) et (iii) on note que, si $r : X \to FY$, on a : $\bar{r} = \bar{1}_{PY} . L_{\mathbf{P}}(r)$ de sorte que $T . L_{\mathbf{P}}^{op} = F$ en posant

(14) $$r_X = T(\bar{1}_{PX}) ,$$

$$T(\bar{r}) = T(L_{\mathbf{P}} r) . T(\bar{1}_{PY}) = F(r) . r_Y$$

c'est-à-dire

(15) $$T(\bar{r}) = r^t .$$

Alors $T(a_X) = FX$ équivaut à (6) pour r, tandis que, si $r : X \to PY$ et $s : Y \to PZ$, l'égalité $T(\bar{s} . \bar{r}) = T(\bar{r}) . T(\bar{s})$ s'écrit

$$F(r) . F(P(s)) . F(S_Z) . r_Z = F(r) . r_Y . F(s) . r_Z ,$$

ce qui équivaut à

(16) $$FPs . FS_Z . r_Z = r_Y . Fs . r_Z ,$$

et ceci est satisfait si l'on a (5) et (4) (r naturelle).

Réciproquement si T est un foncteur, $s = 1_{FZ}$ dans (16) donne (5), et puis avec $f : Y \to Z$ et $s = a_Z . f$, (16) s'écrit

$$F(S_Z . P(a_Z . f)).r_Z = r_Y . F(f). F(a_Z).r_Z,$$
$$F(P(f)).r_X = r_Y . F(f).$$

OBSERVATION I.3. Si $C = Ens$ et si $F = A^{(-)}$ (ce qui, dans Ens, est le cas général, voir pour cela [2], III.2.7 p. 77), le lemme de Yoneda donne un isomorphisme

$$\phi : Nat(A^{(-)}, A^{P(-)}) \approx A^{PA} \quad \text{avec } \phi(r) = r_A(1_A)$$

(et inversement r_X s'obtient par

$$r_X(q) = \lambda . P(q) \quad \text{si } \phi(r) = \lambda \text{).}$$

Il est évident que l'on a (5) et (6) pour r ssi $\phi(r)$ est une **P**-algèbre en A ; donc (i) $\Longleftrightarrow$ (iii) s'interprète comme la caractérisation de Linton des **P**-algèbres, et (i) $\Longleftrightarrow$ (ii) s'interprète comme la description de Lawvere (citée dans Kock) des **P**-algèbres à l'aide de la monade de double dualisation $A^{A^{(-)}}$. On peut donc considérer que dans le cas général une transposition, déterminant a priori une notion d'«inverse» pour les relations, détermine en fait une structure de **P**-*algèbre sur* F *interne à* C. Cette notion sera précisée en I.3; dans l'exemple de II.2, on verra qu'une telle donnée est *plus stricte* que la donnée d'une **P**-algèbre sur F.

2. TRANSPOSITIONS, ORDRES ET ADJONCTIONS FORMELLES.

Soit dans ce paragraphe C une catégorie, $(\mathbf{P}, I, T) \approx (F, a, \psi, r)$ un contexte relationnel sur C au sens du paragraphe précédent.

On désigne par $P' : C \to C$ le foncteur

(17) $$P' = T . I^{op} . L_{\mathbf{P}} ,$$

et on a donc, pour tout morphisme $f : X \to Y$ de C,

(18) $$P'(f) = F(a_Y). F^2(f). r_X .$$

On pose aussi, avec $\psi_X . a_X = t_X$,

(19) $$J_X = F(t_X). F(r_{FX}). t_{F^2X} .$$

PROPOSITION I.4. *$J : PF \to F$ est naturelle, et on a*

$$r^t . J_Y = J_X . P(r^t) \quad \textit{pour tout } r : X \to FY$$

ssi, pour tout objet X de C, on a

(20) $$J_{FX}.P(r_X) = r_X.J_X\ ;$$

en particulier si $r = \check{\psi} = \pi$ *(voir II.1), la condition est satisfaite.*

La preuve est omise; I.4 est à rapprocher des calculs pages 56 à 60 de [2] sur les catégories $\mathcal{G}_a(\mathbf{U})$ et $\mathcal{G}_a^{\star}(\mathbf{U})$. Dans le cas où $C = Ens$, où $U = U_{\mathbf{L}}$ (voir II.3) et où r est associée suivant (113) à un pseudo-hom $\psi = ad(*) = \searrow\!\overset{*}{\smile}\!\nearrow$, la condition (20) prend la forme

(21) $\forall q: X \to L, \forall Q: L^X \to L,$

$$\operatorname*{Inf}_{Q'}\{\, Q'(q) \xrightarrow{*} \operatorname*{Sup}_{r_X(q') = Q'} Q(q')\} = \operatorname*{Inf}_{q'}\{\operatorname*{Sup}_{x} q\,x \otimes q'x \xrightarrow{*} Q(q')\}\ ,$$

car dans ce cas J_X se calcule suivant:

(22) $$J_X(Q)(x) = \operatorname*{Inf}_{q}(Q(q) \xrightarrow{*} q(x)).$$

En particulier dans le cas où $\mathbf{L} = \mathbf{2}$ et où r est l'opérateur π défini par:

(23) $$\pi_X(A) = \{\, A' \subset X \mid A' \subset A\,\}\ ,$$

on constate que J_X est *l'opérateur d'intersection.*

On a vu en [2], Appendice II.6, page 68, Proposition 7, comment la définition de l'ordre sur les L^X était liée aux morphismes S_X et J_X. Dans le cas général, on posera, pour tout X, Y et r, $s: X \to FY$,

(24) $$r <_I s \iff (\exists h: X \to F^2Y)(r = J_Y.h \text{ et } s = S_Y.h\,).$$

Dans le cas classique des ensembles, c'est ainsi que *l'ordre sur* PY est définissable à partir du contexte relationnel.

Dans les discussions ultérieures sur l'axiomatique des univers algébriques [4], il sera nécessaire de déterminer, en reprenant les points de II.3.2, les rapports entre $<_I$ et $\dashv$ que l'on introduit maintenant.

Soit $\Phi: FX \to FY$ et $\Psi: FY \to FX$ deux morphismes de C.

DEFINITION I.5. On dit que Ψ *admet* Φ *pour adjoint formel à droite* (resp. que Φ admet Ψ pour adjoint formel à gauche) et on écrit $\Psi \dashv \Phi$ si et seulement si le diagramme (25) commute, c'est-à-dire si $F\Psi.r_X = r_Y.\Phi$, ou bien, avec $\theta_X = Fr_X.t_{FX}$, si on a (26).

$$(25) \qquad \begin{array}{ccc} F^2X & \xrightarrow{F\Psi} & F^2Y \\ {\scriptstyle r_X}\uparrow & = & \uparrow{\scriptstyle r_Y} \\ FX & \xrightarrow[\Phi]{} & FY \end{array}$$

$$(26) \qquad \theta_X . \Psi = F(\Phi).\theta_Y .$$

Par exemple la naturalité de r et l'axiome (5) peuvent s'écrire

$$(27) \qquad P(f) \dashv F(f) \quad \text{et} \quad S_X \dashv r_X .$$

Pour tout $h : FY \to FX$ on introduit

$$(28) \qquad h^{\sim} = F(a_Y).F(h).r_X ,$$

$$(29) \qquad h^* = S_Y.F(h).r_X ,$$

$$(30) \qquad h_* = J_Y.F(h).\theta_X .$$

PROPOSITION I.6. *Si* $\Psi \dashv \Phi$, *alors* $\Phi = \Psi^{\sim}$. *Si de plus*

(31) $S_X.r_X = 1_{FX}$ *(resp.* (32) $J_X.\theta_X = 1_{FX}$*),*

alors on a $\Phi = \Psi^*$ *(resp.* $\Psi = \Phi_*$*).*

On notera que (31) est un cas particulier de l'axiome

$$(33) \qquad \forall f : X \to Y \text{ dans } C, \quad F(f)^* = P'f.$$

Comme autres axiomes «raisonnables» à imposer ultérieurement:

$$\theta_X \dashv J_X , \quad Ff \dashv P'f, \quad Ff = (Pf)^* = (P'f)_* ,$$
$$Pf = (Ff)_* , \quad P'f = (Ff)^* ,$$

tous vérifiés ainsi que (33) dans le cas ensembliste avec $r = \pi$ (cf. (23)).

PROPOSITION I.7. *Plaçons-nous dans le cas particulier où* $C = Ens$, *où* $U = U_{\mathbf{L}}$ *et* $r = j(ad(*))$ *(cf. II.3.4), où* $*$ *est un pseudo-tenseur admettant un neutre à gauche* ϵ *sur* $\mathbf{L}$. *Alors* $\Psi \dashv \Phi$ *équivaut aux deux conditions :*

(34) $\forall p : X \to L, \quad \forall q : Y \to L, \quad \Psi(q) \leqslant p \iff q \leqslant \Phi(p),$

(35) $\forall l \in L, \quad \forall q : Y \to L, \quad \Psi(l * q) = l * \Psi(q).$

En présence de (34), (35) équivaut à

$$(36)\quad \forall\, l \in L,\quad \forall p: X \to L,\quad \Phi(\, l \overset{*}{\frown} p) = l \overset{*}{\frown} \Phi(p).$$

PREUVE. La condition $\Psi \dashv \Phi$ s'écrit

$$(37)\quad (\forall p: X \to L)(\forall q: Y \to L)(\forall\, l \in L\,)$$
$$l \leqslant r_X(p)(\Psi(q)) \Longleftrightarrow l \leqslant (r_Y(\Phi(p)))(q),$$

ou encore, puisque

$$r_X(p)(p') = \operatorname*{Inf}_x \{\, p'x \overset{*}{\smile} px \,\},$$

en développant les adjonctions définissant $\overset{*}{\smile}$ et Inf,

$$(38)\quad (\forall p, q, l)(\, l * \Psi(q) \leqslant p \Longleftrightarrow l * q \leqslant \Phi(p)),$$

d'où (34) avec $l = \epsilon$. Puis remplaçant dans (34) q par $l * q$ et comparant avec (38), il vient (35). On procède de même pour (36) et inversement.

Dans le cas où $* = \otimes$, pour tout $\bar{r}$ il existe un Φ tel que $\bar{r} = \Phi$: en effet, $\bar{r}$ est S-compatible donc, d'après Proposition II.3, *sup*-compatible et compatible avec l'action de L. D'après II.3.2, on a donc un Φ tel que

$$\Phi.\bar{r} \geqslant 1 \quad \text{et} \quad \bar{r}.\Phi \leqslant 1\,,$$

soit (34). Mais en fait ceci est général: puisque l'on a (27) et que les adjonctions se composent, on obtient:

PROPOSITION I.8. *Dans le cas général, pour tout* $r: X \to FY$, *on a*

$$(39)\qquad S_Y . Pr = \bar{r} \dashv r^t = Fr . r_Y\,.$$

Le calcul des transpositions peut donc être vu comme un calcul formel d'adjonctions.

3. TRANSPOSITIONS ET INTERSECTIONS.

Soit C une catégorie et $U = (\mathbf{P}, I)$ une monade involutive sur C. Pour des objets X et X' de C, on désigne dans ce paragraphe par (X, X') l'ensemble $Hom_C(X, X')$ et par $(-,.)$ le bifoncteur Hom_C. L'involution I sur $Kl\,\mathbf{P}$ détermine une bijection

$$(40)\qquad b_{X'X}: (X', FX) \to (X, FX')$$

définie par $b_{X'X}(h) = F(h).t_X$, telle que

$$(41) \qquad b^{-1}_{X'X} = b_{XX'}$$

et que, pour tout $f\colon X \to Y$, on ait

$$(42) \qquad \begin{tikzcd}
(X', FX) \arrow[r, "b_{X'X}"] & (X, FX') \\
(X', FY) \arrow[u, "{(X', Ff)}"] \arrow[r, "b_{X'Y}"'] & (Y, FX') \arrow[u, "{(f, FX')}"']
\end{tikzcd}$$

Rappelons aussi que, suivant Linton, on a un produit fibré

$$(43) \qquad \begin{tikzcd}
Alg\,\mathbf{P} \arrow[r, "V"] \arrow[d, "U"'] \arrow[dr, phantom, "="] & Ens^{Kl\,\mathbf{P}^{op}} \arrow[d, "Ens^{L^{op}_{\mathbf{P}}}"] \\
C \arrow[r, "Yoneda"'] & Ens^{C^{op}}
\end{tikzcd}$$

qui est déterminé en associant à tout foncteur

$$\Sigma\colon Kl\,\mathbf{P}^{op} \to Ens \quad \text{tel que} \quad \Sigma . L^{op}_{\mathbf{P}} = (-, A)$$

l'algèbre en A

$$(44) \qquad \sigma = \Sigma(\bar{1}_{PA})(1_A)\,,$$

et en associant, inversement, à une algèbre $\sigma\colon PA \to A$, le foncteur Σ défini, pour $\phi\colon X' \to PX''$, $\psi\colon X'' \to A$, par

$$(45) \qquad \Sigma(\bar{\phi})(\psi) = \sigma . P\psi . \phi\,.$$

Soit maintenant r une transposition sur $(\mathbf{P}, I)$ déterminée par un foncteur T tel que

$$F = T . L^{op}_{\mathbf{P}} \quad \text{et} \quad T(\bar{1}_{PX}) = r_X$$

(Proposition I.2). Pour tout objet X de C on pose

$$(46) \qquad \theta^{*}(X) = (X, T(-))$$

et on définit $\theta(X)$ pour tout $\bar{r}\colon X'' \to X'$ de $Kl\,\mathbf{P}$ par

$$(47) \qquad \theta(X)(\bar{r}) = b^{-1}_{X''X} . \theta^{*}(X)(\bar{r}) . b_{X'X}$$

tandis que, pour $f\colon X \to Y$, on pose

(48) $\theta(f)_{X'} = (X', Ff).$

De l'hypothèse sur T et de (42) il résulte que θ détermine un foncteur, noté $\theta\colon C^{op} \to Ens^{Kl\,\mathbf{P}^{op}}$ tel que pour tout X on ait

(49) $\theta(X).L_{\mathbf{P}} = (-, FX),$

et, avec (43), on a donc un unique foncteur $R\colon C^{op} \to Alg\,\mathbf{P}$ tel que

$$U.R = F \quad \text{et} \quad V.R = \theta\ .$$

Réciproquement soit $R\colon C^{op} \to Alg\,\mathbf{P}$ un foncteur tel que $U.R = F$. On pose $\theta = V.R$ et on introduit $\theta^{\#}$ par (47) et (48). On a donc, pour tout objet X de C, un diagramme

(50)
$$\begin{tikzcd} C^{op} \arrow[rr, "L_{\mathbf{P}}^{op}"] \arrow[drr, "{(X, F(-))}"'] & & Kl\,\mathbf{P}^{op} \arrow[d, "\theta^{\#}(X)"] \\ & & Ens \end{tikzcd}$$

De (47) appliqué à $\bar{r} = \dot{1}_{FX'}$ et de (42) il résulte que $\theta^{\#}(X)(\dot{1}_{FX'})$ détermine une transformation naturelle en X: $(X, FX') \to (X, F^2X')$; d'après le Lemme de Yoneda on en déduit

(51) $\theta^{\#}(X)(\dot{1}_{FX'}) = (X, r_{X'})$

avec

(52) $r_{X'} = \theta^{\#}(FX')(\dot{1}_{FX'})(1_{FX'})\ .$

On définit alors $T\colon Kl\,\mathbf{P}^{op} \to C$ par

(53) $T(L_{\mathbf{P}}^{op}(f)) = F(f)$ et $T(\dot{1}_{FX'}) = r_{X'}.$

T est bien un foncteur, car pour tout X on a $(X,-).T = \theta^{\#}(X)$ qui est un foncteur; c'est l'unique foncteur tel que $T.L_{\mathbf{P}}^{op} = F$ et que, pour tout X, on ait $(X,-).T = \theta^{\#}(X)$.

Les passages de T à R et de R à T sont évidemment inverses l'un de l'autre.

Tenant compte de (44) et de $T(\dot{1}_{PX}) = r_X$ on obtient

$$(54)\qquad R(X) = \theta(X)(\bar{1}_{P^2X})(1_{PX})$$

$$= (b^{-1}_{F^2X\,X}\cdot(X, T(\bar{1}_{P^2X})).\, b_{FX\,X})(1_{FX})$$

$$= b^{-1}_{F^2X\,X}((X, \tau_{FX})(t_X)) = b^{-1}_{F^2X\,X}(\tau_{FX}\cdot t_X),$$

$$(55)\qquad R(X) = F(t_X).\, F(\tau_{FX}).\, t_{F^2X} = J_X\ .$$

Si l'on tient compte de (45) et (52), on a

$$(56)\qquad \tau_X = \theta^{*}(FX)(\bar{1}_{FX})(1_{FX})$$

$$= F(\theta(FX)(\bar{1}_{FX})(t_X)).\, t_{FX}$$

$$= F(J_{FX}.\, P(t_X).\, 1_{FX}).\, t_{FX},$$

$$(57)\qquad \tau_X = F(P\,t_X).\, F(J_{FX}).\, t_{FX}\ .$$

On vient de prouver

PROPOSITION I.9. *Soit* (F, a, ψ) *une monade involutive sur* C. *Il y a équivalence entre les trois données suivantes :*

(i) Une transposition τ *sur* U *(cf. Définition I.1 et Proposition I.2).*

(ii) Un foncteur $R: C^{op} \to Alg\,\mathbf{P}$ *tel que*

$$(58)\qquad \begin{tikzcd} C^{op} \arrow[r, "R"] \arrow[dr, "F"'] \arrow[dr, phantom, shift left=3, "="] & Alg\,\mathbf{P} \arrow[d, "U"] \\ & C \end{tikzcd}$$

(iii) Une transformation naturelle

$$(59)\qquad J: PF \to F$$

telle que, pour tout objet X *de* C, *on ait*

$$(60)\qquad J_X\cdot a_{FX} = 1_{FX},$$

$$(61)\qquad J_X.\, PJ_X = J_X\ .\ S_{FX}\ .$$

Un J *vérifiant (iii) est appelé un opérateur d'intersection sur* $(\mathbf{P}, I)$. *Le calcul des transpositions peut donc être vu comme un calcul formel d'in-*

tersections.

4. LEMME DE TRANSFERT DES TRANSPOSITIONS ET CONTEXTES RELATIONNELS.

Soit $G: C \to D$ un foncteur ayant un adjoint à gauche $G': D \to C$, avec $\epsilon: 1_D \to GG'$ et $\eta: G'G \to 1_C$ les transformations naturelles définissant l'adjonction (satisfaisant donc à

$$G\eta . \epsilon_G = 1_G \quad \text{et} \quad \eta_{G'} . G'\epsilon = 1_{G'}).$$

Cette adjonction est notée $(G, G', \epsilon, \eta) = g$.

Soit $\mathbf{P} = (P, a, S)$ une monade sur C, $Kl\,\mathbf{P}$ sa catégorie de Kleisli et $\hat{\mathbf{P}} = g\mathbf{P}$ la monade sur D associée à $L_{\mathbf{P}} . G' \dashv G . U_{\mathbf{P}}$, que l'on écrit $\hat{\mathbf{P}} = (\hat{P}, \hat{a}, \hat{S})$, avec

(62) $\hat{P} = G.P.G'$, $\hat{a} = G(a_{G'}).\epsilon$, $\hat{S} = G(S_{G'}. P(\eta_{PG'}))$.

Dans [2], pages 70-71, Lemme III.1.2, on a vu que, si l'on a une involution I sur $Kl\,\mathbf{P}$, on en déduit une involution sur $Kl\,\hat{\mathbf{P}}$. En fait cela pourrait se déduire du Lemme suivant :

Soit $(Kl\,\mathbf{P})_{G'}$ la catégorie ayant pour objets ceux de D et où

(63) $\quad (Kl\,\mathbf{P})_{G'}(X, X') = Kl\,\mathbf{P}(G'X, G'X')$.

Pour $\bar{r}: X \to X'$ dans $Kl\,\hat{\mathbf{P}}$ défini par $r: X \to GPG'X'$ dans D, on pose

$$r' = \eta_{PG'X'} . G'(r) : G'X \to PG'X'$$

et $\bar{r}': G'X \to G'X'$ dans $Kl\,\mathbf{P}$ est désigné par $\bar{G}'(\bar{r})$.

LEMME I.10. *L'application $\bar{G}': Kl\,\hat{\mathbf{P}} \to (Kl\,\mathbf{P})_{G'}$ est un foncteur inversible et, définissant $k: (Kl\,\mathbf{P})_{G'} \to Kl\,\mathbf{P}$ par $k(X, f, X') = (G'X, f, G'X')$, on a*

(64) $\quad U_{\hat{\mathbf{P}}} = G.U_{\mathbf{P}}.k.\bar{G}'$ *et* $L_{\mathbf{P}}.G' = k.\bar{G}'.L_{\hat{\mathbf{P}}}$.

En effet, r' défini par $r' = \eta_{PG'X'}. G'r$ est caractérisé par $Gr'.\epsilon_X = r$, et le reste suit. En particulier $\bar{G}'^{-1}$ associe à $\bar{r}': FX \to FX'$ le $\bar{r}$ associé à $r = Gr'.\epsilon_X$.

LEMME I.11. *Avec les notations ci-dessus soit I une involution sur $Kl\,\mathbf{P}$ et T une transposition sur $(\mathbf{P}, I) = U$ (Proposition I.2). Alors on a une* *involution* $\hat{l}: Kl\,\hat{\mathbf{P}}^{op} \to Kl\,\hat{\mathbf{P}}$ *telle que*

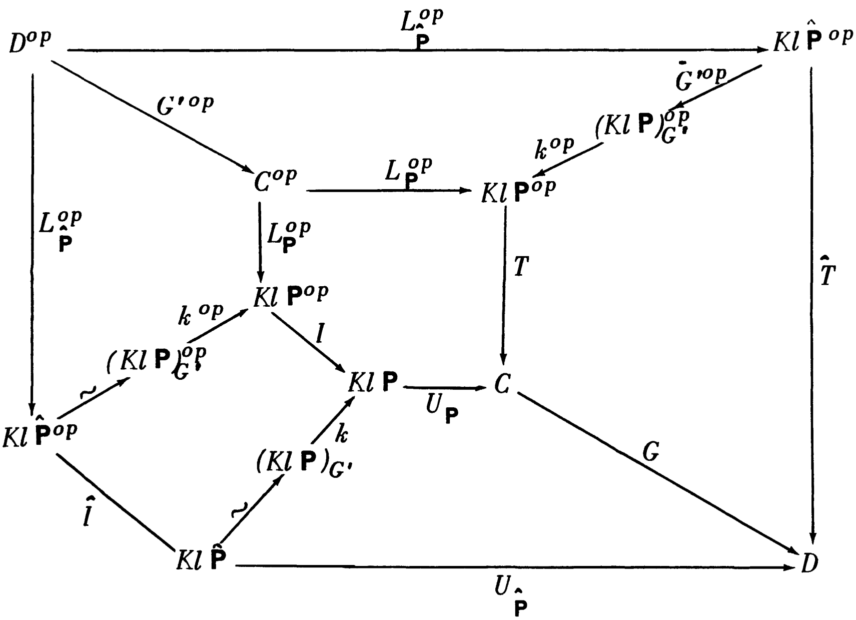
(65) $$l.k^{op}.\bar{G}'^{op} = k.\bar{G}'.\hat{l}$$

(voir [2], *page 71), et en posant*

(66) $$\hat{T} = G.T.(k.\bar{G}')^{op},$$

on détermine une transposition sur $\hat{U} = (\hat{\mathbf{P}}, \hat{l})$.

PREUVE. On conclut en considérant le diagramme (67)



LEMME I.12. *Si* $(\mathbf{P}, l, T)$ *est présenté sous la forme* (F, a, ψ, τ), *alors* $(\hat{\mathbf{P}}, \hat{l}, \hat{T})$ *se présente sous la forme* $(\hat{F}, \hat{a}, \hat{\psi}, \hat{\tau})$, *avec*

(68) $$\hat{F} = G.F.G'^{op},$$

(69) $$\hat{a} = G(a_{G'}).\epsilon\,,$$

(70) $$\hat{\psi} = G(F\eta_{FG'}.\psi_{G'}),$$

(71) $$\hat{\tau} = G(F\eta_{FG'}.\tau_{G'}).$$

PREUVE. C'est clair pour $\hat{a}$ et $\hat{F}$. Ensuite on a

$$\hat{\psi} = \hat{S}_{GPG'}.\,GPG'(G(F(\eta_{PG'}).\psi_{G'}.\,a_{G'}).\epsilon)$$

et, en développant, le résultat, en tenant compte de ce que les Ff sont S-compatibles (cf. [2] , page 58, b). Enfin :

$$r_X = T(\bar{1}_{PX}), \text{ d'où } \hat{r} = \hat{T}(\bar{\eta}_{PG'}) = \hat{T}(\bar{1}_{PG'}.(\overline{a_{PG'}.\eta_{PG'}}))$$

(voir la définition de $k.\bar{G}'$).

LEMME I.13. *Sous les hypothèses de I.12, on a, avec*

$$J = Ft.Fr_F.t_{F^2} \quad et \quad \hat{J} = \hat{F}\hat{t}.\hat{F}\hat{r}_{\hat{F}}.\hat{t}_{\hat{F}^2},$$

$$(72) \qquad \hat{J} = G(J_{G'}.P(\eta_{PG'})).$$

PREUVE. Soit

$$A = G(J_{G'}.P(\eta_{PG'})) = G(J_{G'}.P(\eta_{PG'})).G\eta_{PG'GPG'}.\epsilon_{(GPG')^2}$$

et soit

$$\hat{J} = GF(u).Gt_{G'(GFG')^2}.\epsilon_{(GPG')^2}, \text{ où}$$

$$u = \eta_{FG'(GFG')^2}.G'G(F\eta_{FG'GFG'}.r_{G'GFG'}.F\eta_{FG'}.t_{G'}).G'\epsilon .$$

On a $\hat{J} = A$ ssi $A' = B$, où

$$A' = Ft_{G'}.Fr_{FG'}.t_{F^2G'}.P\eta_{PG'}.\eta_{PG'GPG'},$$

$$\begin{aligned} B &= F(u).t_{G'(GFG')^2} \\ &= F(F\eta_{FG'GFG'}.r_{G'GFG'}.F\eta_{FG'}.t_{G'}.\eta_{G'}.G'\epsilon).t_{G'(GFG')^2} \\ &= Ft_{G'}.F^2\eta_{FG'}.Fr_{G'GFG'}.F^2\eta_{FG'GFG'}.t_{G'(GFG')^2} \\ &= Ft_{G'}.F^2\eta_{FG'}.Fr_{G'GFG'}.t_{FG'GFG'}.\eta_{PG'GPG'} \\ &= Ft_{G'}.F(r_{G'GFG'}.F\eta_{FG'}).t_{FG'GFG'}.\eta_{PG'GPG'} \\ &= Ft_{G'}.F(FP\eta_{PG'}.r_{FG'}).t_{FG'GGG'}.\eta_{PG'GPG'}, \end{aligned}$$

ce qui est clairement A'.

5. APPENDICE. Interprétation topologique des monades, complétude locale de Cauchy-Lawvere et axiome CL.

1° On peut *interpréter topologiquement les monades* comme suit :

Soit C une catégorie, $\mathbf{T} = (T, \eta, \delta)$ une monade sur C. Soit B une sous-catégorie de $Kl\,\mathbf{T}$ et $Kl\,\mathbf{T} \twoheadrightarrow \Gamma$ une catégorie quotient de $Kl\mathbf{T}$. On pose $\beta = (\mathbf{T}, B, \Gamma)$.

VOCABULAIRE. Un morphisme $x: Z \to X$ sera appelé un *point de* X, un morphisme $s: Z \to TX$ sera appelé une *β-suite sur* X, et pour tout point x de X la suite $\eta_X . x$ est vue comme la *suite constante sur* x, c'est-à-dire $(x, x, \dots)$. Si $S: Z \to T^2 X$ est une *suite double dans* X, alors $\delta_X . S$ est appelée la *suite diagonale de* S. On appelle *suite bornée* tout morphisme de B.

Si $f, g: Z \rightrightarrows TX$ ont même image dans Γ on écrit $f \sim g$; en particulier on dit que $s: Z \to TX$ *converge vers* $x: Z \to X$ si $s \sim \eta_X . x$ et on écrit $s \to x$.

Un $j: X \to Y$ de C est dit *β-dense* s'il existe un $d: Y \to TX$ tel que $T(j). d \sim \eta_Y$. Grâce à la composition dans $Kl\,\mathbf{T}$, c'est-à-dire au procédé diagonal δ, on voit que le composé de morphismes denses est dense.

Un $j: X \to Y$ de C est dit *β-fermé* si, pour tout $s: Z \to TX$ tel que $Tj . s \sim \eta_Y . y$, il existe un $x: Z \to X$ tel que $j . x = y$ et $s \sim \eta_X . x$.

Un objet j de X est dit *β-localement complet* si toute suite bornée dans X est convergente.

2° Soit $\mathbf{V}$ une catégorie monoïdale fermée symétrique $\mathbf{V}$-complète et $\mathbf{V}$-cocomplète, et $\mathbf{V}$-*cat* la catégorie des $\mathbf{V}$-catégories. Un objet X de $\mathbf{V}$-*cat* est dit *complet au sens de Cauchy-Lawvere* si tout $\mathbf{V}$-bimodule $\mathbf{1} \longrightarrow\!\!\!\!\!\!\!\!+\;\;\; X$ qui a un adjoint à droite est représentable par un foncteur $\mathbf{1} \to X$. Lawvere a observé que pour $\mathbf{V} = \mathbf{R}^+$, on retrouve ainsi la complétude de Cauchy des espaces métriques.

En fait, en considérant la «monade» illégitime $\mathbf{V}^{(-)^{op}}$ de la $\mathbf{V}$-complétion sur $\mathbf{V}$-*cat*, la Cauchy-Lawvere complétude peut se décrire comme suit: Un foncteur $f: Y \to \mathbf{V}^{X^{op}}$ est dit avoir un $\mathbf{V}^{(-)^{op}}$*-adjoint à droite* si sa $\mathbf{V}$-extension de Kan $\bar{f}: \mathbf{V}^{Y^{op}} \to \mathbf{V}^{X^{op}}$ admet un $\mathbf{V}$-adjoint à droite compatible avec la multiplication de la monade $\mathbf{V}^{(-)^{op}}$, et ceci de sorte que les $\mathbf{V}$-transformations naturelles d'adjonction soient aussi compatibles avec la multiplication. Alors un objet X de $\mathbf{V}$-*cat* est Cauchy-Lawvere complet ssi tout $f: \mathbf{1} \to \mathbf{V}^{X^{op}}$ ayant un $\mathbf{V}^{(-)^{op}}$-adjoint à droite se représente sous la forme $f \approx Yoneda_X . \phi$.

Alors avec $C = \mathbf{V}\text{-}cat$, $\mathbf{T} = \mathbf{V}^{(-)^{op}}$, B la catégorie des $f: Y \to \mathbf{V}^{X^{op}}$, ayant un $\mathbf{V}^{(-)^{op}}$-adjoint à droite, et Γ la catégorie quotient de $\mathbf{V}$-*cat* par les isomorphismes naturels, puis $\beta = (\mathbf{T}, B, \Gamma)$, la Cauchy-Lawvere complétude équivaut à la β-locale complétude.

3° On peut appliquer le point de vue de 1 à l'exemple suivant : Soit C une catégorie, $\mathbf{P} = (P, a, S)$ une monade sur C, I une involution sur $Kl\,\mathbf{P}$ et T une transposition sur $(\mathbf{P}, I)$. On désigne par B la sous-catégorie de $Kl\,\mathbf{P}$ constituée des $r: X \to FY$ tels que $\bar{r}$ admette un adjoint à droite (au sens de I.5) qui soit S-compatible. Autrement dit B est formée des $r: X \to FY$ tels que

(73) $$S_X . P(Fr . r_Y) = Fr . r_Y . S_Y .$$

Alors avec $\Gamma = Kl\,\mathbf{P}$ un objet Y de C est β-localement complet (cf. 1) pour $\beta = (\mathbf{P}, B, \Gamma)$ ssi

(Condition CL) Pour tout X et $r: X \to FY$ l'existence d'un $s: Y \to FX$ tel que

(74) $$Fr . r_Y = S_X . Ps$$

entraîne l'existence d'un $f: X \to Y$ tel que

(75) $$r = a_Y . f .$$

Cet axiome CL *est vérifié par tout* Y *dans le cas ensembliste originel* ; en effet, dans ce cas, cela revient à dire que, si $\Phi: PX \to PY$ est S-compatible et J-compatible, alors

$$\Phi = Ff \quad \text{pour un } f: Y \to X$$

(voir [1]).

II. EXEMPLES DE TRANSPOSITIONS

1. SUR LES MONADES INVOLUTIVES COMPLEMENTEES.

PROPOSITION II.1. *Soit C une catégorie et $U = (F, a, \psi)$ une monade involutive sur C. Alors :*

(i) ψ est une transposition sur U.

(ii) Si τ est une transposition arbitraire sur U et $\nu: F \to F$ une transformation naturelle involutive ($\nu^2 = 1$), alors le $\check{\tau}$ défini, pour un objet X de C, par

(76) $$\check{\tau}_X = \nu_{FX} \cdot \tau_X \cdot \nu_X$$

est une transposition sur U.

(iii) En particulier si $((F, a, \psi), \nu)$ est une monade involutive complémentée (voir [2]), alors ψ et π (défini par

(77) $$\pi_X = \check{\psi}_X = \nu_{FX} \cdot \psi_X \cdot \nu_X \,)$$

sont deux transpositions sur U.

2. SUR LA CATEGORIE DES RELATIONS.

Reprenons l'exemple page 43 de [2] d'une monade involutive sur la catégorie des relations entre ensembles que nous désignerons par Rel ici (au lieu de $\mathfrak{M}^{\tau o}$ dans [2]).

Le foncteur $R \longmapsto A \times d(R)$ de Rel^{op} vers Rel est son propre adjoint. Pour tout X soit $i_X: X \to A \times X$ la relation inverse de la projection canonique sur X et soit $\psi_X: A \times X \to A \times (A \times X)$ la relation

$$w'_X \cdot (\Delta_A \times 1_X) \,,$$

où $w'_X: (A \times A) \times X \to A \times (A \times X)$ est l'isomorphisme d'associativité. Alors $(A \times (-)^d, i, \psi)$ est encore une monade involutive, désignée par $A \times (-)$ et on sait (I.4.3, page 43 de [2]) que, si **P** est la monade «des parties» associée, une **P**-algèbre est la donnée d'une application $\lambda: X \to A$. En particulier une **P**-algèbre sur

$$Rel(-, A) = Rel(1, -) \,.\, A \times (-)^d$$

est la donnée d'une application $\lambda : A \to A$ arbitraire.

Soit par ailleurs τ une transposition sur $A\times(-)$, de sorte que, pour tout X,

$$\tau_X : A\times X \to P(A\times A\times X) .$$

D'après (6) on a

$$\tau_X(a,x) = \omega_X(a,x)\times\{(a,x)\} ,$$

où $\omega_X : A\times X \to P(A)$ est une application telle que, pour tout a, x, on ait

$$\omega_X(a,x) \neq \emptyset .$$

Ensuite, la naturalité de τ s'écrit, pour toute relation $R: X \to Y$ et pour tout a de A et x de X :

$$\bigcup_{z\in R(x)} \omega_Y(a,z)\times\{(a,z)\} = \bigcup_{e\in\omega_X(a,x)} \{(e,a)\}\times R(x) \quad ;$$

ceci se réduit, après calculs, à :

$$\forall x\in X,\ \ \forall y\in Y,\ \ \forall a,b\in A\ \ (b\in\omega_Y(a,t) \Longleftrightarrow b\in\omega_X(a,x)),$$

ce qui veut dire que l'on a une application $\omega : A \to P(A)$ telle que

$$\omega_X(a,x) = \omega(a) \quad \text{et} \quad \omega(a)\neq\emptyset, \forall a\in A .$$

Enfin, l'axiome (5) s'écrit:

$$\forall a,b\in A\ \ (b\in\omega(a) \Longleftrightarrow \exists c\in\omega(a)(c=a \ \text{ et } \ b\in\omega(c))),$$

ce qui signifie $\omega(a) = \{a\}$.

PROPOSITION II.2. *Pour la monade involutive $A\times(-)$ sur Rel, il existe une seule transposition (à savoir ψ).*

3. SUR LES MONADES INVOLUTIVES $U_{\mathbf{L}}$ DANS *Ens*.

Soit $\mathbf{L}$ un *monoïde abélien complet* (m.a.c.). On a donc

$$\mathbf{L} = (L, \leqslant, \otimes) ,$$

où $(L,\leqslant)$ est un treillis complet de plus petit élément noté o (resp. de plus grand élément noté 1) et où $\otimes$ est une loi de monoïde abélien sur L d'élément neutre e et compatible avec les *sups* arbitraires pour l'ordre $\leqslant$ (voir [2] page 72). On a une monade involutive $U_{\mathbf{L}}$ sur *Ens* définie par le couple $(\mathbf{P_L}, I)$, où $\mathbf{P_L} = (P_L, \mathcal{Y}, Sup)$ avec

(78) $$\mathcal{Y}_X(x)(x') = \begin{cases} e & \text{si } x' = x \\ o & \text{si } x' \neq x, \end{cases}$$

(79) $$Sup_X(Q)(x) = \underset{q}{Sup}\{ Q(q) \otimes q(x)\} = S_X(Q)(x),$$

(80) $$P_L(f)(p)(y) = \underset{x}{Sup}\{p(x) \mid f(x) = y\},$$

(81) $$I(\bar{r}) = \bar{s}, \text{ avec } s(y)(x) = r(x)(y).$$

Sous la forme (F, a, ψ) cette monade involutive se présente comme étant $(\mathbf{L}(-), \mathcal{Y}, \psi)$, avec

(82) $$\mathbf{L}(x) = L^X, \ L(f) = L^f, \text{ i.e. } \mathbf{L}(f)(p) = p \cdot f,$$

(83) $$\psi_X(p)(p') = \underset{x}{Sup}\{ p(x) \otimes p'(x)\}.$$

On a montré dans [2] que la catégorie $Kl\,\mathbf{P_L}$ des $\mathbf{P_L}$-relations est est isomorphe à la catégorie $\mathbf{L}$-*rel* des $\mathbf{L}$-relations (ou relations $\mathbf{L}$-floues au sens de Goguen, ou $\mathbf{L}$-criblages dans [2]), dont les objets sont les ensembles, dont les morphismes de X vers Z sont les applications $R: X \times Z \to L$ le composé $R' \odot R$ de R avec $R': Z \times Z' \to L$ étant défini par

(84) $$(R' \odot R)(x, z') = \underset{z}{Sup}\{ R(x, z) \otimes R'(z, z')\}.$$

On retrouve l'exemple originel de la théorie classique des relations pour $L = 2 = \{0, 1\}$, $0 < 1$, $\otimes = \wedge$.

3.1. L-linéarité.

Pour tout ensemble X on note $a_X: L \times L^X \to L^X$ l'action de L sur L^X définie par

(85) $$a_X(\lambda, p)(x) = \lambda \otimes p(x),$$

pour tout λ de L, tout $p: X \to L$ et tout x de X.

On désigne par $\leqslant^X$ l'ordre sur L^X produit de X exemplaires de l'ordre $\leqslant$ sur L, et par

$$Sup: \mathfrak{P}(L^X) \to L^X$$

l'opération « supremum » associée.

On appelle $Rel_{\mathbf{L}}$ la catégorie ayant pour objets les ensembles, où un morphisme de X vers Y est un triplet (Y, Φ, X) où $\Phi: L^X \to L^Y$ est une application telle que

$$(86)\quad (a)\quad \begin{array}{ccc} L\times L^X & \xrightarrow{a_X} & L^X \\ {\scriptstyle 1_L\times\Phi}\downarrow & = & \downarrow{\scriptstyle\Phi} \\ L\times L^Y & \xrightarrow{a_Y} & L^Y \end{array} \qquad (b)\quad \begin{array}{ccc} \mathfrak{P}(L^X) & \xrightarrow{Sup} & L^X \\ {\scriptstyle \mathfrak{P}(\Phi)}\downarrow & = & \downarrow{\scriptstyle\Phi} \\ \mathfrak{P}(L^Y) & \xrightarrow{Sup} & L^Y \end{array}$$

et où la composition se fait suivant

$$(Z, \Psi, Y).(Y, \Phi, X) = (Z, \Psi.\Phi, X).$$

Les éléments de $Rel_{\mathbf{L}}$ seront dits *applications* **L**-*linéaires* entre **L**-modules de type L^X.

PROPOSITION II.3. *En associant à* $R: X\times Y \to L$ *l'application* $\bar{R}: L^X \to L^Y$ *définie par:*

$$(87)\qquad \bar{R}(p)(y) = Sup\,\{p(x)\otimes R(x,y)\},$$

on détermine un isomorphisme de **L**-*rel vers* $Rel_{\mathbf{L}}$, *de sorte que la théorie des* **L**-*relations peut être vue comme l'algèbre* **L**-*linéaire.*

PREUVE. Puisque $\bar{R} = S_Y.P_{\mathbf{L}}(\tilde{R})$, où $\tilde{R}: X \to L^Y$ est définie par

$$\tilde{R}(x)(y) = R(x,y),$$

et vu les différentes présentations des catégories de Kleisli, tout revient à prouver que $\Phi: L^X \to L^Y$ rend commutatifs les diagrammes indiqués ssi on a $S_Y.P_{\mathbf{L}}(\Phi) = \Phi.S_X$ (car alors $\Phi = \bar{R}_\Phi$ pour un unique R_Φ, à savoir

$$R_\Phi(x,y) = (\Phi\,.\,\mathcal{Y}_X)(x)(y)).$$

Cela s'écrit aussi

$$(88)\qquad \Phi = S_Y.P_{\mathbf{L}}(\Phi).P_{\mathbf{L}}(\mathcal{Y}_X),$$

ou encore

$$(89)\qquad \Phi(p)(y) = \underset{x}{Sup}\,\{p(x)\otimes((\Phi\,.\,\mathcal{Y}_X)(x))(y)\},$$

ce qui se décompose facilement en les deux conditions données. On remarquera que, si

$$\mathbf{L} = (\{0, 1\}, \leqslant, \wedge) = \mathbf{2}\,,$$

la commutativité de (86)(a) signifie que $\Phi(\emptyset) = \emptyset$ et est donc entraînée par la commutativité de (86)(b). Mais ceci est évidemment faux en général.

3.2. Adjonctions au sens classique (rappel et notations).

Si $(L, \leqslant) = \bar{L}$ et $(L', \leqslant') = \bar{L}'$ sont deux treillis complets, pour toute application $f\colon L \to L'$ on pose

$$f^*(x') = Sup\,\{x \mid f(x) \leqslant x'\} \tag{90}$$

pour tout x' de L', de sorte que f^* est croissante et que

$$f^* \cdot f \geqslant Id_L\,. \tag{91}$$

Si de plus f est *sup*-compatible, on a aussi

$$f \cdot f^* \leqslant Id_{L'}\,. \tag{92}$$

Si f est une application croissante de L vers L', on dit que f possède une application *adjointe à droite* s'il existe une application croissante g de L' vers L telle que

$$g \cdot f \geqslant Id_L \quad \text{et} \quad f \cdot g \leqslant Id_{L'}\,; \tag{93}$$

on écrit alors $f \dashv g$.

Une telle application g existe, et est alors unique et égale à f^* ssi f est *sup*-compatible. Dans ce cas la propriété d'adjonction s'écrit

$$(\forall x \in L)(\forall x' \in L')(\,x \leqslant f^*(x') \Longleftrightarrow f(x) \leqslant x'\,) \tag{94}$$

et on a

$$f(x) = Inf\{\,x' \mid x \leqslant' f^*(x')\,\}. \tag{95}$$

Si $f \dashv g$, on écrira donc $g = f^*$ ou $f = g_*$.

Ainsi, si L^X et L^Y sont munis des ordres $\leqslant^X$ et $\leqslant^Y$, pour tout $f\colon X \to Y$ l'application $\mathbf{L}(f) = L^f$ admet $P_{\mathbf{L}}(f)$ comme adjointe à gauche et a pour adjointe à droite l'application $P'_{\mathbf{L}}(f)$ définie par

$$P'_{\mathbf{L}}(f)(p)(y) = \underset{x}{Inf}\{\,p(x) \mid f(x) = y\}\,. \tag{96}$$

Si $\mathbf{L}$ est fixé, pour employer les notations usuelles, $P_{\mathbf{L}}(f)$, $\mathbf{L}(f)$, $P'_{\mathbf{L}}(f)$

seront désignés par $\exists f$, L^f et $\forall f$, de sorte que l'on aura:

$$(97) \qquad \exists f \dashv L^f \dashv \forall f.$$

3.3. Images réciproques inférieures et supérieures.

Pour tout $R: X\times Y \to L$ on désigne par $R^*: L^Y \to L^X$ l'application ordonnée adjointe à $\bar{R}$ (paragraphe 3.2 et Proposition II.3) et on désigne par $R^d: L^Y \to L^X$ l'application $\overline{I(R)}$ (avec les notations de II.3), où $I(R)$ est la relation duale de R définie par

$$I(R)(y,x) = R(x,y).$$

Alors R^* est *inf*-compatible et R^d est *sup*-compatible. De plus, si R est une fonction - c'est-à-dire s'il existe un morphisme $f: X \to Y$ tel que l'on ait $R(x,y) = \mathcal{Y}_Y(f(x))(y)$ - on a

$$R^* = R^d = \mathbf{L}(f).$$

D'un autre côté si $(L, \leqslant) = \bar{L}$ est un treillis complet et $\square$ une loi binaire sur L *sup*-compatible, on pose, pour tout a, b de L :

$$(98) \quad (\mathrm{i}) \qquad a \overset{\frown}{\square} b = Sup\, \{ z \mid a \,\square\, z \leqslant b \},$$

$$(\mathrm{ii}) \qquad a \underset{\smile}{\square} b = Sup\, \{ z \mid z \,\square\, a \leqslant b \};$$

si $\square$ est commutative, $a \overset{\frown}{\square} b = a \underset{\smile}{\square} b$ et est noté $a \xrightarrow{\square} b$.

Pour tout m.a.c. $\mathbf{L} = (L, \leqslant, \otimes)$ et tout ensemble X on introduit, en plus du ψ_X défini en (83), l'application $\pi_X: L^X \to L^{L^X}$ définie par la formule

$$(99) \qquad \pi_X(p)(p') = \operatorname*{Inf}_x \{ p'(x) \xrightarrow{\otimes} p(x) \}.$$

Pour $\mathbf{L} = \mathbf{2}$, (99) redonne (23).

On désigne par $ev_X: P_{\mathbf{L}} X \times X \to L$ le morphisme associant $p(x)$ à (p,x), de sorte que (notations de II.3) on a $\bar{ev}_X = Sup_X$.

PROPOSITION II.4. *Pour tout ensemble X on a $ev_X^d = \psi_X$ et $ev_X^* = \pi_X$; si $R: X\times Y \to L$ est associée par transposition cartésienne à $r: X \to L^Y$, alors*

$$(100) \qquad R^d = L^r . \psi_X , \quad R^* = L^r . \pi_X ;$$

ainsi ψ et π sont des transpositions sur $U_{\mathbf{L}}$.

PREUVE. La deuxième partie résulte de la première et du fait que

$$\bar{R} = Sup_Y . P_{\mathbf{L}}(r) \quad \text{et} \quad P_{\mathbf{L}}(r)^* = I(\overline{P_{\mathbf{L}}(r) . \mathcal{Y}_X}) = \mathbf{L}(r).$$

Pour la formule

$$ev_X^d = \psi_X \quad \text{ou} \quad I(\overline{Sup_X . \mathcal{Y}_{L^X}}) = \psi_X ,$$

c'est la définition de ψ_X (cf. (83) et [2]), et pour $ev_X^* = \pi_X$, cela s'écrit pour q, q' dans L^X :

$$(101) \quad \underset{Q}{Sup}\{ Q(q') \mid Sup_X(Q) \leqslant q \} = \underset{y}{Inf}\{ q'(y) \xrightarrow{\otimes} q(y) \},$$

ce qui résulte de la définition de S_X et de l'adjonction

$$a \otimes (-) \dashv a \xrightarrow{\otimes} (-) .$$

Enfin il est clair que $(-)^*$ et $(-)^d$ sont des foncteurs.

NOTA. Pour π, l'opérateur d'intersection I est donné par (22).

3.4. Pseudo-tenseurs et pseudo-homs.

Les conditions (4), (5) et (6) sur les transpositions disent juste que T et $U_{\mathbf{P}} \cdot I$ coïncident sur les relations qui sont des fonctions. On peut donc s'attendre à ce que ψ et π ne soient absolument pas les seuls exemples de transpositions sur $U_{\mathbf{L}}$.

En effet, considérons une loi binaire $* : L \times L \to L$ et supposons donnée, pour tout ensemble X, une application $k_X : L^X \to L$. Pour tous p et p' de L^X on définit $p * p' \in L^X$ par

$$(p * p')(x) = p(x) * p'(x)$$

et on pose

$$(102) \qquad \tau_X(p)(p') = k_X(p * p') .$$

PROPOSITION II.5. *La donnée* τ *de (102) est une transposition sur* $U_{\mathbf{L}}$ *ssi*

(a) Pour tout $f : X \to Y$, $p : Y \to L$, $q : X \to L$ *on a*

$$(103) \qquad k_X((p \cdot f) * q) = k_Y(p * P_{\mathbf{L}}(f)(q)) ;$$

(b) Pour tout $q : X \to L$, $Q : L^X \to L$, *on a*

$$(104) \qquad k_{L^X}(\tau_X(q) * Q) = k_X(q * Sup_X(Q)) ;$$

(c) Pour tout x de X, $q: X \to L$ on a

$$(105) \qquad k_X(q * \mathcal{Y}_X(x)) = q(x).$$

PROPOSITION II.6. *Soit $*: L \times L \to L$ une loi binaire sur L et soit r_X définie par*

$$(106) \qquad r_X(p)(p') = Sup_X(p * p').$$

Alors r_X est une transposition sur $U_{\mathbf{L}}$ ssi les conditions suivantes sont satisfaites :

$$(107) \qquad (\forall a \in L)(a * o = o),$$

$$(108) \qquad (\forall a \in L)(a * e = a),$$

$$(109) \qquad (\forall a, b, c \in L)((a * b) * c = a * (b \otimes c)),$$

Pour tout a de L et toute famille $(b_i)_{i \in I}$ d'éléments de L on a

$$(110) \quad (i) \quad a * (\operatorname{Sup}_i b_i) = \operatorname{Sup}_i (a * b_i),$$

$$(ii) \quad (\operatorname{Sup}_i b_i) * a = \operatorname{Sup}_i (b_i * a).$$

Une telle loi binaire sera appelée un pseudo-tenseur sur $\mathbf{L}$. En associant r à $*$, on détermine une injection

$$(111) \qquad i: pst\,\mathbf{L} \to trans\,\mathbf{L}$$

de l'ensemble des pseudo-tenseurs sur $\mathbf{L}$ vers l'ensemble des transpositions sur $U_{\mathbf{L}}$.

PREUVE. La condition (a) équivaut à (110)(i) : si l'on prend

$$Y = \{\emptyset\} \quad \text{et} \quad p: \{\emptyset\} \to L: \emptyset \mapsto a,$$

on obtient

$$\operatorname{Sup}_x (a * q(x)) = a * \operatorname{Sup}_x q(x).$$

La réciproque est claire. La condition (c) équivaut à la conjonction de (107) et (108), si l'on écrit (c) sous la forme

$$Sup\{\operatorname{Sup}_{x' \neq x} q(x') * o, q(x) * e\} = q'x).$$

Il faut donc que

$$q(x') * o \leqslant q(x) \quad \text{pour tout} \quad x' \neq x,$$

ce qui nécessite (107). Reportant $q(x')*o=o$ dans (c), on obtient (108). Enfin la condition (b) s'écrit

$$(112)\qquad \operatorname{Sup}_{q'}(\operatorname{Sup}_{x} q(x)*q'(x))*Q(q') = $$
$$= \operatorname{Sup}_{x}(q(x)*\operatorname{Sup}_{q'}(Q(q')\otimes q'(x))).$$

Si l'on choisit

$$Q(q') = \begin{cases} c & \text{si } q' = b\mathcal{Y}_X(x_0) \\ o & \text{si } q' \neq b\mathcal{Y}_X(x_0), \end{cases}$$

où x_0 est dans X et b, c dans L, et si l'on pose $q(x_0)=a$, la condition (b), i. e. (112), donne (109). Si l'on choisit

$$Q(q') = \begin{cases} a & \text{si } q' = \hat{e} \\ o & \text{si } q' \neq \hat{e}, \end{cases}$$

où $\hat{e}$ est l'application constante sur e et où a est un élément arbitraire de L, alors, puisque

$$o\otimes a = o \quad \text{et} \quad a\otimes e = a \quad \text{pour tout } a\in L,$$

on déduit de (b), i.e. de (112), la condition (110) (ii) (compte tenu de la formule (108)). Inversement, les conditions (109) et (110) (ii) entraînent (112). Et (111) est clair avec $X = 1$.

Par dualité, on déduit de II.6 que :

PROPOSITION II.7. *Soit $\pitchfork : L\times L \to L$ une loi binaire sur L et soit r_X définie par*

$$(113)\qquad r_X(p)(p') = \operatorname{Inf}_X(p\pitchfork p').$$

Alors r_X est une transposition sur U_L ssi les conditions suivantes sont satisfaites :

$$(114)\qquad (\forall a\in L)(a\pitchfork o = 1),$$

$$(115)\qquad (\forall a\in L)(a\pitchfork e = a),$$

$$(116)\qquad (\forall a,b,c\in L)((a\pitchfork b)\pitchfork c = a\pitchfork(b\otimes c)).$$

Pour tout $a\in L$ et toute famille $(b_i)_{i\in I}$ d'éléments de L, on a

(117) *(i)* $a \pitchfork (\operatorname{Sup}_i b_i) = \operatorname{Inf}_i (a \pitchfork b_i)$,

(ii) $(\operatorname{Inf}_i b_i) \pitchfork a = \operatorname{Inf}_i (b_i \pitchfork a)$.

Une telle loi binaire $\pitchfork$ *sera appelée un pseudo-hom sur* $\mathbf{L}$. *L'association de* τ *à* $\pitchfork$ *détermine une injection*

(118) $$j : psh\,\mathbf{L} \to trans\,\mathbf{L}$$

de l'ensemble des pseudo-homs sur $\mathbf{L}$ *vers l'ensemble des transpositions sur* $U_{\mathbf{L}}$.

On note $End\,\mathbf{L}$ le monoïde des applications $f : L \to L$ telles que

$$f(o) = o, \quad f(e) = e,$$

$$f(a \otimes b) = f(a) \otimes f(b) \text{ pour tout } a, b \in L,$$

$$f(\operatorname{Sup}_i b_i) = \operatorname{Sup}_i f(b_i) \text{ pour toute famille } (b_i)_{i \in I} \text{ d'éléments de } L.$$

PROPOSITION II.8. *1° On détermine un· bijection*

(119) $$ad : pst\,\mathbf{L} \to psh\,\mathbf{L}$$

en associant à tout $*$ *le pseudo-hom défini par*

(120) $$a \pitchfork b = b \smile^{*} a = \operatorname{Sup}\{ z \mid z * b \leqslant a \}.$$

2° On a $\otimes \in pst\,\mathbf{L}$, $\psi = i(\otimes)$ *et* $j(ad\,\otimes)$.

3° On détermine deux actions

$$End\,\mathbf{L} \times pst\,\mathbf{L} \to pst\,\mathbf{L}, \quad End\,\mathbf{L} \times psh\,\mathbf{L} \to psh\,\mathbf{L},$$

en définissant pour tout pseudo-tenseur (resp. pseudo-hom) ^{1} *et pour tout* $f \in End\,\mathbf{L}$, *le pseudo-tenseur (resp. pseudo-hom)* ${}^{1}f$ *par*

(121) $$a({}^{1}f)b = a\,{}^{1}f(b), \text{ pour tout } a, b \in L.$$

La preuve de II.8.1 résulte de l'équivalence d'adjonction

$$c \leqslant a \pitchfork b \iff c * b \leqslant a.$$

Par exemple, prenons

$$\mathbf{L} = [\![0, 1]\!] = ([0, 1], \leqslant, .),$$

où $[0, 1]$ est l'intervalle réel $\{ x \in \mathbf{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant 1 \}$, $\leqslant$ son ordre et $\cdot$ le produit de réels (et non pas leur Inf). Alors pour tout $a > 0$, la fonction

$f(x) = x^a$ est élément de $End(\llbracket 0, 1 \rrbracket)$; en la faisant agir (121) sur $\cdot$ et $ad(.)$ (II.8.2), on voit qu'il y a au moins autant de transpositions possibles pour les $\llbracket 0, 1 \rrbracket$-relations (ou relations floues) que de réels $a > 0$.

COROLLAIRE II.9. *On a*

$$Card(trans \llbracket 0, 1 \rrbracket) \geqslant Card[0, 1] .$$

3.5. Calcul de *trans* $\mathbf{L}$ et $\mathbf{L}$-modules.

Soit $\mathbf{L} = (L, \leqslant, \otimes)$ un m.a.c.

DEFINITION II.10. On appelle $\mathbf{L}$-*module* un triplet $(M, \leqslant, a)$, où

1° $(M, \leqslant) = \bar{M}$ est un treillis complet.

2° $a : L \times M \to M$ est une action de $\mathbf{L}$ sur M, i.e. vérifie

- $\forall m \in M,\ a(e, m) = m$; $\forall \lambda \in L,\ a(\lambda, -)$ est *sup*-compatible.
- $\forall m \in M,\ \lambda, \mu \in L,\ a(\lambda \otimes \mu, m) = a(\lambda, a(\mu, m))$.

3° $\forall m \in M,\ a(-, m)$ est *sup*-compatible.

On désigne par $\mathbf{L}$-*mod* la catégorie des $\mathbf{L}$-modules et des applications compatibles avec les actions et *sup*-compatibles.

EXEMPLE 1. On a vu en 3.1 que pour tout X l'ensemble L^X a une structure naturelle de $\mathbf{L}$-module, que l'on notera $\mathbf{L}^X$.

EXEMPLE 2. Si $*$ est un pseudo-tenseur (resp. si $\pitchfork$ est un pseudo-hom) sur $\mathbf{L}$ au sens de 3.4, en posant

$$a(\lambda, x) = x * \lambda \quad (\text{resp. } x \pitchfork \lambda)$$

le triplet $(L, \leqslant, a)$ (resp. $(L, \geqslant, a)$) est un $\mathbf{L}$-module.

PROPOSITION II.11. *Si* $(M, \leqslant, a) = \mathbf{M}$ *est un* $\mathbf{L}$-*module, on pose*

$$\mathbf{M}' = (M, \geqslant, ad(a)),$$

en désignant par $ad(a)$ *l'action*

$$(122) \qquad ad(a)(\lambda, x) = Sup \{ z \mid a(\lambda, z) \leqslant x \} .$$

Alors $\mathbf{M}'$ *est un* $\mathbf{L}$-*module, appelé dual de* $\mathbf{M}$.

PROPOSITION II.12. *Le foncteur d'oubli de* $\mathbf{L}$-*mod vers Ens qui associe* M *à* $(M, \leqslant, a)$ *admet pour adjoint un foncteur dont la valeur en* X *est* $\mathbf{L}^X$

(Exemple 1) et la monade associée à cette adjonction est $\mathbf{P_L}$ *(cf. paragraphe 3). De plus on a*

$$\mathbf{L}\text{-}mod \approx Alg\,\mathbf{P_L}.$$

PREUVE. La vérification des deux premiers points se fait exactement comme dans la Proposition II.3. Pour le dernier point, on considère la monade $\mathbf{P_2}$, la monade $(L, \otimes)\times(-)$ et la loi distributive au sens d'Appelgate-Beck de la seconde sur la première

$$(123) \qquad D_X : 2^X \times L \to 2^{(X\times L)}$$

définie par

$$(124) \qquad D_X(p,\lambda)(x,\lambda') = \begin{cases} p(x) & \text{si } \lambda' = \lambda \\ 0 & \text{si } \lambda' \neq \lambda . \end{cases}$$

Une algèbre de la monade composée de cette loi distributive $2^{(-)\times L}$ est alors un $(M, \leqslant, a)$ vérifiant les conditions 1 et 2 d'un $\mathbf{L}$-module. L'opération $Sup: 2^L \to L$ donnant la structure de $\mathbf{P_2}$-algèbre de L permet de définir des

$$(125) \qquad h_X : 2^{X\times L} \approx (2^L)^X \xrightarrow{Sup^X} L^X$$

qui déterminent un morphisme de monades. La condition 3 sur une $2^{(-)\times L}$-algèbre équivaut à être de la forme $\theta \cdot Sup^X$, où θ est une $\mathbf{P_L}$-algèbre.

Cette description de $\mathbf{P_L}$ comme «quotient» d'une monade composée sera exploitée dans les univers algébriques [4]. On notera déjà qu'elle est vraie si $\mathbf{L}$ est un m.a.c. interne à un topos élémentaire.

PROPOSITION II.13. *L'ensemble trans* $\mathbf{L}$ *des transpositions sur la monade involutive* $U_{\mathbf{L}}$ *est en bijection avec l'ensemble* $\mathbf{L}$-*mod*(L) *des* $\mathbf{L}$-*modules de la forme* $(L, \prec, a)$ *ou* $\mathbf{L}$-*modules sur* L :

$$trans\,\mathbf{L} \approx \mathbf{L}\text{-}mod(L).$$

Cela résulte de II.12 et Observation I.3.

En tenant compte de Définition II.10 et de II.8.2:

COROLLAIRE II.14. *L'application ad de (122) induit une involution*

$$ad : trans\, \mathsf{L} \to trans\, \mathsf{L} \quad \textit{telle que} \quad ad \cdot i = j \cdot ad \quad \textit{et} \quad ad(\psi) = \pi \, ;$$

de plus les actions de II.8.3 s'étendent en des actions sur trans L *entier.*

Pour $\mathsf{L} = \mathbf{2}$, $\mathbf{2}$-$mod(2)$ a deux éléments ; donc :

COROLLAIRE II.15. *La monade involutive* U_2 *« des parties » sur Ens possède exactement deux transpositions, à savoir*

$$\psi_X : A \mapsto \{ A' \mid A \cap A' \neq \emptyset \} \quad et \quad \pi_X : A \mapsto \{ A' \mid A' \subset A \}.$$

On note de plus que

$$S_X \cdot \pi_X = 1_{FX} \quad \text{et} \quad S_X \cdot \psi_X \neq 1_{FX}.$$

On en déduit, avec (55) et (57) :

COROLLAIRE II.16. *La transformation naturelle* $\cap : \mathfrak{P}(2^{(-)}) \to 2^{(-)}$ *est caractérisée par les trois équations :*

$$1_{\mathfrak{P}X} = \cap_X \cdot \{\,\}_{\mathfrak{P}X}, \quad \cap_X \cdot \mathfrak{P}(\cap_X) = \cap_X \cdot \cup_{\mathfrak{P}X}$$

$$\cup_X \cdot 2^{(\cap_{\mathfrak{P}X} \cdot \mathfrak{P}(t_X))} \cdot t_{\mathfrak{P}X} = 1_{\mathfrak{P}X}.$$

4. SUR LA MONADE INVOLUTIVE U_Ω DANS UN TOPOS.

Soit C un topos élémentaire au sens de Lawvere-Tierney et, avec les notations de [2], page 41, soit

$$U_\Omega = (exp_\Omega(-), \{\,\}, \psi), \quad \text{où } \Omega = P^{Id}\Gamma^{Id}(1),$$

la monade involutive canonique sur C. Comme dans le cas de *Ens*, on écrit ici :

$$F = \Omega^{(-)}, \quad \{-\}_X(x) = \{x\},$$

$$\psi_X(A) = \{ A' \mid \exists x (x \in A \wedge x \in A') \},$$

$$r_X = \pi_X \quad \text{avec} \quad \pi_X(A) = \{ A' \mid \forall x (x \in A' \to x \in A) \}.$$

PROPOSITION II.17 *Les transformations* ψ *et* π *sont deux transpositions sur* U_Ω.

A l'aide de II.8.3 on peut déduire de ψ et π de nouvelles transpositions, grâce à l'action de tout endomorphisme f de Ω. En particulier, toute topologie de Grothendieck $j : \Omega \to \Omega$ détermine une transposition

$$r_X(A) = \{ A' \mid \forall x (x \in \overline{A'} \to x \in A) \} .$$

En fait d'après I.9 l'ensemble $trans\,\Omega$ des transpositions sur U_Ω est en bijection avec l'ensemble des foncteurs :

$$J : C^{op} \to Alg\,\mathbf{P}_\Omega \quad \text{tels que} \quad U.J = \Omega^{(-)} .$$

On désigne par CL la catégorie des sup-treillis complets, et par $|-|$ le foncteur d'oubli de CL vers Ens . On appelle *sup-treillis complet interne à* C *en* A la donnée d'un foncteur

$$\Gamma : C^{op} \to CL \quad \text{tel que} \quad |-|.\Gamma = Hom_C(-, A),$$

i. e. un objet du produit fibré

$$(126) \qquad \begin{tikzcd} CL(C) \arrow[r] \arrow[d, "|-|"'] \arrow[dr, phantom, "="] & CL^{C^{op}} \arrow[d, "|-|^{C^{op}}"] \\ C \arrow[r, "Yoneda"'] & Ens^{C^{op}} \end{tikzcd}$$

Si $C = Ens$, on sait que

$$CL(Ens) \approx Alg\,\mathbf{P}_2 \ (\approx \mathbf{2}\text{-}mod) .$$

En fait, ceci est vrai pour un topos élémentaire arbitraire, ainsi que l'ont montré Anghel et Lecouturier : on a donc

$$(127) \qquad CL(C) \approx Alg\,\mathbf{P}_\Omega$$

et $trans\,\Omega$ est en bijection avec l'ensemble des foncteurs

$$K : C^{op} \to CL(C) \quad \text{tels que} \quad |-|.K = \Omega^{(-)} .$$

Un tel K détermine, pour tout X, une structure de sup-treillis interne sur Ω^X , i.e. pour tout Y un sup-treillis sur

$$Hom_C(Y, \Omega^X) \approx Hom_C(Y \times X, \Omega),$$

dépendant de manière contravariante de X et Y . Cela revient à la donnée pour tout Z d'un sup-treillis sur $Hom(Z, \Omega)$, contravariant en Z ; d'où :

PROPOSITION II.18. *Soit* $CL(\Omega)$ *l'ensemble des objets* X *de* $CL(C)$ *tels* *que* $|X| = \Omega$. *Alors on a une bijection*

(128) $$trans\,\Omega \approx CL(\Omega)\,;$$

à l'ordre canonique sur Ω *correspond* ψ, *à l'ordre dual correspond* π.

EXEMPLE. Soit $T = (\underline{T}, \subset)$ un ordre complet dont les éléments sont notés $u, v, \ldots$, et de plus grand élément 1. On considère le topos $C = Ens^{T^{op}}$ où Ω est donc défini par

$$\Omega(u) = \{\, u' \mid u' \subset u \,\}\,.$$

Soit $K \in CL(\Omega)$. Pour tout objet u de T, $K(u)$ est une structure de treillis complet sur $\Omega(u)$, de sorte que, si $u \subset v$, la restriction

(129) $$res_{v,u} : \Omega(v) \to \Omega(u) : v' \longmapsto v' \cap u$$

soit un morphisme *sup*-compatible de $K(v)$ vers $K(u)$.

Une telle donnée détermine exactement K : si $F \in C$, on pose, pour tout s, s' dans $Hom_C(F, \Omega)$:

$$s \leqslant s' \iff \forall\, u, \quad \forall\, \hat{u} : 1 \to Fu\,,\, s_u(\hat{u}) \leqslant s'_u(\hat{u}).$$

Enfin, puisque $res_{1,v}$ est *sup*-compatible, on a, en désignant par $\check{\bigvee_i} v_i$ le *Sup* dans $K(v)$ d'une famille $(v_i)_{i \in I}$ d'éléments de $\Omega(v)$, l'égalité

$$\check{\bigvee_i} v_i = v \cap \bigvee_i v_i\,.$$

Il s'ensuit que la donnée de K revient à celle d'un treillis complet $K(1)$ sur $\Omega(1) = \underline{T}$, tel que, en notant $\bigvee_i v_i$ le *Sup* dans $K(1)$ d'une famille $(v_i)_{i \in I}$ et en notant $\cap$ l'intersection dans T, on ait, pour toute famille $(v_i)_{i \in I}$ et pour tout u :

(130) $$u \cap (\bigvee_i v_i) = u \cap \bigvee_i (u \cap v_i).$$

REFERENCES

1. Foncteurs sous-objets et relations continues, *Cahiers Topo. et Géo. Diff.* XIII-1 (1972), p. 57-100.
2. Monades involutives complémentées, *Cahiers Topo et Géo. Diff.* XVI-1 (1975), p. 17-101.
3. Topologie dans les univers algébriques, multigraphié (39 pages), à paraître dans *Proceedings of the Northwest German Category Seminar, Bremen,* 1976.
4. *Structures dans les univers algébriques* (à paraître).

U. E. R. de Mathématiques
Université Paris 7
Tours 45-55, 5^e étage
2 Place Jussieu
75005 PARIS