CAHIERS DE
TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
CATÉGORIQUES

YVES DIERS

Complétion monadique

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 17, nº 4 (1976), p. 363-396

<http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1976__17_4_363_0>

CAHIERS DE TOPOLOGIE
ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE

Vol. XVII-4 (1976)

COMPLETION MONADIQUE

par Yves DIERS

0. Introduction.

Soit $\mathbf{A}$ une catégorie à factorisation. On définit une factorisation $(\mathbf{I},\mathbf{P})$ sur la catégorie des monades régulières sur $\mathbf{A}$ et une factorisation $(\mathbf{I},\mathbf{P})$ sur une catégorie de catégories au-dessus de $\mathbf{A}$, de telle façon que le foncteur contravariant sémantique y commute.

Si $(\mathbf{M},I)$ (resp. $(\mathbf{N},J)$ est une catégorie au-dessus de $\mathbf{A}$, d'image monadique (i.e. de «codensity triple») $\mathbf{T}$ (resp. $\mathbf{S}$), le morphisme canonique

$$\tilde{I}:(\mathbf{M},I)\to(\mathbf{A}^{\mathbf{T}},U_{\mathbf{T}}) \quad (\text{resp. } \tilde{J}:(\mathbf{N},J)\to(\mathbf{A}^{\mathbf{S}},U_{\mathbf{S}}))$$

appartient à $\mathbf{P}$. Un morphisme $K:(\mathbf{M},I)\to(\mathbf{N},J)$ définit un morphisme $t:\mathbf{S}\to\mathbf{T}$ et, par suite, un morphisme

$$\mathbf{A}^t:(\mathbf{A}^{\mathbf{T}},U_{\mathbf{T}})\to(\mathbf{A}^{\mathbf{S}},U_{\mathbf{S}}) \quad \text{tel que} \quad \mathbf{A}^t.\tilde{I}=\tilde{J}.K .$$

On donne des conditions suffisantes pour que t soit dans $\mathbf{P}$; alors $\mathbf{A}^t$ appartient à $\mathbf{I}$, si bien que $\mathbf{A}^t.\tilde{I}$ est la factorisation de $\tilde{J}.K$ et que $(\mathbf{A}^{\mathbf{T}},U_{\mathbf{T}})$ est l'image de $\tilde{J}.K$. On ramène ainsi l'étude de $\mathbf{A}^{\mathbf{T}}$ à celle de $\mathbf{A}^{\mathbf{S}}$, qui est triviale si J est monadique (i.e. triplable). En plus, on met ainsi en évidence la catégorie des I-pro-objets (i.e. $\mathbf{M}$-objets).

Moyennant la démonstration préalable d'une monadicité, par exemple celle de $\mathbf{Comp}^{\mathbf{T}_0}$ ou $\mathbf{IM}(\mathbf{T}_2)$ sur $\mathbf{Ens}$, les résultats de complétion monadique (i.e. équationnelle) des théorèmes 3.1, 3.2, 3.3 de J.F. Kennison et D. Gildenhuys dans [3] peuvent être retrouvés.

On donne de nombreux exemples, choisis pour une bonne part dans [3], où la méthode ci-dessus permet une description topologique de $\mathbf{A}^{\mathbf{T}}$ et de la catégorie des pro-objets.

1. Catégorie à factorisation.

On appelle *catégorie à factorisation* une «bicatégorie» de Kennison [2]. On notera toujours $\mathbf{I}$ et $\mathbf{P}$ les deux classes de morphismes. Si $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ sont à factorisation, un foncteur $U: \mathbf{A} \to \mathbf{B}$

commute à $\mathbf{P}$ (resp. $\mathbf{I}$) si on a:

$$x \in \mathbf{P} \text{ (resp. } \mathbf{I}\text{)} \implies Ux \in \mathbf{P} \text{ (resp. } \mathbf{I}\text{)},$$

reflète $\mathbf{P}$ (resp. $\mathbf{I}$) si on a:

$$Ux \in \mathbf{P} \text{ (resp. } \mathbf{I}\text{)} \implies x \in \mathbf{P} \text{ (resp. } \mathbf{I}\text{)},$$

commute à (resp. *reflète*) *la factorisation* s'il commute à (resp. reflète) $\mathbf{P}$ et $\mathbf{I}$.

Notons qu'un foncteur qui commute à $\mathbf{P}$ (resp. $\mathbf{I}$) et qui reflète les isomorphismes reflète $\mathbf{I}$ (resp. $\mathbf{P}$); en effet: si $x = x_2 . x_1$ est la factorisation de x et si $Ux \in \mathbf{I}$ (par exemple),

$$Ux = Ux_2 . Ux_1 \quad \text{avec} \quad Ux_1 \in \mathbf{P}$$

et d'après [2], Proposition 1.1 (4), Ux_1 est un isomorphisme et x_1 aussi, donc x appartient à $\mathbf{I}$.

Notons encore que, si $\mathbf{A}$ est à factorisation, la catégorie duale $\mathbf{A}^*$ l'est aussi et que, si $\mathbf{X}$ est une catégorie, la catégorie $\mathbf{A}^{\mathbf{X}}$ est à factorisation, avec

$$a \in \mathbf{P} \quad \text{ssi} \quad \forall X \in \mathbf{X},\ a_X \in \mathbf{P}$$

et

$$a \in \mathbf{I} \quad \text{ssi} \quad \forall X \in \mathbf{X},\ a_X \in \mathbf{I}.$$

On considère dans toute la suite une catégorie à factorisation $\mathbf{A}$ que l'on supposera complète à gauche.

2. Monade régulière.

La catégorie $\mathbf{Mon}(\mathbf{A})$ a pour objets les monades sur $\mathbf{A}$ et pour morphismes de source $\mathbf{T}' = (T', \eta', \mu')$ et de but $\mathbf{T} = (T, \eta, \mu)$ les transformations naturelles $t: T' \to T$ vérifiant

$$t\,\eta' = \eta \quad \text{et} \quad \mu(t * t) = t\,\mu'.$$

Une monade $\mathbf{T} = (T, \eta, \mu)$ est *régulière* si T commute à $\mathbf{P}$.

PROPOSITION 2.1. *Si* $\mathbf{T}$ *est régulière,* $\mathbf{A}^{\mathbf{T}}$ *est munie d'une factorisation telle que* $U_{\mathbf{T}}: \mathbf{A}^{\mathbf{T}} \to \mathbf{A}$ *y commute et la reflète.*

PREUVE. Si $h: (X, x) \to (Z, z)$ est dans $\mathbf{A}^{\mathbf{T}}$, on pose

$$h \in \mathbf{P} \ \text{ ssi } \ Uh \in \mathbf{P} \quad \text{et} \quad h \in \mathbf{I} \ \text{ ssi } \ Uh \in \mathbf{I}.$$

Soit $h = g.f$ la décomposition de h dans $\mathbf{A}$ avec $f: X \to Y$. Le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & TY \arrow[dr, "Tg"] & \\
TX \arrow[ur, "Tf"] \arrow[rr, "Th"] \arrow[dd, "x"'] & & TZ \arrow[dd, "z"] \\
 & Y \arrow[dr, "g"] & \\
X \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "h"'] & & Z
\end{tikzcd}$$

où $Tf \in \mathbf{P}$ et $g \in \mathbf{I}$, met en évidence un morphisme $y: TY \to Y$ ([2], Proposition 1.1 (6)) rendant commutatif le diagramme augmenté. Le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
 & TTX \arrow[rr, "TTf"] \arrow[dd, shift right, "Tx"'] \arrow[dd, shift left, "\mu_X"] & & TTY \arrow[dd, shift right, "Ty"'] \arrow[dd, shift left, "\mu_Y"] \\
X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\eta_X"] \arrow[ddr, "1_X"'] & & Y \arrow[dr, "\eta_Y"] \arrow[ddr, "1_Y"'] & \\
 & TX \arrow[rr, "Tf"] \arrow[d, "x"] & & TY \arrow[d, "y"] \\
 & X \arrow[rr, "f"] & & Y
\end{tikzcd}$$

où f, $TTf \in \mathbf{P}$ sont des épimorphismes, montre que $(Y, y) \in \mathbf{A}^{\mathbf{T}}$. En outre:

$$f: (X, x) \to (Y, y) \in \mathbf{P} \quad \text{et} \quad g: (Y, y) \to (Z, z) \in \mathbf{I}.$$

PROPOSITION 2.2. *Si* $\mathbf{T'}$ *est régulière et si* $t: \mathbf{T'} \to \mathbf{T}$ *appartient à* $\mathbf{P}$, *alors* $\mathbf{T}$ *est régulière.*

PREUVE. Si $f: X \to Y$ est dans $\mathbf{P}$, on a

$$t_Y . T'f = Tf . t_X \quad \text{avec} \quad t_Y . T'f \in \mathbf{P}$$

et par suite

$$Tf . t_X \in \mathbf{P} \text{ donc } Tf \in \mathbf{P}$$

([2], Proposition 1.1 (2), dual).

La catégorie $\mathbf{Mon\,R(A)}$ a mêmes objets et mêmes morphismes unités que $\mathbf{Mon(A)}$ et pour morphismes non unités ceux de $\mathbf{Mon(A)}$ dont la source est une monade régulière. Posons

$$t \in \mathbf{P} \text{ (resp. } \mathbf{I}\text{) dans } \mathbf{Mon\,R(A)} \text{ ssi } t \in \mathbf{P} \text{ (resp. } \mathbf{I}\text{) dans } \mathbf{A^A} .$$

PROPOSITION 2.3. $\mathbf{I}$ *et* $\mathbf{P}$ *munissent* $\mathbf{Mon\,R(A)}$ *d'une factorisation.*

PREUVE. Soit $t: \mathbf{T'} \to \mathbf{T}$ dans $\mathbf{Mon\,R(A)}$ de factorisation

$$t = s . r \quad \text{avec} \quad r: T' \to S \text{ et } s: S \to T \text{ dans } \mathbf{A^A} .$$

Le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
T'T'X \arrow[r, "r * r_X"] \arrow[rr, bend right, "t * t_X"'] \arrow[d, "\mu'_X"'] & SSX \arrow[r, "s * s_X"] & TTX \arrow[d, "\mu_X"] \\
T'X \arrow[r, "r_X"] \arrow[rr, bend right, "t_X"'] & SX \arrow[r, "s_X"] & TX
\end{tikzcd}$$

où $s_X \in \mathbf{I}$ et rS_X, $T'r_X \in \mathbf{P}$ implique

$$r * r_X = rS_X . T'r_X \in \mathbf{P} ,$$

montre qu'il existe un morphisme et un seul $\nu_X: SSX \to SX$ rendant commutatif le diagramme augmenté, l'unicité prouvant que l'on définit ainsi une transformation naturelle $\nu : SS \to S$. En posant $\theta = r\eta'$, on obtient une monade $\mathbf{S} = (S, \theta, \nu)$ sur $\mathbf{A}$: en effet, la commutativité des diagrammes suivants de gauche implique celle des diagrammes de droite.

$$
\begin{tikzcd}
T'X \arrow[r, "r_X"] \arrow[d, "\eta' T'_X"'] & SX \arrow[d, "\eta' S_X"] & \\
T'T'X \arrow[r, "T' r_X"'] & T'SX \arrow[r, "r S_X"'] & SSX
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
T'X \arrow[r, "r_X"] \arrow[d, "\eta' T'_X"'] & SX \arrow[d, "\theta S_X"] \\
T'T'X \arrow[r, "r * r_X"'] & SSX
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
T'X \arrow[r, "r_X"] \arrow[d, "T'\eta'_X"'] & SX \arrow[d, "S\eta'_X"] & \\
T'T'X \arrow[r, "r T'_X"'] & ST'X \arrow[r, "S r_X"'] & SSX
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
T'X \arrow[r, "r_X"] \arrow[d, "T'\eta'_X"'] & SX \arrow[d, "S\theta_X"] \\
T'T'X \arrow[r, "r * r_X"'] & SSX
\end{tikzcd}
.
$$

Le diagramme

$$
\begin{tikzcd}
T'X \arrow[r, "r_X"] \arrow[d, shift right, "\eta' T'_X"'] \arrow[d, shift left, "T'\eta'_X"] \arrow[dd, bend right=60, "1_{T'X}"'] & SX \arrow[d, shift right, "\theta S_X"'] \arrow[d, shift left, "S\theta_X"] \arrow[dd, bend left=60, "1_{SX}"] \\
T'T'X \arrow[r, "r * r_X"'] \arrow[d, "\mu'_X"'] & SSX \arrow[d, "\nu_X"] \\
T'X \arrow[r, "r_X"'] & SX
\end{tikzcd}
$$

où r_X est épimorphique, montre que $\nu(\theta S) = \nu(S\theta) = 1_S$. Les diagrammes commutatifs suivants

$$
\begin{tikzcd}
T'T'T'X \arrow[r, "(r * r)T'_X"] \arrow[d, "\mu' T'_X"'] & SST'X \arrow[r, "SSr_X"] \arrow[d, "\nu T'_X"] & SSSX \arrow[d, "\nu S_X"] \\
T'T'X \arrow[r, "r T'_X"] & ST'X \arrow[r, "S r_X"] & SSX
\end{tikzcd}
$$

$$\begin{tikzcd}
T'T'T'X \arrow[r, "T'(r*r)_X"] \arrow[d, "T'\mu'_X"'] & T'SSX \arrow[r, "rSS_X"] \arrow[d, "T'\nu_X"] & SSSX \arrow[d, "S\nu_X"] \\
T'T'X \arrow[r, "T'r_X"'] & T'SX \arrow[r, "rS_X"'] & SSX
\end{tikzcd}$$

montrent la commutativité de

$$\begin{tikzcd}
T'T'T'X \arrow[r, "r*r*r_X"] \arrow[d, shift right, "\mu'T'_X"'] \arrow[d, shift left, "T'\mu'_X"] & SSSX \arrow[d, shift right, "\nu S_X"'] \arrow[d, shift left, "S\nu_X"] \\
T'T'X \arrow[r, "r*r_X"] \arrow[d, "\mu'_X"'] & SSX \arrow[d, "\nu_X"] \\
T'X \arrow[r, "r_X"'] & SX
\end{tikzcd}$$

où $r*r*r_X$ est épimorphique. Ainsi on a $\nu(S\nu) = \nu(\nu S)$.

En outre r est un morphisme de monades $\mathbf{T}' \to \mathbf{S}$ et, d'après la Proposition 2.2, $\mathbf{S}$ est régulière puisque $\mathbf{T}'$ l'est et que $r \in \mathbf{P}$; comme $s \in \mathbf{I}$, $t = s\,r$ est une factorisation de t dans $\mathbf{Mon\,R(A)}$. Il est alors immédiat que $\mathbf{Mon\,R(A)}$ est à factorisation.

3. Plongement de Birkhoff.

Soit $(\mathbf{X}, U) \in (\mathbf{Cat}, \mathbf{A})$ et x un morphisme de $\mathbf{X}$.

x est un **I**-*monomorphisme* (resp. **P**-*épimorphisme*) si $Ux \in \mathbf{I}$ (resp. $\mathbf{P}$).

$Y \in \mathbf{X}$ est un *U-rétract de* $X \in \mathbf{X}$ s'il existe $x: X \to Y$ et y tels que $(Ux).y$ soit une unité de $\mathbf{A}$.

Soit $V: (\mathbf{X}, U) \to (\mathbf{X}', U')$ un morphisme de $(\mathbf{Cat}, \mathbf{A})$. V est un *plongement de Birkhoff* si V est un plongement plein dont l'image est fermée pour les produits, les **I**-sous-objets et les U'-rétracts. V est un *quotient de Birkhoff* si tout objet de $\mathbf{X}'$ est un U'-rétract d'un **I**-sous-objet d'un produit d'images d'objets de $\mathbf{X}$ par V.

Un foncteur $U: \mathbf{X} \to \mathbf{A}$ est *injectif pour les sous-objets* (resp. les *objets quotients*) si pour tout $X \in \mathbf{X}$ et tout couple x_1, x_2 de monomorphismes de but X (resp. épimorphismes de source X) on a

$$U x_1 = U x_2 \Longrightarrow x_1 = x_2.$$

On note $\mathbf{C}$ la sous-catégorie de $(\mathbf{Cat}, \mathbf{A})$ ayant mêmes objets et mêmes morphismes unités et pour morphismes non unités ceux de but un foncteur fidèle qui crée les limites projectives et est injectif pour les sous-objets et les objets quotients.

PROPOSITION 3.1. *Les plongements de Birkhoff et les quotients de Birkhoff munissent* $\mathbf{C}$ *d'une factorisation.*

PREUVE. (a) *Les quotients de Birkhoff sont stables par composition:* Soit $(\mathbf{X}, U) \in \mathbf{C}$, où U crée les $\underleftarrow{\lim}$, et $X \in \mathbf{X}$. Un $\mathbf{I}$-sous-objet $y: Y' \to Y$ d'un U-rétract $x: X \to Y$ de X est un U-rétract d'un $\mathbf{I}$-sous-objet de X ; en effet, l'image par U du produit fibré

$$\begin{tikzcd} Y'' \arrow[r, "y'"] \arrow[d, "x'"'] & X \arrow[d, "x"] \\ Y' \arrow[r, "y"'] & Y \end{tikzcd}$$

est un produit fibré ; les épimorphismes scindés étant universels, Ux scindé entraîne Ux' scindé ; d'après la Proposition 11 (9) duale de [2],

$$U y \in \mathbf{I} \Longrightarrow U y' \in \mathbf{I} ;$$

ainsi Y' est U-rétract du $\mathbf{I}$-sous-objet Y'' de X. En outre, soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille d'objets de $\mathbf{X}$; si Y_i est un U-rétract de X_i, $\prod_{i \in I} Y_i$ est un U-rétract de $\prod_{i \in I} X_i$; si Y_i est un $\mathbf{I}$-sous-objet de X_i, $\prod_{i \in I} Y_i$ est un $\mathbf{I}$-sous-objet de $\prod_{i \in I} X_i$ ([2] Proposition 11 (8)). Soit

$$V: (\mathbf{X}, U) \to (\mathbf{X}', U') \quad \text{et} \quad V': (\mathbf{X}', U') \to (\mathbf{X}'', U'')$$

deux quotients de Birkhoff dans $\mathbf{C}$. Un objet X'' de $\mathbf{X}''$ est un U''-rétract d'un $\mathbf{I}$-sous-objet de $\prod_{i\in I} V'X'_i$ où $X'_i \in \mathbf{X}'$ et, pour tout $i \in \mathbf{I}$, X'_i est U'-rétract d'un $\mathbf{I}$-sous-objet de

$$\prod_{J\in J_i} VX_{iJ} \quad \text{où} \quad X_{iJ} \in \mathbf{X} \ ;$$

alors $V'X'_i$ est un U''-rétract d'un $\mathbf{I}$-sous-objet de $\prod_{J\in J_i} V'VX_{iJ}$ et $\prod_{i\in I} V'X'_i$ est un U''-rétract d'un $\mathbf{I}$-sous-objet de $\prod_{i\in I}\prod_{J\in J_i} V'VX_{iJ}$; un $\mathbf{I}$-sous-objet de $\prod_{i\in I} V'X'_i$ est un U''-rétract d'un $\mathbf{I}$-sous-objet de $\prod_{i\in I}\prod_{J\in J_i} V'VX_{iJ}$; finalement X'' est un U''-rétract d'un $\mathbf{I}$-sous-objet de $\prod_{i\in I}\prod_{J\in J_i} V'VX_{iJ}$.

(b) *Les quotients de Birkhoff sont des épimorphismes de* $\mathbf{C}$: Soit un quotient de Birkhoff $V: (\mathbf{X}, U) \to (\mathbf{X}', U')$ et W_0, $W_1 : (\mathbf{X}', U') \to (\mathbf{X}'', U'')$ deux morphismes vérifiant $W_0 . V = W_1 . V$; soit $X' \in \mathbf{X}'$. Si $X' = VX$, alors

$$W_1 X' = W_1 VX = W_0 VX = W_0 X'.$$

Si $(X', (p_i)_{i\in I}) = \prod_{i\in I} VX_i$, on a

$$(U'X', (U'p_i)_{i\in I}) \approx \prod_{i\in I} U'VX_i = \prod_{i\in I} UX_i .$$

Or $W_0 p_i$ et $W_1 p_i$ satisfont à

$$U''W_0 p_i = U'p_i = U''W_1 p_i \ ;$$

U'' créant les $\varprojlim$, on a $W_0 p_i = W_1 p_i$ et par suite $W_0 X' = W_1 X'$. Si un $\mathbf{I}$-sous-objet $x' : X' \to X'_0$ d'un objet $X'_0 \in \mathbf{X}'$ est tel que $W_0 X'_0 = W_1 X'_0$, la relation

$$U''W_0 x' = U'x' = U''W_1 x' ,$$

jointe à l'injectivite de U'' pour les sous-objets, prouve que $W_0 x' = W_1 x'$ et par suite $W_0 X' = W_1 X'$. Si X' est par $x' : X'_0 \to X'$ un U'-rétract d'un objet X'_0 vérifiant $W_0 X'_0 = W_1 X'_0$, la relation

$$U''W_0 x' = U'x' = U''W_1 x' ,$$

jointe à l'injectivité de U'' pour les objets-quotients, prouve que l'on a:

$$W_0 x' = W_1 x' \quad \text{et par suite} \quad W_0 X' = W_1 X'.$$

La conclusion se déduit alors immédiatement de la définition d'un quotient de Birkhoff et de la fidèlité de U''.

(c) *Les plongements de Birkhoff sont stables par composition:* Soit

$$V:(\mathbf{X},U)\to(\mathbf{X}',U') \text{ et } V':(\mathbf{X}',U')\to(\mathbf{X}'',U'')$$

deux plongements de Birkhoff; alors $V'.V$ est un plongement plein; si $(X_i)_{i\in I}$ est une famille d'objets de $\mathbf{X}$, $\prod_{i\in I} V'VX_i$ est de la forme $V'X'$, puisque $V'\mathbf{X}'$ est fermée pour les produits. V' étant pleinement fidèle, on a $X'=\prod_{i\in I} VX_i$. Comme $V\mathbf{X}$ est fermée pour les produits, X' est de la forme VX et par conséquent

$$\prod_{i\in I} V'VX_i = V'X' = V'VX.$$

Si $x'': X''\to V'VX$ est un $\mathbf{I}$-sous-objet, x'' est de la forme $V'x'$, car $V'\mathbf{X}'$ est fermée pour les $\mathbf{I}$-sous-objets; $x': X'\to VX$, étant un $\mathbf{I}$-sous-objet, est de la forme Vx, puisque $V\mathbf{X}$ est fermée pour les $\mathbf{I}$-sous-objets; par suite $x''=V'Vx$. D'une façon analogue on montre que $V'V\mathbf{X}$ est fermée pour les U''-rétracts.

(d) Il est immédiat que les *plongements de Birkhoff sont des monomorphismes.*

(e) *Tout morphisme $W:(\mathbf{X},U)\to(\mathbf{X}'',U'')$ se factorise en un quotient de Birkhoff et un plongement de Birkhoff:* Soit $\mathbf{X}'$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{X}''$ ayant pour objets les U''-rétracts des $\mathbf{I}$-sous-objets des produits d'images d'objets de $\mathbf{X}$ par W. On note :

$V': \mathbf{X}'\to\mathbf{X}''$ le plongement, $U'=U''.V'$,

$V: \mathbf{X}\to\mathbf{X}'$ le foncteur induit par W.

Comme V' est un plongement, U' est fidèle et injectif pour les sous-objets et les objets-quotients. Si $x:X\to Y$ est un noyau dans $\mathbf{X}''$ avec $Y\in\mathbf{X}'$, de factorisation $x=x_2.x_1$, alors x_1 est un noyau et appartient à $\mathbf{P}$, donc x_1 est un isomorphisme et par suite x appartient à $\mathbf{I}$ et $X\in\mathbf{X}'$; ainsi $\mathbf{X}'$ est fermée pour les noyaux. En ajoutant le fait que $\mathbf{X}'$ est fermée pour les produits, on conclut que $\mathbf{X}'$ est fermée pour les $\varprojlim$, et que U' crée les $\varprojlim$. Il est en outre immédiat que $V:(\mathbf{X},U)\to(\mathbf{X}',U')$ est un quotient de

Birkhoff et que $V': (\mathbf{X}', U') \to (\mathbf{X}'', U'')$ est un plongement de Birkhoff, d'après la démonstration de la Proposition 3.1 (a).

(f) *La factorisation est unique à isomorphisme près:* Soit

$W = L'.L$ avec $L: (\mathbf{X}, U) \to (\mathbf{Y}, U_1)$ et $L': (\mathbf{Y}, U_1) \to (\mathbf{X}'', U'')$

une factorisation. $L'\mathbf{Y}$ est une sous-catégorie de Birkhoff de $\mathbf{X}''$ qui contient $L'L\,\mathbf{X} = W\mathbf{X}$ et par suite $\mathbf{X}'$. De plus tout $Y \in \mathbf{Y}$ est U_1-rétract d'un $\mathbf{I}$-sous-objet de $\prod_{i \in I} L\,X_i$, de sorte que $L'Y$ est U''-rétract d'un $\mathbf{I}$-sous-objet de

$$\prod_{i \in I} L'L\,X_i = \prod_{i \in I} W X_i \,;$$

il appartient donc à $\mathbf{X}'$, et ainsi $L'\mathbf{Y} = \mathbf{X}'$ et $\mathbf{Y} \approx \mathbf{X}'$.

DEFINITION 3.2. Si $W = V'.V$ est la factorisation de W, on appelle V' *l'image de Birkhoff de* W.

4. Sémantique monadique.

La *sémantique monadique sur* $\mathbf{A}$ est le foncteur

$$S: \mathbf{Mon}(\mathbf{A})^o \to (\mathbf{Cat}, \mathbf{A})$$

défini par $S\mathbf{T} = (\mathbf{A}^{\mathbf{T}}, U_{\mathbf{T}})$ et $St = \mathbf{A}^t$, où

$$\mathbf{A}^t(X, x) = (X, x.t_X) \quad \text{et} \quad \mathbf{A}^t f = f.$$

Notons que la sémantique monadique est pleinement fidèle, que $U_{\mathbf{T}}$ crée les $\varprojlim$, est injectif pour les sous-objets et les objets-quotients et par conséquent qu'elle induit un foncteur $\mathbf{Mon\,R}(\mathbf{A})^o \to \mathbf{C}$ noté de même.

THEOREME 4.1. *Un morphisme* $t: \mathbf{T}' \to \mathbf{T}$ *appartient à* $\mathbf{P}$ *(resp.* $\mathbf{I}$*) ssi* $\mathbf{A}^t: \mathbf{A}^{\mathbf{T}} \to \mathbf{A}^{\mathbf{T}'}$ *est un plongement de Birkhoff (resp. un quotient de Birkhoff). En d'autres termes, la sémantique monadique commute à la factorisation et la reflète.*

PREUVE. Soit $t: \mathbf{T}' \to \mathbf{T}$ dans $\mathbf{Mon\,R}(\mathbf{A})$.

(a) Si t appartient à $\mathbf{I}$, tout objet de $\mathbf{A}^{\mathbf{T}'}$ est $U_{\mathbf{T}'}$-rétract d'un objet de la forme $(T'X, \mu'_X)$, et $t_X : T'X \to TX \in \mathbf{I}$ implique que $(T'X, \mu'_X)$ est un $\mathbf{I}$-sous-objet de $\mathbf{A}^t(TX, \mu_X)$; ainsi $\mathbf{A}^t$ est un quotient de Birkhoff.

(b) On suppose dans la suite que t appartient à $\mathbf{P}$. Montrons que $\mathbf{A}^t$ est un plongement plein : La relation $U_{\mathbf{T}'} . \mathbf{A}^t = U_{\mathbf{T}}$, jointe à la fidélité de $U_{\mathbf{T}}$, montre que $\mathbf{A}^t$ est fidèle ; si

$$(X, x), (Y, y) \in \mathbf{A}^{\mathbf{T}} \quad \text{vérifient} \quad \mathbf{A}^t(X, x) = \mathbf{A}^t(Y, y),$$

alors $(X, x . t_X) = (Y, y . t_Y)$ et par suite

$$X = Y \quad \text{et} \quad x . t_X = y . t_X ,$$

d'où l'on déduit $x = y$, puisque $t_X \in \mathbf{P}$ est un épimorphisme ; ainsi on obtient $(X, x) = (Y, y)$ et $\mathbf{A}^t$ est un plongement. Si f est un morphisme : $\mathbf{A}^t(X, x) \to \mathbf{A}^t(Y, y)$, le diagramme extérieur

$$\begin{tikzcd}
T'X \arrow[r, "T'f"] \arrow[d, "t_X"'] & T'Y \arrow[d, "t_Y"] \\
TX \arrow[r, "Tf"] \arrow[d, "x"'] & TY \arrow[d, "y"] \\
X \arrow[r, "f"'] & Y
\end{tikzcd}$$

est commutatif et, puisque t_X est épimorphique, le diagramme inférieur l'est aussi ; donc f est un morphisme $(X, x) \to (Y, y)$ et $\mathbf{A}^t$ est plein.

(c) $\mathbf{A}^t(\mathbf{A}^{\mathbf{T}})$ est fermée pour les $\mathbf{I}$-sous-objets : Soit

$$(X, x) \in \mathbf{A}^{\mathbf{T}}, \quad (Y, y') \in \mathbf{A}^{\mathbf{T}'} \quad \text{et} \quad f : (Y, y') \to \mathbf{A}^t(X, x)$$

un $\mathbf{I}$-monomorphisme de $\mathbf{A}^{\mathbf{T}'}$; le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
T'Y \arrow[r, "T'f"] \arrow[d, "t_Y"] \arrow[dd, bend right=60, "y'"'] & T'X \arrow[d, "t_X"] \\
TY \arrow[r, "Tf"] & TX \arrow[d, "x"] \\
Y \arrow[r, "f"] & X
\end{tikzcd}$$

où $t_Y \in \mathbf{P}$ et $f \in \mathbf{I}$, met en évidence un morphisme $y\colon TY \to Y$ rendant commutatif le diagramme augmenté ; le diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & TTY \arrow[rr, "TTf"] \arrow[dd, shift right, "\mu_Y"'] \arrow[dd, shift left, "Ty"] & & TTX \arrow[dd, shift right, "\mu_X"'] \arrow[dd, shift left, "Tx"] \\
Y \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\eta_Y"] \arrow[ddr, "1_Y"'] & & X \arrow[dr, "\eta_X"] \arrow[ddr, "1_X"'] & \\
 & TY \arrow[rr, "Tf"] \arrow[d, "y"'] & & TX \arrow[d, "x"] \\
 & Y \arrow[rr, "f"'] & & X
\end{tikzcd}$$

où f est monomorphique, implique que $(Y, y) \in \mathbf{A}^{\mathbf{T}}$; alors

$$\mathbf{A}^t(Y, y) = (Y, y.\,t_Y) = (Y, y')$$

et $\mathbf{A}^t(\mathbf{A}^{\mathbf{T}})$ est fermée pour les $\mathbf{I}$-sous-objets.

(d) $\mathbf{A}^t(\mathbf{A}^{\mathbf{T}})$ est fermée pour les $U_{\mathbf{T}'}$-rétracts : si

$$(X, x) \in \mathbf{A}^{\mathbf{T}},\quad (Y, y') \in \mathbf{A}^{\mathbf{T}'},\quad f\colon \mathbf{A}^t(X, x) \to (Y, y') \text{ et } s\colon Y \to X$$

vérifient $f.s = 1_Y$, on pose $y = f.\,x.\,Ts$; alors $y.\,Tf = f.\,x$; en effet, le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
T'X \arrow[r, "T'f"] \arrow[d, "t_X"'] & T'Y \arrow[r, "T's"] \arrow[d, "t_Y"] & T'X \arrow[r, "T'f"] \arrow[d, "t_X"] & T'Y \arrow[d, "t_Y"] \arrow[dd, bend left=60, "y'"] \\
TX \arrow[r, "Tf"'] & TY \arrow[r, "Ts"'] & TX \arrow[r, "Tf"] \arrow[d, "x"'] & TY \\
 & & X \arrow[r, "f"'] & Y
\end{tikzcd}$$

montre que l'on a

$$y.(Tf).\,t_X = f.\,x.(Ts).\,t_Y.\,T'f = f.\,x.\,t_X.(T's).\,T'f =$$

$$= y'.(T'f).(T's).T'f = y'.T'f = f.x.t_X$$

et par suite $y.Tf = f.x$; alors

$$y.t_Y.T'f = y.(Tf).t_X = f.x.t_X = y'.T'f \;;$$

or f étant un épimorphisme scindé, $T'f$ en est un aussi et par suite on a $y.t_Y = y'$; on voit que $(Y, y) \in \mathbf{A}^\mathbf{T}$ par un raisonnement analogue à celui de la Proposition 2.1, et $\mathbf{A}^t(Y, y) = (Y, y')$.

(e) $\mathbf{A}^t(\mathbf{A}^\mathbf{T})$ est fermée pour les produits, puisque $U_\mathbf{T}$ et $U_{\mathbf{T}'}$ créent les produits.

(f) Ainsi la sémantique monadique commute à la factorisation et, étant pleinement fidèle, elle reflète les isomorphismes donc aussi la factorisation.

5. Stabilité des P-quotients cofiltrés.

Soit $\mathbf{X}$ une catégorie et $\mathbf{P}$ une classe de morphismes de $\mathbf{X}$. Si X est un objet de $\mathbf{X}$, on sait que le foncteur but $(X, \mathbf{X}) \to \mathbf{X}$ crée les $\varprojlim$. Notons $\mathbf{P}(X)$ la sous-catégorie pleine de $(X, \mathbf{X})$ dont les objets sont les $\mathbf{P}$-quotients de X.

On dit que les $\mathbf{P}$-*quotients cofiltrés sont stables* si, pour tout $X \in \mathbf{X}$, $\mathbf{P}(X)$ est fermée pour les $\varprojlim$ cofiltrantes, c'est-à-dire si, pour tout petit diagramme cofiltrant $d: \mathbf{D} \to (X, \mathbf{X})$, en posant

$$d_i = (X_i, x_i) \text{ pour tout } i \in \mathbf{D},$$

$$X_0 = \varprojlim_{i \in \mathbf{D}} X_i, \quad x = (x_i)_{i \in \mathbf{D}}: X \to X_0 \;,$$

on a

$$(\forall i \in \mathbf{I},\; x_i \in \mathbf{P}) \implies x \in \mathbf{P}.$$

On définit immédiatement la notion duale.

Un diagramme cofiltrant $d: \mathbf{D} \to \mathbf{X}$ est $\mathbf{P}$-*régulier* si:

pour tout a dans $\mathbf{D}$, $da \in \mathbf{P}$.

LEMME 5.1. *Soit* $\mathbf{X}$ *et* $\mathbf{Y}$ *deux catégories munies d'une classe* $\mathbf{P}$ *et soit* $V: \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ *un foncteur qui commute à* $\mathbf{P}$, *reflète* $\mathbf{P}$ *et commute aux* $\varprojlim$ *cofiltrantes* $\mathbf{P}$-*régulières. Si on a*

$$g\,.\,f \in \mathbf{P} \Longrightarrow g \in \mathbf{P}$$

et si, dans $\mathbf{Y}$, *les* $\mathbf{P}$*-quotients cofiltrés sont stables, ils le sont aussi dans* $\mathbf{X}$.

PREUVE. Avec les notations ci-dessus, supposons $x_i \in \mathbf{P}$ pour tout $i \in \mathbf{D}$; alors le diagramme $d: \mathbf{D} \to \mathbf{X}$ est $\mathbf{P}$-régulier, donc $U X_0 = \varprojlim_{i \in \mathbf{D}} U X_i$; en outre $U x_i \in \mathbf{P}$, d'où $U x \in \mathbf{P}$, et par suite $x \in \mathbf{P}$.

PROPOSITION 5.2. *Si* $\mathbf{T}$ *est une monade régulière sur* $\mathbf{A}$ *et si dans* $\mathbf{A}$ *les* $\mathbf{P}$*-quotients cofiltrés sont stables, ils le sont aussi dans* $\mathbf{A}^{\mathbf{T}}$.

PREUVE. Il suffit d'appliquer le lemme précédent et la Proposition 2.1, qui précise, en outre, la factorisation sur $\mathbf{A}^{\mathbf{T}}$.

6. Complétion monadique.

Soit $I: \mathbf{M} \to \mathbf{A}$ un foncteur.

L'*image monadique de* I , quand elle existe, est la monade $\mathbf{T} = (T, \eta, \mu)$ sur $\mathbf{A}$ que Linton appelle «codensity triple» dans [4], la *complétion monadique de* I étant $(\mathbf{A}^{\mathbf{T}}, U_{\mathbf{T}})$.

Alors T est la coextension de Kan de I relativement à I et, si on désigne par $\epsilon: T.I \to I$ le morphisme associé, η et μ sont définis par les relations :

$$\epsilon(\mu I) = I_I \quad \text{et} \quad \epsilon(\mu I) = I\epsilon(T\epsilon).$$

L'image monadique $\tilde{\mathbf{T}}$ du foncteur canonique $\tilde{I}: \mathbf{M} \to \mathbf{A}^{\mathbf{T}}$ est l'*image monadique seconde de* I , $(\mathbf{A}^{\mathbf{T}})^{\tilde{\mathbf{T}}}$ étant la *complétion monadique seconde de* I .

On définit l'*image monadique d'ordre* $n \in \mathrm{N}^*$ et même l'image monadique d'ordre α , pour tout ordinal α [0].

Notons que, si l'image monadique d'ordre $\alpha + 1$ est isomorphe à l'unité, la complétion monadique d'ordre α est la catégorie des I-pro-objets (i. e. $\mathbf{M}$-objets dans [0] et [3]).

PROPOSITION 6.1. *Si l'image monadique d'ordre* α *est idempotente, l'ima-*

ge monadique d'ordre $\alpha+1$ est isomorphe à l'unité et, par suite, la complétion monadique d'ordre α est la catégorie des I-pro-objets.

PREUVE. On peut supposer $\alpha = 1$. Puisque $U_{\mathbf{T}}$ crée les $\varprojlim$ et est pleinement fidèle, la coextension de Kan de $\tilde{I}: \mathbf{M} \to \mathbf{A}^{\mathbf{T}}$ relativement à $\tilde{I}$ existe et, par suite, l'image monadique seconde $\tilde{\mathbf{T}} = (\tilde{T}, \tilde{\nu}, \tilde{\mu})$ aussi ; en outre $U_{\mathbf{T}}.\tilde{T}$ est la coextension de Kan de $U_{\mathbf{T}}.\tilde{I}$ relativement à $\tilde{I}$ et T est encore la coextension de Kan de $U_{\mathbf{T}}.\tilde{T}$ relativement à $U_{\mathbf{T}}$, le morphisme associé étant $\epsilon_1: T.U_{\mathbf{T}} \to U_{\mathbf{T}}.\tilde{T}$. Cette composition des extensions de Kan, jointe aux définitions de μ et $\tilde{\mu}$, permet d'écrire

$$(U_{\mathbf{T}}\tilde{\mu})(\epsilon_1 \tilde{T})(T\epsilon_1) = \epsilon_1(\mu U_{\mathbf{T}}).$$

Or $U_{\mathbf{T}}$ étant pleinement fidèle, ϵ_1 est un isomorphisme ; $\mathbf{T}$ étant idempotente, μ est un isomorphisme, de sorte que $\epsilon_1\tilde{T}$, $T\epsilon_1$, $\mu U_{\mathbf{T}}$ sont des isomorphismes. On en déduit que $U_{\mathbf{T}}\tilde{\mu}$ est un isomorphisme ainsi que $\tilde{\mu}$, car $U_{\mathbf{T}}$ est pleinement fidèle. Ainsi $\tilde{\mathbf{T}}$ est idempotente et

$$U_{\tilde{\mathbf{T}}}: (\mathbf{A}^{\mathbf{T}})^{\tilde{\mathbf{T}}} \to \mathbf{A}^{\mathbf{T}}$$

est un plongement plein. Or tout $(X, x) \in \mathbf{A}^{\mathbf{T}}$ est isomorphe à un objet de la forme (TX, μ_X), lui-même de la forme $\varprojlim_{i \in \mathbf{D}} IX_i$; le fait que $U_{\tilde{\mathbf{T}}}$ crée les $\varprojlim$ montre que

$$(X, x) \in U_{\tilde{\mathbf{T}}}(\mathbf{A}^{\mathbf{T}})^{\tilde{\mathbf{T}}},$$

et par suite $U_{\tilde{\mathbf{T}}}$ est un isomorphisme et $\tilde{\mathbf{T}}$ est isomorphe à l'unité.

THEOREME 6.2. *Si $I: \mathbf{M} \to \mathbf{A}$, $J: \mathbf{N} \to \mathbf{A}$ sont des foncteurs tels que:*

1° I se factorise par J en un foncteur pleinement fidèle K dont l'image est fermée pour les produits finis et les $\mathbf{I}$-sous-objets.

2° $\mathbf{N}$ est complète à gauche, $\mathbf{P}$-colocalement petite et à factorisation,

3° J est un adjoint à droite et commute à $\mathbf{P}$,

4° dans $\mathbf{A}$ ou dans $\mathbf{N}$ les $\mathbf{P}$-quotients cofiltrés sont stables.

Alors :

(1) L'image monadique de I existe et est un $\mathbf{P}$-quotient de l'image monadique $\mathbf{S}$ de J.

(2) La complétion monadique de I est isomorphe à l'image de Birkhoff

de $\tilde{J}.K: (\mathbf{M}, I) \to (\mathbf{A}^{\mathbf{S}}, U_{\mathbf{S}})$.

PREUVE. Identifions $\mathbf{M}$ à une sous-catégorie pleine de $\mathbf{N}$ et notons $f \mapsto \bar{f}$ la bijection d'adjonction:

$$Hom_{\mathbf{A}}(X, JN) \to Hom_{\mathbf{N}}(LX, N),$$

où L est un adjoint à gauche de J, la naturalité par rapport à n dans $\mathbf{N}$ s'écrivant: pour tout $n: N \to N'$ dans $\mathbf{N}$ et tout $f: X \to JN$ dans $\mathbf{A}$, on a $\overline{(Jn).f} = n.\bar{f}$. Soit $X \in \mathbf{A}$.

(a) Soit $(X, I)_0$ la sous-catégorie pleine de (X, I) dont les objets sont les morphismes (M, f) tels que $\bar{f} \in \mathbf{P}$. $(X, I)_0$ est préordonnée puisque, si

$$m, m': (M, f) \to (M', f') \quad \text{dans} \quad (X, I)_0 ,$$

on a

$$(Im).f = f' = (Im').f ,$$

puis successivement

$$\overline{(Im).f} = \overline{(Im').f}, \quad m.\bar{f} = m'.\bar{f}, \quad m = m'.$$

(b) $(X, I)_0$ est petite, puisque $\mathbf{N}$ étant $\mathbf{P}$-localement petite, LX a, à isomorphisme près, un ensemble de $\mathbf{P}$-quotients; il y a donc, à isomorphisme près, un ensemble de morphismes de la forme $\bar{f}: LX \to M$ appartenant à $\mathbf{P}$, donc un ensemble de morphismes $f: X \to JM$ objets de $(X, I)_0$.

(c) Montrons que $(X, I)_0$ est cofiltrante. Soit

$$(M, f), (M', f') \in (X, I)_0 .$$

Le produit $(M \times M'; p_1, p_2)$ de M et M' existe dans $\mathbf{N}$, est dans $\mathbf{M}$ d'après l'hypothèse 1, et on a

$$J(M \times M') \approx JM \times JM',$$

puisque J est un adjoint à droite. $\mathbf{N}$ étant à factorisation, le morphisme $(\bar{f}, \bar{f'}): LX \to M \times M'$ se factorise en

$$(\bar{f}, \bar{f'}) = h.g \quad \text{où} \quad g: LX \to N \quad \text{et} \quad h: N \to M \times M' .$$

Or $h \in \mathbf{I}$ et $M \times M' \in \mathbf{M}$ implique $N \in \mathbf{M}$ d'après l'hypothèse 1 et, J commutant à $\mathbf{P}$, on a $Jg \in \mathbf{P}$. Alors

$$(N,(Jg).\theta_X)\in(X,I)_0\ ,$$

où $\theta : I \to S = J.L$, puisque

$$\overline{(Jg).\theta_X} = g \in \mathbf{P}\,,$$

$p_1 . h$ est un morphisme $(N,(Jg).\theta_X) \to (M,f)$ car

$$(Jp_1).(Jh).(Jg).\theta_X = (Jp_1).J(\bar f, \bar f').\theta_X = (J\bar f).\theta_X = f\,,$$

et $p_2 . h$ est un morphisme $(N,(Jg).\theta_X) \to (M',f')$ étant donné que

$$(Jp_2).(Jh).(Jg).\theta_X = (Jp_2).J(\bar f, \bar f').\theta_X = f'.$$

(d) Montrons que $(X,I)_0$ est initiale dans (X,I). Soit

$$(M,f)\in(X,I) \quad \text{et} \quad \bar f = h.g \ \text{ avec } h : N \to M$$

la factorisation de $\bar f$; alors

$$N \in \mathbf{M} \quad \text{et} \quad (N,(Jg).\theta_X)\in(X,I)_0\ ,$$

puisque $\overline{(Jg).\theta_X} = g \in \mathbf{P}$. Alors h est un morphisme

$$h : (N,(Jg).\theta_X) \to (M,f)$$

car

$$(Jh).(Jg).\theta_X = (J\bar f).\theta_X = f.$$

En outre, si

$$(M_1,f_1)\in(X,I)_0 \quad \text{et} \quad m : (M_1,f_1) \to (M,f) \ \text{ dans } (X,I),$$

la commutativité du premier diagramme ci-dessous implique celle du second.

$$\begin{tikzcd}
 & & & JM_1 \arrow[dd, "Jm"] \\
 & & JN \arrow[ddr, "Jh"] & \\
X \arrow[uurrr, "f_1"] \arrow[r, "\theta_X"] \arrow[drrr, "f"'] & SX \arrow[uurr, "J\bar f_1"] \arrow[ur, "Jg"] \arrow[drr, "J\bar f"] & & \\
 & & & JM
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & M_1 \arrow[dr, "m"] & \\
LX \arrow[ur, "\bar f_1"] \arrow[dr, "g"'] & & M \\
 & N \arrow[ur, "h"'] &
\end{tikzcd}$$

Comme $f_1 \in \mathbf{P}$ et $h \in \mathbf{I}$, il existe un morphisme $m_1 : M_1 \to N$ rendant commutatifs les diagrammes augmentés. Alors m_1 est un morphisme

$$m_1 : (M_1, f_1) \to (N, (Jg).\theta_X).$$

(e) Si $b : (X, I)_0 \to \mathbf{M}$ est le foncteur but, $RX = \varprojlim Kb$ existe d'après l'hypothèse 2 ; notons $r_X : LX \to RX$ le morphisme défini par :

$$p_f . r_X = \bar{f} \quad \text{pour tout} \quad (M, f) \in (X, I)_0 ,$$

où p_f désigne la projection d'indice (M, f). Comme J commute aux $\varprojlim$,

$$TX = \varprojlim JKb = JRX$$

existe pour tout $X \in \mathbf{A}$. On sait que TX définit la coextension de Kan T de I relativement à I, et par suite l'image monadique $\mathbf{T} = (T, \eta, \mu)$ de I, et que l'on a un morphisme

$$t : \mathbf{S} \to \mathbf{T} \quad \text{défini par} \quad t_X = J r_X .$$

Si dans $\mathbf{N}$ les $\mathbf{P}$-quotients cofiltrés sont stables, r_X appartient à $\mathbf{P}$ et, J commutant à $\mathbf{P}$, on a $t_X \in \mathbf{P}$, d'où $t \in \mathbf{P}$. Si dans $\mathbf{A}$ les $\mathbf{P}$-quotients cofiltrés sont stables,

$$t_X : SX \to JRX = \varprojlim JKb$$

est défini par $(Jp_f).t_X = J\bar{f}$; or $J\bar{f} \in \mathbf{P}$, donc $t_X \in \mathbf{P}$ et $t \in \mathbf{P}$. On conclut que $\mathbf{T}$ est un $\mathbf{P}$-quotient de $\mathbf{S}$.

(f) $\mathbf{A}^t : (\mathbf{A}^{\mathbf{T}}, U_{\mathbf{T}}) \to (\mathbf{A}^{\mathbf{S}}, U_{\mathbf{S}})$ est un plongement de Birkhoff d'après Théorème 4.1. Par ailleurs

$$\tilde{I} : (\mathbf{M}, I) \to (\mathbf{A}^{\mathbf{T}}, U_{\mathbf{T}})$$

est un quotient de Birkhoff, puisque tout objet (X, x) de $\mathbf{A}^{\mathbf{T}}$ est $U_{\mathbf{T}}$-rétract de (TX, μ_X) qui est $\varprojlim$ d'objets images par I. Alors $\mathbf{A}^t$ est l'image de Birkhoff de $\mathbf{A}^t.\tilde{I} = \tilde{J}.K$.

COROLLAIRE 6.3. *Si $J = 1_{\mathbf{A}}$ dans le théorème précédent, alors l'image monadique de I est idempotente et sa complétion monadique est isomorphe à la catégorie des I-pro-objets.*

PREUVE. La monade unité, notée $\mathbf{A}$, est un objet initial de $\mathbf{Mon(A)}$, le morphisme $\mathbf{A} \to \mathbf{T} = (T, \eta, \mu)$ étant η. Puisqu'ici $t : \mathbf{A} \to \mathbf{T}$, alors

$$t = \eta \quad \text{et} \quad \mathbf{A}^t = U_{\mathbf{T}} ,$$

qui est alors pleinement fidèle. Ainsi $\mathbf{T}$ est idempotent et la Proposition 6.1 permet de conclure.

Lorsque

$$\mathbf{N} = \mathbf{A}^{\mathbf{T}_0} \quad \text{et} \quad J = U_{\mathbf{T}_0} ,$$

où $\mathbf{T}_0$ est une monade sur $\mathbf{A}$, les résultats précédents se complètent en le théorème suivant, où 4' désigne l'hypothèse 4 du Théorème 6.2 dans sa seconde éventualité.

THEOREME 6.4. *Si*

$$I : \mathbf{M} \to \mathbf{A} \quad et \quad U_{\mathbf{T}_0} : \mathbf{A}^{\mathbf{T}_0} \to \mathbf{A}$$

sont deux foncteurs satisfaisant aux conditions 1, 2, 3, 4 du Théorème 6.2, alors :

(1) L'image monadique de I est un $\mathbf{P}$*-quotient de* $\mathbf{T}_0$.

(2) La complétion monadique de I est isomorphe à l'image de Birkhoff de $I_0 : (\mathbf{M}, I) \to (\mathbf{A}^{\mathbf{T}_0}, U_{\mathbf{T}_0})$.

(3) L'image monadique seconde de I existe et est idempotente.

(4) La complétion monadique seconde de I, la catégorie des I-pro-objets, la complétion monadique de I_0 et la catégorie des I_0-pro-objets sont isomorphes. Elles sont des images de Birkhoff de

$$I_0 : (\mathbf{M}, I_0) \to (\mathbf{A}^{\mathbf{T}_0}, 1_{\mathbf{A}^{\mathbf{T}_0}}),$$

dans 4'.

(5) En outre, si dans 4' tout $U_{\mathbf{T}_0}$-rétract d'un I-pro-objet est un I-pro-objet, la complétion monadique est isomorphe à toutes les catégories de (4).

PREUVE. (a) L'image monadique de $U_{\mathbf{T}_0}$ étant $\mathbf{T}_0$, les conclusions (1) et (2) découlent du Théorème 6.2.

(b) Plaçons-nous dans l'hypothèse 4'. L'image monadique

$$\tilde{\mathbf{T}}_0 = (\tilde{T}_0, \tilde{\eta}_0, \tilde{\mu}_0) \quad \text{de} \quad I_0$$

existe et est idempotente (Corollaire 6.3). Sa complétion monadique, à savoir $(\mathbf{A}^{\mathbf{T}_0})^{\tilde{\mathbf{T}}_0}$, est l'image de Birkhoff de

$$I_0 : (\mathbf{M}, I_0) \to (\mathbf{A}^{\mathbf{T}_0}, 1_{\mathbf{A}^{\mathbf{T}_0}}),$$

est isomorphe à la catégorie des I_0-pro-objets et

$$U_{\tilde{\mathbf{T}}_0} : (\mathbf{A}^{\mathbf{T}_0})^{\tilde{\mathbf{T}}_0} \to \mathbf{A}^{\mathbf{T}_0}$$

est un plongement plein. En factorisant I_0 en $I_0 = \mathbf{A}^t . \tilde{I}$, où $t : \mathbf{T}_0 \to \mathbf{T}$, et en composant les coextensions de Kan correspondantes, on montre comme dans la démonstration de la Proposition 6.1 que l'image monadique $\tilde{\mathbf{T}}$ de $\tilde{I}$ existe et est idempotente. Alors $(\mathbf{A}^{\mathbf{T}})^{\tilde{\mathbf{T}}}$ est isomorphe à la catégorie des I-pro-objets et $U_{\tilde{\mathbf{T}}} : (\mathbf{A}^{\mathbf{T}})^{\tilde{\mathbf{T}}} \to \mathbf{A}^{\mathbf{T}}$ est un plongement plein (Proposition 6.1). Or les deux plongements pleins

$$\mathbf{A}^t . U_{\tilde{\mathbf{T}}} : (\mathbf{A}^{\mathbf{T}})^{\tilde{\mathbf{T}}} \to \mathbf{A}^{\mathbf{T}_0} \quad \text{et} \quad U_{\tilde{\mathbf{T}}_0} : (\mathbf{A}^{\mathbf{T}_0})^{\tilde{\mathbf{T}}_0} \to \mathbf{A}^{\mathbf{T}_0}$$

ont pour image la sous-catégorie pleine de $\mathbf{A}^{\mathbf{T}_0}$ ayant pour objets les I_0-pro-objets, donc $(\mathbf{A}^{\mathbf{T}})^{\tilde{\mathbf{T}}} \approx (\mathbf{A}^{\mathbf{T}_0})^{\tilde{\mathbf{T}}_0}$. Dans l'hypothèse 5, on voit immédiatement que l'image de Birkhoff de

$$I_0 : (\mathbf{M}, I_0) \to (\mathbf{A}^{\mathbf{T}_0}, 1_{\mathbf{A}^{\mathbf{T}_0}})$$

égale l'image de Birkhoff de

$$I_0 : (\mathbf{M}, I) \to (\mathbf{A}^{\mathbf{T}_0}, U_{\mathbf{T}_0}).$$

(c) Dans l'hypothèse 4, on peut encore démontrer que $\tilde{\mathbf{T}}_0$ existe, et est idempotente. En effet, les foncteurs I_0 et $1_{\mathbf{A}^{\mathbf{T}_0}}$ vérifient les hypothèses 1, 2, 3 du Théorème 6.2, et par suite les parties (a), (b), (c), (d) en totalité, et (e) partiellement, de la démonstration sont valables. Ainsi on a un morphisme $t_0 : \mathbf{A}^{\mathbf{T}_0} \to \tilde{\mathbf{T}}_0$, où $\mathbf{A}^{\mathbf{T}_0}$ désigne la monade unité de $\mathbf{A}^{\mathbf{T}_0}$, qui, pour tout $(X, x_0) \in \mathbf{A}^{\mathbf{T}_0}$, est défini par :

$$p_{f_0} . t_{0\,(X, x_0)} = f_0 \ , \quad \text{où} \quad f_0 : (X, x_0) \to I_0 . M \in \mathbf{P} .$$

Appliquant le foncteur $U_{\mathbf{T}_0}$ qui commute aux $\varprojlim$, on a

$$(U_{\mathbf{T}_0} p_{f_0}).(U_{\mathbf{T}_0} t_{0(X,x_0)}) = U_{\mathbf{T}_0} f_0 .$$

Or $U_{\mathbf{T}_0}$ commute à $\mathbf{P}$, donc $U_{\mathbf{T}_0} f_0 \in \mathbf{P}$; puisque dans $\mathbf{A}$ les $\mathbf{P}$-quotients cofiltrés sont stables, $U_{\mathbf{T}_0} t_{0\,(X,x_0)} \in \mathbf{P}$ est un épimorphisme, et $t_{0\,(X,x_0)}$ aussi, car $U_{\mathbf{T}_0}$ est fidèle (partie (b) de la démonstration du Theorème 4.1) et $\tilde{\mathbf{T}}_0$ est idempotente. La démonstration se poursuit alors comme en (b) ci-dessus.

PROPOSITION 6.5. *Si $I: \mathbf{M} \to \mathbf{A}$ et $J: \mathbf{N} \to \mathbf{A}$ ont des images monadiques et si I se factorise par J en un quotient de Birkhoff $K: (\mathbf{M}, I) \to (\mathbf{N}, J)$, l'image monadique $\mathbf{S}$ de J est un $\mathbf{I}$-sous-objet de l'image monadique $\mathbf{T}$ de I et le morphisme $(\mathbf{A}^{\mathbf{T}}, U_{\mathbf{T}}) \to (\mathbf{A}^{\mathbf{S}}, U_{\mathbf{S}})$ est un quotient de Birkhoff.*

PREUVE. Avec les notations de la démonstration 6.2, on a $\tilde{J}.K = \mathbf{A}^t.\tilde{I}$. Or

$$\tilde{J}: (\mathbf{N}, J) \to (\mathbf{A}^{\mathbf{S}}, U_{\mathbf{S}})$$

est un quotient de Birkhoff ((f) de la démonstration 6.2), donc

$$\tilde{J}.K = \mathbf{A}^t.\tilde{I} \in \mathbf{P} ;$$

par suite $\mathbf{A}^t \in \mathbf{P}$ ([2] Proposition 1.1) et $t \in \mathbf{I}$ (Théorème 4.1).

7. Applications.

Dans $\mathbf{Ens}$, soit $\mathbf{T}$ une monade, $\mathbf{T}_0$ une monade de rang fini (i.e. une théorie algébrique suivant Lawvere), $\mathbf{T}_1$ la monade des groupes, $\mathbf{T}_2$ une monade de rang fini au-dessus de $\mathbf{T}_1$. Si $\mathbf{B}$ est une catégorie à produits (resp. produits finis), on note $\mathbf{B}^{\mathbf{T}}$ (resp. $\mathbf{B}^{\mathbf{T}_0}$) la catégorie des $\mathbf{T}$- (resp. $\mathbf{T}_0$)-algèbres dans $\mathbf{B}$.

Un *noyau de* $X \in \mathbf{Top\text{-}Sep}^{\mathbf{T}_2}$ est un sous-ensemble H de X de la forme

$$H = \{ x \in X \mid f(x) = 1 \} ,$$

où f est un morphisme de $\mathbf{Ens}^{\mathbf{T}_2}$; alors le groupe X/H est muni naturellement d'une structure de $\mathbf{T}_2$-algèbre; une *classe de* X est une partie de la forme xH, où $x \in X$ et où H est un noyau. X est *linéairement compact* si tout filtre de classes fermées de X a une intersection non vide.

$\mathbf{L}(\mathbf{T}_2)$ est la sous-catégorie pleine de $\textbf{Top-Sep}^{\mathbf{T}_2}$ ayant pour objets les $\mathbf{T}_2$-algèbres topologiques séparées linéairement compactes ayant une base de voisinages ouverts de l'origine formée de noyaux. $\mathbf{LM}(\mathbf{T}_2)$ est la sous-catégorie pleine de $\mathbf{L}(\mathbf{T}_2)$ ayant pour objets les $\mathbf{T}_2$-algèbres topologiques X séparées linéairement compactes «maximales», i.e. telles que, si H est un noyau fermé de X et si la $\mathbf{T}_2$-algèbre discrète X/H est linéairement compacte, alors H est un ouvert de X. $\mathbf{Ens}_{\mathbf{L}}^{\mathbf{T}_2}$ est la catégorie des $\mathbf{T}_2$-algèbres discrètes linéairement compactes. $\mathbf{Ens}_{\mathbf{Ar}}^{\mathbf{T}_2}$ est la catégorie des $\mathbf{T}_2$-algèbres discrètes artiniennes, i. e. telles que toute suite décroissante de noyaux est stationnaire [3].

PROPOSITION 7.1. *Les* $\mathbf{P}$-*quotients cofiltrés sont stables pour:*

(1) $\mathbf{A} =$ **Top-Sep** *et* $\mathbf{P} =$ *les morphismes denses.*

(2) $\mathbf{A} = \textbf{Top-Sep}^{\mathbf{T}}$ *et* $\mathbf{P} =$ *les morphismes denses.*

(3) $\mathbf{A} = \mathbf{Comp}^{\mathbf{T}_0}$ *ou* $\mathbf{L}(\mathbf{T}_2)$ *et* $\mathbf{P} =$ *les morphismes surjectifs.*

(4) $\mathbf{A} = \mathbf{LM}(\mathbf{T}_2)$ *et* $\mathbf{P} =$ *les morphismes surjectifs, si* $\mathbf{A}$ *est monadique sur* **Ens**.

Les $\mathbf{I}$-*sous-objets filtrés sont stables pour:*

(5) $\mathbf{A} =$ **Top** *ou* **Top-Sep** *et* $\mathbf{I} =$ *les morphismes injectifs.*

(6) $\mathbf{A} = \mathbf{Ens}^{\mathbf{T}_0}$, *où* $\mathbf{A}$ *est localement de présentation finie* [8], *et* $\mathbf{I} =$ *les monomorphismes ou les noyaux.*

PREUVE. (a) Soit $\mathbf{P}$ la classe des morphismes denses de $\mathbf{Top}^{\mathbf{T}}$ ou de $\textbf{Top-Sep}^{\mathbf{T}}$, i. e. des $\mathbf{T}$-homomorphismes continus $f: X \to Y$ dont l'image $f(X)$ est dense dans Y. Montrons que, dans **Top**, les $\mathbf{P}$-quotients cofiltrés sont stables. Avec les notations du 5, montrons que $x(X)$ est dense dans X_0, x_i étant dense. X_0 étant muni de la topologie initiale définie par les projections $p_i : X_0 \to X_i$, un ouvert de base non vide U de X_0 est de la forme $U = \bigcap_{i \in I_0} p_i^{-1}(U_i)$, où I_0 est une partie finie de $Ob(\mathbf{D})$ et U_i un ouvert de X_i; le diagramme étant cofiltrant, il existe $i_0 \in I$ tel que

$$p_i = q_{i i_0} \cdot p_{i_0} \quad \text{avec} \quad q_{i i_0} : X_{i_0} \to X_i ,$$

pour tout $i \in I_0$ et par suite $U_{i_0} = \bigcap_{i \in I_0} q_{i i_0}^{-1}(U_i)$ est un ouvert de X_{i_0} vérifiant

$$p_{i_0}^{-1}(U_{i_0}) = \bigcap_{i\in I_0} p_{i_0}^{-1} q_{i i_0}^{-1}(U_{i_0}) = \bigcap_{i\in I_0} p_i^{-1}(U_i) = U \ ;$$

alors U_{i_0} est non vide et on a

$$x^{-1}(U) = x^{-1} p_{i_0}^{-1}(U_{i_0}) = x_{i_0}^{-1}(U_{i_0}) \neq \emptyset .$$

Cela montre que $x(X)$ est dense dans X_0 .

(b) Les foncteurs

$$\mathbf{Top}^{\mathbf{T}} \text{ ou } \mathbf{Top\text{-}Sep}^{\mathbf{T}} \to \mathbf{Top}$$

commutant aux $\varprojlim$, à $\mathbf{P}$ et reflétant $\mathbf{P}$, les $\mathbf{P}$-quotients cofiltrés sont stables dans $\mathbf{Top}^{\mathbf{T}}$ et dans $\mathbf{Top\text{-}Sep}^{\mathbf{T}}$ (Lemme 5.1). On sait, en outre, que les morphismes denses de **Top-Sep** sont les épimorphismes et que les morphismes denses de $\mathbf{Comp}^{\mathbf{T}_0}$ sont les morphismes surjectifs.

(c) Soit $f: X \to Y$ dans $\mathbf{L}(\mathbf{T}_2)$. Si

$$H = \{ x\in X \mid f(x) = 1 \} ,$$

la $\mathbf{T}_2$-algèbre X/H est isomorphe à la $\mathbf{T}_2$-algèbre $f(X)$; munie de la topologie quotient de celle de X , elle devient un objet de $\mathbf{L}(\mathbf{T}_2)$ ([3], paragraphe 3, remarque (2)); munie de la topologie induite par celle de Y , $f(X)$ devient aussi un objet de $\mathbf{L}(\mathbf{T}_2)$, qui est, par suite, complet ([3] paragraphe 3, remarque (3)), et donc fermé dans Y .

Ainsi les morphismes denses de $\mathbf{L}(\mathbf{T}_2)$ ou $\mathbf{LM}(\mathbf{T}_2)$ sont les morphismes surjectifs. Soit $\mathbf{P}$ la classe de ces morphismes. Le foncteur

$$\mathbf{L}(\mathbf{T}_2) \to \mathbf{Top\text{-}Sep}^{\mathbf{T}_2}$$

commutant aux $\varprojlim$ cofiltrantes $\mathbf{P}$-régulières ([3] paragraphe 3, Théorème (2)), à $\mathbf{P}$ et reflétant $\mathbf{P}$, les $\mathbf{P}$-quotients cofiltrés sont stables dans la catégorie $\mathbf{L}(\mathbf{T}_2)$.

(d) Reprenons les notations du 5 dans $\mathbf{LM}(\mathbf{T}_2)$. Soit X_1 la $\varprojlim$ de $(X_i)_{i\in\mathbf{D}}$ dans $\mathbf{L}(\mathbf{T}_2)$; puisque $x_i \in \mathbf{P}$ dans $\mathbf{L}(\mathbf{T}_2)$, on a

$$x_1 : X \to X_1 \in \mathbf{P} \quad \text{dans } \mathbf{L}(\mathbf{T}_2)$$

d'après (c). Par ailleurs le foncteur $\mathbf{L}(\mathbf{T}_2) \to \mathbf{Ens}$ commute aux $\varprojlim$ cofiltrantes $\mathbf{P}$-régulières et le foncteur $\mathbf{LM}(\mathbf{T}_2) \to \mathbf{Ens}$ commute aux $\varprojlim$, puisqu'il est monadique (hypothèse 4). Alors les ensembles X_0 et X_1 sont isomorphes, ainsi que les applications

$$x: X \to X_0 \quad \text{et} \quad x_1: X \to X_1$$

et par suite x est surjective. Cela montre que les $\mathbf{P}$-quotients cofiltrés sont stables dans $\mathbf{LM}(\mathbf{T}_2)$.

(e) Si $\mathbf{A}$ est localement de présentation finie [8], les sous-objets (resp. les sous-objets qui sont des noyaux) filtrés sont stables, puisque les $\varinjlim$ filtrantes commutent aux $\varprojlim$ finies [8]. En outre, $\mathbf{T}_0$ étant de rang fini, $\mathbf{Ens}^{\mathbf{T}_0}$ est localement de présentation finie [8].

(f) Soit $\mathbf{I}$ la classe des morphismes injectifs de $\mathbf{Top}$ ou $\mathbf{Top\text{-}Sep}$. Le foncteur $\mathbf{Top} \to \mathbf{Ens}$ commute aux $\varinjlim$, à $\mathbf{I}$ et reflète $\mathbf{I}$. Puisque les $\mathbf{I}$-sous-objets filtrés sont stables dans $\mathbf{Ens}$ (e), dans $\mathbf{Top}$ aussi. Dans $\mathbf{Top\text{-}Sep}$, avec les notations duales de celles du 5, la $\varinjlim$ de $(X_i)_{i \in \mathbf{D}}$ dans $\mathbf{Top}$ est séparée et c'est alors la $\varinjlim$ dans $\mathbf{Top\text{-}Sep}$. Ainsi les $\mathbf{I}$-sous-objets filtrés sont stables dans $\mathbf{Top\text{-}Sep}$.

On appelle *foncteur monadique* un foncteur triplable selon Beck.

Soit $U: \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ et $V: \mathbf{B} \to \mathbf{C}$ deux foncteurs.

LEMME 7.2. *(a) Si V est un adjoint à droite pleinement fidèle et si U a une complétion monadique, $V.U$ a une complétion monadique isomorphe à celle de U ; en particulier si U est monadique, $V.U$ aussi.*

(b) Si $\mathbf{A}$ est à conoyaux et si V et $V.U$ sont monadiques, U aussi.

PREUVE. (a) Si U est monadique, $V.U$ est un adjoint à droite et est monadique d'après le critère de Beck. Si $\mathbf{T} = (T, \eta, \mu)$ est l'image monadique de U, T est la coextension de Kan de U relativement à U ; par suite, si F est un adjoint à gauche de V, $V.T.F$ est la coextension de Kan de $V.U$ relativement à $V.U$. Or

$$V.T.F = V.U_{\mathbf{T}}.F_{\mathbf{T}}.F$$

est aussi la coextension de Kan de $V.U_{\mathbf{T}}: \mathbf{B}^{\mathbf{T}} \to \mathbf{C}$ relativement à $V.U_{\mathbf{T}}$; ce foncteur étant monadique, $(\mathbf{B}^{\mathbf{T}}, V.U_{\mathbf{T}})$ est la complétion monadique de $V.U$.

(b) Si $\mathbf{A}$ a des conoyaux, U a un adjoint à gauche ([5] paragraphe 1, Corollaire 1) et la sémantique est pleinement fidèle. On applique alors le critère de Beck.

LEMME 7.3. *Les foncteurs*

$$\mathbf{Comp}^{\mathbf{T}_0} \to \mathbf{Comp} \text{ ou } \mathbf{Top\text{-}Sep} \text{ ou } \mathbf{Top} \text{ ou } \mathbf{Ens}^{\mathbf{T}_0}$$

sont monadiques.

PREUVE. $\mathbf{Comp}^{\mathbf{T}_0} \to \mathbf{Ens}$ étant monadique,

$$\mathbf{Comp}^{\mathbf{T}_0} \to \mathbf{Comp} \text{ ou } \mathbf{Ens}^{\mathbf{T}_0}$$

le sont (Lemme 7.2 (b)), de même que

$$\mathbf{Comp}^{\mathbf{T}_0} \to \mathbf{Top\text{-}Sep} \text{ ou } \mathbf{Top}$$

(Lemme 7.2 (a)).

Remarquons que pour $\mathbf{A} = \mathbf{Ens}$, un $U_{\mathbf{T}_0}$-rétract de $X \in \mathbf{A}^{\mathbf{T}_0}$ est un quotient de X par une équivalence compatible avec les opérations de $\mathbf{T}_0$; on dira un *quotient de* X.

EXEMPLE 7.4. $\mathbf{Ens\,fin}^{\mathbf{T}_0} \to \mathbf{Comp}^{\mathbf{T}_0}$ *ou* $\mathbf{Top\text{-}Sep}^{\mathbf{T}_0}$ *ou* $\mathbf{Top}^{\mathbf{T}_0}$.

Notons d'abord que les complétions monadiques de

$$\mathbf{Ens\,fin}^{\mathbf{T}_0} \to \mathbf{Top\text{-}Sep}^{\mathbf{T}_0} \text{ ou } \mathbf{Top}^{\mathbf{T}_0}$$

sont isomorphes à celles de

$$I : \mathbf{Ens\,fin}^{\mathbf{T}_0} \to \mathbf{Comp}^{\mathbf{T}_0}$$

(lemme 7.2 (a)). $\mathbf{Comp}^{\mathbf{T}_0}$ est à factorisation avec pour $\mathbf{P}$ la classe des morphismes surjectifs et pour $\mathbf{I}$ celle des morphismes injectifs ; en outre les $\mathbf{P}$-quotients cofiltrés y sont stables (Proposition 7.2). Le Corollaire 6.3 s'applique à I, et la complétion monadique de I est isomorphe à la catégorie des I-pro-objets, appelés $\mathbf{T}_0$-algèbres profinies, qui sont encore les sous-$\mathbf{T}_0$-algèbres topologiques fermées des produits de $\mathbf{T}_0$-algèbres discrètes.

(a) Si $\mathbf{T}_0$ est la monade unité, c'est la catégorie des espaces topologiques compacts de dimension 0 ([1] Chapitre 6, paragraphe 2, Théorème 11).

(b) Si $\mathbf{T}_0 = \mathbf{T}_1$, c'est la catégorie des groupes profinis, i. e. des groupes topologiques séparés ayant une base de voisinages ouverts de 1 formée de sous-groupes distingués ([7] Chapitre 1, paragraphe 1, Théorème 2).

(c) Si $\mathbf{T}_0 = \mathbf{T}_2$, c'est la catégorie des $\mathbf{T}_2$-algèbres topologiques telles que le groupe topologique sous-jacent soit profini ; en effet, le foncteur

$$\mathbf{Comp}^{\mathbf{T}_2} \to \mathbf{Comp}^{\mathbf{T}_1}$$

crée les $\varprojlim$ et, par suite, un objet de $\mathbf{Comp}^{\mathbf{T}_2}$ est un pro-objet ssi son image dans $\mathbf{Comp}^{\mathbf{T}_1}$ est un pro-objet.

EXEMPLE 7.5. $\mathbf{Ens\,fin}^{\mathbf{T}_0} \to \mathbf{Ens}$ *ou* $\mathbf{Ens}^{\mathbf{T}_0}$.

Le foncteur

$$I : \mathbf{Ens\,fin}^{\mathbf{T}_0} \to \mathbf{Ens}$$

se factorise par

$$I_0 : \mathbf{Ens\,fin}^{\mathbf{T}_0} \to \mathbf{Comp}^{\mathbf{T}_0}$$

et le foncteur monadique $\mathbf{Comp}^{\mathbf{T}_0} \to \mathbf{Ens}$. Le Théorème 6.4 s'applique :

(a) Si $\mathbf{T}_0$ est la monade unité, I_0 est un quotient de Birkhoff, puisque tout compact est un sous-espace topologique fermé d'un espace topologique de la forme $[0, 1]^X$ et que $[0, 1]$ est quotient d'un espace topologique de la forme $\{0, 1\}^Y$ où $\{0, 1\}$ est discret ; alors la complétion monadique de I est $\mathbf{Comp}$ (Proposition 6.5 et Théorème 6.4 (2)) et la complétion monadique seconde, isomorphe à la catégorie des I-pro-objets, est la catégorie des espaces topologiques compacts de dimension 0 (7.4 (a)).

(b) Si $\mathbf{T}_0 = \mathbf{T}_1$, la complétion monadique seconde est isomorphe à la catégorie des groupes profinis (7.4 (b)) qui est fermée pour les quotients ; elle est isomorphe à la complétion monadique de I (Théorème 6.4 (5)).

(c) Si $\mathbf{T}_0 = \mathbf{T}_2$, la complétion monadique, isomorphe à la complétion monadique seconde, est la catégorie des $\mathbf{T}_0$-algèbres profinies (idem (b)).

(d) Dans le cas général, la complétion monadique de I est la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Comp}^{\mathbf{T}_0}$ ayant pour objets les quotients des $\mathbf{T}_0$-algèbres profinies.

(e) Le foncteur

$$\mathbf{Ens\,fin}^{\mathbf{T}_0} \to \mathbf{Ens}^{\mathbf{T}_0}$$

se factorisant par I_0 et le foncteur monadique

$$\mathbf{Comp}^{\mathbf{T}_0} \to \mathbf{Ens}^{\mathbf{T}_0}$$

(Lemme 7.3), le Théorème 6.4 s'applique et les complétions monadiques sont isomorphes aux précédentes.

EXEMPLE 7.6. $\mathbf{Ens\,fin}^{\mathbf{T}_0} \to \mathbf{Comp}$ *ou* **Top-Sep** *ou* **Top**.

Notons d'abord que les complétions monadiques de

$$\mathbf{Ens\,fin}^{\mathbf{T}_0} \to \mathbf{Top\text{-}Sep} \text{ ou } \mathbf{Top}$$

sont isomorphes à celles de

$$\mathbf{Ens\,fin}^{\mathbf{T}_0} \to \mathbf{Comp}$$

(Lemme 7.3 (a)). Le foncteur

$$I : \mathbf{Ens\,fin}^{\mathbf{T}_0} \to \mathbf{Comp}$$

se factorisant par le foncteur

$$I_0 : \mathbf{Ens\,fin}^{\mathbf{T}_0} \to \mathbf{Comp}^{\mathbf{T}_0}$$

et le foncteur monadique

$$\mathbf{Comp}^{\mathbf{T}_0} \to \mathbf{Comp}$$

(Lemme 7.3 (b)), le Théorème 6.4 s'applique. La complétion monadique seconde est isomorphe à la catégorie des $\mathbf{T}_0$-algèbres profinies et la complétion monadique à la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Comp}^{\mathbf{T}_0}$ dont les objets sont les quotients ayant une section continue des $\mathbf{T}_0$-algèbres profinies, et par suite est isomorphe à une sous-catégorie pleine de la complétion monadique de

$$\mathbf{Ens\,fin}^{\mathbf{T}_0} \to \mathbf{Ens}\,.$$

En particulier pour $\mathbf{T}_0 = \mathbf{T}_2$, elles sont isomorphes.

EXEMPLE 7.7. $\mathbf{Ens}^{\mathbf{T}} \to \mathbf{Top\text{-}Sep}^{\mathbf{T}}$ *ou* $\mathbf{Top}^{\mathbf{T}}$.

Les complétions monadiques de $\mathbf{Ens}^{\mathbf{T}} \to \mathbf{Top}^{\mathbf{T}}$ sont isomorphes à celles de

$$I: \mathbf{Ens}^{\mathbf{T}} \to \mathbf{Top\text{-}Sep}^{\mathbf{T}}$$

(Lemme 7.2 (a)). $\mathbf{Top\text{-}Sep}^{\mathbf{T}}$ est à factorisation avec pour $\mathbf{P}$ la classe des morphismes denses et pour $\mathbf{I}$ celle des morphismes injectifs fermés initiaux; en outre les $\mathbf{P}$-quotients cofiltrés y sont stables (Proposition 7.1). Le Corollaire 6.3 s'applique et la complétion monadique de I est isomorphe à la catégorie des I-pro-objets, appelés $\mathbf{T}$-algèbres prodiscrètes; ce sont encore les sous-$\mathbf{T}$-algèbres fermées des produits de $\mathbf{T}$-algèbres discrètes.

EXEMPLE 7.8. $\mathbf{Ens}^{\mathbf{T}} \to \mathbf{Top\text{-}Sep}$ *ou* $\mathbf{Top}$.

Le Lemme 7.2 (a) s'applique. Le foncteur $I: \mathbf{Ens}^{\mathbf{T}} \to \mathbf{Top\text{-}Sep}$ se factorise par

$$I_0 : \mathbf{Ens}^{\mathbf{T}} \to \mathbf{Top\text{-}Sep}^{\mathbf{T}}$$

et par le foncteur monadique

$$\mathbf{Top\text{-}Sep}^{\mathbf{T}} \to \mathbf{Top\text{-}Sep}$$

(on applique le critère de Beck). Le Théorème 6.4 s'applique. La complétion monadique seconde est la catégorie des $\mathbf{T}$-algèbres prodiscrètes et la complétion monadique est isomorphe à la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Top\text{-}Sep}^{\mathbf{T}}$ ayant pour objets les quotients, ayant une section continue, de $\mathbf{T}$-algèbres discrètes.

EXEMPLE 7.9. $\mathbf{Ens}_{\mathbf{L}}^{\mathbf{T}_2} \to \mathbf{Top\text{-}Sep}$ *ou* $\mathbf{Top}$ *ou* $\mathbf{Top\text{-}Sep}^{\mathbf{T}_2}$ *ou* $\mathbf{Top}^{\mathbf{T}_2}$, *avec* $\mathbf{T}_2$ *= monade des A-modules.*

Le foncteur

$$I: \mathbf{Ens}_{\mathbf{L}}^{\mathbf{T}_2} \to \mathbf{Top\text{-}Sep}$$

se factorise par le foncteur monadique

$$\mathbf{Top\text{-}Sep}^{\mathbf{T}_2} \to \mathbf{Top\text{-}Sep}$$

en

$$I_0 : \mathbf{Ens}_{\mathbf{L}}^{\mathbf{T}_2} \to \mathbf{Top\text{-}Sep}^{\mathbf{T}_2} \quad ,$$

dont l'image est fermée pour les produits finis et les sous-objets initiaux fermés. Le Théorème 6.4 s'applique. La complétion monadique seconde de I, la complétion monadique de I_0 et la catégorie des I-pro-objets sont isomorphes à $\mathbf{L}(\mathbf{T}_2)$. Si $X \in \mathbf{L}(\mathbf{T}_2)$ a pour base de voisinages ouverts de l'origine $(H_i)_{i \in \mathbf{D}}$, où les H_i sont des noyaux, on définit un diagramme cofiltrant: $(X/H_i)_{i \in \mathbf{D}}$ de $\mathbf{Ens}^{\mathbf{T}_2}$ dont la $\varprojlim$ est

$$(X_0, (p_i)) \text{ dans } \mathbf{Top\text{-}Sep}^{\mathbf{T}_2},$$

et on note

$$x_i \colon X \to X/H_i \quad \text{et} \quad x = (x_i)_{i \in \mathbf{D}} \colon X \to X_0$$

les morphismes canoniques ; x est surjective (Proposition 7.1 (3)); pour tout $i \in \mathbf{D}$, on a

$$Ker\, x \subset Ker\, x_i = H_i, \text{ d'où } Ker\, x = \{1\};$$

x est ouverte, puisque $x(H_i) = p_i^{-1}(1)$ est un ouvert de X_0 ; ainsi x est un isomorphisme de $\mathbf{Top\text{-}Sep}^{\mathbf{T}_2}$ et X est un I-pro-objet. En outre $\mathbf{L}(\mathbf{T}_2)$ est fermée pour les $\varprojlim$ de $\mathbf{Top\text{-}Sep}^{\mathbf{T}_2}$, ce qui permet de conclure. Mais $\mathbf{L}(\mathbf{T}_2)$ est aussi fermée pour les $U_{\mathbf{T}_0}$-rétracts: en effet, si $X \in \mathbf{L}(\mathbf{T}_2)$ et $f\colon X \to Y$ dans $\mathbf{Top\text{-}Sep}^{\mathbf{T}_2}$ admet une section continue, f est finale et par suite Y est un quotient de X; c'est donc un objet de $\mathbf{L}(\mathbf{T}_2)$ ([3] paragraphe 3, Remarque (2)). $\mathbf{L}(\mathbf{T}_2)$ est alors isomorphe à la complétion monadique de I. Comme précédemment, les résultats restent valables en remplaçant **Top-Sep** par **Top**.

REMARQUE 7.10. En général, $\mathbf{L}(\mathbf{T}_2)$ n'est pas monadique sur **Ens**. Néanmoins le foncteur $U\colon \mathbf{L}(\mathbf{T}_2) \to \mathbf{Ens}$ est un adjoint à droite, $\mathbf{L}(\mathbf{T}_2)$ est à conoyaux U-absolus et U y commute. En effet, les foncteurs

$$\mathbf{L}(\mathbf{T}_2) \to \mathbf{Top\text{-}Sep} \quad \text{et} \quad \mathbf{Top\text{-}Sep} \to \mathbf{Ens}$$

étant des adjoints à droite, U aussi; soit $f, g\colon X \to Y$ dans $\mathbf{L}(\mathbf{T}_2)$ tels que, dans **Ens**, $h\colon UY \to Z$ soit un conoyau absolu de (f, g) ; alors comme $\mathbf{Ens}^{\mathbf{T}_2}$ est monadique sur **Ens**, on a

$$Z \in \mathbf{Ens}^{\mathbf{T}_2} \quad \text{et} \quad h = coker(f, g) \quad \text{dans} \quad \mathbf{Ens}^{\mathbf{T}_2}.$$

En munissant Z de la topologie quotient de celle de Y, on obtient

$$Z \in \mathbf{Top}^{\mathbf{T}_2} \quad \text{et} \quad h = coker(f, g) \quad \text{dans} \quad \mathbf{Top}^{\mathbf{T}_2}.$$

Or $f-g$ est dans $\mathbf{L}(\mathbf{T}_2)$ et, par suite, $(f-g)(X) \in \mathbf{L}(\mathbf{T}_2)$ est un sous-objet fermé de Y ; donc

$$Z = coker(f, g) = coker(f-g) = Y/(f-g)(X)$$

dans $\mathbf{Top}^{\mathbf{T}_2}$, Z est séparé et, par conséquent,

$$h = coker(f, g) \quad \text{dans} \quad \mathbf{Top\text{-}Sep}^{\mathbf{T}_2}.$$

Puisque $Y \in \mathbf{L}(\mathbf{T}_2)$, on en déduit $Z \in \mathbf{L}(\mathbf{T}_2)$ et

$$h = coker(f, g) \quad \text{dans} \quad \mathbf{L}(\mathbf{T}_2).$$

EXEMPLE 7.11. $\mathbf{Ens}_{\mathbf{Ar}}^{\mathbf{T}_2} \to \mathbf{Top\text{-}Sep}$ *ou* $\mathbf{Top}$ *ou* $\mathbf{Top\text{-}Sep}^{\mathbf{T}_2}$ *ou* $\mathbf{Top}^{\mathbf{T}_2}$, *où* $\mathbf{T}_2$ *est la monade des A-modules sur un anneau artinien* A.

Le Théorème 6.4 s'applique de la même façon qu'en 7.9. On obtient ici la sous-catégorie pleine $\mathbf{L}'(\mathbf{T}_2)$ de $\mathbf{L}(\mathbf{T}_2)$ ayant pour objets ceux qui ont une base de voisinages ouverts de l'origine $(H_i)_{i \in \mathbf{D}}$ telle que X/H_i appartienne à $\mathbf{Ens}_{\mathbf{Ar}}^{\mathbf{T}_2}$.

EXEMPLE 7.12. $\mathbf{Ens}_{\mathbf{Ar}}^{\mathbf{T}_2} \to \mathbf{Ens}$ *ou* $\mathbf{Ens}^{\mathbf{T}_2}$, *où* $\mathbf{T}_2$ *est défini comme précédemment.*

Le foncteur $U' : \mathbf{L}'(\mathbf{T}_2) \to \mathbf{Ens}$ est un adjoint à droite. $\mathbf{L}'(\mathbf{T}_2)$ est à conoyaux U'-absolus et U' y commute : en effet, ces propriétés sont vraies pour U (7.10) et $\mathbf{L}'(\mathbf{T}_2)$ est fermée pour les conoyaux de $\mathbf{L}(\mathbf{T}_2)$. Montrons que U' reflète les unités : si $f : X \to Y$ dans $\mathbf{L}'(\mathbf{T}_2)$ est tel que $U'f$ soit l'application identique de $U'X$, les $\mathbf{T}_2$-algèbres X et Y sont identiques et la topologie de X est plus fine que celle de Y ; si H est un noyau ouvert de X tel que $X/H \in \mathbf{Ens}_{\mathbf{Ar}}^{\mathbf{T}_2}$, alors H est fermé dans X, donc linéairement compact dans X et aussi dans Y, donc fermé dans Y ; et alors, si $p : X \to X/H$ est la projection,

$$\{p(K) \mid H \subset K \text{ et } K \text{ est un noyau ouvert de } Y\}$$

a un élément minimal $p(K_0)$ et, par suite, K_0 est minimal dans

$$\{ K \mid H \subset K \text{ et } K \text{ est un noyau ouvert de } Y \} .$$

Or $H = \bigcap_{i \in \mathbf{D}} H + H_i$ ([3] Lemme 1.4 (c)), où $H + H_i$ est un noyau ouvert de Y contenant H, si $(H_i)_{i \in \mathbf{D}}$ désigne une base de voisinages ouverts de l'origine de Y ; donc $H + H_i \supset K_0$ et $H = K_0$ est un ouvert de Y ; il s'ensuit $X = Y$. Le critère de Beck montre que U' est monadique. Le foncteur

$$I : \mathbf{Ens}_{\mathbf{Ar}}^{\mathbf{T}_2} \to \mathbf{Ens}$$

se factorisant par U', le Théorème 6.4 s'applique. Or le foncteur

$$\mathbf{Ens}_{\mathbf{Ar}}^{\mathbf{T}_2} \to \mathbf{L}'(\mathbf{T}_2)$$

étant cogénérateur (7.11), c'est un quotient de Birkhoff, de sorte que la complétion monadique de I est isomorphe à $\mathbf{L}'(\mathbf{T}_2)$. C'est aussi la catégorie des I-pro-objets. Le résultat est le même pour le foncteur

$$\mathbf{Ens}_{\mathbf{Ar}}^{\mathbf{T}_2} \to \mathbf{Ens}^{\mathbf{T}_2} .$$

EXEMPLE 7.13. $\mathbf{Ens}^{\mathbf{T}_2} \to \mathbf{Ens}$ *ou* $\mathbf{Ens}^{\mathbf{T}_2}$, *où* $\mathbf{T}_2$ *est la monade des A-modules.*

L'étude nécessite quelques résultats préliminaires.

LEMME 7.13.1. *Pour $X \in \mathbf{L}(\mathbf{T}_2)$, on a $X \in \mathbf{LM}(\mathbf{T}_2)$ ssi pour tout Y dans $\mathbf{L}(\mathbf{T}_2)$ ayant la même structure de $\mathbf{T}_2$-algèbre que X et une topologie plus fine, on a $X = Y$.*

PREUVE. Soit

$$X \in \mathbf{LM}(\mathbf{T}_2) \quad \text{et} \quad Y \in \mathbf{L}(\mathbf{T}_2)$$

vérifiant l'hypothèse ci-dessus. Si H est un noyau ouvert de Y, il est fermé et par suite, si on le munit de la topologie induite, il est dans $\mathbf{L}(\mathbf{T}_2)$. Si K est le même noyau H muni de la topologie induite par celle de X, on a $K \in \mathbf{Top\text{-}Sep}^{\mathbf{T}_2}$, et même $K \in \mathbf{L}(\mathbf{T}_2)$, puisque la topologie est moins fine que celle de H. Alors K est complet ([3] paragraphe 3, Remarque (3)), donc fermé dans X. Puisque

$$X/K = Y/H \in \mathbf{Ens}_{\mathbf{L}}^{\mathbf{T}_2} ,$$

d'où $Y \in \mathbf{L}(\mathbf{T}_2)$ ([9] Proposition 9). Comme Y a une topologie plus fine que celle de X, on a $Y = X$ et l'ensemble H est un ouvert de Y. Ceci montre que X est dans $\mathbf{LM}(\mathbf{T}_2)$.

LEMME 7.13.2. $\mathbf{LM}(\mathbf{T}_2) \to \mathbf{Ens}$ *reflète les unités.*

PREUVE. Si $X, Y \in \mathbf{LM}(\mathbf{T}_2)$ ont le même ensemble sous-jacent et si l'application identique $f: X \to Y$ est dans $\mathbf{LM}(\mathbf{T}_2)$, alors X et Y ont la même structure de $\mathbf{T}_2$-algèbre, d'où $X = Y$ d'après le Lemme précédent.

LEMME 7.13.3. $\mathbf{LM}(\mathbf{T}_2) \to \mathbf{Ens}$ *est un adjoint à droite.*

PREUVE. Le foncteur $\mathbf{L}(\mathbf{T}_2) \to \mathbf{Top\text{-}Sep}$ étant un adjoint à droite (7.10), $\mathbf{L}(\mathbf{T}_2) \to \mathbf{Ens}$ aussi. Si F est un de ses adjoints à gauche, montrons que:

$$FE \in \mathbf{LM}(\mathbf{T}_2) \quad \text{pour} \quad E \in \mathbf{Ens}.$$

Si $X \in \mathbf{L}(\mathbf{T}_2)$ a même structure de $\mathbf{T}_2$-algèbre que FE et une topologie plus fine, l'application identique $f: X \to FE$ est dans $\mathbf{L}(\mathbf{T}_2)$; en outre, il existe

$$g: FE \to X \quad \text{dans} \quad \mathbf{L}(\mathbf{T}_2) \quad \text{tel que} \quad g.\eta_E = \eta_E ;$$

alors $f.g.\eta_E = \eta_E$, et par suite $f.g = 1_{FE}$. Ainsi g est l'application identique et la topologie de FE est plus fine que celle de X, donc $X = FE$.

LEMME 7.13.4. $\mathbf{LM}(\mathbf{T}_2) \to \mathbf{Ens}$ *est monadique.*

PREUVE. Si $U: \mathbf{LM}(\mathbf{T}_2) \to \mathbf{Ens}$, $\mathbf{LM}(\mathbf{T}_2)$ a des conoyaux U-absolus et U y commute, puisque cette propriété est vraie pour $\mathbf{L}(\mathbf{T}_2)$ et que $\mathbf{LM}(\mathbf{T}_2)$ est fermée pour les conoyaux de $\mathbf{L}(\mathbf{T}_2)$. Il suffit alors d'appliquer le critère de Beck.

COMPLETIONS MONADIQUES DE $I: \mathbf{Ens}_{\mathbf{L}}^{\mathbf{T}_2} \to \mathbf{Ens}$.

$\mathbf{LM}(\mathbf{T}_2)$ est à factorisation avec pour $\mathbf{P}$ (resp. $\mathbf{I}$) la classe des morphismes surjectifs (resp. injectifs). Les $\mathbf{P}$-quotients cofiltrés sont stables dans $\mathbf{LM}(\mathbf{T}_2)$ (Proposition 7.1 (4)). Le foncteur I se factorise par

$$I_0 : \mathbf{Ens}_{\mathbf{L}}^{\mathbf{T}_2} \to \mathbf{LM}(\mathbf{T}_2),$$

dont l'image est fermée pour les produits finis et les sous-objets. Le Théorème 6.4 s'applique. Or $\mathbf{Ens}_{\mathbf{L}}^{\mathbf{T}_2} \to \mathbf{L}(\mathbf{T}_2)$ étant générateur (7.10), il en est de même de $\mathbf{Ens}_{\mathbf{L}}^{\mathbf{T}_2} \to \mathbf{L}\,\mathbf{M}(\mathbf{T}_2)$, qui est ainsi un quotient de Birkhoff. Alors la complétion monadique de I est isomorphe à $\mathbf{L}\,\mathbf{M}(\mathbf{T}_2)$ (Proposition 6.5 et Théorème 6.4 (2)) et à la catégorie des I-pro-objets. Par ailleurs, le résultat reste valable pour

$$I: \mathbf{Ens}_{\mathbf{L}}^{\mathbf{T}_2} \to \mathbf{Ens}^{\mathbf{T}_2}.$$

EXEMPLE 7.14. *Complétion comonadique de* **Comp** $\to$ **Top-Sep**.

Top-Sep est à factorisation, **P** (resp. **I**) étant la classe des morphismes surjectifs finaux (resp. injectifs). Les **I**-sous-objets filtrés de la catégorie **Top-Sep** sont stables (Proposition 7.1 (5)). **Comp** est fermée pour les sommes directes finies et les **P**-quotients. Le dual du Corollaire 6.3 s'applique alors. La complétion monadique est isomorphe à la catégorie des ind-objets. On montre immédiatement qu'elle est isomorphe à la catégorie des espaces topologiques «compactly generated» ([6], VII-8).

REFERENCES.

0. APPELGATE H. et TIERNEY M., Iterated cotriples, *Lecture Notes in Math.* 137, Springer (1970), 56-99.

1. ENGELKING R., *Outline of general Topology*, 1968.

2. KENNISON J. F., Full reflexive subcategories and generalized covering spaces, *J. Math.* 12 (1968), 353 - 365.

3. KENNISON J. F. et GILDENHUYS D., Equational completion, model induced triples and pro-objects, *J. Pure and Ap. Algebra* 2 (1971), 317 - 346.

4. LINTON F. E. J., An outline of functorial Semantics, *Lecture Notes in Math.* 80, Springer (1969), 7 - 52.

5. LINTON F. E. J., Coequalizers in categories of algebras, *Lecture Notes in Math.* 80 (1969), 75 - 90.

6. MACLANE S., *Categories for the working mathematician*, Springer, 1971.

7. SHATZ S. S., *Profinite groups, Arithmetic and Geometry*, Princeton Univ. Press, 1972.

8. ULMER F., Locally α-presentable and locally α-generated categories, *Lecture Notes in Math.* 195, Springer (1971), 230 - 247.

9. ZELINSKY D., Linearly compact modules and rings, *Amer. J. Math.* 75 (1953), 79 - 90.

Département de Mathématiques
U. E. R. des Sciences Exactes et Naturelles
Mont Houy
59326 VALENCIENNES