CAHIERS DE
TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
CATÉGORIQUES

CHRISTIAN LAIR

Fermeture standard des catégories algébriques II

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 18, nº 1 (1977), p. 3-60

<http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1977__18_1_3_0>

CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE — *Vol. XVIII-1 (1977)*

FERMETURE STANDARD DES CATEGORIES ALGEBRIQUES II

par Christian LAIR

INTRODUCTION [1]

En (F.S.C.A.), nous avons tenté l'élaboration d'une méthode de construction systématique (dite standard) de toutes les structures monoïdales bi-fermées pouvant être sur-jacentes à une catégorie de structures algébriques esquissées (par une esquisse donnée) et structurées [2] par une catégorie monoïdale symétrique et fermée.

G. M. Kelly nous ayant signalé une erreur grossière dans cet article (ce dont nous le remercions très vivement), nous avons, avant tout autre développement, cru devoir procéder, en (C.E.S.T.), à une nouvelle rédaction de (F.S.C.A.) très méticuleuse, en y reprenant notre idée fondamentale :

si σ est une esquisse projective ((E.T.S.A.) [3] et (E.G.C.E.)), si $\mathrm{H} = (H, \otimes, \ldots)$ est une catégorie monoïdale symétrique et fermée, alors la catégorie H^σ des structures algébriques, esquissées par σ et structurées par H, est sous-jacente à une catégorie monoïdale bi-fermée si, et seulement si, il existe une co-structure double d'espèce σ dans H^σ (voir (E.G.C.E.)), i. e. une réalisation

$$\overline{C} : (\sigma \otimes \sigma)^* \to H^\sigma$$

(consulter, à nouveau, (E.G.C.E.) pour la construction du produit tensoriel $\sigma \otimes \sigma$, de σ par elle-même, et de $(\sigma \otimes \sigma)^*$, esquisse des co-structures doubles d'espèce σ) devant vérifier certaines conditions (c'est d'ail-

(1) Le lecteur voulant, délibérément, tout ignorer de la Théorie des Esquisses n'a vraiment pas intérêt à aller plus loin!

(2) On dit maintenant « structures algébriques internes à une catégorie »... pour ne pas rendre à César ce qui lui appartient.

(3) Il s'agit du César signalé ci-dessus.

leurs l'omission de ces conditions qui entachait (F.S.C.A.) d'erreur).

La méthode ainsi développée s'applique directement à de très nombreux exemples et permet un calcul explicite des produits tensoriels (et de leurs fermetures associées) sur les catégories de la forme H^{σ} ... tout au moins lorsqu'il est « visible » qu'ils existent.

Elle ne fournit pas, cependant, de réponse vraiment pratique au problème de l'existence de tels produits tensoriels, c'est-à-dire, pour reprendre le point de vue de (C.F.S.T.), au problème de l'existence de co-structures doubles :

$$\overline{C}: (\sigma \otimes \sigma)^{*} \to H^{\sigma}.$$

C'est l'objet du présent travail que d'apporter, en même temps qu'une explication théorique des méthodes de construction standard de (C.E.S.T.), des éléments de réponse à ce dernier problème (déjà abordé, et d'ailleurs résolu, en (F.S.C.A.) lorsque σ est l'esquisse des groupes).

Une section préliminaire fournit quelques précisions terminologiques, les notations utilisées dans toute la suite, les hypothèses qui restent valables pour tout le texte et les résultats élémentaires, sans doute connus, que nous n'avons qu'à peine rappelés. Nous ne saurions trop recommander cependant de se reporter à (E.G.C.E.), notamment pour de plus amples informations préliminaires (concernant la Théorie des Esquisses). La Section I rappelle rapidement (i. e. sans démonstration) l'idée de (F.S.C.A.) développée en détail en (C.E.S.T.). Il s'agit donc d'un résumé de (C.E.S.T.) incorporé au présent texte pour éviter de trop fréquents renvois à un travail dont les calculs sont, nécessairement, fort longs.

La Section II fournit l'explication théorique recherchée des méthodes de (C.E.S.T.) (et donc de la Section I). Si Ens^{σ} (par exemple) est munie d'un produit tensoriel

$$Ens^{\sigma} \times Ens^{\sigma} \xrightarrow{\overline{\otimes}} Ens^{\sigma}$$

bi-fermé, (C.F.S.T.) stipule que l'on dispose alors d'une co-structure double

$$\overline{C}: (\sigma \otimes \sigma)^{*} \to Ens^{\sigma}$$

qui permet la reconstruction de $\overline{\otimes}$. Il en résulte un foncteur

$$(-)^{\overline{C}} : Ens^{\sigma} \to Ens^{\sigma\otimes\sigma}$$

que l'on regarde comme un morphisme «virtuel»

$$k_{\overline{C}} : \sigma\otimes\sigma \to \sigma ,$$

c'est-à-dire comme une «loi de composition binaire virtuelle» sur σ . Plus précisément, pour que Ens^{σ} soit munie d'une structure de catégorie monoïdale fermée symétrique, il faut disposer d'une co-structure double $\overline{C}$ vérifiant certaines conditions. Du point de vue «virtuel», ceci signifie que $k_{\overline{C}} : \sigma\otimes\sigma \to \sigma$ est une «structure de monoïde virtuel commutatif» sur σ . Ce point de vue est d'autant plus justifié que :

- la réciproque est vraie (si σ est munie d'une structure de monoïde virtuel commutatif, alors Ens^{σ} est munie d'une structure de catégorie monoïdale fermée symétrique),

- toute réalisation $\sigma\otimes\sigma \to \sigma$ (c'est-à-dire tout morphisme «réel» de $\sigma\otimes\sigma$ vers σ) s'identifie à un morphisme virtuel.

Il s'agit donc de développer ce point de vue virtuel dans le cadre «relatif» (i. e. plus général que celui de Ens).

La Section III est consacrée aux applications des Sections I et II. On y prouve notamment que :

- la catégorie des groupes ne saurait être munie d'une structure monoïdale bi-fermée, symétrique ou non ,

- la catégorie des semi-groupes possède de «nombreux» produits tensoriels bi-fermés (dont nous n'avons pas pu prouver qu'ils ne pouvaient être unitaires),

- une catégorie de structures algébriques, au sens de Lawvere-Linton, ne peut être munie d'une structure monoïdale fermée symétrique, admettant la structure libre sur 1 pour unité, dès lors qu'elles ne sont pas commutatives (la réciproque de ce résultat est bien connue ... sous la forme d'une condition suffisante que nous retrouvons ici : une structure de monoïde «réel» sur σ induit une structure de monoïde «virtuel», c'est-à-dire une structure monoïdale bi-fermée sur Ens^{σ}).

Pour conclure brièvement, ce texte nous semble prouver, une fois de plus, l'efficacité de la Théorie des Esquisses dans le traitement de certains problèmes pratiques (indépendamment, bien entendu, de son intérêt «théorique»). Bien sûr, on peut toujours arguer que les résultats obtenus ne sont pas «essentiels» (à qui ? et à quoi ?) ; nous répondrons que nous ne les estimons pas inessentiels (ignorant si le comportement des mathématiciens est déterminé par une logique aristotélicienne !).

TABLE DES MATIERES.

PRELIMINAIRES

1. TERMINOLOGIE. NOTATIONS.

1.1. H-catégories multiplicatives.

Soit H $= (H, \otimes, \underline{H}(-,-), I, \ldots)$ une catégorie monoïdale fermée symétrique (dont $\otimes$ est le bi-foncteur produit tensoriel, $\underline{H}(-,-)$ le bi-foncteur «*Hom* interne» et I l'unité).

Si T est une H-catégorie, elle définit une catégorie T, que nous disons être *sous-jacente à* T (et nous noterons T_0 la classe de ses objets et T^* sa duale), ainsi qu'un *bi-foncteur «Hom à valeurs dans H»* :

$$\underline{T}(-,-): T \times T^* \to H.$$

Si aucun risque de confusion n'est à craindre, nous identifierons le plus souvent T et le couple $(T, \underline{T}(-,-))$ qui s'en déduit.

Si T $= (T, \underline{T}(-,-))$ et T' $= (T', \underline{T}'(-,-))$ sont deux H-catégories, on identifie de même un H-foncteur F : T → T' au couple $(F, \underline{F}(-,-))$ formé par

- le *foncteur sous-jacent* $F: T \to T'$ (dont on note $F_0 : T_0 \to T'_0$ la restriction aux objets),

- la *transformation naturelle* (entre foncteurs de $T_0 \times T_0$ vers H) *sous-jacente*

$$\underline{F}(-,-): \underline{T_0}(-,-) \Longrightarrow \underline{T'_0}(F_0 -, F_0 -)$$

(où $\underline{T_0}(-,-): T_0 \times T_0 \to H$ et $\underline{T'_0}(-,-): T'_0 \times T'_0 \to H$ sont les restrictions respectives de $\underline{T}(-,-)$ et $\underline{T}'(-,-)$).

Si T $= (T, \underline{T}(-,-))$ et T' $= (T', \underline{T}'(-,-))$ sont deux H-catégories, on dit qu'un foncteur $F: T \to T'$ *admet le foncteur* $G: T' \to T$ *pour* H-*adjoint* si, et seulement si, les deux foncteurs

$$\underline{T}(-, G-): T \times T'^* \to H \quad \text{et} \quad \underline{T}'(F-,-): T \times T'^* \to H$$

sont naturellement équivalents. On dira également que G *admet* F *pour* H-*coadjoint*. Si tel est le cas, F admet bien entendu G pour adjoint (au sens usuel). Nous notons dès lors par

$$t = (FG, \epsilon, \eta) \quad (\text{resp. } t' = (GF, \epsilon', \eta'))$$

le triple (resp. cotriple) dans T' (resp. T) qui résulte de cette adjonction. On vérifie alors que F (resp. G) est le foncteur sous-jacent à un H-foncteur $\mathrm{F} = (F, \underline{F}(-,-))$ (resp. $\mathrm{G} = (G, \underline{G}(-,-))$) tel que, pour tout $(a, a') \in T_0 \times T_0$ et tout $(b, b') \in T'_0 \times T'_0$, on ait

$$\underline{F}(a, a') : \underline{T}(a, a') \xrightarrow{\underline{T}(a, \epsilon' a')} \underline{T}(a, GFa') \xrightarrow{\sim} \underline{T}'(Fa, Fa'),$$

$$\underline{G}(b, b') : \underline{T}'(b, b') \xrightarrow{\underline{T}'(\epsilon b, b')} \underline{T}'(FGb, b') \xrightarrow{\sim} \underline{T}(Gb, Gb'),$$

et que G est un H-foncteur H-adjoint au H-foncteur F .

Nous dirons que la H-*adjonction* (de H-foncteurs) $\mathrm{G} \underset{\mathrm{H}}{\dashv} \mathrm{F}$ *est canoniquement associée à la* H-*adjonction* (de foncteurs) $G \underset{\mathrm{H}}{\dashv} F$.

On dit que $\hat{\mathrm{T}} = (\mathrm{T}, \hat{\otimes}, \underline{\underline{T}}_1(-,-), \underline{\underline{T}}_2(-,-))$ *est une* H-*catégorie multiplicative bi-fermée* ssi :

- T est une H-catégorie, dite *sous-jacente à* $\hat{\mathrm{T}}$,
- $\hat{\otimes} : T \times T \to T$ est un bi-foncteur, appelé *multiplication* (ou *produit tensoriel*) de $\hat{\mathrm{T}}$,
- $\underline{\underline{T}}_l(-,-) : T \times T^* \to T$, pour $l = 1, 2$, est un bi-foncteur appelé *fermeture* (ou *Hom interne*) de $\hat{\mathrm{T}}$,
- pour tout objet a de T, le foncteur

$$-\hat{\otimes} a : T \to T$$

est H-adjoint au foncteur $\underline{\underline{T}}_1(-, a) : T \to T$,

- pour tout objet a de T, le foncteur

$$a \hat{\otimes} - : T \to T$$

est H-adjoint au foncteur $\underline{\underline{T}}_2(-, a) : T \to T$.

On définit de manière analogue (par extension) les notions de H-*catégorie multiplicative bi-fermée associative, symétrique, unitaire à droite, unitaire à gauche, unitaire, cohérente,...* (étant entendu que les équivalences naturelles à utiliser dans ces différents cas sont des équivalences de foncteurs et non de H-foncteurs). En particulier, une H-catégorie multiplicative bi-fermée associative unitaire (resp. et symétrique) cohérente s'appellera une H-catégorie *monoïdale bi-fermée (resp. et symétrique)*.

On dit que $\tilde{T} = (T, \tilde{\otimes})$ est une H-*catégorie multiplicative* (ou *monoïdale)* (resp. et *symétrique*) ssi :

- T est une H-catégorie, dite sous-jacente à $\tilde{T}$,
- $\tilde{\otimes} : T \otimes T \to T$ est un H-foncteur (resp. symétrique) appelé multiplication (ou produit tensoriel).

(On n'indique pas les rapports évidents entre H-catégories multiplicatives bi-fermées et H-catégories multiplicatives.)

1.2. Eléments de la Théorie des Esquisses.

Soit $\mathcal{K}$ un ensemble de catégories.

On dit que $\sigma = (S, \mathcal{T})$ *est une esquisse* $\mathcal{K}$*-projective* (resp. $\mathcal{K}$*-inductive*) ssi :

- S est un graphe multiplicatif,
- $\mathcal{T}$ est un ensemble de cônes projectifs (resp. inductifs) de S dont la base varie dans $\mathcal{K}$.

Une *réalisation d'une esquisse* $\mathcal{K}$*-projective* (resp. $\mathcal{K}$*-inductive*) $\sigma = (S, \mathcal{T})$ *dans une catégorie* H est un foncteur $F : S \to H$ (encore noté $F : \sigma \to H$) qui envoie tout élément de $\mathcal{T}$ sur une limite projective (resp. inductive) de H . On dit alors que F est *une* H*-structure algébrique d'espèce* σ et l'on désigne par H^{σ} la sous-catégorie pleine de H^S dont les objets sont ces réalisations et les morphismes les transformations naturelles entre ces réalisations.

Plus généralement, si $\sigma = (S, \mathcal{T})$ et $\sigma' = (S', \mathcal{T}')$ sont deux esquisses $\mathcal{K}$-projectives (resp. $\mathcal{K}$-inductives), *une réalisation de* σ *vers* σ' est un triplet $\phi = (\sigma', F, \sigma)$, où :

- $F : S \to S'$ est un foncteur,
- F envoie tout élément de $\mathcal{T}$ sur un élément de $\mathcal{T}'$.

Si $\sigma = (S, \mathcal{T})$ et $\sigma' = (S', \mathcal{T}')$ sont deux esquisses $\mathcal{K}$-projectives (resp. $\mathcal{K}$-inductives), on sait construire une esquisse $\mathcal{K}$-projective (resp. $\mathcal{K}$-inductive) $\sigma \otimes \sigma' = (S \times S' , \mathcal{T}'')$ de telle sorte que, si H est une catégorie à $\mathcal{K}$-limites projectives (resp. inductives), alors il existe deux isomorphismes

$$\bar{\delta} : H^{\sigma \otimes \sigma} \xrightarrow{\sim} (H^{\sigma})^{\sigma} \quad \text{et} \quad \bar{\gamma} : H^{\sigma \otimes \sigma} \xrightarrow{\sim} (H^{\sigma})^{\sigma}$$

tels que

$$\bar{\delta}(F)(x)(y) = F(x,y) \quad \text{et} \quad \bar{\gamma}(F)(x)(y) = F(y,x)$$

pour tout $(x,y) \in S \times S$ et tout $F : \sigma \otimes \sigma \to H$. Nous posons alors, pour toute esquisse $\mathcal{K}$-projective (resp. $\mathcal{K}$-inductive) σ :

- $\otimes^0 \sigma = 1$, $\otimes^1 \sigma = \sigma$, $\otimes^2 \sigma = \sigma \otimes \sigma$,
- pour tout $n \geqslant 3$, $\otimes^n \sigma = (\otimes^{n-1} \sigma) \otimes \sigma$,

et une réalisation de $\otimes^n \sigma$ vers une catégorie H s'appellera *une H-structure algébrique n-uple d'espèce σ.*

Désignons par $\mathcal{K}^*$ l'ensemble des duales des catégories éléments de $\mathcal{K}$. Si $\sigma = (S, \mathcal{T})$ est une esquisse $\mathcal{K}$-projective (resp. $\mathcal{K}$-inductive), on désigne par $\mathcal{T}^*$ l'ensemble des cônes inductifs (resp. projectifs) duaux des éléments de $\mathcal{T}$. Aussi $\sigma^* = (S^*, \mathcal{T}^*)$ est-elle une esquisse $\mathcal{K}^*$-inductive (resp. -projective) dite *duale de σ*. Une réalisation de σ^* vers une catégorie H s'appelle aussi une *H-co-structure d'espèce σ*. Plus généralement, une réalisation de

$$(\otimes^n \sigma)^* = \otimes^n (\sigma^*)$$

s'appelle une *H-co-structure n-uple d'espèce σ*, pour tout entier n.

2. HYPOTHESES GENERALES. RESULTATS PRELIMINAIRES.

2.1. Hypothèses générales.

Dans toute la suite :

- nous raisonnons dans un bon modèle de la Théorie des ensembles avec axiome des univers (T.H.E.N.),
- nous supposons que $\mathfrak{M}_0$ et $\check{\mathfrak{M}}_0$ sont deux univers tels que

$$\mathfrak{M}_0 \in \check{\mathfrak{M}}_0 \quad \text{et} \quad \mathfrak{M}_0 \subset \check{\mathfrak{M}}_0$$

(les éléments de $\mathfrak{M}_0$ seront alors dits *petits*),

- $\mathcal{K}$ est un ensemble petit de catégories petites (i. e. dont l'ensemble des morphismes est petit),

- $\mathbf{H} = (H, \otimes, \underline{H}(-,-), sym, ass, unit_g, I, unit_d)$ est une catégorie monoïdale fermée symétrique, où $\otimes : H \times H \to H$ est le foncteur produit tensoriel et $\underline{H}(-,-) : H \times H^* \to H$ le foncteur Hom interne, et où

$$sym : -\otimes- \Longrightarrow -\otimes-, \quad ass : (-\otimes-)\otimes- \Longrightarrow -\otimes(-\otimes-),$$

$$unit_g : I\otimes- \Longrightarrow -, \quad unit_d : -\otimes I \Longrightarrow -$$

sont les équivalences naturelles associées,

- $\sigma = (S, \mathcal{T})$ est une esquisse $\mathcal{K}$-projective *petite* (i. e. pour laquelle l'ensemble des morphismes de S est petit).

On désigne alors par :

- $\mathfrak{M}$ (resp. $\check{\mathfrak{M}}$) la catégorie pleine d'applications entre éléments de $\mathfrak{M}_0$ (resp. $\check{\mathfrak{M}}_0$),

- $\mathfrak{N}'$ (resp. $\check{\mathfrak{N}}'$) la catégorie pleine de foncteurs entre graphes multiplicatifs dont l'ensemble des morphismes appartient à $\mathfrak{M}_0$ (resp. $\check{\mathfrak{M}}_0$),

- $\mathfrak{F}$ (resp. $\check{\mathfrak{F}}$) la catégorie pleine de foncteurs entre catégories dont l'ensemble des morphismes appartient à $\mathfrak{M}_0$ (resp. $\check{\mathfrak{M}}_0$),

- $\mathcal{O}^{\mathcal{K}}$ la catégorie pleine de réalisations entre esquisses $\mathcal{K}$-projectives petites,

- $\mathcal{O}$ l'ordinal borne supérieure des ordinaux $\overline{\overline{T}}$, où T décrit l'ensemble $\mathcal{K}$,

- $\overline{\overline{\mathcal{O}}} = \omega_{\mathcal{O}+1}$ l'ordinal régulier d'indice $\mathcal{O}+1$,

- $P : H^\sigma \hookrightarrow H^S$ le foncteur injection canonique.

Enfin, on suppose que :

- H est à $\mathfrak{F}_0$-limites projectives et à $\mathfrak{F}_0$-limites inductives,

- les $<\alpha>$-limites inductives commutent, dans H, avec les $\mathfrak{F}_0$-limites projectives, pour tout ordinal $\alpha \leqslant \overline{\overline{\mathcal{O}}}$, si $<\alpha>$ est la catégorie associée.

2.2. Résultats préliminaires.

Rappelons très brièvement, ci-dessous, les résultats (connus) que nous utiliserons constamment dans la suite, implicitement ou explicitement.

LEMME a. *La catégorie* H^σ *est canoniquement munie d'une structure de* H*-catégorie* $\mathrm{H}^\sigma = (H^\sigma, \underline{H}^\sigma(-,-))$. *En particulier* H^S *est munie, canoniquement, d'une structure de* H*-catégorie* $\mathrm{H}^S = (H^S, \underline{H}^S(-,-))$ *(il suffit en effet de supposer, pour ce faire, que* $\sigma = (S, \emptyset)$ *).*

PREUVE. Sans détailler la démonstration de ce lemme, rappelons que, si $F: \sigma \to H$ et $F': \sigma \to H$ sont deux réalisations, on pose

$$\underline{H}^\sigma(F, F') = \int_x \underline{H}(F(x), F'(x)) = \underline{H}^S(F, F').$$

Plus généralement, on peut montrer que, si $\mathrm{T} = (T, \underline{T}(-,-))$ est une H-catégorie, pour toute esquisse $\mathcal{K}$-projective petite $\sigma' = (S', \mathcal{T}')$ la catégorie $T^{\sigma'}$ est sous-jacente à une structure de H-catégorie

$$\mathrm{T}^{\sigma'} = (T^{\sigma'}, \underline{T}^{\sigma'}(-,-)).$$

Dans la suite c'est toujours à de telles structures de H-catégories, sur des catégories de réalisations, que nous ferons référence.

LEMME b. *Le foncteur* $P: H^\sigma \hookrightarrow H^S$ *admet un foncteur* H*-adjoint* Q *(pour les structures de* H*-catégories du Lemme a).*

PREUVE. La démonstration figure dans l'Appendice de (F.S.C.A.) et repose essentiellement sur la petitesse de σ, l'existence de limites projectives et inductives petites dans H et la commutation de ces limites projectives avec les limites inductives «filtrantes» (voir 2.1).

LEMME c. *La catégorie* H^σ *est à* $\mathcal{F}_0$*-limites projectives et à* $\mathcal{F}_0$*-limites inductives. Ces limites sont des* H*-limites et les limites projectives s'y calculent «point par point». En particulier, il en est ainsi pour* H^S. *De plus les* $\mathcal{F}_0$*-limites inductives de* H^S *s'y calculent point par point, et le foncteur* $P: H^\sigma \hookrightarrow H^S$ *est compatible avec les limites projectives.*

PREUVE. Pour démontrer ce lemme, on utilise :

- l'existence de limites projectives petites dans H (la commutation des limites projectives avec des limites projectives montre alors que H^σ est à limites projectives) ;

- l'existence de limites inductives petites dans H (qui prouve que H^S est à limites inductives petites et qu'elles se calculent point par point);

- l'existence d'un adjoint au foncteur $P: H^\sigma \to H^S$.

LEMME d. *Pour toute esquisse* $\mathbb{K}$*-projective petite* σ' *et toute réalisation* $\phi: \sigma' \to \sigma$, *le foncteur* $H^\phi: H^\sigma \to H^{\sigma'}$ *admet un foncteur* H*-adjoint. En particulier, si* $\sigma' = 1$, *pour tout objet* x *de* S *(qui s'identifie à une réalisation* «x»$: 1 \to \sigma$ *), le foncteur d'omission*

$$\overline{p}_x: H^\sigma \to H \quad (\text{resp. } p_x: H^S \to H)$$

admet un foncteur H*-adjoint*

$$\overline{q}_x: H \to H^\sigma \quad (\text{resp. } q_x: H \to H^S).$$

PREUVE. Rappelons, une dernière fois, que les H-adjonctions dont il s'agit sont relatives aux structures de H-catégories du Lemme a. La preuve utilise l'existence d'extensions de Kan (H étant à petites limites inductives) et le Lemme c.

Plus généralement, on pourrait remplacer dans le lemme précédent la catégorie H par une H-catégorie T possédant suffisamment de H-limites projectives et inductives et des propriétés de commutation entre certaines de ces limites.

Avec les notations du Lemme d, posons, pour tout objet x de S :

$$\overline{\mathcal{Y}}_1(x) = \overline{q}_x(1) \quad (\text{resp. } \mathcal{Y}_1(x) = q_x(1)).$$

On définit ainsi une application de S_0 dans H^σ (resp. dans H^S) dont on montre facilement qu'elle se prolonge en un foncteur

$$\overline{\mathcal{Y}}_1: S^* \to H^\sigma \quad (\text{resp. } \mathcal{Y}_1: S^* \to H^S).$$

Il est alors clair que:

LEMME e. *Le foncteur* $\overline{\mathcal{Y}}_1$ *définit une réalisation de* σ^* *vers* H^σ *(i. e. une* H^σ*-co-structure d'espèce* σ *). En particulier* $\mathcal{Y}_1$ *peut être regardé aussi comme une* H^S*-co-structure d'espèce* S *(que l'on identifie à* $(S, \emptyset)$ *).*

LEMME f. *Pour tout objet* F *de* H^σ *(resp. de* H^S *), tout objet* G *de* H^σ *(resp.* H^S *) et tous objets* x *et* b *de* S, *on a les isomorphismes naturels:*

$$F(x) \sim \underline{H}^\sigma(F, \overline{\mathcal{Y}}_1(x)) \quad (\text{resp. } F(x) \sim \underline{H}^S(F, \mathcal{Y}_1(x))),$$

$$\underline{H}^{\sigma}(F,G) \sim \int_x \underline{H}(\underline{H}^{\sigma}(F,\overline{\mathcal{Y}}_1(x)),\, G(x))$$
$$(\textit{resp. } \underline{H}^S(F,G) \sim \int_x \underline{H}(\underline{H}^S(F,\mathcal{Y}_1(x)),\, G(x))),$$
$$F(b) \sim \int^x \overline{\mathcal{Y}}_1(x)(b) \otimes F(x) \quad (\textit{resp. } F(b) \sim \int^x \mathcal{Y}_1(x)(b) \otimes F(x)).$$

Intuitivement, les Lemmes e et f signifient que $\overline{\mathcal{Y}}_1$ (resp. $\mathcal{Y}_1$) se comportent comme des plongements de Yoneda («relatifs»).

I. CONSTRUCTIONS ET TESTS STANDARDS

1. CONSTRUCTIONS STANDARDS.

1.1. Construction d'une structure de H-catégorie multiplicative bi-fermée sur H^S, munie d'une co-structure double d'espèce S.

Supposons que la catégorie H^S est munie d'une co-structure double d'espèce S. Ceci signifie que l'on se donne un foncteur

$$C : (S \times S)^* \to H^S .$$

Alors on montre (voir (C.E.S.T.)) que l'on peut lui associer une structure de H-catégorie multiplicative bi-fermée, et ce de manière mécanique (ou, si l'on préfère, «standard»).

Pour ce faire, on construit tout d'abord:

- un *foncteur multiplication* (ou *produit tensoriel*)

$$\overline{\otimes} : H^S \times H^S \to H^S$$

tel que

$$F \overline{\otimes} G(x) = \int^{a,b} C(a,b)(x) \otimes (F(a) \otimes G(b)),$$

- un *foncteur de dédoublement longitudinal*

$$\square\!\square : H^S \to (H^S)^S$$

tel que

$$\square\!\square\, F(x)(y) = \underline{H}^S(F, C(x,y)),$$

- un *foncteur de dédoublement latéral*

$$\boxminus : H^S \to (H^S)^S$$

tel que

$$\boxminus F(x)(y) = \underline{H}^S(F, C(y,x)),$$

- un *foncteur de fermeture longitudinal*

$$\underset{\boxbar}{H^S} : H^S \times (H^S)^* \to H^S$$

tel que

$$\underset{\boxbar}{H^S}(F, F')(x) = \underline{H}^S(\boxbar F(x), F'),$$

- un *foncteur de fermeture latérale*

$$\underset{\boxminus}{H^S} : H^S \times (H^S)^* \to H^S$$

tel que

$$\underset{\boxminus}{H^S}(F, F')(x) = \underline{H}^S(\boxminus F(x), F').$$

Cette terminologie est évidemment justifiée car l'on démontre

PROPOSITION 1. *Pour tout objet F de H^S, le foncteur* $-\bar{\otimes} F$ *est* H-*adjoint (à gauche) au foncteur* $\underset{\boxbar}{H^S}(-, F)$. *Cette correspondance par adjonction est naturelle en F.*

PROPOSITION 2. *Pour tout objet F de H^S, le foncteur* $F\bar{\otimes}-$ *est* H-*adjoint (à gauche) au foncteur* $\underset{\boxminus}{H^S}(-, F)$. *Cette correspondance par adjonction est naturelle en F.*

Ces deux propositions prouvent donc que la donnée d'une co-structure double

$$C : (S \times S)^* \to H^S$$

permet la construction standard d'une structure de H-catégorie multiplicative bi-fermée

$$\hat{\mathrm{H}}^S_C = (\mathrm{H}^S, \bar{\otimes}, \underset{\boxbar}{H^S}(-,-), \underset{\boxminus}{H^S}(-,-)).$$

On peut d'ailleurs remarquer que :

PROPOSITION 3. *Le foncteur $C : (S \times S)^* \to H^S$ est naturellement équivalent au foncteur*

$$\mathcal{Y}_1(-)\,\overline{\otimes}\,\mathcal{Y}_1(-) : (S\times S)^* \xrightarrow[\mathcal{Y}_1\times\mathcal{Y}_1]{} H^S\times H^S \xrightarrow[\overline{\otimes}]{} H^S .$$

1.2. Construction d'une co-structure double sur H^S munie d'une structure de H-catégorie multiplicative bi-fermée.

Il s'agit d'établir une construction réciproque de celle de I.1.1.

Supposons que H^S est munie d'une structure de H-catégorie multiplicative bi-fermée

$$\hat{\mathrm{H}}^S = (\mathrm{H}^S, \hat{\otimes}, \underline{\underline{H}}{}^S_1(-,-), \underline{\underline{H}}{}^S_2(-,-)) .$$

La Proposition 3 ci-dessus suggère qu'il faut poser

$$C_{\hat{\mathrm{H}}^S} = \mathcal{Y}_1(-)\,\hat{\otimes}\,\mathcal{Y}_1(-) : (S\times S)^* \xrightarrow[\mathcal{Y}_1\times\mathcal{Y}_1]{} H^S\times H^S \xrightarrow[\hat{\otimes}]{} H^S .$$

Il s'agit bien d'une co-structure double d'espèce S, i.e.

$$C_{\hat{\mathrm{H}}^S} : (S\times S)^* \longrightarrow H^S.$$

Si on pose, pour simplifier, $C = C_{\hat{\mathrm{H}}^S}$, les constructions et résultats de I.1.1 permettent de construire une H-catégorie multiplicative bi-fermée

$$\hat{\mathrm{H}}^S_C \;\; (= \hat{\mathrm{H}}^S_{C_{\hat{\mathrm{H}}^S}}), \text{ associée à } C \;\; (= C_{\hat{\mathrm{H}}^S}).$$

La proposition qui suit prouve que les structures $\hat{\mathrm{H}}^S$ et $\hat{\mathrm{H}}^S_C$ sont équivalentes, dans un sens qu'elle précise (ainsi que son corollaire).

PROPOSITION 4. *Les foncteurs* $\hat{\otimes}$ *et* $\overline{\otimes}$ *sont équivalents.*

COROLLAIRE. *Les foncteurs* $\underline{\underline{H}}{}^S_1(-,-)$ *(resp.* $\underline{\underline{H}}{}^S_2(-,-)$*) et* $H^S_{\square\square}(-,-)$ *(resp.* $H^S_{\boxminus}(-,-)$*) sont équivalents.*

De même, la Proposition 3 établit que, si C est une co-structure double, C et $C_{\hat{\mathrm{H}}^S_C}$ sont équivalentes.

Il est donc loisible d'affirmer que les co-structures doubles d'espèce S dans H^S classifient les structures de H-catégorie multiplicative bi-fermée sur H^S et qu'elles en permettent une construction systématique.

1.3. Construction d'une structure de H-catégorie multiplicative bi-fermée sur H^σ, munie d'une co-structure double d'espèce σ.

Supposons maintenant que la catégorie H^σ (des réalisations de σ vers H) est munie d'une co-structure double, c'est-à-dire d'une réalisation $\overline{C}: (\sigma\otimes\sigma)^* \to H^\sigma$. A celle-ci est associée une co-structure double d'espèce S de H^S:

$$C: (S\times S)^* \xrightarrow{\overline{C}} H^\sigma \xrightarrow{P} H^S .$$

D'après I.1.1, cette co-structure double sur H^S permet de construire une H-catégorie multiplicative bi-fermée $\hat{\mathrm{H}}^S_C = (\mathrm{H}^S, \overline{\otimes}, \underset{\boxbar}{H^S}(-,-), \underset{\boxminus}{H^S}(-,-))$.

On établit sans difficulté les deux Propositions ci-dessous, car :

- le bi-foncteur $\underline{H}^\sigma(-,-): H^\sigma\times(H^\sigma)^* \to H$ est une restriction du bi-foncteur $\underline{H}^S(-,-): H^S\times(H^S)^* \to H$,

- les limites projectives (resp. inductives) petites de H^σ sont des H-limites projectives (resp. inductives) dans H^σ ; les H-limites projectives petites de H^σ « sont » des H-limites projectives de H^S.

PROPOSITION 5. *Le foncteur* $\boxbar: H^S \to (H^S)^S$ *admet une restriction*

$$\overline{\boxbar}: H^\sigma \to (H^\sigma)^\sigma \quad \textit{telle que} \quad \overline{\boxbar}F(x)(y) = \underline{H}^\sigma(F, \overline{C}(x,y)).$$

De même le foncteur $\boxminus : H^S \to (H^S)^S$ *admet une restriction*

$$\overline{\boxminus}: H^\sigma \to (H^\sigma)^\sigma \quad \textit{telle que} \quad \overline{\boxminus}F(x)(y) = \underline{H}^\sigma(F, \overline{C}(y,x)).$$

PROPOSITION 6. *Le foncteur* $\underset{\boxbar}{H^S}: H^S\times(H^S)^* \to H^S$ *admet une restriction:*

$$\underset{\boxbar}{H^\sigma}: H^\sigma\times(H^\sigma)^* \to H^\sigma \quad \textit{telle que} \quad \underset{\boxbar}{H^\sigma}(F, F')(x) = \underline{H}^\sigma(\overline{\boxbar}F(x), F').$$

De même le foncteur $\underset{\boxminus}{H^S}: H^S\times(H^S)^* \to H^S$ *admet une restriction*

$$\underset{\boxminus}{H^\sigma}: H^\sigma\times(H^\sigma)^* \to H^\sigma \quad \textit{telle que} \quad \underset{\boxminus}{H^\sigma}(F, F')(x) = \underline{H}^\sigma(\overline{\boxminus}F(x), F').$$

On définit alors un « foncteur produit tensoriel dans H^σ » en posant :

$$\overline{\overline{\otimes}}: H^\sigma\times H^\sigma \xrightarrow{P\times P} H^S\times H^S \xrightarrow{\overline{\otimes}} H^S \xrightarrow{Q} H^\sigma .$$

Ceci revient à écrire, notamment :

$$F\overline{\overline{\otimes}}G(-) = Q(\textstyle\int^{a,b} \overline{C}(a,b)(-)\otimes(F(a)\otimes G(b))).$$

Comme le foncteur Q est H-adjoint à P, il est trivial de constater que

$$\hat{\mathrm{H}}^{\sigma}_{\overline{C}} = (\mathrm{H}^{\sigma}, \overline{\overline{\otimes}}, \underset{\square\square}{H}{}^{\sigma}(-,-), \underset{\boxminus}{H}{}^{\sigma}(-,-))$$

est une structure de H-catégorie multiplicative bi-fermée sur H^{σ}, obtenue de manière standard à partir de la seule donnée de la co-structure double $\overline{C}$ d'espèce σ.

Bien entendu, on obtient une proposition analogue à la Proposition 3 de I.1.1, à savoir :

PROPOSITION 7. *Le foncteur* $\overline{C} : (S \times S)^* \to H^{\sigma}$ *est équivalent au foncteur*

$$\overline{\mathcal{Y}}_1(-) \overline{\overline{\otimes}} \overline{\mathcal{Y}}_1(-) : (S\times S)^* \xrightarrow[\overline{\mathcal{Y}}_1 \times \overline{\mathcal{Y}}_1]{} H^{\sigma} \times H^{\sigma} \xrightarrow[\overline{\overline{\otimes}}]{} H^{\sigma}$$

(c'est donc une réalisation de $(\sigma \otimes \sigma)^*$ *vers* H^{σ} *puisque* $\overline{C}$ *en est une).*

1.4. Construction d'une co-structure double sur H^{σ} munie d'une structure de H-catégorie multiplicative bi-fermée.

Etudions brièvement une construction réciproque de celle de I.1.3.

Supposons H^{σ} munie d'une structure de H-catégorie multiplicative bi-fermée

$$\hat{\mathrm{H}}^{\sigma} = (\mathrm{H}^{\sigma}, \hat{\hat{\otimes}}, \underline{\underline{H}}{}^{\sigma}_{1}(-,-), \underline{\underline{H}}{}^{\sigma}_{2}(-,-)).$$

Comme, pour tout objet F de H^{σ}, le foncteur $-\hat{\hat{\otimes}} F$ (resp. $F \hat{\hat{\otimes}} -$) est compatible avec les limites inductives, on peut construire une co-structure double d'espèce σ (i. e. une réalisation)

$$\overline{C}_{\hat{\mathrm{H}}^{\sigma}} : (\sigma \otimes \sigma)^* \xrightarrow[\hat{\hat{\otimes}} . (\overline{\mathcal{Y}}_1 \times \overline{\mathcal{Y}}_1)]{} H^{\sigma}.$$

Nous la noterons plus simplement $\overline{C} = \overline{C}_{\hat{\mathrm{H}}^{\sigma}}$.

Fn appliquant la construction de I.1.3, nous savons lui associer une structure de H-catégorie multiplicative bi-fermée $\hat{\mathrm{H}}^{\sigma}_{\overline{C}}$ ($= \hat{\mathrm{H}}^{\sigma}_{\overline{C}_{\hat{\mathrm{H}}^{\sigma}}}$).

Bien entendu, on démontre :

PROPOSITION 8. *Les foncteurs* $\hat{\hat{\otimes}}$ *et* $\overline{\overline{\otimes}}$ *sont équivalents.*

COROLLAIRE. *Les foncteurs* $\underline{\underline{H}}{}^{\sigma}_{1}(-,-)$ *(resp.* $\underline{\underline{H}}{}^{\sigma}_{2}(-,-)$ *) et* $\underset{\square\square}{H}{}^{\sigma}(-,-)$ *(resp.* $\underset{\boxminus}{H}{}^{\sigma}(-,-)$ *) sont équivalents.*

Ceci signifie précisément que les structures $\hat{\mathrm{H}}^{\sigma}$ et $\hat{\mathrm{H}}^{\sigma}_{\overline{C}_{\hat{\mathrm{H}}^{\sigma}}}$ sont équivalentes.

De même, en vertu de la Proposition 7, si $\overline{C}$ est une co-structure double d'espèce σ dans H^{σ}, alors $\overline{C}$ et $\overline{C}_{\hat{\mathrm{H}}^{\sigma}_{\overline{C}}}$ sont des réalisations équivalentes.

Les constructions standards de I.1.3 et I.1.4 sont donc réciproques l'une de l'autre et elles généralisent celles, réciproques également, de I.1.2 et I.1.1. De plus nous pouvons affirmer que :

- les co-structures doubles d'espèce σ dans H^{σ} classifient les structures de H-catégories multiplicatives bi-fermées sur H^{σ} (formellement, $(H^{\sigma})^{(\sigma\otimes\sigma)^*}$ est équivalente à la duale de la catégorie ayant pour objets les $\hat{\mathrm{H}}^{\sigma}$ et pour morphismes les foncteurs multiplicatifs - i. e. monoïdaux - sur-jacents à l'identité de H^{σ}),
- une structure de H-catégorie multiplicative bi-fermée sur H^{σ} est nécessairement induite par une structure analogue sur H^{S}.

2. TESTS STANDARDS.

Dans toute la suite nous supposons que H^{σ} est munie d'une co-structure double d'espèce σ,

$$\overline{C} : (\sigma\otimes\sigma)^* \longrightarrow H^{\sigma} .$$

En vertu de 1, H^{σ} est donc munie de la structure de H-catégorie multiplicative bi-fermée $\hat{\mathrm{H}}^{\sigma}_{\overline{C}} = (\mathrm{H}^{\sigma}, \overline{\overline{\otimes}}, \underset{\square\square}{H}{}^{\sigma}(-,-), \underset{\boxminus}{H}{}^{\sigma}(-,-))$ déduite de la structure de H-catégorie multiplicative bi-fermée $\hat{\mathrm{H}}^{S}_{C} = (\mathrm{H}^{S}, \overline{\otimes}, \underset{\square\square}{H}{}^{S}(-,-), \underset{\boxminus}{H}{}^{S}(-,-))$, où C est la co-structure double d'espèce S :

$$C : (S\times S)^* \xrightarrow{\overline{C}} H^{\sigma} \xrightarrow{P} H^{S} .$$

(On pourrait, inversement, supposer H^{σ} munie d'une structure de H-catégorie multiplicative bi-fermée $\hat{\mathrm{H}}^{\sigma}$ et en déduire la co-structure double $\overline{C}_{\hat{\mathrm{H}}^{\sigma}}$. Ce point de vue est, en vertu de I.1, équivalent à celui que nous adoptons ici pour plus de commodités.)

De manière générale, nous reprenons les notations de I.1.

2.1. Test de symétrie.

En vertu de la construction du produit tensoriel de deux esquisses (E.G.C.E.), il est clair que le foncteur

$$\Gamma : S \times S \to S \times S \quad \text{défini par} \quad \Gamma(x, y) = (y, x)$$

est une réalisation de $\sigma \otimes \sigma$ vers elle-même (c'est d'ailleurs ce résultat qui permet d'affirmer que le produit tensoriel de deux esquisses est une opération symétrique ... à isomorphismes près).

Nous dirons que $(\overline{C}, R)$ est une *co-structure double symétrique* si $R : \overline{C} \overset{\sim}{\Longrightarrow} \overline{C}.\Gamma^*$ est une équivalence naturelle. Plus simplement il nous arrivera de dire que c'est $\overline{C}$ qui est *symétrique* (R étant sous-entendu, lorsqu'il n'y a pas risque d'ambiguïté).

Le Lemme 1 ci-dessous aide à prouver la Proposition 9 qui suit.

LEMME 1. *Pour tous objets G, F' et F de H^{σ}, on a les isomorphismes naturels*

$$\underline{H}^{\sigma}(G, F' \overline{\overline{\otimes}} F) \xrightarrow{\sim} \int_{x,y} \underline{H}(\underline{H}^{\sigma}(G, \overline{C}(x, y)), F'(x) \otimes F(y))$$

et

$$\underline{H}^{\sigma}(G, F' \overline{\overline{\otimes}} F) \xrightarrow{\sim} \int_{x,y} \underline{H}(\underline{H}^{\sigma}(G, \overline{C}(y, x)), F(x) \otimes F'(y)).$$

PROPOSITION 9. *(Test standard de symétrie) La structure de* H*-catégorie multiplicative bi-fermée $\hat{\mathrm{H}}^{\sigma}_{\overline{C}}$ est symétrique ssi $\overline{C}$ l'est.*

2.2. Test d'associativité.

A la co-structure double $\overline{C} : (\sigma \otimes \sigma)^* \to H^{\sigma}$ nous associons les deux foncteurs ci-dessous, dont on vérifie sans difficulté qu'ils sont des réalisations de $((\sigma \otimes \sigma) \otimes \sigma)^*$ dans H^{σ} :

$\overline{D}_{\overline{C},\overline{\mathcal{Y}}_1} : ((\sigma \otimes \sigma)\otimes \sigma)^* \to H^{\sigma}$ tel que

$$\overline{D}_{\overline{C},\overline{\mathcal{Y}}_1}((x,y),z) = \overline{C}(x,y)\overline{\overline{\otimes}}\,\overline{\mathcal{Y}}_1(z)$$

et $\overline{D}_{\overline{\mathcal{Y}}_1,\overline{C}} : ((\sigma \otimes \sigma)\otimes \sigma)^* \to H^{\sigma}$ tel que

$$\overline{D}_{\overline{\mathcal{Y}}_1,\overline{C}}((x,y),z) = \overline{\mathcal{Y}}_1(x)\overline{\overline{\otimes}}\,\overline{C}(y,z).$$

Ainsi, $\overline{D}_{\overline{\mathcal{Y}}_1,\overline{C}}$ (resp. $\overline{D}_{\overline{C},\overline{\mathcal{Y}}_1}$) est une co-structure triple d'espèce σ dans H^{σ}. Elle est naturellement équivalente à la co-structure triple

$\overline{D}_1 : ((\sigma \otimes \sigma)\otimes \sigma)^* \to H^{\sigma}$ telle que

$$\overline{D}_1((x,y),z) = \overline{\mathcal{Y}}_1(x)\overline{\overline{\otimes}}(\overline{\mathcal{Y}}_1(y)\overline{\overline{\otimes}}\,\overline{\mathcal{Y}}_1(z))$$

(resp. $\overline{D}_2 : ((\sigma \otimes \sigma)\otimes \sigma)^* \to H^{\sigma}$ telle que

$$\overline{D}_2((x,y),z) = (\overline{\mathcal{Y}}_1(x)\overline{\overline{\otimes}}\,\overline{\mathcal{Y}}_1(y))\overline{\overline{\otimes}}\,\overline{\mathcal{Y}}_1(z) \quad).$$

Nous dirons que $(\overline{C}, A)$ est une *co-structure double associative* ssi A est une équivalence naturelle

$$A : \overline{D}_{\overline{C},\overline{\mathcal{Y}}_1} \overset{\sim}{\Longrightarrow} \overline{D}_{\overline{\mathcal{Y}}_1,\overline{C}}$$

(ou bien encore $A : \overline{D}_2 \overset{\sim}{\Longrightarrow} \overline{D}_1$). Nous dirons le plus souvent que c'est $\overline{C}$ qui est *associative* (A étant sous-entendu).

Les Lemmes 2 et 3 qui suivent permettent de prouver immédiatement la Proposition 10 ci-dessous.

LEMME 2. *Pour tous objets* G, F'', F' *et* F *de* H^{σ}, *on a un isomorphisme naturel*

$$\underline{H}^{\sigma}(G,(F''\overline{\overline{\otimes}}F')\overline{\overline{\otimes}}F) \overset{\sim}{\to}$$

$$\int_{x,y,z} \underline{H}(\underline{H}^{\sigma}(G,\overline{D}_{\overline{C},\overline{\mathcal{Y}}_1}((x,y),z)), (F''(x)\otimes F'(y))\otimes F(z)).$$

LEMME 3. *Pour tous objets* G, F'', F' *et* F *de* H^{σ} *on a un isomorphisme naturel*

$$\underline{H}^{\sigma}(G, F''\overline{\overline{\otimes}}(F'\overline{\overline{\otimes}}F)) \overset{\sim}{\to}$$

$$\int_{x,y,z} \underline{H}(\underline{H}^{\sigma}(G,\overline{D}_{\overline{\mathcal{Y}}_1,\overline{C}}((x,y),z)), F''(x)\otimes(F'(y)\otimes F(z))).$$

PROPOSITION 10. *(Test standard d'associativité) La* H-*catégorie multiplicative bi-fermée* $\hat{\mathrm{H}}^{\sigma}_{\overline{C}}$ *est associative ssi* $\overline{C}$ *est associative.*

2.3. Tests d'unitarité.

A tout objet J de H^{σ} nous associons deux foncteurs de S^* vers H^{σ} dont on vérifie sans peine qu'ils sont des réalisations de σ^* vers H^{σ} (i.e. des co-structures simples d'espèce σ dans H^{σ}) et qui sont définis comme suit :

$$\overline{\mathcal{Y}}_{J,1} : \sigma^* \to H^{\sigma} \text{ tel que } \overline{\mathcal{Y}}_{J,1}(x) = J \overline{\overline{\otimes}}\, \overline{\mathcal{Y}}_1(x),$$

$$\overline{\mathcal{Y}}_{1,J} : \sigma^* \to H^{\sigma} \text{ tel que } \overline{\mathcal{Y}}_{1,J}(x) = \overline{\mathcal{Y}}_1(x) \overline{\overline{\otimes}} J.$$

Nous dirons que $(\overline{C}, U_g, J)$ (resp. $(\overline{C}, J, U_d)$) est une *co-structure double admettant* J *pour unité à gauche* (resp. *à droite*) ssi U_g (resp. U_d) est une équivalence naturelle :

$$U_g : \overline{\mathcal{Y}}_{J,1} \overset{\sim}{\Longrightarrow} \overline{\mathcal{Y}}_1 \quad (\text{resp. } U_d : \overline{\mathcal{Y}}_{1,J} \overset{\sim}{\Longrightarrow} \mathcal{Y}_1).$$

Nous dirons que $(\overline{C}, U_g, J, U_d)$ *est une co-structure double admettant* J *pour unité* si $(\overline{C}, U_g, J)$ est une co-structure double admettant J pour unité à gauche et $(\overline{C}, J, U_d)$ une co-structure double admettant J pour unité à droite. Plus simplement, nous dirons souvent que c'est $\overline{C}$ qui *admet* J *pour unité à gauche* (resp. *à droite*) si U_g (resp. U_d) est déterminé sans ambiguïté. De même nous dirons que $\overline{C}$ *admet* J *pour unité* lorsque U_g et U_d sont bien déterminés.

Des deux lemmes qui suivent résulte le *test standard général d'unitarité* de la Proposition 11.

LEMME 4. *Pour tous objets* G, F *et* J *de* H^{σ}, *on a un isomorphisme naturel :*

$$\underline{H}^{\sigma}(G, F \overline{\overline{\otimes}} J) \xrightarrow{\sim} \int_x \underline{H}(\underline{H}^{\sigma}(G, \overline{\mathcal{Y}}_{1,J}(x)), F(x)).$$

LEMME 5. *Pour tous objets* G, F *et* J *de* H^{σ}, *on a un isomorphisme naturel :*

$$\underline{H}^{\sigma}(G, J \overline{\overline{\otimes}} F) \xrightarrow{\sim} \int_x \underline{H}(\underline{H}^{\sigma}(G, \overline{\mathcal{Y}}_{J,1}(x)), F(x)).$$

PROPOSITION 11. *(Test général standard d'unitarité) La* H-*catégorie multiplicative bi-fermée* $\hat{\mathrm{H}}^{\sigma}_{\overline{C}}$ *admet* J *pour unité à gauche (resp. à droite) ssi* $\overline{C}$ *admet* J *pour unité à gauche (resp. à droite). La* H-*catégorie multiplicative bi-fermée* $\hat{\mathrm{H}}^{\sigma}_{\overline{C}}$ *admet* J *pour unité ssi* $\overline{C}$ *admet* J *pour unité.*

On peut donner un test standard particulier d'unitarité plus précis (i. e. permettant de déterminer J plus précisément) dans le cas particulier où $H = \mathfrak{M}$ est munie de sa structure cartésienne fermée canonique, i. e. usuelle, H = M.

Pour ce faire désignons par S' la catégorie libre engendrée par le graphe multiplicatif S et par $L : S \to S'$ le foncteur canonique qui en résulte.

Au foncteur $\overline{\mathcal{Y}}_I : S^* \to \mathfrak{M}^{\sigma}$ est donc associé un unique foncteur

$$\overline{\mathcal{Y}}'_I : S'^* \to \mathfrak{M}^{\sigma}$$

tel que le diagramme ci-dessous commute :

$$\begin{tikzcd} S^* \arrow[r, "\overline{\mathcal{Y}}_I"] \arrow[d, "L^*"'] & \mathfrak{M}^{\sigma} \\ S'^* \arrow[ur, "\overline{\mathcal{Y}}'_I"'] & \end{tikzcd}$$

Comme $\mathfrak{M}^{\sigma}$ est à $\mathcal{F}_0$-limites inductives et puisque σ^* est une esquisse inductive (i. e. dont les seuls cônes distingués sont des cônes $\mathcal{F}_0$-inductifs), la catégorie des réalisations $(\mathfrak{M}^{\sigma})^{(\sigma^*)}$ est à $\mathcal{F}_0$-limites inductives et elles s'y calculent «point par point» (les «points» étant des éléments de $\mathfrak{M}^{\sigma}$!) (F.O.S.A.). Il en résulte que

$$(\mathfrak{M}^{\sigma})^{(\sigma^* \otimes \sigma^*)} \xrightarrow{\sim} ((\mathfrak{M}^{\sigma})^{(\sigma^*)})^{(\sigma^*)}$$

(et ce de deux manières différentes puisque le produit tensoriel d'esquisses est symétrique) d'après (E.G.C.F.).

A la co-structure double $\overline{C} : \sigma^* \otimes \sigma^* \to \mathfrak{M}^{\sigma}$ on peut donc associer les deux réalisations

$$\overline{C}_\delta : \sigma^* \to (\mathcal{M}^\sigma)^{(\sigma^*)} \quad \text{telle que} \quad \overline{C}_\delta(x)(y) = \overline{C}(x,y),$$

$$\overline{C}_\gamma : \sigma^* \to (\mathcal{M}^\sigma)^{(\sigma^*)} \quad \text{telle que} \quad \overline{C}_\gamma(x)(y) = \overline{C}(y,x).$$

On en déduit deux uniques foncteurs

$$\overline{C}'_\delta : S'^* \to (\mathcal{M}^\sigma)^{(\sigma^*)} \quad \text{et} \quad \overline{C}'_\gamma : S'^* \to (\mathcal{M}^\sigma)^{(\sigma^*)}$$

tels que les deux diagrammes ci-dessous commutent :

$$\begin{tikzcd} S^* \arrow[r, "\overline{C}_\delta"] \arrow[d, "L^*"'] & (\mathcal{M}^\sigma)^{(\sigma^*)} \\ S'^* \arrow[ur, "\overline{C}'_\delta"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} S^* \arrow[r, "\overline{C}_\gamma"] \arrow[d, "L^*"'] & (\mathcal{M}^\sigma)^{(\sigma^*)} \\ S'^* \arrow[ur, "\overline{C}'_\gamma"'] & \end{tikzcd}$$

Enfin nous définissons deux foncteurs

$\overline{\mathcal{Y}}'_1(-)\overline{\overline{\otimes}}\,\overline{\mathcal{Y}}_1 : S'^* \to (\mathcal{M}^\sigma)^{(\sigma^*)}$ tel que

$$(\overline{\mathcal{Y}}'_1(-)\overline{\overline{\otimes}}\,\overline{\mathcal{Y}}_1)(x)(y) = \overline{\mathcal{Y}}'_1(x)\overline{\overline{\otimes}}\,\overline{\mathcal{Y}}_1(y),$$

$\overline{\mathcal{Y}}_1\,\overline{\overline{\otimes}}\,\overline{\mathcal{Y}}'_1(-) : S'^* \to (\mathcal{M}^\sigma)^{(\sigma^*)}$ tel que

$$(\overline{\mathcal{Y}}_1\,\overline{\overline{\otimes}}\,\overline{\mathcal{Y}}'_1(-))(x)(y) = \overline{\mathcal{Y}}_1(y)\overline{\overline{\otimes}}\,\overline{\mathcal{Y}}'_1(x).$$

Alors on établit facilement les deux lemmes suivants :

LEMME 6. *Les deux foncteurs* $\overline{C}'_\delta$ *et* $(\overline{\mathcal{Y}}'_1(-)\overline{\overline{\otimes}}\,\overline{\mathcal{Y}}_1)$ *sont naturellement équivalents.*

LEMME 7. *Les deux foncteurs* $\overline{C}'_\gamma$ *et* $(\overline{\mathcal{Y}}_1\,\overline{\overline{\otimes}}\,\overline{\mathcal{Y}}'_1(-))$ *sont naturellement équivalents.*

De ces deux lemmes et du fait que tout foncteur de S' vers $\mathcal{M}$ est « limite inductive de foncteurs représentables » résulte la

PROPOSITION 12. *(Test standard particulier d'unitarité) Pour que la structure de catégorie multiplicative bi-fermée* $\hat{M}\frac{\sigma}{C}$ *soit unitaire à gauche (resp. à droite), il faut et il suffit qu'il existe*

- *une petite catégorie* T *(i. e. un élément* T *de* $\mathcal{F}_0$*),*
- *un foncteur* $\phi : T \to S'^*$ *tel que*

$$\overline{\mathcal{Y}}_1 = \varinjlim \overline{C}'_\delta \circ \phi \quad (\text{resp. } \overline{\mathcal{Y}}_1 = \varinjlim \overline{C}'_\gamma \circ \phi).$$

Les deux conditions précédentes sont réunies ssi $\hat{\mathrm{M}}^{\sigma}_{\overline{C}}$ *est unitaire.*

2.4. Tests de cohérence.

Supposons que $(\overline{C}, A)$ est une co-structure double associative, au sens de I.2.2 dont nous reprenons les notations et les résultats. Il revient donc au même de supposer $\hat{\mathrm{H}}^{\sigma}_{\overline{C}}$ associative. C'est dire aussi que

$$A : \overline{D}_{\overline{C}, \overline{\mathcal{Y}}_1} \overset{\sim}{\Longrightarrow} \overline{D}_{\overline{\mathcal{Y}}_1, \overline{C}}$$

est une équivalence naturelle. On sait donc construire une équivalence naturelle

$$A_{\overline{C}} : (-\overline{\overline{\otimes}}-)\overline{\overline{\otimes}}- \overset{\sim}{\Longrightarrow} -\overline{\overline{\otimes}}(-\overline{\overline{\otimes}}-)$$

déduite de A (Proposition 10).

A $\overline{C}$ nous associons alors cinq foncteurs, dont on vérifie sans peine que ce sont des co-structures quadruples, i. e. des réalisations

$$\overline{E}_i : (((\sigma \otimes \sigma)\otimes \sigma)\otimes \sigma)^* \to H^{\sigma}, \quad 1 \leqslant i \leqslant 5,$$

lorsque l'on pose, successivement :

$$\overline{E}_1(((x,y),z),t) = ((\overline{\mathcal{Y}}_1(x)\overline{\overline{\otimes}}\overline{\mathcal{Y}}_1(y))\overline{\overline{\otimes}}\overline{\mathcal{Y}}_1(z))\overline{\overline{\otimes}}\overline{\mathcal{Y}}_1(t),$$
$$\overline{E}_2(((x,y),z),t) = (\overline{\mathcal{Y}}_1(x)\overline{\overline{\otimes}}\overline{\mathcal{Y}}_1(y))\overline{\overline{\otimes}}(\overline{\mathcal{Y}}_1(z)\overline{\overline{\otimes}}\overline{\mathcal{Y}}_1(t)),$$
$$\overline{E}_3(((x,y),z),t) = \overline{\mathcal{Y}}_1(x)\overline{\overline{\otimes}}(\overline{\mathcal{Y}}_1(y)\overline{\overline{\otimes}}(\overline{\mathcal{Y}}_1(z)\overline{\overline{\otimes}}\overline{\mathcal{Y}}_1(t))),$$
$$\overline{E}_4(((x,y),z),t) = (\overline{\mathcal{Y}}_1(x)\overline{\overline{\otimes}}(\overline{\mathcal{Y}}_1(y)\overline{\overline{\otimes}}\overline{\mathcal{Y}}_1(z)))\overline{\overline{\otimes}}\overline{\mathcal{Y}}_1(t),$$
$$\overline{E}_5(((x,y),z),t) = \overline{\mathcal{Y}}_1(x)\overline{\overline{\otimes}}((\overline{\mathcal{Y}}_1(y)\overline{\overline{\otimes}}\overline{\mathcal{Y}}_1(z))\overline{\overline{\otimes}}\overline{\mathcal{Y}}_1(t)).$$

pour tout $(((x,y),z),t)$ appartenant à $((S\times S)\times S)\times S$.

De l'équivalence naturelle $A_{\overline{C}}$ résultent les équivalences naturelles

$A_{1,2} : \overline{E}_1 \overset{\sim}{\Longrightarrow} \overline{E}_2$ telle que

$$A_{1,2}(((x,y),z),t) = A_{\overline{C}}(\overline{\mathcal{Y}}_1(x)\overline{\overline{\otimes}}\overline{\mathcal{Y}}_1(y), \overline{\mathcal{Y}}_1(z), \overline{\mathcal{Y}}_1(t)),$$

$A_{2,3} : \overline{E}_2 \overset{\sim}{\Longrightarrow} \overline{E}_3$ telle que

$$A_{2,3}(((x,y),z),t) = A_{\overline{C}}(\overline{\mathcal{Y}}_1(x), \overline{\mathcal{Y}}_1(y), \overline{\mathcal{Y}}_1(z)\overline{\overline{\otimes}}\overline{\mathcal{Y}}_1(t)),$$

$A_{1,4} : \overline{E}_1 \overset{\sim}{\Longrightarrow} \overline{E}_4$ telle que

$$A_{1,4}(((x,y),z),t) = A_{\overline{C}}(\overline{\mathcal{Y}}_1(x), \overline{\mathcal{Y}}_1(y), \overline{\mathcal{Y}}_1(z)) \,\overline{\overline{\otimes}}\, \overline{\mathcal{Y}}_1(t),$$

$A_{4,5} : \overline{E}_4 \overset{\sim}{\Longrightarrow} \overline{E}_5$ telle que

$$A_{4,5}(((x,y),z),t) = A_{\overline{C}}(\overline{\mathcal{Y}}_1(x), \overline{\mathcal{Y}}_1(y) \,\overline{\overline{\otimes}}\, \overline{\mathcal{Y}}_1(z), \overline{\mathcal{Y}}_1(t)),$$

$A_{5,3} : \overline{E}_5 \overset{\sim}{\Longrightarrow} \overline{E}_3$ telle que

$$A_{5,3}(((x,y),z),t) = \overline{\mathcal{Y}}_1(x) \,\overline{\overline{\otimes}}\, A_{\overline{C}}(\overline{\mathcal{Y}}_1(y), \overline{\mathcal{Y}}_1(z), \overline{\mathcal{Y}}_1(t)).$$

Nous disons que $(\overline{C}, A)$ est une *co-structure double associative et cohérente ssi*

- $(\overline{C}, A)$ est une co-structure double associative (ce que nous supposons),

- le diagramme ci-dessous commute :

$$\begin{tikzcd}
\overline{E}_1 \arrow[r, Rightarrow, "\sim", "A_{1,2}"'] \arrow[dr, Rightarrow, "\sim", "A_{1,4}"'] & \overline{E}_2 \arrow[rr, Rightarrow, "\sim", "A_{2,3}"'] & & \overline{E}_3 \\
& \overline{E}_4 \arrow[r, Rightarrow, "\sim", "A_{4,5}"'] & \overline{E}_5 \arrow[ur, Rightarrow, "\sim", "A_{5,3}"'] &
\end{tikzcd}$$

Nous dirons aussi que c'est $\overline{C}$ qui est *associative et cohérente* lorsque A est déterminé sans ambiguïté.

A l'aide de la commutation de 27 (!) diagrammes (que l'on décrit scrupuleusement en (C.E.S.T.)) on établit *facilement* (malgré le nombre de ces diagrammes) la proposition :

PROPOSITION 13. *(Test de cohérence pour l'associativité) Si* $\overline{C}$ *est une co-structure double associative, pour que* $\hat{\mathrm{H}}^{\sigma}_{\overline{C}}$ *soit cohérente pour l'associativité, il faut et il suffit que* $\overline{C}$ *le soit.*

Comme on définit d'une manière analogue les notions de :

- cohérence pour l'unitarité d'une co-structure double associative et unitaire,

- cohérence pour la symétrie d'une co-structure double associative et symétrique, on voit que des procédés analogues à ceux utilisés pour établir le test de cohérence pour l'associativité permettent d'énoncer un test de cohérence pour l'unitarité et un test de cohérence pour la symétrie.

Autrement dit, on peut énoncer :

THEOREME 1. *Si* $\overline{C}$ *est une co-structure double d'espèce* σ *dans* H^{σ}, *pour que la* H-*catégorie multiplicative bi-fermée* $\hat{\mathrm{H}}^{\sigma}_{\overline{C}}$ *soit une* H-*catégorie monoïdale bi-fermée (resp. et symétrique), il faut et il suffit que les conditions suivantes soient toutes vérifiées :*

- $\overline{C}$ *admet une unité (I.2.3),*
- $\overline{C}$ *est associative (I.2.2),*
- $\overline{C}$ *est cohérente pour l'associativité,*
- $\overline{C}$ *est cohérente pour l'unitarité,*

(resp. et :

- $\overline{C}$ *est symétrique (I.2.1),*
- $\overline{C}$ *est cohérente pour la symétrie).*

II. CO-STRUCTURES STANDARDS ET STRUCTURES VIRTUELLES

1. STRUCTURES DE COMPARAISON ET STRUCTURES VIRTUELLES.

1.1. Foncteurs de comparaison.

Si σ et σ' sont deux esquisses $\mathcal{K}$-projectives petites, on appelle *foncteur de comparaison*, ou plus simplement *comparaison, de* H^{σ} *vers* $H^{\sigma'}$ tout foncteur de H^{σ} vers $H^{\sigma'}$ qui admet un foncteur H-co-adjoint (pour les structures canoniques de H-catégories H^{σ} et $\mathrm{H}^{\sigma'}$). Dualement, on appelle *foncteur de co-comparaison*, ou plus simplement *co-comparaison, de* $H^{\sigma'}$ *vers* H^{σ} tout foncteur de $H^{\sigma'}$ vers H^{σ} admettant un foncteur H-adjoint.

Ainsi, un foncteur H-co-adjoint d'un foncteur de comparaison est un foncteur de co-comparaison et un foncteur H-adjoint d'un foncteur de co-comparaison est un foncteur de comparaison.

En particulier, si $\overline{C}: (\sigma \otimes \sigma)^* \to H^\sigma$ est une co-structure double d'espèce σ et si F est un objet de H^σ, le foncteur $-\overline{\overline{\otimes}} F$ est une comparaison de H^σ vers elle-même tandis que le foncteur $\underset{\square\square}{H^\sigma}(-, F)$ est une co-comparaison de H^σ vers elle-même.

Si $\phi : \sigma' \to \sigma$ est une réalisation, alors $H^\phi : H^\sigma \to H^{\sigma'}$ admet un foncteur H-adjoint en vertu des conditions imposées à H. En conséquence H^ϕ est un foncteur de co-comparaison.

En particulier on peut supposer que $\sigma' = 1$. Alors $\phi : 1 \to \sigma$ distingue un objet e de σ et $H^\phi : H^\sigma \to H^1 \approx H$ est le foncteur «évaluation en e» (on l'appelle aussi foncteur d'omission en e). Les foncteurs d'omission en les objets de σ sont donc des co-comparaisons de H^σ vers H et leurs adjoints des foncteurs de comparaison.

Nous désignerons par

$$\textbf{Comp}_{\mathrm{H}}(H^{\sigma'}, H^\sigma) \quad (\text{resp. } \textbf{Co-comp}_{\mathrm{H}}(H^\sigma, H^{\sigma'}))$$

la catégorie dont les objets sont les foncteurs de comparaison (resp. de co-comparaison) de H^σ vers $H^{\sigma'}$ (resp. de $H^{\sigma'}$ vers H^σ) et dont les morphismes sont les transformations naturelles entre ces foncteurs. Alors les catégories $\textbf{Comp}_{\mathrm{H}}(H^{\sigma'}, H^\sigma)^*$ et $\textbf{Co-comp}_{\mathrm{H}}(H^\sigma, H^{\sigma'})$ sont équivalentes. Le choix d'une équivalence

$$\textbf{Comp}_{\mathrm{H}}(H^{\sigma'}, H^\sigma)^* \xrightarrow{\sim} \textbf{Co-comp}_{\mathrm{H}}(H^\sigma, H^{\sigma'})$$

équivaut à la donnée du choix d'un foncteur H-co-adjoint à chaque foncteur de comparaison et d'un foncteur H-adjoint à chaque foncteur de co-comparaison. Dans la suite, on suppose de tels choix fixés, i.e. une telle équivalence donnée une fois pour toutes.

1.2. Réalisations virtuelles.

Un foncteur $H^{\sigma'} \to H^\sigma$ n'est, évidemment, pas toujours représenté, i.e. de la forme H^ϕ où $\phi : \sigma \to \sigma'$ est une réalisation. C'est pourquoi nous dirons qu'un tel foncteur définit une réalisation virtuelle de σ vers σ'.

Plus précisément, désignons par $Virt_{\mathrm{H}}$ la catégorie définie par:

- ses objets sont les esquisses $\mathbb{K}$-projectives petites,

- ses morphismes sont les triplets (σ', F, σ), où $F: H^{\sigma'} \to H^{\sigma}$ est un foncteur de co-comparaison ; on dira que (σ', F, σ) est *une réalisation virtuelle de source* σ *et de but* σ' dans $Virt_{\mathrm{H}}$,

- la loi de composition est définie par

$$(\sigma'', F', \sigma').(\sigma', F, \sigma) = (\sigma'', F.F', \sigma).$$

En réalité, $Virt_{\mathrm{H}}$ est une catégorie sous-jacente à une $\check{\mathfrak{F}}$-catégorie (i. e. à une 2-catégorie) que nous notons $\mathbf{Virt}_{\mathrm{H}} = (Virt_{\mathrm{H}}, \mathbf{Virt}_{\mathrm{H}}(-,-))$. Pour deux objets quelconques σ et σ' de $Virt_{\mathrm{H}}$, la catégorie $\mathbf{Virt}_{\mathrm{H}}(\sigma', \sigma)$ est définie de la manière suivante :

- ses objets sont les réalisations virtuelles de σ vers σ' ,

- ses morphismes sont les (σ', n, σ) où $n: F \Longrightarrow F'$ est une transformation naturelle entre foncteurs de co-comparaison ; on dira que (σ', n, σ) est une *transformation naturelle virtuelle de source* (σ', F, σ) et de but (σ', F', σ) dans $\mathbf{Virt}_{\mathrm{H}}(\sigma', \sigma)$,

- la loi de composition est définie par

$$(\sigma', n', \sigma) \boxminus (\sigma', n, \sigma) = (\sigma', n' \boxminus n, \sigma).$$

On complète aisément la définition du foncteur «*Hom* à valeurs dans $\check{\mathfrak{F}}$ » , noté $\mathbf{Virt}_{\mathrm{H}}(-,-)$, en utilisant des méthodes usuelles.

Ainsi, la loi de composition de la 2-catégorie $\mathbf{Virt}_{\mathrm{H}}$ est définie par la donnée naturelle (en σ'' , σ' , σ) des foncteurs

$$\mathbf{Virt}_{\mathrm{H}}(\sigma'', \sigma') \times \mathbf{Virt}_{\mathrm{H}}(\sigma', \sigma) \to \mathbf{Virt}_{\mathrm{H}}(\sigma'', \sigma):$$

$$((\sigma'', n', \sigma'), (\sigma', n, \sigma)) \longmapsto (\sigma'', n.n', \sigma) .$$

Si (σ', F, σ) et $(\sigma'_1, F_1, \sigma_1)$ sont deux réalisations virtuelles, on obtient les deux foncteurs admettant des foncteurs H-adjoints, qui suivent :

$$F^{\sigma'_1}: (H^{\sigma'})^{\sigma'_1} \to (H^{\sigma})^{\sigma'_1} \quad \text{et} \quad F_1^{\sigma}: (H^{\sigma'_1})^{\sigma} \to (H^{\sigma_1})^{\sigma}.$$

On en déduit, par isomorphisme, un foncteur admettant un foncteur H-adjoint

$$\widetilde{(F^{\sigma'_1})}: (H^{\sigma'_1})^{\sigma'} \to (H^{\sigma'_1})^{\sigma}$$

et, par composition, un foncteur admettant un foncteur H-adjoint :

$$(F_1^{\sigma}).(\widetilde{F^{\sigma'_1}}) : (H^{\sigma'_1})^{\sigma'} \to (H^{\sigma_1})^{\sigma}.$$

En utilisant de nouveau les isomorphismes canoniques adéquats, on obtient un foncteur de co-comparaison

$$\overline{((F_1^{\sigma}).(\widetilde{F^{\sigma'_1}}))} : H^{\sigma'_1 \otimes \sigma'} \to H^{\sigma_1 \otimes \sigma}.$$

(Remarquons que ce foncteur peut être construit d'une autre façon. C'est ce qu'indique l'égalité suivante :

$$\overline{(F_1^{\sigma}).(\widetilde{F^{\sigma'_1}})} = \overline{(\widetilde{F^{\sigma_1}}).(F_1^{\sigma'})}\,.\,)$$

Nous poserons alors

$$(\sigma'_1, F_1, \sigma_1) \otimes (\sigma', F, \sigma) = (\sigma'_1 \otimes \sigma', \overline{(F_1^{\sigma}).(\widetilde{F^{\sigma'_1}})}, \sigma_1 \otimes \sigma)$$

et nous dirons qu'il s'agit du *produit tensoriel* (dans $Virt_{\mathrm{H}}$) *des réalisations virtuelles* $(\sigma'_1, F_1, \sigma_1)$ *et* (σ', F, σ).

Dès lors $(Virt_{\mathrm{H}}, \otimes)$ est une catégorie multiplicative.

En fait, cette catégorie multiplicative est sous-jacente à une catégorie monoïdale symétrique

$$(Virt_{\mathrm{H}}, \otimes, unit_g, 1, unit_d, ass, sym)$$

que l'on explicite sans peine (en tenant compte, par exemple, du fait que la catégorie pleine de réalisations entre $\mathcal{K}$-esquisses projectives petites $\mathcal{V}^{\mathcal{K}}$ est monoïdale fermée symétrique). En constatant de plus qu'une 2-flèche de σ vers σ', dans $\mathbf{Virt}_{\mathrm{H}}$, s'identifie à une 1-flèche de $\sigma \otimes 2$ vers σ' (i. e. $\mathbf{Virt}_{\mathrm{H}}$ est une 2-catégorie co-représentable), il est clair que le produit tensoriel

$$\otimes : Virt_{\mathrm{H}} \times Virt_{\mathrm{H}} \to Virt_{\mathrm{H}}$$

admet un 2-foncteur extension (noté de même)

$$\otimes : \mathbf{Virt}_{\mathrm{H}} \times \mathbf{Virt}_{\mathrm{H}} \to \mathbf{Virt}_{\mathrm{H}}.$$

On montre facilement que l'on obtient ainsi une 2-catégorie monoïdale symétrique (i. e. une $\check{\mathcal{F}}$-catégorie monoïdale symétrique)

$$\hat{\mathbf{Virt}}_{\mathrm{H}} = (\mathbf{Virt}_{\mathrm{H}}, \otimes, \ldots).$$

1.3. Monoides virtuels et monoïdes de comparaison.

Etudions tout d'abord avec plus de précisions les rapports entre réalisations virtuelles et foncteurs de co-comparaison.

Désignons pour ce faire par $\mathit{Co\text{-}comp}_{\mathrm{H}}$ (resp. $\mathit{Comp}_{\mathrm{H}}$) la catégorie telle que

- ses objets sont les H^{σ}, où σ est une esquisse $\mathcal{K}$-projective petite,
- ses morphismes sont les foncteurs de co-comparaison (resp. de comparaison), que l'on compose usuellement.

$\mathit{Co\text{-}comp}_{\mathrm{H}}$ (resp. $\mathit{Comp}_{\mathrm{H}}$) est évidemment sous-jacente à une $\check{\mathfrak{F}}$-catégorie (i. e. une 2-catégorie) que nous notons $\mathbf{Co\text{-}comp}_{\mathrm{H}}$ (resp. $\mathbf{Comp}_{\mathrm{H}}$) et pour laquelle :

- le foncteur «*Hom* à valeurs dans $\check{\mathfrak{F}}$ », noté $\mathbf{Co\text{-}comp}_{\mathrm{H}}(-,-)$ (resp. $\mathbf{Comp}_{\mathrm{H}}(-,-)$) est «défini» en II.1.1,
- la loi de composition est définie par la donnée naturelle des foncteurs tels que

$$\mathbf{Co\text{-}comp}_{\mathrm{H}}(H^{\sigma}, H^{\sigma'}) \times \mathbf{Co\text{-}comp}_{\mathrm{H}}(H^{\sigma'}, H^{\sigma''}) \to \mathbf{Co\text{-}comp}_{\mathrm{H}}(H^{\sigma}, H^{\sigma''}):$$
$$(n, n') \longmapsto n.n'$$

(resp. $$\mathbf{Comp}_{\mathrm{H}}(H^{\sigma''}, H^{\sigma'}) \times \mathbf{Comp}_{\mathrm{H}}(H^{\sigma'}, H^{\sigma}) \to \mathbf{Comp}_{\mathrm{H}}(H^{\sigma''}, H^{\sigma})$$
$$(n', n) \longmapsto n'.n$$).

Désignons par $\mathbf{Co\text{-}comp}^*_{\mathrm{H}}$ la $\check{\mathfrak{F}}$-catégorie telle que

- $\mathbf{Co\text{-}comp}^*_{\mathrm{H}}(H^{\sigma'}, H^{\sigma}) = \mathbf{Co\text{-}comp}_{\mathrm{H}}(H^{\sigma}, H^{\sigma'})$,
- sa catégorie sous-jacente est $\mathit{Co\text{-}comp}_{\mathrm{H}}{}^*$.

Il est alors évident que l'on obtient un 2-foncteur

$$\mathbf{Exp}_{\mathrm{H}} : \mathbf{Virt}_{\mathrm{H}} \to \mathbf{Co\text{-}comp}_{\mathrm{H}}{}^*$$

en posant :

- $\mathbf{Exp}_{\mathrm{H}}(\sigma', \sigma) : \mathbf{Virt}_{\mathrm{H}}(\sigma', \sigma) \to \mathbf{Co\text{-}comp}_{\mathrm{H}}(H^{\sigma}, H^{\sigma'})$
$$(\sigma', n, \sigma) \longmapsto n$$
- $\mathit{Exp}_{\mathrm{H}} : \mathit{Virt}_{\mathrm{H}} \to \mathit{Co\text{-}comp}_{\mathrm{H}}{}^*$
$$(\sigma', F, \sigma) \longmapsto F .$$

Remarquons que, pour tous objets σ' et σ de $Virt_{\mathrm{H}}$, $\mathbf{Exp}_{\mathrm{H}}(\sigma',\sigma)$ est un foncteur inversible. Son inverse sera noté $\mathbf{Log}_{\mathrm{H}}(\sigma',\sigma)$; il est défini par :

$$\begin{aligned} \mathbf{Log}_{\mathrm{H}}(\sigma',\sigma) : \mathbf{Co\text{-}comp}_{\mathrm{H}}(H^{\sigma}, H^{\sigma'}) &\to \mathbf{Virt}_{\mathrm{H}}(\sigma',\sigma) \\ v &\longmapsto (\sigma', v, \sigma). \end{aligned}$$

(Cependant le 2-foncteur $\mathbf{Exp}_{\mathrm{H}}$ n'est pas inversible !)

Ceci établi, nous dirons qu'un morphisme virtuel $(\sigma, k, \sigma\otimes\sigma)$ *définit une structure de magma virtuel sur* σ. S'il n'y a aucun risque de confusion, nous poserons $Log_{\mathrm{H}}k = (\sigma, k, \sigma\otimes\sigma)$ ou, plus brièvement encore, $Log\,k = (\sigma, k, \sigma\otimes\sigma)$.

Nous dirons que $(Log\,k, a)$ est un *magma virtuel associatif sur* σ ssi a est une 2-flèche inversible de $\mathbf{Virt}_{\mathrm{H}}$ que l'on a représentée dans le diagramme 1 ci-dessous :

$$\begin{tikzcd}
\sigma \arrow[d, equal] & \sigma\otimes\sigma \arrow[l, "Log\,k"'] & \sigma\otimes(\sigma\otimes\sigma) \arrow[l, "\sigma\otimes Log\,k"'] \arrow[d, "ass(\sigma,\sigma,\sigma)^{-1}"] \arrow[d, phantom, shift right=6ex, "\overset{\sim}{\Rightarrow} a"] \\
\sigma & \sigma\otimes\sigma \arrow[l, "Log\,k"] \arrow[u, phantom, "\text{DIAGRAMME 1}"] & (\sigma\otimes\sigma)\otimes\sigma \arrow[l, "Log\,k\otimes\sigma"]
\end{tikzcd}$$

Nous dirons de plus que le magma associatif virtuel $(Log\,k, a)$ est *cohérent* ssi, dans les diagrammes 2 et 3 ci-dessous, les 2-morphismes obtenus par composition verticale des composés horizontaux sont égaux :

$$\begin{tikzcd}
\sigma \arrow[d, equal] & \sigma\otimes\sigma \arrow[l, "Log\,k"'] & \sigma\otimes(\sigma\otimes\sigma) \arrow[l, "\sigma\otimes Log\,k"'] \arrow[d] \arrow[d, phantom, shift right=4ex, "\overset{\sim}{\Rightarrow} a"] & \sigma\otimes(\sigma\otimes(\sigma\otimes\sigma)) \arrow[l, "\sigma\otimes(\sigma\otimes Log\,k)"'] \arrow[d, "ass(\dots)^{-1}"] \arrow[d, phantom, shift right=4ex, "\overset{\sim}{\Rightarrow}"] \\
\sigma \arrow[d, equal] & \sigma\otimes\sigma \arrow[l, "Log\,k"'] & (\sigma\otimes\sigma)\otimes\sigma \arrow[l, "Log\,k\otimes\sigma"'] & (\sigma\otimes\sigma)\otimes(\sigma\otimes\sigma) \arrow[l, "(\sigma\otimes\sigma)\otimes Log\,k"'] \arrow[d, equal] \arrow[d, phantom, shift right=4ex, "\overset{\sim}{\Rightarrow}"] \\
\sigma \arrow[d, equal] & \sigma\otimes\sigma \arrow[l, "Log\,k"'] \arrow[u, phantom, "\text{DIAGRAMME 2}"] & \sigma\otimes(\sigma\otimes\sigma) \arrow[l, "\sigma\otimes Log\,k"'] \arrow[d] \arrow[d, phantom, shift right=4ex, "\overset{\sim}{\Rightarrow} a"] & (\sigma\otimes\sigma)\otimes(\sigma\otimes\sigma) \arrow[l, "Log\,k\otimes(\sigma\otimes\sigma)"'] \arrow[d, "ass(\dots)^{-1}"] \arrow[d, phantom, shift right=4ex, "\overset{\sim}{\Rightarrow}"] \\
\sigma & \sigma\otimes\sigma \arrow[l, "Log\,k"'] & (\sigma\otimes\sigma)\otimes\sigma \arrow[l, "Log\,k\otimes\sigma"'] & ((\sigma\otimes\sigma)\otimes\sigma)\otimes\sigma \arrow[l, "(Log\,k\otimes\sigma)\otimes\sigma"']
\end{tikzcd}$$

$$
\begin{tikzcd}
\sigma \arrow[d, "="'] & \sigma\otimes\sigma \arrow[l, "Logk"'] \arrow[d] & \sigma\otimes(\sigma\otimes\sigma) \arrow[l, "\sigma\otimes Logk"'] & \sigma\otimes(\sigma\otimes(\sigma\otimes\sigma)) \arrow[l, "\sigma\otimes(\sigma\otimes Logk)"'] \arrow[d, "\sigma\otimes ass(\dots)^{-1}", "\wr"'] \arrow[dl, phantom, "\sigma\otimes a \Rightarrow"] \\
\sigma \arrow[d, "="'] & \sigma\otimes\sigma \arrow[l, "Logk"'] \arrow[dr, phantom, "\text{DIAGRAMME 3}"] & \sigma\otimes(\sigma\otimes\sigma) \arrow[l, "\sigma\otimes Logk"'] \arrow[d] \arrow[dl, phantom, "a \Rightarrow"] & \sigma\otimes((\sigma\otimes\sigma)\otimes\sigma) \arrow[l, "\sigma\otimes(Logk\otimes\sigma)"'] \arrow[d, "ass(\dots)^{-1}", "\wr"'] \\
\sigma \arrow[d, "="'] & \sigma\otimes\sigma \arrow[l, "Logk"'] \arrow[d] & (\sigma\otimes\sigma)\otimes\sigma \arrow[l, "Logk\otimes\sigma"'] & (\sigma\otimes(\sigma\otimes\sigma))\otimes\sigma \arrow[l, "(\sigma\otimes Logk)\otimes\sigma"'] \arrow[d, "ass(\dots)^{-1}\otimes\sigma", "\wr"'] \arrow[dl, phantom, "a\otimes\sigma \Rightarrow"] \\
\sigma & \sigma\otimes\sigma \arrow[l, "Logk"'] & (\sigma\otimes\sigma)\otimes\sigma \arrow[l, "Logk\otimes\sigma"'] & ((\sigma\otimes\sigma)\otimes\sigma)\otimes\sigma \arrow[l, "(Logk\otimes\sigma)\otimes\sigma"']
\end{tikzcd}
$$

Nous dirons que $(Logk, u_g, Logj)$ (resp. $(Logk, Logj, u_d)$) est une *structure de magma virtuel unitaire à gauche* (resp. *à droite*) sur σ ssi :

- $Logj = (\sigma, j, 1)$ est une 1-flèche de $\mathbf{Virt}_{\mathrm{H}}$,
- u_g (resp. u_d) est une 2-flèche inversible de $\mathbf{Virt}_{\mathrm{H}}$ que l'on a représentée par le diagramme 4 (resp. 5) ci-dessous.

$$
\begin{tikzcd}
\sigma \arrow[rr, "="] \arrow[d, "="'] \arrow[dr, phantom, "\Swarrow u_g"] & & \sigma \arrow[d, "="] \\
\sigma \arrow[r, "Logj\otimes\sigma"'] & \sigma\otimes\sigma \arrow[r, "Logk"'] \arrow[u, phantom, "\text{DIAGRAMME 4}"] & \sigma
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\sigma \arrow[rr, "="] \arrow[d, "="'] \arrow[dr, phantom, "\Swarrow u_d"] & & \sigma \arrow[d, "="] \\
\sigma \arrow[r, "\sigma\otimes Logj"'] & \sigma\otimes\sigma \arrow[r, "Logk"'] \arrow[u, phantom, "\text{DIAGRAMME 5}"] & \sigma
\end{tikzcd}
$$

Nous dirons que $(Logk, u_g, Logj, u_d)$ est une *structure de magma virtuel unitaire sur* σ ssi $(Logk, Logj, u_d)$ est un magma virtuel unitaire à droite et $(Logk, u_g, Logj)$ un magma virtuel unitaire à gauche.

Une *structure de magma virtuel symétrique sur* σ est un $(Logk, r)$, où r est un 2-morphisme inversible de $\mathbf{Virt}_{\mathrm{H}}$ que l'on a représenté sur le diagramme 6 :

$$
\begin{tikzcd}
\sigma \arrow[d, "="'] \arrow[dr, phantom, "\text{DIAGRAMME 6} \quad r \Rightarrow"] & \sigma\otimes\sigma \arrow[l, "Logk"'] \arrow[d, "sym(\sigma,\sigma)", "\wr"'] \\
\sigma & \sigma\otimes\sigma \arrow[l, "Logk"]
\end{tikzcd}
$$

On formalise de même les notions de *magma virtuel associatif uni-*

taire et cohérent et de *magma virtuel associatif symétrique et cohérent.* Un magma virtuel associatif unitaire et cohérent sera appelé un *monoïde virtuel* et, si de plus ce magma virtuel est symétrique et cohérent pour la symétrie, on dira qu'il s'agit d'un *monoïde virtuel symétrique.*

On peut déduire d'une telle structure virtuelle une co-structure de co-comparaison.

En effet, si $(Log k, \dots)$ est un magma virtuel sur σ, éventuellement associatif, unitaire, symétrique ou cohérent, son image $(k, \dots)$ par le 2-foncteur **Exp** dans $\mathbf{Co\text{-}comp}_{\mathrm{H}}$ (i. e. le 2-diagramme image dans $\mathbf{Co\text{-}comp}_{\mathrm{H}}$ et les 2-conditions associées) sera appelée *co-magma de co-comparaison*, éventuellement associatif, unitaire, symétrique ou cohérent si tel est le cas du magma virtuel $(Log k, \dots)$. On définit ainsi, notamment, les *co-monoïdes de co-comparaison* et les *co-monoïdes symétriques de co-comparaison.*

Il est donc équivalent de considérer une structure virtuelle sur σ, de l'un des types précédents, ou une co-structure de co-comparaison de ce type. Nous allons envisager un troisième point de vue, également équivalent, en montrant comment de telles structures virtuelles, ou de telles co-structures de co-comparaison, induisent des structures de comparaison.

Posons, pour ce faire :

- $H^{(\sigma^0)} = H^1 \; (\approx H)$ et $H^{(\sigma^1)} = H^\sigma$,
- pour tout entier $p \geqslant 2$, $H^{(\sigma^p)} = (H^{(\sigma^{p-1})})^\sigma$.

Désignons par M_S (resp. $M_{\{\sigma\}}$) le magma unitaire non associatif libre engendré par l'ensemble S (resp. par $\{\sigma\}$). Ses éléments sont donc les mots, «avec parenthèses», écrits avec des éléments de S (resp. le seul symbole σ), ainsi que le mot vide. L'application constante $S \to \{\sigma\}$ induit un unique homomorphisme de magmas unitaires $m_1 : M_S \to M_{\{\sigma\}}$. De même il existe un unique homomorphisme de magmas unitaires

$$m_2 : M_S \to \coprod_{n \in \mathbf{N}} S^n ,$$

où la somme est munie canoniquement de la structure de magma unitaire associatif libre sur S (m_2 n'est autre que l'homomorphisme « suppression des parenthèses »).

Les applications «*longueurs*» (des mots) définissent des homomorphismes

$$l_1 : M_{\{\sigma\}} \to (\mathrm{N}, +) \qquad \text{et} \qquad l_2 : \coprod_{n \in \mathbf{N}} S^n \to (\mathrm{N}, +).$$

Enfin on a un homomorphisme de magmas (non considérés comme unitaires !) $m : M_{\{\sigma\}} \to (Virt_{\mathrm{H}}, \otimes)$ dès que l'on pose

$$m(\emptyset) = 1, \quad m(\sigma) = \sigma.$$

Cet homomorphisme est une injection (excepté dans les cas $\sigma = \emptyset, 1$ que nous excluons). On vérifiera sans peine que

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & M_{\{\sigma\}} \arrow[dr, "l_1"] & \\ M_S \arrow[ur, "m_1"] \arrow[dr, "m_2"'] & & (\mathrm{N}, +) \\ & \coprod_{n \in \mathbf{N}} S^n \arrow[ur, "l_2"'] & \end{tikzcd}$$

est un produit fibré de magmas unitaires. Il en résulte que tout mot $\mu' \in M_S$ de longueur $n > 0$ s'identifie à un couple $(m_1(\mu'), (x_1 \dots x_n))$ où $m_1(\mu')$ est un mot de longueur n de $M_{\{\sigma\}}$ (qui détermine «la place des parenthèses dans μ') et $(x_1, \dots, x_n) \in S^n$ détermine les «composantes» du mot μ'. Nous notons

$$\Delta : (M_{\{\sigma\}}) \underset{(\mathbf{N}, +)}{\times} (\coprod_{n \in \mathbf{N}} S^n) \xrightarrow{\sim} M_S$$

l'isomorphisme ainsi décrit (du produit fibré «canonique» de (l_1, l_2) vers M_S).

Des considérations qui précèdent, il résulte donc pour tout entier $p \geqslant 2$ et tout mot $\mu \in M_{\{\sigma\}}$ de longueur p un isomorphisme canonique

$$\delta_\mu : H^{(\sigma^p)} \xrightarrow{\sim} H^{m(\mu)}$$

tel que

$$F(x_1)(x_2)\dots(x_p) = \delta_\mu(F)(\Delta(\mu, (x_1, \dots, x_p)))$$

(pour les mots de longueur 0 ou 1 cet isomorphisme «devient» l'identité). Supposons que

$$\textbf{Co-comp}_{\mathrm{H}}(H^1, H^\sigma) \xrightarrow{\vee} \textbf{Comp}_{\mathrm{H}}(H^\sigma, H^1)^*$$

$$(\text{resp. } \textbf{Co-comp}_{\mathrm{H}}(H^\sigma, H^1) \xrightarrow{\wedge} \textbf{Comp}_{\mathrm{H}}(H^1, H^\sigma)^*)$$

soit un «choix de foncteurs H-adjoints» fixé une fois pour toutes. Si

$$[H^{(\sigma^p)}, H^{(\sigma^q)}]_{\mathrm{H}\text{-}adjt} \quad (\text{resp. } [H^{(\sigma^q)}, H^{(\sigma^p)}]_{\mathrm{H}\text{-}coadjt})$$

est la catégorie pleine de transformations naturelles entre foncteurs admettant un foncteur H-adjoint (resp. H-co-adjoint), lorsque p et q sont deux entiers quelconques, on déduit du choix précédent un choix

$$[H^{(\sigma^p)}, H^{(\sigma^{p+1})}]_{\mathrm{H}\text{-}adjt} \xrightarrow{\vee(\sigma^p)} [H^{(\sigma^{p+1})}, H^{(\sigma^p)}]^*_{\mathrm{H}\text{-}coadjt}$$

(resp.

$$[H^{(\sigma^{p+1})}, H^{(\sigma^p)}]_{\mathrm{H}\text{-}adjt} \xrightarrow{\wedge(\sigma^p)} [H^{(\sigma^p)}, H^{(\sigma^{p+1})}]^*_{\mathrm{H}\text{-}coadjt})$$

pour tout entier $p \geqslant 2$.

Il en résulte, pour tout mot $\mu_1 \in M_{\{\sigma\}}$ de longueur $p \geqslant 2$ et pour tout mot $\mu_2 \in M_{\{\sigma\}}$ de longueur $p+1$, un choix de foncteurs H-adjoints

$$\vee_{\mu_1,\mu_2} : \textbf{Co-comp}_{\mathrm{H}}(H^{m(\mu_1)}, H^{m(\mu_2)}) \to \textbf{Comp}_{\mathrm{H}}(H^{m(\mu_2)}, H^{m(\mu_1)})^*$$

(resp.

$$\wedge_{\mu_2,\mu_1} : \textbf{Co-comp}_{\mathrm{H}}(H^{m(\mu_2)}, H^{m(\mu_1)}) \to \textbf{Comp}_{\mathrm{H}}(H^{m(\mu_1)}, H^{m(\mu_2)})^*)$$

tel que le diagramme 7 (resp. 8) ci-dessous commute.

$$\begin{tikzcd}[column sep=large]
{[H^{(\sigma^p)}, H^{(\sigma^{p+1})}]_{\mathrm{H}\text{-}adjt}} \arrow[r, "\vee(\sigma^p)"] \arrow[d, "\delta_{\mu_1}(-)\circ\delta^{-1}_{\mu_2}"', "\wr"] \arrow[dr, phantom, "\text{DIAGRAMME 7}"] & {[H^{(\sigma^{p+1})}, H^{(\sigma^p)}]^*_{\mathrm{H}\text{-}coadjt}} \arrow[d, "\wr"', "\delta_{\mu_2}\circ(-)\circ\delta^{-1}_{\mu_1}"] \\
\textbf{Co-comp}_{\mathrm{H}}(H^{m(\mu_1)}, H^{m(\mu_2)}) \arrow[r, "\vee_{\mu_1,\mu_2}"'] & \textbf{Comp}_{\mathrm{H}}(H^{m(\mu_2)}, H^{m(\mu_1)})^*
\end{tikzcd}$$

$$\begin{array}{ccc} \epsilon H^{(\sigma^{p+1})}, H^{(\sigma^p)}]_{\text{H-}adjt} & \xrightarrow{\wedge^{(\sigma^p)}} & [H^{(\sigma^p)}, H^{(\sigma^{p+1})}]^*_{\text{H-}coadjt} \\ \delta_{\mu_2}\circ(-)\circ\delta^{-1}_{\mu_1} \Big\downarrow \wr & \text{DIAGRAMME 8} & \delta_{\mu_1}\circ(-)\circ\delta^{-1}_{\mu_2} \Big\downarrow \wr \\ \textbf{Co-comp}_{\text{H}}(H^{m(\mu_2)}, H^{m(\mu_1)}) & \xrightarrow[\wedge_{\mu_2,\mu_1}]{} & \textbf{Comp}_{\text{H}}(H^{m(\mu_1)}, H^{m(\mu_2)})^* \end{array}$$

Enfin on suppose fixé une fois pour toutes un foncteur «choix de foncteurs H-adjoints »

$$\textbf{Co-comp}_{\text{H}}(H^{\sigma\otimes\sigma}, H^{\sigma\otimes\sigma}) \xrightarrow{W} \textbf{Comp}_{\text{H}}(H^{\sigma\otimes\sigma}, H^{\sigma\otimes\sigma})^*$$

associant à l'isomorphisme «de symétrie», ... , lui-même. A tous mots

$$\mu_i \in M_{\{\sigma\}} \quad \text{où} \quad i = 1, 2,$$

de longueur p $>$ 2 on associe de même un choix

$$W_{\mu_1,\mu_2}: \textbf{Co-comp}_{\text{H}}(H^{m(\mu_1)}, H^{m(\mu_2)}) \to \textbf{Comp}_{\text{H}}(H^{m(\mu_2)}, H^{m(\mu_1)})^*$$

Dans ces conditions, i. e. si les choix $\wedge$, $\vee$ et W sont donnés, si $(k, \dots)$ est un co-magma de co-comparaison éventuellement associatif, unitaire, ..., i. e. si l'on a un 2-diagramme de $\textbf{Co-comp}_{\text{H}}$ muni de 2-conditions, on lui associe aisément (à l'aide de $\wedge_{\mu_2,\mu_1}$, $\vee_{\mu_1,\mu_2}$, W_{μ_1,μ_2}, où μ_1 et μ_2 sont dans chaque cas «convenablement choisis») un 2-diagramme «image» dans $\textbf{Comp}_{\text{H}}$ et des 2-conditions (duales).

On dira que ce 2-diagramme muni de ces 2-conditions $(k', \dots)$ est *un magma de comparaison* (éventuellement associatif, ...).

En particulier, on définit ainsi les *monoïdes de comparaison* et les *monoïdes symétriques de comparaison.*

Ce sont évidemment des points de vue tout à fait équivalents (dans le sens où la donnée d'un foncteur «choix de foncteurs H-adjoints»

$$\textbf{Co-comp}_{\text{H}}(H^{\sigma}, H^{\sigma'}) \to \textbf{Comp}_{\text{H}}(H^{\sigma'}, H^{\sigma})^*$$

détermine une équivalence de catégories, et dans celui où le 2-foncteur $\mathbf{Exp}_{\mathrm{H}}$ est «localement» inversible) que de considérer des magmas de comparaison, des co-magmas de co-comparaison, des magmas virtuels. (Cette équivalence de points de vue ne serait plus exacte si l'on considérait des structures algébriques plus générales que celle de magma.)

Nous allons montrer en II.2 que la donnée de co-structures n-uples dans H^{σ} telles que celles étudiées en I ($n = 1, 2, 3, 4$) définit des structures (de magmas..., de monoïdes) de comparaison (i.e. sur des ensembles de foncteurs de comparaison) et des co-structures (de co-magmas..., de co-monoïdes) de co-comparaison.

Le point de vue «virtuel» est celui qui permet une définition simple (par «image» de structures aisément définissables en termes de produits tensoriels) de ces structures. On verra qu'il n'est pas seulement un artifice formel en vue de simplifier la présentation.

2. CO-STRUCTURES STANDARDS ET STRUCTURES DE COMPARAISON.

2.1. Co-structures doubles et magmas de comparaison.

Supposons que H^{σ} soit munie d'une structure de H-catégorie multiplicative bi-fermée $\hat{\mathrm{H}}^{\sigma}$. En vertu de I, nous savons qu'il est équivalent de supposer H^{σ} munie d'une co-structure double

$$\overline{C} : (\sigma \otimes \sigma)^{*} \to H^{\sigma} \quad \text{telle que} \quad \hat{\mathrm{H}}^{\sigma}_{\overline{C}} \approx \hat{\mathrm{H}}^{\sigma}.$$

On déduit aisément de $\overline{C}$ un foncteur $k_{\overline{C}} : H^{\sigma} \to H^{\sigma \otimes \sigma}$ en posant

$$k_{\overline{C}}(F)(x, y) = \underline{H}^{\sigma}(F, \overline{C}(x, y)).$$

(On vérifie facilement que $k_{\overline{C}}(F)$ est une réalisation de $\sigma \otimes \sigma$.)

LEMME 8. *Le foncteur* $k_{\overline{C}}$ *admet un foncteur* H-*adjoint* $k^{!}_{\overline{C}}$.

PREUVE. Posons, pour tout $G \in H^{\sigma \otimes \sigma}$,

$$k^{!}_{\overline{C}}(G)(x) = \int^{(u,v)} G(u, v) \otimes \overline{C}(u, v)(x),$$

et $k'_{\overline{C}} = Q.k''_{\overline{C}}$. Nous obtenons alors les équivalences naturelles:

$$\underline{H}^{\sigma}(F, k'_{\overline{C}}(G)) \approx \underline{H}^{S}(F, k''_{\overline{C}}(G)) \approx \int_x \underline{H}(F(x), k''_{\overline{C}}(G)(x))$$

$$\approx \int_{x,(u,v)} \underline{H}(F(x), G(u,v) \otimes \overline{C}(u,v)(x))$$

$$\approx \int_{x,(u,v)} \underline{H}(\underline{H}(F(x), \overline{C}(u,v)(x)), G(u,v))$$

$$\approx \int_{(u,v)} \underline{H}(\underline{H}^{\sigma}(F, \overline{C}(u,v)), G(u,v))$$

$$\approx \underline{H}^{\sigma \otimes \sigma}(k_{\overline{C}}(F), G).$$

Inversement, supposons que $k: H^{\sigma} \to H^{\sigma \otimes \sigma}$ soit un foncteur de co-comparaison (i. e. admette un foncteur H-adjoint) et choisissons un foncteur k' qui lui soit H-adjoint. Alors k' est compatible avec les limites inductives. Il en résulte que, si $\mathfrak{Y}_2$ est la «réalisation de Yoneda»,

$$\overline{C}_k : (\sigma \otimes \sigma)^* \xrightarrow{\mathfrak{Y}_2} H^{\sigma \otimes \sigma} \xrightarrow{k'} H^{\sigma}$$

est une réalisation, i. e. une co-structure double d'espèce σ dans H^{σ}. On en déduit que H^{σ} est munie de la structure de H-catégorie multiplicative bi-fermée $\hat{H}^{\sigma}_{\overline{C}_k}$.

LEMME 9. *Les foncteurs de co-comparaison* k *et* $k_{\overline{C}_k}$ *sont équivalents.*

PREUVE. Nous avons les équivalences naturelles:

$$\underline{H}^{\sigma \otimes \sigma}(k_{\overline{C}_k}(F), G) = \int_{(x,y)} \underline{H}(k_{\overline{C}_k}(F)(x,y), G(x,y))$$

$$\approx \int_{(x,y)} \underline{H}(\underline{H}^{\sigma}(F, \overline{C}_k(x,y)), G(x,y))$$

$$\approx \int_{(x,y)} \underline{H}(\underline{H}^{\sigma}(F, k'(\mathfrak{Y}_2(x,y))), G(x,y))$$

$$\approx \int_{(x,y)} \underline{H}(\underline{H}^{\sigma \otimes \sigma}(k(F), \mathfrak{Y}_2(x,y)), G(x,y))$$

$$\approx \int_{(x,y),(u,v)} \underline{H}(\underline{H}(k(F)(u,v), \mathfrak{Y}_2(x,y)(u,v)), G(x,y))$$

$$\approx \int_{(u,v)} \underline{H}(k(F)(u,v),\ \int^{(x,y)} G(x,y) \otimes \mathcal{Y}_2(x,y)(u,v))$$

$$\approx \int_{(u,v)} \underline{H}(k(F)(u,v),\ G(u,v)) \approx \underline{H}^{\sigma \otimes \sigma}(k(F), G).$$

Des Lemmes 8 et 9 et de l'étude de la Section I résulte le théorème ci-dessous :

THEOREME 2. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) H^σ *est munie d'une structure de* H-*catégorie multiplicative bi-fermée* $\hat{\mathrm{H}}^\sigma$,

(ii) H^σ *est munie d'une co-structure double d'espèce* σ :

$$\overline{C} : (\sigma \otimes \sigma)^* \to H^\sigma,$$

(iii) H^σ *est munie d'une structure de co-magma de co-comparaison*

$$k : H^\sigma \to H^{\sigma \otimes \sigma},$$

(iv) H^σ *est munie d'une structure de magma de comparaison*

$$k' : H^{\sigma \otimes \sigma} \to H^\sigma,$$

(v) σ *est munie d'une structure de magma virtuel* $Log\, k : \sigma \otimes \sigma \to \sigma$.

2.2. Co-structures doubles associatives, et magmas associatifs de comparaison.

Supposons H^σ munie d'une structure de H-catégorie multiplicative bi-fermée associative. Il est équivalent de supposer H^σ munie d'une co-structure double $\overline{C} : (\sigma \otimes \sigma)^* \to H^\sigma$ associative, c'est-à-dire telle que l'on ait une équivalence naturelle :

$$A : \overline{D}_{\overline{C}, \mathcal{Y}_1} \xrightarrow{\sim} \overline{D}_{\mathcal{Y}_1, \overline{C}}$$

(avec les notations de la Section I).

Alors H^σ est munie d'une structure de co-magma de co-comparaison $k_{\overline{C}} : H^\sigma \to H^{\sigma \otimes \sigma}$, ou, ce qui revient au même, σ est munie d'une structure de magma virtuel $Log\, k_{\overline{C}} : \sigma \otimes \sigma \to \sigma$. Nous allons établir que l'une (ou l'autre) de ces structures «est» associative.

LEMME 10. *Le magma virtuel* $Log\,k_{\overline{C}}$ *est associatif ssi* $\overline{C}$ *est une co-structure double associative.*

PREUVE. Nous avons, par définition du produit tensoriel dans $Virt_{\mathrm{H}}$:

$$(Log\,k_{\overline{C}})\otimes\sigma = (Log\,k_{\overline{C}})\otimes(Log\,Id_{H^{\sigma}}) = Log(\bar{k}^{\sigma}_{\overline{C}}),$$

et ce avec les notations de II.1. C'est dire que

$$\bar{k}^{\sigma}_{\overline{C}} : H^{\sigma\otimes\sigma} \to H^{(\sigma\otimes\sigma)\otimes\sigma}$$

est tel que le diagramme 9 ci-dessous commute :

$$\begin{tikzcd}
(H^{\sigma})^{\sigma} \arrow[r, "k^{\sigma}_{\overline{C}}"] \arrow[d, "\bar{\gamma}^{-1}"', "\wr"] \arrow[dr, phantom, "\text{DIAGRAMME 9}"] & (H^{\sigma\otimes\sigma})^{\sigma} \arrow[d, "\wr"] \\
H^{\sigma\otimes\sigma} \arrow[r, "\bar{k}^{\sigma}_{\overline{C}}"'] & H^{(\sigma\otimes\sigma)\otimes\sigma}
\end{tikzcd}$$

En d'autres termes encore, $\bar{k}^{\sigma}_{\overline{C}}$ est défini par :

$$\bar{k}^{\sigma}_{\overline{C}}(F)((x,y),z) = k_{\overline{C}}(\bar{\gamma}(F)(z))(x,y),$$

lorsque F est un objet de $H^{\sigma\otimes\sigma}$ et $((x,y),z)\in(\sigma\otimes\sigma)\otimes\sigma$. On peut donc aussi écrire les équivalences naturelles :

$$\begin{aligned}\bar{k}^{\sigma}_{\overline{C}}(F)((x,y),z) &= \underline{H}^{\sigma}(\bar{\gamma}(F)(z),\ \overline{C}(x,y))\\ &\approx \int_u \underline{H}(\bar{\gamma}(F)(z)(u),\ \overline{C}(x,y)(u)).\end{aligned}$$

Ceci signifie que l'on a un isomorphisme naturel :

$$(1) \qquad \bar{k}^{\sigma}_{\overline{C}}(F)((x,y),z) \approx \int_u \underline{H}(F(u,z),\ \overline{C}(x,y)(u)).$$

De la même manière on a

$$\sigma\otimes Log\,k_{\overline{C}} = Log(Id_{H^{\sigma}})\otimes Log\,k_{\overline{C}} = Log\,\bar{\tilde{k}}^{\sigma}_{\overline{C}}$$

(avec les notations de II.1). Autrement dit, $\bar{\tilde{k}}^{\sigma}_{\overline{C}} : H^{\sigma\otimes\sigma} \to H^{\sigma\otimes(\sigma\otimes\sigma)}$

est «défini» par la donnée des deux diagrammes commutatifs du diagramme ci-dessous

$$\begin{tikzcd}
(H^\sigma)^\sigma \arrow[rr, "k^{\sigma}_{\bar C}"] \arrow[d, "\bar\gamma.\bar\delta^{-1}"', "\wr"] & & (H^{\sigma\otimes\sigma})^\sigma \arrow[d, "\wr"] \\
(H^\sigma)^\sigma \arrow[rr, "\tilde{k}^{\sigma}_{\bar C}"] \arrow[d, "\bar\gamma^{-1}"', "\wr"] & & (H^\sigma)^{\sigma\otimes\sigma} \arrow[d, "\wr"] \\
H^{\sigma\otimes\sigma} \arrow[rr, "\approx"', "\tilde{\tilde{k}}^{\sigma}_{\bar C}"'] & & H^{\sigma\otimes(\sigma\otimes\sigma)}
\end{tikzcd}$$

DIAGRAMME 10

ou bien encore par :

$$\overline{\tilde{k}}{}^{\sigma}_{\bar C}(F)(x,(y,z)) = k_{\bar C}(\bar\delta(F)(x))(y,z).$$

On peut donc écrire, naturellement,

$$\begin{aligned}\overline{\tilde{k}}{}^{\sigma}_{\bar C}(F)(x,(y,z)) &\approx \underline{H}^{\sigma}(\bar\delta(F)(x),\ \bar C(y,z)) \\ &\approx \int_u \underline{H}(\bar\delta(F)(x)(u),\ \bar C(y,z)(u)),\end{aligned}$$

ou encore

$$(2) \qquad \overline{\tilde{k}}{}^{\sigma}_{\bar C}(F)(x,(y,z)) \approx \int_u \underline{H}(F(x,u),\ \bar C(y,z)(u)).$$

De l'équivalence naturelle (1) résultent les isomorphismes naturels qui suivent :

$$\begin{aligned}\bar k^{\sigma}_{\bar C}(k_{\bar C}(F))((x,y),z) &\approx \int_u \underline{H}(k_{\bar C}(F)(u,z),\ \bar C(x,y)(u)) \\
&\approx \int_u \underline{H}(\underline{H}^{\sigma}(F,\bar C(u,z)),\ \bar C(x,y)(u)) \\
&\approx \int_u \underline{H}(\underline{H}^{\sigma}(F,\mathfrak{Y}_1(u)\bar{\bar\otimes}\mathfrak{Y}_1(z)),\ \bar C(x,y)(u)) \\
&\approx \int_u \underline{H}(\underline{H}^{\sigma}_{\square\square}(F,\mathfrak{Y}_1(z))(u),\ \bar C(x,y)(u)) \\
&\approx \underline{H}^{\sigma}(\underline{H}^{\sigma}_{\square\square}(F,\mathfrak{Y}_1(z)),\ \bar C(x,y)) \\
&\approx \underline{H}^{\sigma}(F,\ \bar C(x,y)\bar{\bar\otimes}\,\mathfrak{Y}_1(z)).\end{aligned}$$

De la même manière, de l'équivalence naturelle (2) résulte un isomorphisme naturel (en utilisant $\boxminus$ au lieu de $\square\square$):

$$\bar{\tilde{k}}^{\sigma}_{\overline{C}}(k_{\overline{C}}(F))(x,(y,z)) \approx \underline{H}^{\sigma}(F, \mathcal{Y}_1(x)\bar{\bar{\otimes}}\,\overline{C}(y,z)).$$

En conséquence, si $\overline{C}$ est une co-structure double associative, $Log(k_{\overline{C}})$ est un magma virtuel associatif.

Inversement, supposons que $Log\,k_{\overline{C}}$ soit un magma associatif. Le calcul précédent reste encore valable et prouve que $\overline{C}$ est une co-structure double associative.

On en déduit le théorème ci-dessous:

THEOREME 3. *Les assertions suivantes sont équivalentes:*

(i) H^{σ} *est munie d'une structure de* H-*catégorie multiplicative bi-fermée associative* $\hat{\mathrm{H}}^{\sigma}$,

(ii) H^{σ} *est munie d'une co-structure double associative d'espèce* σ:

$$\overline{C}: (\sigma\otimes\sigma)^* \to H^{\sigma},$$

(iii) H^{σ} *est munie d'une structure de co-magma associatif de co-comparaison* $k: H^{\sigma} \to H^{\sigma\otimes\sigma}$,

(iv) H^{σ} *est munie d'une structure de magma associatif de comparaison* $k': H^{\sigma\otimes\sigma} \to H^{\sigma}$,

(v) σ *est munie d'une structure de magma associatif virtuel*

$$Log\,k: \sigma\otimes\sigma \to \sigma.$$

2.3. Co-structures doubles associatives unitaires cohérentes et monoïdes de comparaison.

En effectuant des calculs analogues à ceux de II.2.2 (mais notablement plus longs) il est aisé d'établir que si $\overline{C}$ est une co-structure double unitaire (resp. symétrique, associative unitaire cohérente, associative symétrique cohérente, associative unitaire symétrique cohérente, associative cohérente), alors $k_{\overline{C}}$ est un co-magma unitaire (resp. ...) de co-comparaison et inversement.

La conclusion «maximale» peut donc s'énoncer comme suit:

THEOREME 4. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) H^{σ} *est munie d'une structure de* H*-catégorie monoïdale bi-fermée (resp. et symétrique),*

(ii) H^{σ} *est munie d'une co-structure double d'espèce* σ *qui est associative, unitaire (resp. et symétrique), cohérente,*

(iii) H^{σ} *est munie d'une structure de co-monoïde (resp. symétrique) de co-comparaison,*

(iv) H^{σ} *est munie d'une structure de monoïde (resp. symétrique) de comparaison,*

(v) σ *est munie d'une structure de monoïde (resp. symétrique) virtuel (dans* $\hat{\mathbf{Virt}}_{\mathrm{H}}$ *).*

III. APPLICATIONS ET EXEMPLES

1. UNE CONDITION SUFFISANTE.

1.1. Monoïdes de réalisations.

Soit $\check{\mathfrak{N}}'$ la catégorie ayant pour objets les graphes multiplicatifs S tels que S appartienne à $\check{\mathfrak{M}}_0$ et ayant les foncteurs entre ces objets pour morphismes. C'est une catégorie cartésienne fermée (E.G.C.E.) : si S et S' en sont deux objets, $S^{S'}$ est le graphe multiplicatif dont les objets sont les foncteurs de S' vers S et les morphismes les transformations naturelles entre ces foncteurs (transformations naturelles qui se définissent comme dans le cas des catégories).

Soit $\mathcal{O}^{\mathcal{K}}$ la catégorie dont les objets sont les esquisses $\mathcal{K}$-projectives petites et les morphismes les réalisations entre ces objets.

$\mathcal{O}^{\mathcal{K}}$ est sous-jacente :

- à une catégorie monoïdale fermée symétrique $\hat{\mathcal{O}}^{\mathcal{K}} = (\mathcal{O}^{\mathcal{K}}, \otimes, 1, \ldots)$ (E.G.C.E.),
- à une $\check{\mathfrak{N}}'$-catégorie $\mathbf{V}^{\mathcal{K}}$. Celle-ci est telle que, si

$$\sigma = (S, \mathcal{T}) \quad \text{et} \quad \sigma' = (S', \mathcal{T}')$$

sont deux objets de $\mathcal{O}^{\mathcal{K}}$, alors $\sigma^{\sigma'}$ est le graphe multiplicatif dont les objets sont les réalisations de σ' vers σ et les morphismes les transformations naturelles entre les foncteurs définissant ces réalisations. Ainsi $\sigma^{\sigma'}$ s'identifie à un sous-graphe multiplicatif de $S^{S'}$.

On montre sans difficulté que les structures $\mathcal{O}^{\mathcal{K}}$ et $\mathbf{V}^{\mathcal{K}}$ sont sous-jacentes à une même structure de $\check{\mathcal{H}}'$-catégorie monoïdale fermée symétrique:

$$\hat{\mathbf{V}}^{\mathcal{K}} = (\mathbf{V}^{\mathcal{K}}, \otimes, 1, \dots).$$

Reprenant les notations de la Section II, $\widehat{\mathbf{Virt}}_{\mathrm{H}}$ étant une $\check{\mathcal{F}}$-catégorie monoïdale symétrique, elle s'identifie à une $\check{\mathcal{H}}'$-catégorie monoïdale symétrique. Si $\phi : \sigma' \to \sigma$ est une réalisation (i. e. un morphisme de $\mathcal{O}^{\mathcal{K}}$), alors $H^{\phi} : H^{\sigma} \to H^{\sigma'}$ est un foncteur de co-comparaison, en vertu des hypothèses faites sur H (commutation des limites appropriées) et de celles de petitesse de σ et σ'. Aussi $virt(\phi) = (\sigma, H^{\phi}, \sigma')$ est-elle une réalisation virtuelle.

On définit ainsi un foncteur, appelé *foncteur de virtualisation* :

$$virt : \mathcal{O}^{\mathcal{K}} \to Virt_{\mathrm{H}},$$

et on établit aisément qu'il est sous-jacent à un $\check{\mathcal{H}}'$-foncteur monoïdal strict

$$\widehat{\mathbf{virt}} : \hat{\mathbf{V}}^{\mathcal{K}} \to \widehat{\mathbf{Virt}}_{\mathrm{H}}.$$

Appelons *monoïde de réalisations* tout monoïde dans $\hat{\mathbf{V}}^{\mathcal{K}}$. Si σ est munie d'une structure de monoïde de réalisations, $\sigma = \mathbf{virt}(\sigma)$ est muni d'une structure de monoïde dans $\widehat{\mathbf{Virt}}_{\mathrm{H}}$. Si le monoïde de réalisations considéré est symétrique, son image dans $\widehat{\mathbf{Virt}}_{\mathrm{H}}$ le sera également.

En vertu du Théorème 4 nous pouvons donc affirmer :

PROPOSITION 14. *Si σ est une esquisse $\mathcal{K}$-projective petite munie d'une structure de monoïde (resp. symétrique) de réalisations, alors* H^{σ} *est munie d'une structure de* H-*catégorie monoïdale bi-fermée (resp. symétrique) associée.*

La proposition ci-dessus énonce un résultat «maximal». On pourrait l'affaiblir en ne considérant que des *magmas de réalisations* (éventuellement associatifs, symétriques, ...).

1.2. Exemple.

Supposons que $\sigma = (S, \mathfrak{T})$ soit l'esquisse N-projective associée à une Théorie algébrique au sens de Linton. Alors S est une catégorie petite dont les objets sont des u_n où $n \in \mathrm{N}$ (on pose $u_1 = u$ pour plus de commodités). Pour tout entier n, l'objet u_n est un produit de n copies de l'objet u (i. e. u_0 est un élément final de S) et l'on a, lorsque $n \neq 0$, des projections « canoniques »

$$\pi_i^{(n,1)} : u_n \to u \,, \quad \text{si } 0 \leqslant i \leqslant n-1.$$

Le cône projectif $(\pi_i^{(n,1)})_{0 \leqslant i \leqslant n-1}$ est donc élément de $\mathfrak{T}$ (de même que le cône projectif de sommet u_0 et de base vide). Si $n = p \,.\, q$ dans N, u_n est un produit de p copies de u_q et l'on a les projections canoniques

$$\pi_i^{(n,q)} : u_n \to u_q \quad \text{si } 0 \leqslant i \leqslant p-1 \text{ et } p \neq 0 \,,$$

et le cône projectif ainsi déterminé est élément de $\mathfrak{T}$. (En particulier u_0 est le produit de $p \neq 0$ copies de u_0 et

$$\pi_i^{(0,0)} = u_0 \quad \text{pour tout } 0 \leqslant i \leqslant p-1 \text{ .)}$$

On impose que, pour tout $0 \leqslant i \leqslant p-1$ et tout $0 \leqslant j \leqslant q-1$, lorsque $p \neq 0$ et $q \neq 0$ sont deux entiers,

$$\pi_i^{(p,1)} . \pi_j^{(pq,p)} = \pi_{lex(i,j)}^{(pq,1)}$$

en désignant par $lex : (p \times q, \leqslant) \to (pq, \leqslant)$ la bijection ordonnée définissant sur l'ensemble produit $p \times q$ l'ordre lexicographique.

Dans ces conditions, si m et n sont des entiers et p un entier non nul, et si $z_j : u_m \to u_n$ est un morphisme de S, pour tout $0 \leqslant j \leqslant p-1$, on désigne par $[z_j]_{0 \leqslant j \leqslant p-1} : u_m \to u_{np}$ l'unique morphisme de S tel que

$$\pi_j^{(np,n)} . [z_j]_{0 \leqslant j \leqslant p-1} = z_j \quad \text{pour tout } 0 \leqslant j \leqslant p-1.$$

De même, si $z : u_p \to u_r$, on pose pour un entier $q \neq 0$:

$$z^q = [z \,.\, \pi_i^{(pq,p)}]_{0 \leqslant i \leqslant q-1} \,.$$

Pour tout couple (z', z) de $S \times S$, où $z : u_p \to u_r$ et $z' : u_q \to u_s$, nous posons :

$k(z, z') = z'^r . z^q$ si $r \neq 0$ et $q \neq 0$,

$k(z, z') = u_0 . z^q$ si $q \neq 0$ et $r = 0$,

$k(z, z') = z'^r . u_0$ si $r \neq 0$ et $q = 0$,

$k(z, z') = u_0$ si $r = q = 0$.

Pour que l'application $\underline{k} : S \times S \to S$ définisse non seulement un foncteur mais encore une réalisation $k : \sigma \otimes \sigma \to \sigma$, il est nécessaire que

$$u_{sr} . z^s . z'^p . u_{pq} = u_{sr} . z'^r . z^q . u_{pq} ,$$

pour tout couple (z, z') de la forme précédente. En vertu de la forme de σ, il apparaît que toutes ces égalités sont satisfaites dès lors qu'elles le sont dans les seuls cas où $s = r = 1$, autrement dit, dès que pour tout $z : u_p \to u$ et tout $z' : u_q \to u$ on a $z' . z^q = z . z'^p$. Or ces relations signifient précisément que σ est une théorie algébrique *commutative au sens de Linton*. Mais si ces conditions de commutativité sont satisfaites, il est facile de voir que la réalisation $k : \sigma \otimes \sigma \to \sigma$ ainsi définie est la «loi de composition» d'un monoïde de réalisations symétrique dans $\mathsf{V}^{\mathcal{K}}$ admettant la réalisation $\langle u \rangle : 1 \to \sigma$ pour unité. Nous dirons qu'il s'agit du *monoïde symétrique sur la théorie algébrique* σ.

De la Proposition 14 on déduit alors

COROLLAIRE. *Si σ est l'esquisse associée à une théorie algébrique commutative (au sens de Linton),* H^σ *est munie d'une structure de* H-*catégorie monoïdale fermée symétrique, associée à la structure de monoïde symétrique canonique sur la théorie algébrique σ et dont l'unité est $\mathfrak{Y}_1(u)$.*

Bien entendu, il s'agit là du rappel (dans le contexte développé dans la Section II) d'un résultat déjà indiqué par Day (O.C.C.F.) (dans le cas où $\mathrm{H} = \mathrm{M}$, ou bien si H est cartésienne fermée) et par Lawvere (A.P.A.T.) (dans le cas où la théorie algébrique est finitaire, i.e. si l'on prend $\mathcal{K} = \boldsymbol{n}$, où n est entier, et non $\mathcal{K} = \mathrm{N}$).

1.3. Définition spécifique de la commutativité.

Notons que Lawvere donne de la commutativité une définition différente (bien entendu équivalente) de celle «équationnelle» de Linton (utilisée par Day). Interprétons-la en termes de la théorie des esquisses, par étapes successives :

- si $f: \sigma \to \mathfrak{M}$ est une réalisation, $f^n: \sigma \to \mathfrak{M}$ désignera, pour tout entier n non nul, la réalisation définie par

$$f^n(x) = f(x^n) \text{ pour tout } x \in S \text{ ;}$$

- si $f: \sigma \to \mathfrak{M}$ est une réalisation, $f^0: \sigma \to \mathfrak{M}$ désignera la réalisation constante sur u_0 ;

- si $f: \sigma \to \mathfrak{M}$ et $f': \sigma \to \mathfrak{M}$ sont deux réalisations, une transformation naturelle (i. e. un homomorphisme entre les structures algébriques d'espèce σ définies par f et par f') $N: f \Longrightarrow f'$ est entièrement déterminée par sa valeur $N(u): f(u) \to f'(u)$ en u (évidemment ceci est en général faux dès que σ n'est plus l'esquisse associée à une théorie algébrique) ;

- inversement, si $f: \sigma \to \mathfrak{M}$ et $f': \sigma \to \mathfrak{M}$ sont deux réalisations, un morphisme $N_u: f(u) \to f'(u)$ appartenant à $\mathfrak{M}$ soit n'est sous-jacent à aucune transformation naturelle de f vers f', soit est sous-jacent à une et une seule transformation naturelle $N_u[-]: f \Longrightarrow f'$ nécessairement définie par

$$N_u[u_p] = (N_u)^p \text{ pour tout entier } p$$

(et, avec des notations évidentes, dans $\mathfrak{M}$ où les réalisations f et f' permettent localement un choix de produits).

- Alors Lawvere dit que σ est *commutative* ssi pour toute réalisation $f: \sigma \to \mathfrak{M}$ et tout morphisme $z: u_p \to u$ appartenant à S, alors

$$f(z): f(u_p) = f^p(u) \to f(u)$$

définit une transformation naturelle (nécessairement unique)

$$f(z)[-]: f^p \Longrightarrow f .$$

On retrouve les équations de Linton en écrivant que les foncteurs représentables $Hom_S(-, u_p): S \to \mathfrak{M}$, où p est un entier, sont des réalisations, en utilisant le lemme de Yoneda et en écrivant que pour toute réalisation $f: \sigma \to \mathfrak{M}$ la condition ci-dessus implique que les diagrammes du genre indiqué ci-après commutent par «naturalité».

Il apparaît donc que la commutativité de σ, aussi bien au sens de Linton qu'au sens de Lawvere, signifie que toute réalisation $F: \sigma \to H$ est

$$\begin{tikzcd}
f(u_q) \arrow[d, "f(z')"'] & f^p(u_q) = f(u_{qp}) \arrow[l, "f(z^q) = f(z)(u_q)"'] \arrow[d, "f^p(z') = f(z'^p)"] \\
f(u) & f^p(u) = f(u_p) \arrow[l, "f(z) = f(z)(u)"']
\end{tikzcd}$$

« sous-jacente » à une unique réalisation $G: \sigma \otimes \sigma \to H$ vérifiant

$$G(x, u) = G(u, x) = F(x) \text{ pour tout } x \in S$$

(ce qui suffit à définir G) et le foncteur $H^{\sigma} \to H^{\sigma \otimes \sigma}$ défini par $F \mapsto G$ est représenté par la réalisation $k: \sigma \otimes \sigma \to \sigma$. Ceci constitue *l'expression spécifique* (i. e. en termes de la théorie des esquisses) des théories algébriques commutatives (on remarquera que cette expression contient aussi bien l'aspect équationnel de Linton que l'aspect « géométrique » souligné par Lawvere).

2. UNE CONDITION NECESSAIRE.

2.1. Structure monoïdale bi-fermée adaptée.

Supposons encore, en toute généralité, que $\sigma = (S, \mathfrak{T})$ soit une esquisse $\mathcal{K}$-projective petite. Si v_0 est un objet de S, nous dirons qu'une structure de H-catégorie multiplicative bi-fermée $\hat{\mathrm{H}}^{\sigma} = (\mathrm{H}^{\sigma}, \otimes, J, \dots)$ sur H^{σ} est *adaptée à* H *en* v_0 ssi $J \approx \mathfrak{Y}_I(v_0)$ (i. e. si J est une structure libre sur I relativement au foncteur d'omission $p_{v_0}: H^{\sigma} \to H$, évaluation en v_0).

Dans ces conditions, nous désignons par :

- $H^{\sigma \otimes \sigma}_{v_0}$ (resp. $H^{(\sigma \otimes \sigma) \otimes \sigma}_{v_0}$) la sous-catégorie pleine de $H^{\sigma \otimes \sigma}$ (resp. de $H^{(\sigma \otimes \sigma) \otimes \sigma}$) dont les objets sont les réalisations

$$G: \sigma \otimes \sigma \to H \quad (\text{resp. } L: (\sigma \otimes \sigma) \otimes \sigma \to H)$$

naturellement équivalentes à des réalisations G' (resp. L') vérifiant

$$G'(x, v_0) = G'(v_0, x) \text{ pour tout } x \in S$$

(resp. $L'(x, y, v_0) = L'(x, v_0, y) = L'(v_0, y, x)$ pour tout $(x, y) \in S \times S$),

- $H^{\sigma\otimes\sigma}_{v_0,v_0}$ (resp. $H^{\sigma}_{v_0}$) la sous-catégorie pleine de $H^{\sigma\otimes\sigma}$ (resp. de H^{σ}) dont les objets sont les G (resp. les F) isomorphes à des

$$G' : \sigma \otimes \sigma \to H \quad (\text{resp. } F' : \sigma \to H\ )$$

pour lesquels il existe un objet L' de $H^{(\sigma\otimes\sigma)\otimes\sigma}_{v_0}$ (resp. G' de $H^{\sigma\otimes\sigma}_{v_0}$) vérifiant :

$$L'(x, v_0, y) = L'(v_0, y, x) = L'(x, y, v_0) = G'(x, y)$$

pour tout $(x, y) \in S \times S$ (resp.

$$G'(x, v_0) = G'(v_0, x) = F'(x)$$

pour tout $x \in S$).

Remarquons que, si G est un objet de $H^{\sigma\otimes\sigma}$, si G' est isomorphe à G, si L' est un objet de $H^{(\sigma\otimes\sigma)\otimes\sigma}_{v_0}$ et si

$$G'(x, y) = L'(x, v_0, y) \quad \text{pour tout} \quad (x, y) \in S \times S$$

(i. e. si G appartient à $H^{\sigma\otimes\sigma}_{v_0,v_0}$), alors, pour tout $x \in S$ on a

$$G'(x, v_0) = L'(x, v_0, v_0) = L'(v_0, v_0, x),$$

$$G'(v_0, x) = L'(v_0, v_0, x) = L'(v_0, x, v_0);$$

il en résulte que

$$G'(x, v_0) = G'(v_0, x) \quad \text{pour tout} \quad x \in S,$$

ce qui signifie que $G' \in H^{\sigma\otimes\sigma}_{v_0}$. Donc $H^{\sigma\otimes\sigma}_{v_0,v_0}$ est une sous-catégorie pleine de $H^{\sigma\otimes\sigma}_{v_0}$ (ce qui, en un sens, justifie la notation).

PROPOSITION 15. *Si σ est une esquisse $\mathbb{K}$-projective petite, si v_0 est un objet de σ, pour que H^{σ} soit munie d'une structure de* H*-catégorie monoïdale bi-fermée (symétrique ou non) adaptée à* H *en v_0, il est nécessaire que l'on n'ait pas simultanément*

$$H^{\sigma} \neq H^{\sigma}_{v_0} \quad \text{et} \quad H^{\sigma\otimes\sigma}_{v_0} = H^{\sigma\otimes\sigma}_{v_0,v_0}.$$

PREUVE. Supposons H^{σ} munie d'une structure de H-catégorie monoïdale bi-fermée $\hat{\mathrm{H}}^{\sigma}$ adaptée à H en v_0. Ceci revient à supposer que H^{σ} est munie d'une costructure double $\overline{C} : (\sigma\otimes\sigma)^* \to H^{\sigma}$ permettant la reconstruction (standard), à l'équivalence près, de $\hat{\mathrm{H}}^{\sigma}$. De l'hypothèse d'adaptation de

$\hat{\mathrm{H}}^{\sigma}$ en v_0 à H résultent des isomorphismes naturels en l'objet x de S:

$$\overline{C}(x, v_0) \approx \overline{C}(v_0, x) \approx \mathcal{Y}_1(x).$$

On peut donc construire une co-structure double $\overline{\overline{C}}: (\sigma \otimes \sigma)^* \to H^{\sigma}$ naturellement équivalente à $\overline{C}$ et telle que

- $\overline{\overline{C}}(x, v_0) = \overline{\overline{C}}(v_0, x) = \mathcal{Y}_1(x)$ pour tout x de S,
- $\overline{\overline{C}}(x, y) = \overline{C}(x, y)$ pour tout $x: v \to v'$ et tout $y: w \to w'$, morphismes de S vérifiant $v \neq v_0$, $v' \neq v_0$, $w \neq v_0$, $w' \neq v_0$.

On en déduit que $\hat{\mathrm{H}}^{\sigma}_{\overline{\overline{C}}}$ est équivalente à $\hat{\mathrm{H}}^{\sigma}_{\overline{C}}$ et à la structure primitive $\hat{\mathrm{H}}^{\sigma}$.

Elle est donc également adaptée à H en v_0 (ce qui d'ailleurs se vérifie immédiatement par construction). Posons, si F est un objet de H^{σ} et si $(x, y) \in S \times S$:

$$\overline{\square} F: \sigma \otimes \sigma \to H, \quad \overline{\square} F(x, y) = \underline{H}^{\sigma}(F, \overline{\overline{C}}(x, y)).$$

Alors

$$\overline{\square} F(x, v_0) = \underline{H}^{\sigma}(F, \overline{\overline{C}}(x, v_0)) = \underline{H}^{\sigma}(F, \overline{\overline{C}}(v_0, x)) = \overline{\square} F(v_0, x),$$

de sorte que $\overline{\square} F$ est un objet de $H^{\sigma \otimes \sigma}_{v_0}$.

Si l'on suppose que $H^{\sigma \otimes \sigma}_{v_0} = H^{\sigma \otimes \sigma}_{v_0, v_0}$, il existe par conséquent un objet L' de $H^{(\sigma \otimes \sigma) \otimes \sigma}_{v_0}$ tel que

$$L'(x, v_0, y) = L'(v_0, y, x) = L'(x, y, v_0) = \overline{\square} F(x, y)$$

pour tout $(x, y) \in S \times S$. Notons $\overline{L}': \sigma \otimes \sigma \to H^{\sigma}$ la réalisation définie par:

$$\overline{L}'(x, z)(y) = L'(x, y, z) \quad \text{pour tout} \quad (x, y, z) \in S \times S \times S.$$

On a

$$\overline{L}'(x, v_0)(y) = L'(x, y, v_0) = L'(v_0, y, x) = \overline{L}'(v_0, x)(y)$$

pour tout $x \in S$ et tout $y \in S$, ce qui signifie

$$\overline{L}'(x, v_0) = \overline{L}'(v_0, x) \quad \text{pour tout} \quad x \in S.$$

Par construction et en vertu des hypothèses nous avons donc les isomorphismes naturels suivants, pour tout objet x de S :

$$F(x) \approx \int_y \underline{H}(\overline{\square} F(x, y), J(y)) \approx \int_y \underline{H}(\overline{L}'(x, v_0)(y), J(y)) \approx$$
$$\approx \underline{H}^{\sigma}(\overline{L}'(x, v_0), J).$$

Posons $G'(x,y) = \underline{H}^{\sigma}(\overline{L}'(x,y), J)$ pour tout $x \in S$. Ceci définit une réalisation $G' : \sigma \otimes \sigma \to H$ telle que

$$G'(x, v_0) = G'(v_0, x) \quad \text{pour tout} \quad x \in S$$

(puisque $\overline{L}'$ vérifie une relation analogue), i. e. un objet G' de $H_{v_0}^{\sigma \otimes \sigma}$. On a évidemment

$$F(x) \approx G'(x, v_0) = G'(v_0, x),$$

naturellement en l'objet x de S. Ceci prouve que $H^{\sigma} = H_{v_0}^{\sigma}$, d'où la proposition énoncée.

2.2. Exemple.

Supposons que σ soit à nouveau l'esquisse N-projective associée, comme précédemment en III.1, à une théorie algébrique et que $v_0 = u$ (en conservant les notations de III.1 et celles de la Proposition 15).

Si $G : \sigma \otimes \sigma \to H$ est un objet de $H_u^{\sigma \otimes \sigma}$ et si $G' : \sigma \otimes \sigma \to H$ est une réalisation naturellement équivalente à G et vérifiant

$$G'(x, u) = G'(u, x) \quad \text{pour tout } x \text{ de } S,$$

nous posons

$$F_G(x) = G'(x, u) = G'(u, x) \quad \text{pour tout} \quad x \text{ de } S.$$

Ceci définit une réalisation $F_G : \sigma \to H$ et, pour tout morphisme $z : u_p \to u$ et tout morphisme $z' : u_q \to u$ appartenant à S, le diagramme ci-dessous commute :

$$\begin{tikzcd}
 & G'(u_p, u) \arrow[dl, "F_G(z) = G'(z,u)"'] & & G'(u, u_{pq}) \arrow[ll, "G'(u, z'^p) = F_G(z'^p)"'] \arrow[dl, "\sim"] \arrow[dd, equal] \\
G'(u, u) & & G'(u_p, u_q) \arrow[ul, "G'(u_p, z')"'] \arrow[dl, "G'(z, u_q)"] & \\
 & G'(u, u_q) \arrow[ul, "F_G(z') = G'(u,z')"] & & G'(u, u_{pq}) \arrow[ll, "G'(z^q, u) = F_G(z^q)"] \arrow[ul, "\sim"']
\end{tikzcd}$$

puisque, G' étant une réalisation de $\sigma \otimes \sigma$ vers H,

$$G'(u, u_{pq}) \quad \text{et} \quad G'(u_p, u_q)$$

sont deux produits, dans H, de pq copies de u. (Les isomorphismes non précisés de ce diagramme sont alors les isomorphismes canoniques qui se déduisent de ces deux choix de produits.) Ceci s'écrit encore:

$$F_G(z).F_G(z'^p) = F_G(z').F_G(z^q),$$

c'est-à-dire que F_G est une structure d'espèce σ et, de plus, commutative au sens de Linton (par exemple). Posons alors, pour tous morphismes $z: u_p \to u$, $z': u_q \to u$, $z'': u_r \to u$:

$$L''(z, z', z'') = F_G(z).F_G(z'^p).F_G(z''^{pq}).$$

De la forme de l'esquisse N-projective σ («engendrée par le seul objet u, et par les $z \in u.S$»), il résulte que l'application ainsi définie de

$$(u.S)\times(u.S)\times(u.S) \text{ dans } H$$

se prolonge en un foncteur qui définit une réalisation

$$L'': (\sigma\otimes\sigma)\otimes\sigma \to H$$

vérifiant, pour tout $z: u_p \to u$ et tout $z': u_q \to u$ appartenant à S:

$$L''(z, u, z') = L''(u, z', z) = L''(z, z', u)$$

et donc, par prolongement:

$$L''(x, u, y) = L''(u, y, x) = L''(x, y, u)$$

pour tout $(x, y) \in S\times S$. De même, pour tout $z: u_p \to u$ et tout $z': u_q \to u$, on pose

$$G''(z, z') = F_G(z).F_G(z'^p).$$

De la forme de l'esquisse projective σ, il résultera que l'application de $(u.S)\times(u.S)$ dans H ainsi définie se prolonge en un foncteur qui définit une réalisation $G'': \sigma\otimes\sigma \to H$ vérifiant, pour tout $z: u_p \to u$ et pour tout $z': u_q \to u$ appartenant à S:

$$G''(z, z') = L''(z, u, z') = L''(u, z', z) = L''(z, z', u),$$

et donc par prolongement

$$G''(x, y) = L''(x, u, y) = L''(u, y, x) = L''(x, y, u)$$

pour tout $x \in S$ et tout $y \in S$. Comme G est naturellement équivalent à G'

et qu'il est clair que G' est naturellement équivalent à G'', on en déduit que $H_u^{\sigma\otimes\sigma} = H_{u,u}^{\sigma\otimes\sigma}$.

Autrement dit, pour que H^σ soit munie d'une structure de H-catégorie monoïdale bi-fermée adaptée à H en u, il est nécessaire que $H_u^\sigma = H^\sigma$. Or le raisonnement précédent montre que ceci signifie que toute réalisation $F: \sigma \to H$ est une structure d'espèce σ commutative, au sens de Linton par exemple. C'est dire que, si σ_{CL} est l'esquisse associée à la théorie algébrique commutative (au sens de Linton) déduite de la théorie algébrique décrite par σ, on doit avoir $H^{\sigma_{CL}} = H^\sigma$ (on a toujours, bien entendu, $H^{\sigma_{CL}} \hookrightarrow H^\sigma$).

Nous pouvons donc énoncer :

COROLLAIRE. *Si σ est l'esquisse associée à une théorie algébrique, si σ_{CL} est l'esquisse associée à la théorie algébrique commutative, au sens de Linton, qui s'en déduit, pour que* H^σ *soit munie d'une structure de* H-*catégorie monoïdale bi-fermée adaptée à* H *en l'objet u («générateur» pour σ et σ_{CL}), il est nécessaire que l'injection canonique $H^{\sigma_{CL}} \hookrightarrow H^\sigma$ soit un isomorphisme (autrement dit que toute H-structure d'espèce σ soit commutative).*

Si les conditions de ce corollaire sont réalisées, nous savons en vertu du corollaire de la Proposition 14 qu'elles suffisent à assurer l'existence d'une structure monoïdale bi-fermée symétrique sur H^σ, adaptée à H en u. Les corollaires des Proposition 14 et Proposition 15 fixent par conséquent une condition nécessaire et suffisante d'existence d'une structure de H-catégorie monoïdale bi-fermée (symétrique) adaptée à H en u sur H^σ.

Signalons à cette occasion que toutes les structures de catégories monoïdales fermées (symétriques) usuelles sur des catégories du type $\mathfrak{M}^\sigma$, où σ est une théorie algébrique, sont adaptées en u à H. Ainsi ces théories n'ont pas été choisies commutatives «par hasard» ou pour simplifier certains calculs.

De plus on peut affirmer qu'il n'existe aucune structure de catégorie monoïdale bi-fermée (symétrique ou non) sur la catégorie Gr des homomorphismes entre (petits) groupes qui admette Z pour unité, ...

3. COMPLEMENTS

3.1. Une obstruction.

La condition nécessaire et suffisante établie en III.1 (suffisance) et en III.2 (nécessité) dans le cas où σ est associée à une théorie algébrique ne permet cependant pas d'affirmer avec certitude s'il existe ou non, dans ce cas, des structures de H-catégorie monoïdale bi-fermée, symétrique ou non, sur H^{σ} qui ne sont pas nécessairement adaptées en u à H.

Il nous a été impossible de trouver une condition nécessaire à l'existence de telles structures (plus nombreuses et plus «générales»), et encore moins une condition suffisante applicable à une théorie σ quelconque, et portant sur sa «nature».

C'est pourquoi on ne peut espérer, pour le moment, que résoudre de tels problèmes d'existence de structures monoïdales bi-fermées, non adaptées, «cas par cas». C'est ce que nous avons en vue ici en toute généralité, et en III.3.2 sur deux exemples.

Nous supposons encore que σ est une esquisse $\mathcal{K}$-projective petite et v_0 un objet de σ. Nous désignerons par $H^{\sigma\otimes\sigma}_{\underline{\underline{v_0}}}$ la sous-catégorie pleine de $H^{\sigma\otimes\sigma}$ dont les objets sont les réalisations $G: \sigma\otimes\sigma \to H$ isomorphes à des $G': \sigma\otimes\sigma \to H$ pour lesquelles il existe une réalisation

$$L': (\sigma\otimes\sigma)\otimes\sigma \to H \text{ vérifiant } L'(x, v_0, y) = G'(x, y)$$

pour tout $(x, y) \in S\times S$; et nous noterons $\overline{L}': \sigma\otimes\sigma \to H^{\sigma}$ la réalisation définie par

$$\overline{L}'(x, z)(y) = L'(x, y, z) \text{ pour tout } (x, y, z) \in S\times S\times S .$$

De même, nous désignons par $H^{\sigma}_{\underline{\underline{v_0}}}$ la sous-catégorie pleine de H^{σ} dont les objets sont les $F: \sigma \to H$ isomorphes à des réalisations $F': \sigma \to H$ pour lesquelles il existe $G': \sigma\otimes\sigma \to H$ vérifiant

$$G'(x, v_0) = F'(x) \text{ pour tout } x \in S .$$

Alors, nous avons :

PROPOSITION 16. *Si σ est une esquisse $\mathcal{K}$-projective petite et si v_0 en est un objet, pour que* H^{σ} *soit munie d'une structure de* H-*catégorie monoï-*

dale bi-fermée (symétrique ou non, adaptée à H *en* v_0 *ou non), il est nécessaire que l'on n'ait pas simultanément :*

$$H^{\sigma}_{\underset{=}{v_0}} \neq H^{\sigma} \quad et \quad H^{\sigma\otimes\sigma}_{\underset{=}{v_0}} = H^{\sigma\otimes\sigma}$$

PREUVE. Supposons H^{σ} munie d'une structure de H-catégorie multiplicative bi-fermée

$$\hat{\mathrm{H}}^{\sigma} = (\mathrm{H}^{\sigma}, \hat{\hat{\otimes}}, J, \dots).$$

Soit $\overline{C}:(\sigma\otimes\sigma)^* \to H^{\sigma}$ la co-structure double permettant (à l'équivalence près) de reconstruire $\hat{\mathrm{H}}^{\sigma}$; supposons de plus que $H^{\sigma\otimes\sigma}_{\underset{=}{v_0}} = H^{\sigma\otimes\sigma}$. Pour toute réalisation $F: \sigma\otimes\sigma \to H$, nous avons un isomorphisme naturel en l'objet x de S :

$$F(x) \approx \int_y \underline{H}(\overline{\square} F(x,y), J(y)).$$

Comme $\overline{\square} F$ est un objet de $H^{\sigma\otimes\sigma}$, il existe un objet L' de $H^{(\sigma\otimes\sigma)\otimes\sigma}$ tel que l'on ait un isomorphisme naturel en l'objet (x,y) de $S\times S$:

$$\overline{\square} F(x,y) \approx L'(x, v_0, y) = \overline{L}'(x, v_0)(y).$$

On en déduit un isomorphisme naturel en l'objet x de S :

$$F(x) \approx \underline{H}^{\sigma}(\overline{L}'(x, v_0), J).$$

Posons, pour tout élément (x,y) de $S\times S$:

$$G'(x,y) = \underline{H}^{\sigma}(\overline{L}'(x,y), J).$$

Ceci définit une réalisation $G': \sigma\otimes\sigma \to H$ telle que $F \overset{\sim}{\Longrightarrow} G'(-, v_0)$ dans H^{σ}. On en déduit $F \in H^{\sigma}_{v_0}$. La proposition est donc prouvée.

On ne peut que remarquer l'analogie entre la Proposition 15 (et sa démonstration) et la Proposition 16 (et sa démonstration). C'est la seule Proposition 16 avec son application à la catégorie des homomorphismes entre groupes qui figure dans la version initiale de ce travail (F.S.C. A.). Elle permet d'exclure dans certains cas particuliers, comme celui des groupes, toute possibilité d'existence d'une quelconque structure de H-catégorie monoïdale bi-fermée sur H^{σ}. En ce sens elle est donc beaucoup plus puissante que la Proposition 15. Néanmoins elle est d'un emploi moins systématique, ce qui est son inconvénient.

3.2. Exemples.

Pour illustrer les propositions précédentes, supposons que σ est l'esquisse des groupes (resp. des monoïdes,...) et que H est une catégorie telle qu'il existe un H-groupe (resp. H-monoïde) non abélien (ce n'est pas une condition très restrictive !). On constate alors que tout H-groupe (resp. H-monoïde) double s'identifie à un H-groupe (resp. H-monoïde) abélien et qu'inversement tout H-groupe (resp. H-monoïde) abélien s'identifie aussi bien à un H-groupe (resp. H-monoïde) double qu'à un H-groupe (resp. H-monoïde) triple (il suffit pour cela d'utiliser explicitement l'hypothèse d'existence d'un élément neutre et un calcul désormais classique que nous ne rappellerons pas).

On en déduit que $H^{\sigma \otimes \sigma} = H_{\underline{\underline{u}}}^{\sigma \otimes \sigma}$. En vertu de l'hypothèse faite sur H, on a de plus $H_{\underline{\underline{u}}}^{\sigma} \neq H^{\sigma}$. Il en résulte que, si σ est l'esquisse des groupes (resp. des monoïdes), si H contient au moins un H-groupe (resp. H-monoïde) non abélien, H^{σ} ne peut pas être munie d'une structure de H-catégorie monoïdale bi-fermée.

Une étude détaillée de la notion d'unitarité (et plus particulière que celle introduite en (S.A.T.P.)) permettrait d'étendre les résultats précédents aux esquisses décrivant des théories algébriques unitaires.

En tout état de cause, le résultat précédent est valable si H = M. Autrement dit, il ne saurait exister sur la catégorie des homomorphismes entre groupes (resp. monoïdes) de structure de catégorie monoïdale bi-fermée (symétrique ou non).

De même le résultat précédent s'applique si H est la structure cartésienne fermée sur la catégorie $\mathcal{F}$ des foncteurs entre petites catégories. Or si σ_{mon} est l'esquisse des monoïdes (associée à la théorie des monoïdes), $\mathcal{F}^{\sigma_{mon}}$ est la catégorie des foncteurs monoïdaux stricts entre catégories monoïdales strictes. Elle ne peut donc pas être munie d'une structure de $\check{\mathcal{F}}$-catégorie (i. e. de 2-catégorie) monoïdale bi-fermée (symétrique ou non). Pour établir un résultat analogue dans le cas non strict, il semble nécessaire d'utiliser la notion de «2-esquisse» ainsi qu'une théorie similaire à celle développée ici, dans ce nouveau cadre. Nous ne ferons donc que conjecturer que la catégorie des foncteurs monoïdaux (non nécessairement stricts) entre catégories monoïdales ne peut pas être munie de structure de 2-catégorie monoïdale bi-fermée symétrique ou non.

3.3. Co-structures simples et doubles.

Nous allons décrire maintenant un moyen simple de construction de co-structures doubles $\overline{C}: (\sigma \otimes \sigma)^* \to H^\sigma$, moyen aisément utilisable dans la pratique dès que σ est une théorie algébrique non unitaire (dans le sens de III.3.1), et fournissant dans H^σ un produit tensoriel associatif, symétrique, cohérent (mais en général non unitaire).

Supposons pour ce faire que :

- $\overline{C}': \sigma^* \to H$ est une co-structure simple,
- $\overline{q}: H \to H^\sigma$ est un foncteur compatible avec les limites inductives.

Alors, en posant :

$$\overline{C}' \otimes \overline{C}'(x, y) = \overline{C}'(x) \otimes \overline{C}'(y) \quad \text{pour tout} \quad (x, y) \in S \times S,$$

on définit une réalisation $\overline{C}' \otimes \overline{C}': (\sigma \otimes \sigma)^* \to H$. Il en résulte une co-structure double $\overline{C} = \overline{q}.(\overline{C}' \otimes \overline{C}')$ d'espèce σ dans H^σ.

On vérifie sans peine que $\overline{C}$ est symétrique, associative et cohérente, puisque le produit tensoriel $\otimes$ dans H l'est. Autrement dit, la structure $\hat{\mathrm{H}}^\sigma_{\overline{C}}$ de H-catégorie multiplicative bi-fermée est symétrique, associative et cohérente (mais en général non unitaire, i. e. non monoïdale).

En général, on choisit pour $\overline{q}$ le foncteur H-adjoint à un foncteur d'omission et, si σ est l'esquisse associée à une théorie algébrique, on prend $\overline{q} = \overline{q}_u$ (mais ceci n'a rien de nécessaire).

Notons que, si $H = \mathfrak{M}$, si σ est l'esquisse associée à une théorie unitaire (par exemple celle des groupes ou des monoïdes), alors il n'existe qu'une co-structure simple dans $\mathfrak{M}$ d'espèce σ : à savoir la réalisation constante sur $\emptyset$.

Par contre, si σ n'est pas unitaire, on peut exhiber de nombreuses co-structures simples. Pour ne citer qu'un exemple, supposons que $H = \mathfrak{M}$ et que σ soit l'esquisse des demi-groupes. Alors l'application

$$k': \mathrm{N} \to \mathrm{N} + \mathrm{N} \quad \text{définie par } k'(n) = \begin{cases} (n, 1) & \text{si } n \text{ impair} \\ (n, 2) & \text{si } n \text{ pair} \end{cases}$$

définit un co-demi-groupe dans $\mathfrak{M}$ (dont la «loi» de composition k' est bien associative).

On en déduit, en prenant pour $\bar{q} : \mathfrak{M} \to \mathit{Demgp}$ l'adjoint au foncteur d'oubli usuel, que *Demgp* est muni d'une structure de catégorie multiplicative bi-fermée symétrique, associative, cohérente mais non unitaire (en appliquant le Test particulier d'unitarité).

Il nous a été impossible de déterminer une co-structure simple dans $\mathfrak{M}$ qui permette de construire dans *Demgp* (par exemple) une structure de catégorie multiplicative bi-fermée symétrique, associative, unitaire et cohérente (i. e. monoïdale fermée).

Théorie et Applications des catégories
U. E. R. de Mathématiques
33 rue Saint-Leu
80039 AMIENS CEDEX

et

U.E.R. de Mathématiques
Université Paris VII
2 Place Jussieu
75005 PARIS

BIBLIOGRAPHIE

A.P.A.T. F. W. LAWVERE, Some algebraic problems in the context of functorial semantics of alg. theories, *Lecture Notes in Math.* 61, Springer (1968).

C.E.S.T. F. FOLTZ et C. LAIR, Constructions et tests standards, *Esquisses Math.* (à paraître), Amiens (1977).

E.G.C.E. C. LAIR, Etude générale de la catégorie des esquisses, *Esquisses Math.* 23 (1975).

E.T.S.A. C. EHRESMANN, Esquisses et types des structures algébriques, *Bul. Instit. Polit. Iaşi* XIV (1968).

F.O.S.A. C. LAIR, Foncteurs d'omission de structures algébriques, *Cahiers Topo. et Géo. Diff.* XII - 2 (1971).

F.S.C.A. F. FOLTZ et C. LAIR, Fermeture standard des catégories algébriques, *Cahiers Topo. et Géo. Diff.* XIII - 3 (1972).

O.C.C.F. B. DAY, On closed categories of functors, *Lecture Notes in Math.* 137, Springer (1970).

T.H.E.N. A. BASTIANI, *Théorie des Ensembles*, C.D.U., Paris, 1970.