CAHIERS DE
TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
CATÉGORIQUES

ALBERT BURRONI

Structures pseudo-algébriques (1ère partie)

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 16, n° 4 (1975), p. 343-393

<http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1975__16_4_343_0>

CAHIERS DE TOPOLOGIE
ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE

Vol. XVI - 4 (1975)

STRUCTURES PSEUDO-ALGEBRIQUES (1ère Partie) ★

par Albert BURRONI

INTRODUCTION.

Comme nous l'avons déjà dit dans [Bu - 2] , une première version de ce travail a été exposée en 1972, au Séminaire: Catégories, Topologie et Géométrie différentielle à Paris. Ce n'est que la première partie d'une étude sur les pseudo-algèbres; elle nous servira par la suite comme cadre de référence. Malgré le temps passé, et à notre étonnement, le théorème que nous donnerons au chapitre 2, et qui est l'analogue du «théorème de Linton» [Li] étendu aux pseudo-algèbres, reste original. Il est indispensable, mais non suffisant, si l'on veut passer des définitions générales aux exemples concrets: Il montre en effet que la définition abstraite donnée au chapitre 1 des pseudo-algèbres est équivalente à la donnée d'une structure pseudo-algébrique définie comme on le fait toujours par des lois et des axiomes. Le chapitre 3 permettra d'aborder réellement les structures concrètes, comme celle de pseudo-monoïde, en limitant le nombre de lois et d'axiomes à un petit «système de générateurs» de ces données.

Dans la deuxième partie de ce travail, un chapitre 4 donnera en détail des exemples concrets.

★ Conférence donnée au Colloque d'Amiens (1973)

SOMMAIRE

0. TERMINOLOGIE SUR LES 2-CATEGORIES

Nous avons rassemblé dans ce chapitre tous les rappels nécessaires et supposés connus. Nous commencerons par des conventions très générales.

Un *graphe* $\underline{C}$ est défini par l'ensemble $Ob(\underline{C})$ de ses objets et par une famille d'ensembles $Hom_{\underline{C}}(X, Y)$, où «l'indice» (X, Y) parcourt l'ensemble $Ob(\underline{C})^2$. *Une catégorie* $\underline{C}$ est «portée» par un *graphe sous-jacent*, qui est noté par la même lettre $\underline{C}$ (comme cela se fait pour un groupe et son ensemble sous-jacent).

Un ensemble est *petit* s'il appartient à un univers de référence supposé fixé une fois pour toutes. Les «petites structures usuelles»... forment les objets de catégories qu'on appellera *concrètes* et qui sont notées, comme on le fait habituellement, par les notations $\underline{Ens}$, $\underline{Ab}$, etc... Par exemple $\underline{Grph}$, $\underline{Cat}$, sont les catégories respectivement des petits graphes, des petites catégories. Un graphe $\underline{C}$ est dit *localement petit* si on suppose seulement que les ensembles $Hom_{\underline{C}}(X, Y)$ sont petits. Si une catégorie est portée par un graphe localement petit, on dit qu'elle est *localement petite*. Les catégories concrètes suivantes $\underline{Ens}$, $\underline{Ab}$, $\underline{Cat}$, ... sont localement petites. On identifie souvent un ensemble E à la catégorie discrète, parfois notée E, dont l'ensemble des objets est égal à E et qui n'a que des morphismes unités. Des conventions de ce genre seront faites pour des structures analogues de manière tacite (par exemple, voir (0.1), toute catégorie $\underline{C}$ sera identifiée à une 2-catégorie $\underline{\underline{C}}$ en identifiant les ensembles $Hom_{\underline{C}}(X, Y)$ à des catégories discrètes, on notera par le même symbole $\underline{\underline{C}}$ une 2-catégorie et son 2-graphe sous-jacent, etc...).

Le symbole de composition dans une catégorie «arbitraire» est noté généralement par le symbole «$\circ$», sauf dans les cas suivants :

(i) Lorsque d'autres conventions sont faites explicitement.

(ii) Dans les catégories concrètes $\underline{Ens}$, $\underline{Cat}$, ... où la loi de composition se note multiplicativement (i. e. sans symbole). Plus généralement (sans référence à un univers) si

$$f : X \to Y \quad \text{et} \quad g : Y \to Z$$

sont des applications ou toute autre sorte d'homomorphismes «concrets» , on note gf le composé usuel. Dans le même esprit, si $x \in X$ on note fx l'image de x par f.

(iii) Les lois dans les catégories de la forme $Hom_{\underline{\underline{C}}}(X, Y)$ (voir (0.1) la «deuxième loi de composition»), où $\underline{\underline{C}}$ est un 2-graphe ou une 2-catégorie «arbitraire». Ces lois seront notées alors, sauf mention explicite du contraire (pour $\underline{\underline{Cat}}$ par exemple), par le symbole «$\perp$».

0.1. 2-graphes et 2-catégories.

DEFINITION 0.1.1. *Un 2-graphe* $\underline{\underline{C}} = (Ob(\underline{\underline{C}}), Hom_{\underline{\underline{C}}})$ *est constitué par les données suivantes :*

(0.1.2) *Un ensemble* $Ob(\underline{\underline{C}})$, *appelé ensemble des objets de* $\underline{\underline{C}}$.

(0.1.3) *Une famille de catégories* $Hom_{\underline{\underline{C}}}(X, Y)$, *où l'indice* (X, Y) *parcourt l'ensemble des couples d'objets de* $\underline{\underline{C}}$.

Les lois de composition dans les catégories $Hom_{\underline{\underline{C}}}(X, Y)$ sont en général notées par le même symbole «$\perp$» comme il a été convenu en (iii). On les appelle «les deuxièmes lois de composition de $\underline{\underline{C}}$» (ce qui est symbolique, car il n'y a pas de «première loi» sur un 2-graphe). Par abus de langage, on dit aussi «la deuxième loi...».

La relation

$$f \in Ob\,[\,Hom_{\underline{\underline{C}}}(X, Y)\,]$$

admet diverses expressions équivalentes, essentiellement :

$f: X \to Y$ est un morphisme de $\underline{\underline{C}}$,

$f: X \to Y\ (\underline{\underline{C}})$,

f est un morphisme de $\underline{\underline{C}}$ de source X et de but Y,

(f, X, Y) est un morphisme de $\underline{\underline{C}}$,

$X \xrightarrow[\underline{\underline{C}}]{f} Y$,

la référence à $\underline{\underline{C}}$ étant souvent omise lorsque le contexte le permet. Le triplet (f, X, Y) est aussi noté par la seule lettre f : il n'y a pas en général de risque de confusion (*).

(*) On souhaiterait dire: «nous supposerons les catégories $Hom_{\underline{\underline{C}}}(X, Y)$ disjointes...». Mais dans les constructions effectives que nous ferons elles ne le seront manifestement pas. On corrigera sans difficulté cet abus de langage local.

De même la relation

$$\alpha : f \to f' \ (\, Hom_{\underline{\underline{C}}}(X, Y) \,)$$

admet diverses expressions équivalentes :

$\alpha : f \to f' : X \to Y \ (\underline{\underline{C}})$,

$\alpha : f \to f' : X \to Y$ est un 2-morphisme de $\underline{\underline{C}}$,

$\alpha : f \Longrightarrow f' : X \to Y \ (\underline{\underline{C}})$,

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "f'"'] \arrow[r, phantom, "\alpha \Downarrow"] & Y \end{tikzcd} \quad (\underline{\underline{C}}).$$

Ces expressions sont parfois abrégées, lorsque le contexte le permet, par exemple :

$\alpha : f \to f'$ est un 2-morphisme de $\underline{\underline{C}}$,

$\alpha : f \Longrightarrow f' \ (\underline{\underline{C}})$.

DEFINITION 0.1.4. *Une 2-catégorie* $\underline{\underline{C}} = (Ob(\underline{\underline{C}}), Hom_{\underline{\underline{C}}}, \circ_{\underline{\underline{C}}}, 1_{\underline{\underline{C}}})$ *est constituée par la donnée du 2-graphe* $(Ob(\underline{\underline{C}}), Hom_{\underline{\underline{C}}})$, *noté encore* $\underline{\underline{C}}$ *comme il a été convenu au début de ce chapitre, et par les données suivantes* (0.1.5) *et* (0.1.6) *et les axiomes* (0.1.7) *et* (0.1.8)*:*

(0.1.5) *Une famille de foncteurs*

$$\circ_{\underline{\underline{C}}}(X, Y, Z) : Hom_{\underline{\underline{C}}}(X, Y) \times Hom_{\underline{\underline{C}}}(Y, Z) \to Hom_{\underline{\underline{C}}}(X, Z).$$

L'image d'un couple (dit *composable*) de 2-morphismes de $\underline{\underline{C}}$ de la forme

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "f'"'] \arrow[r, phantom, "\alpha \Downarrow"] & Y \arrow[r, bend left, "g"] \arrow[r, bend right, "g'"'] \arrow[r, phantom, "\beta \Downarrow"] & Z \end{tikzcd}$$

sera notée par $\beta \circ_{\underline{\underline{C}}} \alpha$ ou $\beta \circ_{X,Y,Z} \alpha$ ou simplement en général $\beta \circ \alpha$:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left, "g \circ f"] \arrow[r, bend right, "g' \circ f'"'] \arrow[r, phantom, "\beta \circ \alpha \Downarrow"] & Z \end{tikzcd} \quad (\underline{\underline{C}}).$$

On se réfère à l'ensemble de ces lois en parlant de « la (ou les) première(s) loi(s) de composition de $\underline{\underline{C}}$ ». On remarquera que l'on note par le même symbole « $\circ$ » la première loi qu'elle soit appliquée à des morphismes ou à des

2-morphismes.

(0.1.6) *Une famille de morphismes*

$$1_X^{(\underline{\underline{C}})} : X \to X \ (\underline{\underline{C}})$$

indexée par $X \in Ob(\underline{\underline{C}})$. Le morphisme $1_X^{(\underline{\underline{C}})}$ sera noté simplement 1_X, ou aussi id_X ; dans les formules on le notera souvent par X lui-même, et dans les diagrammes par le seul symbole 1.

Ces données satisfont aux axiomes d'associativité et d'« éléments neutres » :

(0.1.7) $\gamma \circ (\beta \circ \alpha) = (\gamma \circ \beta) \circ \alpha$.

(0.1.8) $id_Y \circ \alpha = \alpha = \alpha \circ id_X$, où

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left] \arrow[r, bend right] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & Y \arrow[r, bend left] \arrow[r, bend right] \arrow[r, phantom, "\beta\Downarrow"] & Z \arrow[r, bend left] \arrow[r, bend right] \arrow[r, phantom, "\gamma\Downarrow"] & T \end{tikzcd} .$$

De la fonctorialité des lois $\circ_{\underline{\underline{C}}}$, on tire la relation

(0.1.9) $(\beta' \mathbin{:} \beta) \circ (\alpha' \mathbin{:} \alpha) = (\beta' \circ \alpha') \mathbin{:} (\beta \circ \alpha)$, pour tout 2-diagramme

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left=60, "f"] \arrow[r, "f'"] \arrow[r, bend right=60] \arrow[r, phantom, shift left=3ex, "\Downarrow\alpha"] \arrow[r, phantom, shift right=3ex, "\Downarrow\alpha'"] & Y \arrow[r, bend left=60, "g"] \arrow[r, "g'"] \arrow[r, bend right=60] \arrow[r, phantom, shift left=3ex, "\Downarrow\beta"] \arrow[r, phantom, shift right=3ex, "\Downarrow\beta'"] & Z \end{tikzcd}$$

dont un cas particulier souvent utilisé est la « cinquième règle de Godement »

(0.1.10) $\beta \circ \alpha = (\beta \circ f') \mathbin{:} (g \circ \alpha) = (g' \circ \alpha) \mathbin{:} (\beta \circ f)$.

Si $\underline{\underline{C}}$ est un 2-graphe, on dit qu'il est *localement petit* si les catégories $Hom_{\underline{\underline{C}}}(X, Y)$ sont petites, et on dit qu'il est *petit* si de plus $Ob(\underline{\underline{C}})$ est petit. Si $\underline{\underline{C}}$ est une 2-catégorie, elle est *localement petite* ou *petite* suivant que le 2-graphe sous-jacent est localement petit ou petit.

Si $\underline{\underline{C}}$ est un 2-graphe (resp. une 2-catégorie), on définit un graphe (resp. une catégorie) noté(e) $\underline{C}$ en « oubliant » les 2-morphismes, i.e.

(0.1.11) $Hom_{\underline{C}}(X, Y) = Ob(Hom_{\underline{\underline{C}}}(X, Y))$.

On associe également à $\underline{\underline{C}}$ *deux autres 2-graphes (resp. 2-catégories)* $\underline{\underline{C}}^{op}$ et $\underline{\underline{C}}^{sym}$ définis par :

(0.1.12) $Ob(\underline{\underline{C}}^{op}) = Ob(\underline{\underline{C}}) = Ob(\underline{\underline{C}}^{sym})$,
$Hom_{\underline{\underline{C}}^{op}}(X, Y) = Hom_{\underline{\underline{C}}}(Y, X)$,
$Hom_{\underline{\underline{C}}^{sym}}(X, Y) = (Hom_{\underline{\underline{C}}}(X, Y))^{op}$
(resp. les lois de composition étant induites de celle de $\underline{\underline{C}}$).

DEFINITION 0.1.13. *Soit* $\underline{\underline{C}}_0$ *et* $\underline{\underline{C}}$ *deux 2-graphes tels que*

$$Ob(\underline{\underline{C}}_0) \subset Ob(\underline{\underline{C}}) \quad \text{et} \quad Hom_{\underline{\underline{C}}_0}(X, Y) \subset Hom_{\underline{\underline{C}}}(X, Y)$$

pour tout $(X, Y) \in Ob(\underline{\underline{C}}_0)^2$. *On dit que* $\underline{\underline{C}}_0$ *est un sous-2-graphe de* $\underline{\underline{C}}$. *Si de plus*

$$Hom_{\underline{\underline{C}}_0}(X, Y) = Hom_{\underline{\underline{C}}}(X, Y),$$

on dit que $\underline{\underline{C}}_0$ *est un sous-2-graphe plein de* $\underline{\underline{C}}$. *On a un homomorphisme d'inclusion évident* $\underline{\underline{C}}_0 \to \underline{\underline{C}}$. *On définit de façon analogue les notions de sous-2-catégorie, sous-2-catégorie pleine et 2-foncteur d'inclusion.*

La catégorie $\underline{Cat}$ des petites catégories est sous-jacente à une 2-catégorie $\underline{\underline{Cat}}$. De même les petites 2-catégories forment les objets d'une 2-catégorie qu'on note $2\text{-}\underline{\underline{Cat}}$, dont les morphismes sont les 2-foncteurs et les 2-morphismes les 2-transformations naturelles. (On sait de plus que, si on prend comme 3-morphismes les modifications, on obtient une 3-catégorie...).

0.2. Homomorphismes entre 2-graphes et 2-foncteurs.

DEFINITION 0.2.1. *Un homomorphisme* $F : \underline{\underline{C}} \to \underline{\underline{C}}'$ *entre deux 2-graphes* $\underline{\underline{C}}$ *et* $\underline{\underline{C}}'$ *est constitué par les données suivantes :*

(0.2.2) *Une application* $Ob(F) : Ob(\underline{\underline{C}}) \to Ob(\underline{\underline{C}}')$. On note simplement FX l'image de $X \in Ob(\underline{\underline{C}})$ par cette application.

(0.2.3) *Une famille de foncteurs :*

$$Hom_F(X, Y) : Hom_{\underline{\underline{C}}}(X, Y) \to Hom_{\underline{\underline{C}}'}(FX, FY).$$

L'image par ce foncteur $Hom_F(X, Y)$ d'un objet f ou d'un morphisme

$$\alpha : f \to f' \text{ de } Hom_{\underline{\underline{C}}}(X, Y)$$

se note encore simplement par Ff et $F\alpha$ respectivement.

Si $\underline{\underline{C}}$ *et* $\underline{\underline{C}}'$ *sont des 2-catégories,* $F : \underline{\underline{C}} \to \underline{\underline{C}}'$ *est un 2-foncteur si c'est un* *homomorphisme pour les 2-graphes sous-jacents et s'il commute avec la première loi de composition des 2-catégories et leurs morphismes unités :*

(0.2.4) $F(\beta \circ \alpha) = F\beta \circ F\alpha$,

(0.2.5) $F(1_X) = 1_{FX}$.

Une 2-transformation naturelle

$$m : F \to F' : \underline{\underline{C}} \to \underline{\underline{C}}'$$

entre deux foncteurs F, F' de même source et même but est constituée par la donnée d'une famille de morphismes

$$mX : FX \to FX' \quad (\underline{\underline{C}}')$$

vérifiant les relations :

(0.2.6) $mY \circ F\alpha = F'\alpha \circ mX$

pour tout 2-morphisme $\alpha : f \to f' : X \to Y$ de $\underline{\underline{C}}$. Enfin une modification entre deux 2-transformations naturelles

$$\mu : m \to m' : F \to F' : \underline{\underline{C}} \to \underline{\underline{C}}'$$

est définie par une famille de 2-morphismes

$$\mu X : mX \to m'X : FX \to F'X \quad (\underline{\underline{C}}')$$

telle que

(0.2.7) $\mu Y \circ F\alpha = F'\alpha \circ \mu X$.

Rappelons, pour mémoire, que les 2-foncteurs se composent, que les 2-transformations naturelles se composent pour une «première» et une «deuxième» loi de composition, et enfin que les modifications qui peuvent s'interpréter comme des 3-morphismes admettent une «troisième» loi de composition. Comme il a été convenu au début du chapitre pour les compositions «concrètes», le 2-diagramme de 2-transformations naturelles

$$\begin{tikzcd}
\underline{\underline{C}} \arrow[r, bend left=60, "F"{name=A}] \arrow[r, "F'"'{name=B}] \arrow[r, bend right=60, "F''"'{name=D}] & \underline{\underline{C}}' \arrow[r, bend left=50, "G"{name=E}] \arrow[r, bend right=50, "G'"'{name=H}] & \underline{\underline{C}}''
\arrow[Rightarrow, from=A, to=B, "m"]
\arrow[Rightarrow, from=B, to=D, "n"]
\arrow[Rightarrow, from=E, to=H, "m'"']
\end{tikzcd}$$

donne les composés

$$\begin{tikzcd} \underline{\underline{C}} \arrow[rr, bend left, "F"] \arrow[rr, bend right, "F''"'] \arrow[rr, phantom, "n \circ m \Downarrow"] & & \underline{\underline{C}}' \end{tikzcd} \quad , \qquad \begin{tikzcd} \underline{\underline{C}} \arrow[rr, bend left, "GF"] \arrow[rr, bend right, "G'F'"'] \arrow[rr, phantom, "m'm \Downarrow"] & & \underline{\underline{C}}' \end{tikzcd}$$

le symbole « $\circ$ » étant celui de la « première » loi dans $\underline{\underline{C}}'$, et si l'on devait composer des modifications pour leur « troisième loi », on emploierait la « deuxième » loi, notée ^{1} , de $\underline{\underline{C}}'$.

0.3. Pseudo-foncteurs et pseudo-transformations naturelles.

DEFINITION 0.3.0. *Soit $\underline{\underline{C}}$ et $\underline{\underline{D}}$ deux 2-catégories. Un pseudo-foncteur*

$$\overline{F} = (F, s) : \underline{\underline{C}} \to \underline{\underline{D}}$$

est constitué par les données suivantes :

(0.3.1) *Un homomorphisme entre les 2-graphes sous-jacents $F : \underline{\underline{C}} \to \underline{\underline{D}}$.*

(0.3.2) *Une double famille s de 2-morphismes de $\underline{\underline{D}}$ de la forme*

$$sX : 1_{FX} \to F1_X : FX \to FX \quad (\underline{\underline{D}}),$$

$$s(\psi, \phi) : F\psi \circ F\phi \to F(\psi \circ \phi) : FX \to FZ \quad (\underline{\underline{D}}),$$

le premier indice X parcourant l'ensemble $Ob(\underline{\underline{C}})$ et le second (ψ, ϕ) parcourant l'ensemble des couples composables :

$$X \xrightarrow{\phi} Y \xrightarrow{\psi} Z \quad (\underline{\underline{C}});$$

de plus ces données doivent satisfaire aux « axiomes de cohérence » suivants : Pour toute donnée de la forme

$$X \xrightarrow{\phi} Y \xrightarrow{\psi} Z \xrightarrow{\xi} T \quad (\underline{\underline{C}}),$$

on a

(0.3.3) $s(\phi, 1_X)\,{}^{1}(F\phi \circ sX) = F\phi = s(1_Y, \phi)\,{}^{1}(sY \circ F\phi)$,

(0.3.4) $s(\xi \circ \psi, \phi)\,{}^{1}(s(\xi, \psi) \circ F\phi) = s(\xi, \psi \circ \phi)\,{}^{1}(F\xi \circ s(\psi, \phi))$.

Ces relations expriment la commutativité de diagrammes de la forme

$$\begin{tikzcd} & F1_Y \circ F\phi \arrow[dr, "s(1_X, \phi)"] & \\ F\phi \arrow[ur, "sY \circ F\phi"] \arrow[rr, "1"] \arrow[dr, "F\phi \circ sX"'] & & F\phi \\ & F\phi \circ F1_X \arrow[ur, "s(\phi, 1_X)"'] & \end{tikzcd} \quad .$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & F(\xi \circ \psi) \circ F\phi \arrow[dr] & \\
F\xi \circ F\psi \circ F\phi \arrow[ur] \arrow[dr] & & F(\xi \circ \psi \circ \phi) \\
 & F\xi \circ F(\psi \circ \phi) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Ces relations s'expriment encore par la commutativité des 2-diagrammes suivants :

$$\begin{tikzcd}
FX \arrow[r, "F1_X"] \arrow[rr, bend left=40, "F\phi"] \arrow[r, bend right=50, "1_{FX}"'] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\Uparrow s(\phi, 1_X)"] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\Uparrow sX"] \arrow[loop left, phantom, "1"] & FX \arrow[r, "F\phi"] & FY
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
FX \arrow[r, "F\phi"] \arrow[rr, bend left=40, "F\phi"] & FY \arrow[r, "F1_Y"] \arrow[r, bend right=50, "1_{FY}"'] \arrow[r, phantom, shift left=3, "s(1_Y, \phi) \Uparrow"] \arrow[r, phantom, shift right=3, "sY \Uparrow"] & FY \arrow[loop right, phantom, "1"]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
FX \arrow[r, "F\phi"] \arrow[rrr, bend left=40, "F(\xi \circ \psi \circ \phi)"] \arrow[rr, bend right=40, "F(\psi \circ \phi)"'] & FY \arrow[r, "F\psi"] \arrow[rr, bend left=30, "F(\xi \circ \psi)"] \arrow[r, phantom, shift right=3, "s(\psi, \phi) \Downarrow"] & FZ \arrow[r, "F\xi"] \arrow[r, phantom, shift left=3, "s(\xi, \psi) \Uparrow"] & FT \arrow[l, phantom, shift left=6, "s(\xi \circ \psi, \phi) \Uparrow"] \arrow[loop right, phantom, "s(\xi, \psi \circ \phi)"]
\end{tikzcd}$$

REMARQUES 0.3.5. On dit souvent que $\overline{F} : \underline{\underline{C}} \to \underline{\underline{D}}$ est un pseudo-foncteur, étant sous-entendu que c'est un pseudo-foncteur *à gauche*. On obtient une notion de *pseudo-foncteur à droite* en renversant le sens des 2-morphismes. Mais cette notion se ramène à celle de pseudo-foncteur à gauche de la forme $\overline{F} : \underline{\underline{C}} \to \underline{\underline{D}}^{sym}$ (0.1.12). On dit parfois que $F : \underline{\underline{C}} \to \underline{\underline{D}}$ est un pseudo-foncteur, la notation s étant omise ; on pose dans ce cas $s = s_F$.

DEFINITION 0.3.6. *Une pseudo-transformation naturelle à gauche*

$$(L, l) : \overline{F} \to \overline{F}' : \underline{\underline{C}} \to \underline{\underline{D}}$$

est constituée par la donnée de deux pseudo-foncteurs

$$\overline{F} = (F, s) \quad et \quad \overline{F}' = (F', s')$$

de même source et même but, et par les données suivantes :

(0.3.7) *Une famille de morphismes*

$$LX : FX \to F'X \quad (\underline{\underline{D}})$$

indexée par $X \in Ob(\underline{\underline{C}})$.

(0.3.8) *Une famille de 2-morphismes*

$$lf : F'f \circ LX \to LY \circ Ff : FX \to F'Y \quad (\underline{\underline{D}})$$

indexée par les morphismes $f : X \to Y \ (\underline{\underline{C}})$, *i. e.*

$$\begin{tikzcd}
FX \arrow[rr, "LX"] \arrow[d, "Ff"'] & & F'X \arrow[d, "F'f"] \arrow[dl, phantom, "\Swarrow lf"] \\
FY \arrow[rr, "LY"'] & {} & F'Y
\end{tikzcd}$$

ces données vérifiant les « axiomes de cohérence » suivants :

(0.3.9) $LX \circ sX = l1_X \perp (s'X \circ LX)$,

(0.3.10) $l(g \circ f) \perp [s'(g, f) \circ LX] =$

$$[LZ \circ s(g, f)] \perp [lg \circ Ff] \perp [F'g \circ lf],$$

ce qui s'exprime par la commutativité des 2-diagrammes suivants, pour tout

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \quad (\underline{\underline{C}}) :$$

$$\begin{tikzcd}
FX \arrow[rr, "LX"] \arrow[d, bend right=60, "1_{FX}"'] \arrow[d, "F1_X"] \arrow[d, phantom, bend right=30, "sX"] & & F'X \arrow[d, "F'1_X"'] \arrow[d, bend left=60, "1_{F'X}"] \arrow[d, phantom, bend left=30, "s'X"] \arrow[dl, phantom, "\Swarrow l1_X"] \\
FX \arrow[rr, "LX"'] & {} & F'X \arrow[loop below, "1"]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
FX \arrow[rr, "LX"] \arrow[d, "Ff"] \arrow[dd, bend right=60, "F(g \circ f)"'] & & F'X \arrow[d, "F'f"'] \arrow[dd, bend left=60, "F'(g \circ f)"] \arrow[dl, phantom, "\Swarrow lf"] \\
FY \arrow[rr, "LY"] \arrow[d, "Fg"] \arrow[d, phantom, bend right=40, "s(g,f)"'] & {} & F'Y \arrow[d, "F'g"'] \arrow[d, phantom, bend left=40, "s'(g,f)"] \arrow[dl, phantom, "\Swarrow lg"] \\
FZ \arrow[rr, "LZ"'] & {} & F'Z \arrow[loop below, "l(g \circ f)"]
\end{tikzcd}$$

On dit que

$$(L, l): (F, s) \to (F', s'): \underline{\underline{C}} \to \underline{\underline{D}}$$

est une pseudo-transformation naturelle à droite (les pseudo-foncteurs $\overline{F}$ et $\overline{F'}$ eux restant à gauche, comme cela a été convenu quand on ne le précise pas) *si les 2-morphismes* lf *sont donnés dans le sens inverse, i. e.*

(0.3.11) $lf: LY \circ Ff \to F'f \circ LX : FX \to F'Y \;\; (\underline{\underline{D}})$,

i. e.

$$\begin{tikzcd}
FX \arrow[r, "LX"] \arrow[d, "Ff"'] & F'X \arrow[d, "F'f"] \\
FY \arrow[r, "LY"'] \arrow[ur, phantom, "lf"] & F'Y
\end{tikzcd}$$

avec les relations de cohérence suivantes :

(0.3.12) $l1_X{}^{1}(LX \circ sX) = s'X \circ LX$,

(0.3.13) $[s'(g, f) \circ LX]\,{}^{1}\,[F'g \circ lf]\,{}^{1}\,[lg \circ Ff] =$

$$l(g \circ f)\,{}^{1}\,[LZ \circ s(g, f)] .$$

Si les lf *sont des morphismes unités de* $Hom_{\underline{\underline{D}}}(FX, F'Y)$, *on dit que*

$$L : \overline{F} \to \overline{F'} : \underline{\underline{C}} \to \underline{\underline{D}}$$

est une transformation naturelle (entre pseudo-foncteurs), et on a

(0.3.14) $LY \circ Ff = F'f \circ LX$.

PROPOSITION 0.3.15. *Si on a deux pseudo-transformations naturelles à gauche de la forme*

$$(F, s) \xrightarrow{(L, l)} (F', s') \xrightarrow{(L', l')} (F'', s''): \underline{\underline{C}} \to \underline{\underline{D}} ,$$

on définit une pseudo-transformation naturelle à gauche composée (pour une « deuxième loi »):

$$(F, s) \xrightarrow{(L'', l'')} (F'', s''): \underline{\underline{C}} \to \underline{\underline{D}}$$

définie par les relations :

(0.3.16) $L''X = L'X \circ LX$,

(0.3.17) $l''f = (L'Y \circ lf)\,{}^{1}(l'f \circ LX)$.

On définit la notion analogue à droite.

PREUVE. Evident ; voir [Be] par exemple. ■

DEFINITION 0.3.18. *Une modification à gauche*

$$\lambda : (L_1, l_1) \to (L_2, l_2) : (F, s) \to (F', s') : \underline{\underline{C}} \to \underline{\underline{D}}$$

est constituée par la donnée de deux pseudo-transformations naturelles à gauche (L_1, l_1) *et* (L_2, l_2) *de même source* (F, s) *et même but* (F', s') , *et par la donnée d'une famille de 2-morphismes :*

$$\lambda X : L_1 X \to L_2 X : FX \to F'X \quad (\underline{\underline{D}})$$

vérifiant les conditions suivantes :

(0.3.19) $(\lambda Y \circ Ff) {}^{\mathbf{1}} l_1 f = l_2 f {}^{\mathbf{1}} (F'f \circ \lambda X)$,

i.e. le 2-diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
FX \arrow[rr, bend left, "L_1 X"] \arrow[rr, bend right, "L_2 X"'] \arrow[dd, "Ff"'] & \Downarrow \lambda X & F'X \arrow[dd, "F'f"] \\
 & & \\
FY \arrow[rr, bend left, "L_1 Y"] \arrow[rr, bend right, "L_2 Y"'] & \Downarrow \lambda Y & F'Y \arrow[u, phantom, "l_1 f"] \arrow[loop right, phantom, "l_2 f"]
\end{tikzcd}$$

Il y a évidemment une «deuxième loi» et même une «troisième loi» de composition. (Rappelons qu'on n'a pas, ici, défini de «première loi»; ces qualificatifs sont donc symboliques). Ce sont ces lois et leurs propriétés qui rendent possible la définition ci-dessous :

DEFINITION 0.3.20. *Soit* $\underline{\underline{I}}$ *et* $\underline{\underline{C}}$ *deux 2-catégories ; on note* $\overleftarrow{\underline{\underline{Ps}}}(\underline{\underline{I}}, \underline{\underline{C}})$ *la la 2-catégorie ayant pour objets les pseudo-foncteurs (à gauche) de la forme* $\underline{\underline{I}} \to \underline{\underline{C}}$, *pour morphismes les pseudo-transformations naturelles* (0.3.6) *et pour 2-morphismes les modifications à gauche* (0.3.18). *On note* $\overrightarrow{\underline{\underline{Ps}}}(\underline{\underline{I}}, \underline{\underline{C}})$ *la 2-catégorie obtenue avec les mêmes objets (pseudo-foncteurs à gauche), mais avec les pseudo-transformations naturelles à droite et modifications à droite.* $\underline{\underline{Ps}}(\underline{\underline{I}}, \underline{\underline{C}})$ *est la sous-2-catégorie* (0.1.13) *ayant les mêmes objets, mais dont les morphismes sont les transformations naturelles* (0.3.11) *et les 2-morphismes, les modifications correspondantes. Enfin,* $\underline{\underline{C}}^{\underline{\underline{I}}}$ *est la sous-2-*

catégorie pleine (0.1.13) *de* $\underline{\underline{Ps}}(\underline{\underline{I}}, \underline{\underline{C}})$ *ayant pour objets les 2-foncteurs de la forme* $\underline{\underline{I}} \to \underline{\underline{C}}$.

DEFINITION 0.3.21. *Pour* $\underline{\underline{I}} = \underline{\underline{1}}$ *la 2-catégorie finale (un seul objet, un seul morphisme, un seul 2-morphisme), on posera:*

$$\underline{\underline{Mon}}(\underline{\underline{C}}) = \underline{\underline{Ps}}(\underline{\underline{1}}, \underline{\underline{C}});$$

on définit de même $\overleftarrow{\underline{\underline{Mon}}}(\underline{\underline{C}})$ *et* $\overrightarrow{\underline{\underline{Mon}}}(\underline{\underline{C}})$ *; les objets de ces trois 2-catégories sont les mêmes, on les appelle monades de* $\underline{\underline{C}}$. *Plus particulièrement, pour* $\underline{\underline{I}} = \underline{\underline{1}}$ *et* $\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{Cat}}$, *on pose*

$$\underline{\underline{Tr}} = \underline{\underline{Ps}}(\underline{\underline{1}}, \underline{\underline{Cat}}) = \underline{\underline{Mon}}(\underline{\underline{Cat}});$$

on définit de même $\overleftarrow{\underline{\underline{Tr}}}$ *et* $\overrightarrow{\underline{\underline{Tr}}}$; *leurs objets s'appellent les petits triples.* Ce sont évidemment des triples au sens habituel sur de petites catégories (voir la partie 2).

La définition générale d'une «première loi» pour ces «pseudo-notions» pose des problèmes d'une nature nouvelle. Nous n'aborderons pas ces questions ici; nous nous contenterons des définitions évidentes suivantes:

Considérons deux 2-foncteurs

$$\underline{\underline{C}}' \xrightarrow{G} \underline{\underline{C}}, \quad \underline{\underline{D}} \xrightarrow{H} \underline{\underline{D}}',$$

et, respectivement, un pseudo-foncteur

$$\overline{F} = (F, s): \underline{\underline{C}} \to \underline{\underline{D}},$$

une pseudo-transformation naturelle à gauche (par exemple)

$$\overline{L} = (L, l): \overline{F} \to \overline{F}'$$

ou une modification à gauche $\mu: \overline{L}_1 \to \overline{L}_2$.

PROPOSITION 0.3.22. *On obtient deux pseudo-foncteurs*

$$H\overline{F} = (HF, Hs): \underline{\underline{C}} \to \underline{\underline{D}}', \quad \overline{F}G = (FG, sG): \underline{\underline{C}}' \to \underline{\underline{D}},$$

deux pseudo-transformations naturelles à gauche

$$H(L, l) = (HL, Hl): H\overline{F} \to H\overline{F}', \quad (L, l)G: \overline{F}G \to \overline{F}'G,$$

deux modifications à gauche

$$H\mu: H\overline{L}_1 \to H\overline{L}_2, \quad \mu G: \overline{L}_1 G \to \overline{L}_2 G,$$

en posant, pour tout

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \ (\underline{\underline{C}}), \qquad X' \xrightarrow{f'} Y' \xrightarrow{g'} Z' \ (\underline{\underline{C}}'),$$

respectivement :

(0.3.23) $(Hs)X = H(sX)$, $(sG)X' = s(GX')$,
$(Hs)(g,f) = H[s(g,f)]$,
$(sG)(g',f') = s(Gg', Gf')$,

(0.3.24) $(HL)X = H(LX)$, $(LG)X' = L(GX')$,
$(Hl)f = H(lf)$, $(lG)f' = l(Gf')$,

(0.3.25) $(H\mu)X = H(\mu X)$, $(\mu G)X' = \mu(GX')$.

PREUVE. La vérification est immédiate. ■

Il est clair que ces actions définissent des 2-foncteurs :

$$\overleftarrow{\underline{\underline{Ps}}}(\underline{\underline{C}}, \underline{\underline{D}}) \to \overleftarrow{\underline{\underline{Ps}}}(\underline{\underline{C}}', \underline{\underline{D}}), \quad \overrightarrow{\underline{\underline{Ps}}}(\underline{\underline{C}}, \underline{\underline{D}}) \to \overrightarrow{\underline{\underline{Ps}}}(\underline{\underline{C}}, \underline{\underline{D}}'),$$

et qu'on a des formules d'associativité et d'«éléments neutres», par exemple $H(\overline{F}G) = (H\overline{F})G$, etc...

Si $G: \underline{\underline{C}}' \to \underline{\underline{C}}$ est un 2-foncteur d'inclusion, où $\underline{\underline{C}}'$ est une sous-2-catégorie de $\underline{\underline{C}}$, on définit les *restrictions* :

(0.3.26) $\overline{F}G = \overline{F}|_{\underline{\underline{C}}'}$, etc...

0.4. 2-adjoints et 2-triples.

Comme toutes les structures algébriques, les 2-catégories admettent des limites projectives. Ainsi on définit sans problème le produit

$$\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{C}}^{op} \times \underline{\underline{C}}, \text{ pour une 2-catégorie } \underline{\underline{C}}.$$

Le 2-graphe sous-jacent est défini par les formules: $Ob(\underline{\underline{D}}) = Ob(\underline{\underline{C}})^2$,

$$Hom_{\underline{\underline{D}}}((X,Y),(X',Y')) = Hom_{\underline{\underline{C}}}(X',X) \times Hom_{\underline{\underline{C}}}(Y,Y'),$$

et on note

$$Hom_{\underline{\underline{C}}}: \underline{\underline{C}}^{op} \times \underline{\underline{C}} \to \underline{\underline{Cat}}$$

le 2-foncteur qui prolonge la famille des $Hom_{\underline{\underline{C}}}(X,Y)$ sur les morphismes

$$(X' \xrightarrow[\underline{\underline{C}}]{f} X, \quad Y \xrightarrow[\underline{\underline{C}}]{h} Y')$$

de $\underline{\underline{D}}$ par

(0.4.1) $Hom_{\underline{\underline{C}}}(f, h) g = h \circ g \circ f$

sur un objet g de $Hom_{\underline{\underline{C}}}(X, Y)$ et de façon analogue sur les 2-morphismes. De ce 2-foncteur on tire les 2-foncteurs partiels pour $X \in Ob(\underline{\underline{C}})$:

$$h_X : \underline{\underline{C}}^{op} \to \underline{\underline{Cat}}, \quad h^X : \underline{\underline{C}} \to \underline{\underline{Cat}},$$

en posant, par exemple pour tout $Y \in Ob(\underline{\underline{C}})$:

(0.4.2) $h_X(Y) = Hom_{\underline{\underline{C}}}(Y, X), \quad h^X(Y) = Hom_{\underline{\underline{C}}}(X, Y)$.

De même, pour tout morphisme $f: X \to X'$ de $\underline{\underline{C}}$, on définit une 2-transformation naturelle :

$$h^f : h^{X'} \to h^X, \quad h_f : h_X \to h_{X'}, \quad \text{etc...}$$

Un 2-foncteur $\underline{\underline{C}}^{op} \to \underline{\underline{Cat}}$ qui est 2-équivalent à un 2-foncteur de la forme h_X est dit *2-représentable* ou, de façon plus précise, *2-représentable par* X *sur* $\underline{\underline{C}}$. Il sera parfois utile de dire qu'il est *2-représentable au sens strict,* s'il est en plus égal au 2-foncteur h_X . De même un 2-foncteur 2-équivalent (resp. égal) au 2-foncteur h^X est dit *2-coreprésentable* (resp. au *sens strict*) *par* X *sur* $\underline{\underline{C}}$. Alors il est 2-représentable par X sur $\underline{\underline{C}}^{op}$.

Considérons un couple de 2-foncteurs

$$\begin{tikzcd} \underline{\underline{C}} \arrow[r, shift left, "F"] & \underline{\underline{D}} \arrow[l, shift left, "U"] \end{tikzcd} \quad ;$$

on dit que F *est un 2-adjoint à gauche de* U si et seulement s'il existe une 2-équivalence naturelle

$$Hom_{\underline{\underline{C}}}(1_{\underline{\underline{C}}^{op}} \times U) \overset{\sim}{\to} Hom_{\underline{\underline{D}}}(F \times 1_{\underline{\underline{D}}}) : \underline{\underline{C}}^{op} \times \underline{\underline{D}} \to \underline{\underline{Cat}},$$

ou, ce qui revient au même, une famille d'isomorphismes

(0.4.3) $Hom_{\underline{\underline{C}}}(X, UY) \overset{\sim}{\to} Hom_{\underline{\underline{D}}}(FX, Y)$,

pour tout $(X, Y) \in Ob(\underline{\underline{C}}) \times Ob(\underline{\underline{D}})$. Il revient au même encore de se donner l'une des deux familles de 2-équivalences :

(0.4.4) $h^X U \overset{\sim}{\to} h^{FX}, \quad X \in Ob(\underline{\underline{C}})$,

(0.4.5) $h_Y F \overset{\sim}{\to} h_{UY}, \quad Y \in Ob(\underline{\underline{D}})$.

Si $U: \underline{\underline{D}} \to \underline{\underline{C}}$ est quelconque, il n'admet pas nécessairement un 2-adjoint à gauche, mais il est possible que, pour un X particulier, on ait une 2-équivalence (0.4.4) pour un autre objet FX de $\underline{\underline{D}}$ (i.e. $h^X U$ est 2-coreprésentable par FX sur $\underline{\underline{D}}$); dans ce cas, on dit que FX *est une 2-structure libre engendrée par* X *(relativement à* U*).* Appliquons (0.4.3) pour $Y = FX$; l'image réciproque de $1_{FX}: FX \to FX$ $(\underline{\underline{D}})$ est notée

(0.4.6) $IX: X \to UFX$ $(\underline{\underline{C}})$

et appelée *morphisme de 2-adjonction de* X *(relativement à* U*).*

Les isomorphismes (0.4.3) s'expriment encore en disant que U est un *2-adjoint à droite de* F. On définit de même par (0.4.5) la notion de 2-structure *colibre* UY *engendrée par un objet* Y *de* $\underline{\underline{D}}$ et le morphisme

$$1_{UY}: UY \to UY \ (\underline{\underline{C}})$$

donne par image réciproque de (0.4.3):

(0.4.7) $JY: FUY \to Y$ $(\underline{\underline{D}})$,

appelé *morphisme de 2-coadjonction de* Y *(relativement à* F*).*

Revenons à la situation d'un couple de 2-foncteurs

$$\begin{tikzcd} \underline{\underline{C}} \arrow[r, shift left, "F"] & \underline{\underline{D}} \arrow[l, shift left, "U"] \end{tikzcd}$$

tel que F soit un 2-adjoint à gauche de U; les morphismes (0.4.6), (0.4.7) existent toujours et définissent des *2-transformations naturelles d'adjonction et de coadjonction:*

$$I: 1_{\underline{\underline{C}}} \to UF, \quad J: FU \to 1_{\underline{\underline{D}}}.$$

Posons

(0.4.8) $T = UF, \ K = UFJ$;

on a les relations («de monade»):

(0.4.9) $K \circ TI = T = K \circ IT, \ K \circ TK = K \circ KT.$

On peut imiter la définition des triples:

DEFINITION 0.4.10. *Un 2-triple* (T, I, K) *sur* $\underline{\underline{C}}$ *est la donnée d'un 2-endofoncteur* $T: \underline{\underline{C}} \to \underline{\underline{C}}$ *et de deux 2-transformations naturelles, l'unité* $I: 1_{\underline{\underline{C}}} \to T$

et la multiplication $K : T^2 = TT \to T$ *du 2-triple, qui vérifient les relations* (0.4.9).

On dit encore que $(\underline{\underline{C}}, T, I, K)$ est un 2-triple et ce 2-triple est noté souvent par la seule lettre T. Les notations I et K sont les mêmes pour tous les 2-triples sauf précisions contraires (de même que la multiplication et l'élément neutre d'un groupe sont toujours notés de la même façon).

De même, si on pose

(0.4.11) $S = FU, \quad H = FIU,$

on a les relations :

(0.4.12) $SJ \circ H = S = JS \circ H, \quad SH \circ H = HS \circ H,$

et on dit que (S, J, H) *est un 2-cotriple sur* $\underline{\underline{D}}$. C'est alors un 2-triple sur la 2-catégorie $\underline{\underline{D}}^{op}$.

Réciproquement, à partir de la donnée d'un 2-triple T sur $\underline{\underline{C}}$, on sait construire au moins deux couples de 2-foncteurs adjoints pour lesquels le 2-triple sous-jacent obtenu est égal à T :

D'abord la 2-théorie ou la *2-catégorie de Kleisli de* T, qui sera notée $\underline{\underline{T}}$ ou $\underline{\underline{Kl}}(T)$, définie de la manière suivante :

(0.4.13) $Ob(\underline{\underline{T}}) = Ob(\underline{\underline{C}})$,

(0.4.14) $Hom_{\underline{\underline{T}}}(X, Y) = Hom_{\underline{\underline{C}}}(X, TY)$, pour $(X, Y) \in Ob(\underline{\underline{C}})^2$;

les «deuxièmes lois de composition» (0.1.1) de $\underline{\underline{T}}$ sont celles données par les $Hom_{\underline{\underline{C}}}$ et les «premières» avec leurs éléments neutres sont définies par :

(0.4.14) $1_X^{(\underline{\underline{T}})} = IX : X \to X \ (\underline{\underline{T}})$,

(0.4.15) $\psi \circ_{\underline{\underline{T}}} \phi = KZ \circ_{\underline{\underline{C}}} T\psi \circ_{\underline{\underline{C}}} \phi : X \to Z \ (\underline{\underline{T}})$

pour tout

$$X \xrightarrow{\phi} Y \xrightarrow{\psi} Z \ (\underline{\underline{T}}) .$$

On obtient alors un couple de 2-foncteurs adjoints :

$$\begin{tikzcd} \underline{\underline{C}} \arrow[r, shift left, "F_{Kl}"] & \underline{\underline{T}} \arrow[l, shift left, "U_{Kl}"] \end{tikzcd}$$

ainsi définis :

$$(0.4.16)\quad \begin{aligned} &F_{Kl}X = X,\quad U_{Kl}X = TX,\\ &F_{Kl}f = IX \circ f : X \to Y \ (\underline{\underline{T}}),\\ &U_{Kl}\phi = KY \circ T\phi : TX \to TY \ (\underline{\underline{C}}) \end{aligned}$$

pour tout

$$f : X \to Y \ (\underline{\underline{C}}) \quad \text{et} \quad \phi : X \to Y \ (\underline{\underline{T}}),$$

et de façon analogue pour les 2-morphismes. (Les composés « $\circ$ » non précisés ont toujours lieu dans $\underline{\underline{C}}$.)

La deuxième construction est celle de la *2-catégorie des T-algèbres* ou *2-catégorie d'Eilenberg-Moore*, notée $\underline{\underline{Alg}}(T)$, ainsi définie :

$Ob(\underline{\underline{Alg}}(T))$ est l'ensemble des *T-algèbres*, c'est-à-dire des couples (A, b), où $A \in Ob(\underline{\underline{C}})$ et $b : TA \to A \ (\underline{\underline{C}})$ vérifiant les relations :

$$(0.4.17)\quad b \circ IA = 1_A, \quad b \circ KA = b \circ Tb.$$

Un morphisme $f : (A, b) \to (A', b')$ de $\underline{\underline{Alg}}(T)$ est défini par les deux T-algèbres (A, b) et (A', b') et un morphisme $f : A \to A'$ de $\underline{\underline{C}}$ tel que

$$(0.4.18)\quad f \circ b = b' \circ Tf.$$

Un 2-morphisme $\sigma : f \Longrightarrow g$ de $\underline{\underline{Alg}}(T)$ est défini par les morphismes f et $g : (A, b) \to (A', b')$ et vérifie

$$(0.4.19)\quad \sigma \circ b = b' \circ T\sigma .$$

On obtient alors un nouveau couple de 2-foncteurs

$$\begin{tikzcd} \underline{\underline{C}} \arrow[r, shift left, "F_{Alg}"] & \underline{\underline{Alg}}(T) \arrow[l, shift left, "U_{Alg}"] \end{tikzcd} ,$$

défini sur les objets par

$$(0.4.20)\quad U_{Alg}(A, b) = A, \quad F_{Alg}X = (TX, KX), \quad X \in Ob(\underline{\underline{C}}).$$

Ces constructions ainsi que l'énoncé ci-dessous seront généralisés au cours de ce travail, en particulier aux T-pseudo-algèbres (chapitre 2) :

THEOREME 0.4.21 *(Linton). La 2-catégorie $\underline{\underline{Alg}}(T)$ est isomorphe à la 2-catégorie des 2-foncteurs de la forme $\underline{\underline{T}}^{op} \to \underline{\underline{Cat}}$ tels que le composé :*

$$\underline{\underline{C}}^{op} \xrightarrow{F_{Kl}} \underline{\underline{T}}^{op} \longrightarrow \underline{\underline{Cat}}$$

soit 2-représentable au sens strict (0.4).

PREUVE. On peut copier sur [Li]. Indiquons comment se fait la correspondance : à la T-algèbre (A, b) correspond le 2-foncteur $H : \underline{\underline{T}}^{op} \to \underline{\underline{Cat}}$ défini sur $X \in Ob(\underline{\underline{T}})$ et $\phi : Y \to X \ (\underline{\underline{T}})$ par

$$(0.4.22) \quad HX = Hom_{\underline{\underline{C}}}(X, A),$$

$$(0.4.23) \quad H\phi = [Hom_{\underline{\underline{C}}}(\phi, b)]\,[Hom_T(X, A) : Hom_{\underline{\underline{C}}}(X, A) \to Hom_{\underline{\underline{C}}}(Y, A) \quad (\underline{\underline{Cat}}),$$

le deuxième membre étant une composition «concrète» dans $\underline{\underline{Cat}}$, et Hom_T étant défini en (0.2.3).

Réciproquement, si $H : \underline{\underline{T}}^{op} \to \underline{\underline{Cat}}$ est un 2-foncteur tel que l'on obtienne un composé $h_A : \underline{\underline{C}}^{op} \to \underline{\underline{Cat}}$ 2-représenté par A, on définit une T-algèbre en posant :

$$(0.4.24) \quad b = (H\, 1_{TA})\, 1_A,$$

où 1_A et 1_{TA} sont des éléments neutres dans $\underline{\underline{C}}$. ■

0.5. Notion de 2-limites.

Soit $\underline{\underline{C}}$ une 2-catégorie et $u : \underline{\underline{I}} \to \underline{\underline{J}}$ un 2-foncteur. On définit un 2-foncteur $u^* : \underline{\underline{C}}^{\underline{\underline{L}}} \to \underline{\underline{C}}^{\underline{\underline{I}}}$ par la formule :

$$(0.5.1) \quad u^*\phi = \phi u,$$

pour tout objet ϕ de $\underline{\underline{C}}^{\underline{\underline{I}}}$ et de façon analogue sur les morphismes et sur les 2-morphismes.

DEFINITION 0.5.2. *Si u^* admet un adjoint à gauche (respectivement, un adjoint à droite), on le note $\underrightarrow{lim}_u$ (resp. $\underleftarrow{lim}_u$) et on l'appelle le 2-foncteur extension (resp. coextension) de Kan dans $\underline{\underline{C}}$ le long de u. Si ce foncteur existe chaque fois que $\underline{\underline{I}}$ et $\underline{\underline{J}}$ sont petites, on dit que $\underline{\underline{C}}$ admet des 2-extensions (resp. 2-coextensions) de Kan. Lorsque $\underline{\underline{J}} - \underline{\underline{1}}$ est la 2-catégorie finale, on retrouve les notions de 2-limite et on note $\underrightarrow{lim}_{\underline{I}}$ (resp. $\underleftarrow{lim}_{\underline{I}}$) ce foncteur; c'est un adjoint à gauche (resp. à droite) du foncteur diagonal $\Delta : \underline{\underline{C}} \to \underline{\underline{C}}^{\underline{\underline{I}}}$ défini en $X \in Ob(\underline{\underline{C}})$ et pour tout $i \in Ob(\underline{\underline{I}})$ par la formule*

$$(0.5.3) \quad (\Delta X)i = X.$$

Plus généralement, si $\phi : \underline{\underline{I}} \to \underline{\underline{C}}$ engendre une 2-structure libre (resp. colibre), relativement au 2-foncteur u^*, on la note

$$\varinjlim_u \phi \quad (\text{resp. } \varprojlim_u \phi) : \underline{\underline{I}} \to \underline{\underline{C}} .$$

Soit $q : \phi \to u^* \psi$, où $\psi = \varinjlim_u \phi$ un morphisme d'adjonction (0.4) et soit $q' : \phi \to u^* \psi'$ un autre morphisme de $\underline{\underline{C}}^{\underline{\underline{I}}}$; on appelle *crochet inductif défini par* q' et on note $[q'] : \psi \to \psi'$ l'unique morphisme de $\underline{\underline{C}}^{\underline{\underline{I}}}$ tel que

(0.5.4) $\quad q' = u^*[q'] \circ q .$

Dans le cas particulier $\underline{\underline{J}} = \underline{\underline{1}}$ (et $u^* = \Delta$) les crochets se réduisent à des morphismes. On appelle *injection canonique d'indice* $i \in Ob(\underline{\underline{I}})$ le morphisme $qi : \phi i \to X$ $(\underline{\underline{C}})$, où X est l'objet de $\underline{\underline{C}}$ identifié au 2-foncteur

$$\varinjlim_{\underline{\underline{I}}} \phi : \underline{\underline{1}} \to \underline{\underline{C}} .$$

On a des définitions analogues pour la notion duale de 2-limite projective : Si

$$p : u^* \xi \to \phi , \quad \text{où } \xi = \varprojlim_u \phi ,$$

et si $p' : u^* \xi' \to \phi$ est un autre morphisme de $\underline{\underline{C}}^{\underline{\underline{I}}}$, on a un crochet projectif $[p'] : \xi \to \xi'$ $(\underline{\underline{C}}^{\underline{\underline{I}}})$ défini par

(0.5.5) $\quad p' = p \circ u^*[p'] .$

Pour $\underline{\underline{J}} = \underline{\underline{1}}$, le morphisme $pi : Y \to \phi i$ $(\underline{\underline{C}})$, où Y est identifié à $\xi : \underline{\underline{1}} \to \underline{\underline{C}}$, s'appelle la *projection canonique d'indice* i.

EXEMPLE 0.5.6. On rappelle que $\underline{\underline{Cat}}$ admet des 2-extensions de Kan et des 2-coextensions de Kan. Si $\underline{\underline{C}}$ admet des 2-extensions (resp. des 2-coextensions) de Kan, il en est de même de toute 2-catégorie de la forme $\underline{\underline{C}}^{\underline{\underline{I}}}$: elles se calculent «objet par objet».

REMARQUE 0.5.7. On ne peut pas ramener la construction de toutes les 2-extensions de Kan à celle de 2-limites inductives, même lorsque $\underline{\underline{C}}$ admet des 2-extensions de Kan, comme on le fait pour les extensions de Kan habituelles. Par exemple si $u : \underline{\underline{1}} \to \mathbf{2}$, où $\mathbf{2}$ est la 2-catégorie suivante :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, bend left=40, "0"] \arrow[r, bend right=40, "1"'] \arrow[r, phantom, "\varepsilon \Downarrow"] & 1 \end{tikzcd}$$

réduite à deux objets $0, 1$, deux morphismes non unités $0, 1 \in Hom_2(0, 1)$ et un seul 2-morphisme non unité $\varepsilon : 0 \to 1$. On ne pourrait pas non plus les ramener à une notion de «pseudo-limite» en remplaçant $\underline{\underline{C}}^{\underline{I}}$ par $\underline{\underline{Ps}}(\underline{I}, \underline{\underline{C}})$.

DEFINITION 0.5.8. *Soit $F : \underline{\underline{C}} \to \underline{\underline{D}}$ un 2-foncteur. Supposons que l'on ait la propriété suivante :*

Chaque fois que $\underrightarrow{lim}_u \phi$ existe, alors $\underrightarrow{lim}_u F\phi$ existe et

(0.5.9) $\underrightarrow{lim}_u (F\phi) = F(\underrightarrow{lim}_u \phi)$.

Dans ce cas, on dit que F commute avec les 2-extensions de Kan.

On a une définition analogue de 2-foncteur qui commute avec les 2-coextensions de Kan.

EXEMPLE 0.5.10. Les 2-foncteurs représentables et coreprésentables (0.4) :

$$h_X : \underline{\underline{C}}^{op} \to \underline{\underline{Cat}}, \quad h^X : \underline{\underline{C}} \to \underline{\underline{Cat}}$$

commutent avec les 2-coextensions de Kan.

EXEMPLE 0.5.11. Les 2-foncteurs adjoints à gauche (resp. à droite) commutent avec les 2-extensions (resp. les 2-coextensions) de Kan.

1. PSEUDO-ALGEBRES

1.1. Pseudo-algèbres à gauche et à droite.

Soit T un 2-triple sur une 2-catégorie $\underline{\underline{C}}$. On a défini au paragraphe précédent les T-algèbres $b : TA \to A$; elles vérifient les relations

(1.1.1) $1_A = b \circ IA, \quad b \circ Tb = b \circ KA,$

qui expriment la commutativité des diagrammes suivants :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "IA"] \arrow[dr, "1_A"'] & TA \arrow[d, "b"] \\ & A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} T^2A \arrow[r, "Tb"] \arrow[d, "KA"'] & TA \arrow[d, "b"] \\ TA \arrow[r, "b"] & A \end{tikzcd}$$

Une *T-pseudo-algèbre* (une T-2-algèbre, suivant la terminologie que nous avions donnée dans [Bu'] ou encore une T-«lax algebra», suivant [Bun]) est un quadruplet (A, b, ι, κ), où

$$A \in Ob(\underline{\underline{C}}), \quad b : TA \to A \ (\underline{\underline{C}}),$$

et où ι, κ sont des 2-morphismes de $\underline{\underline{C}}$ de la forme

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "IA"] \arrow[dr, "1_A"'] & TA \arrow[d, "b"] \arrow[dl, phantom, "\iota"] \\ & A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} T^2A \arrow[r, "KA"] \arrow[d, "Tb"'] & TA \arrow[d, "b"] \\ TA \arrow[r, "b"] \arrow[ur, phantom, "\kappa"] & A \end{tikzcd}$$

(1.1.2) $\iota : 1_A \to b \circ IA, \quad \kappa : b \circ Tb \to b \circ KA,$

et vérifiant les axiomes de cohérence suivants :

(1.1.3) $(\kappa \circ ITA)^{1}(\iota \circ b) = b = (\kappa \circ TIA)^{1}(b \circ T\iota),$

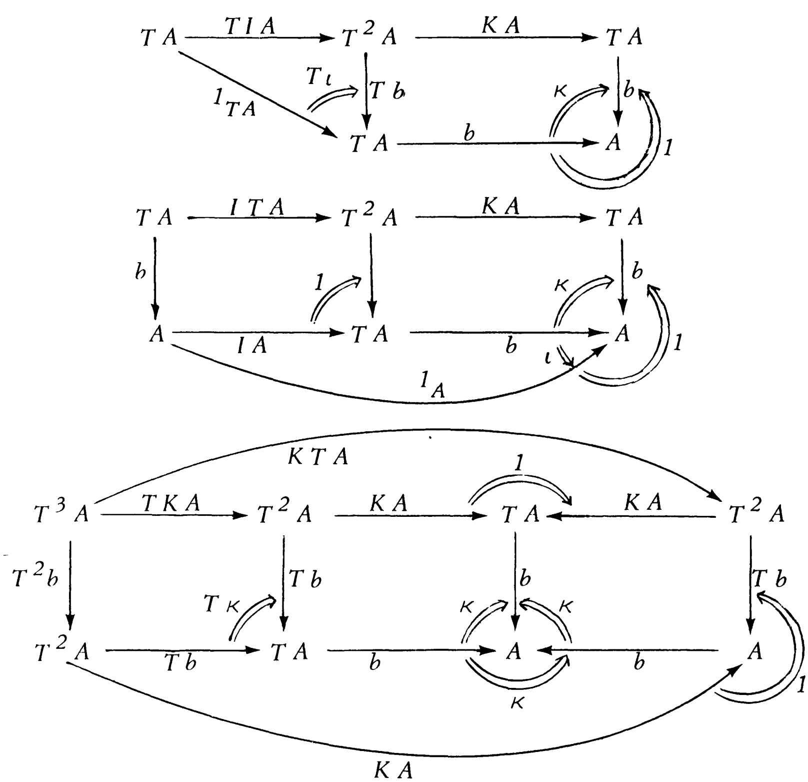
(1.1.4) $(\kappa \circ KTA)^{1}(\kappa \circ T^2 b) = (\kappa \circ TKA)^{1}(b \circ T\kappa),$

qui expriment la commutativité des diagrammes

$$\begin{tikzcd} & b \circ Tb \circ ITA \arrow[dr, "\kappa \circ ITA"] & \\ b \arrow[ur, "\iota \circ b"] \arrow[rr, "1_b"] \arrow[dr, "b \circ T\iota"'] & & b \\ & b \circ Tb \circ TIA \arrow[ur, "\kappa \circ TIA"'] & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & b\circ Tb\circ KTA \arrow[dr, "\kappa\circ KTA"] & \\
b\circ Tb\circ T^2b \arrow[ur, "\kappa\circ T^2b"] \arrow[dr, "b\circ T\kappa"'] & & b\circ KA\circ KTA \\
 & b\circ Tb\circ TKA \arrow[ur, "\kappa\circ TKA"'] &
\end{tikzcd}$$

ou encore par celle des 2-diagrammes ci-dessous (dans lesquels on note par 1 les 2-morphismes unités):



Nous dirons encore que (A, b, ι, κ) est une T-pseudo-algèbre à gauche pour distinguer cette notion de celle qu'on peut obtenir de façon analogue en renversant le sens des 2-morphismes ι et κ et qu'on appellera des *T-pseudo-algèbres à droite.* D'autres terminologies pourraient convenir, celles de *T-monades* et de *T-comonades*, puisque pour T trivial on obtient les monades et les comonades, comme on le verra dans le chapitre consacré aux exemples. On emploiera d'ailleurs, dans les exemples inspirés du cas $\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{Cat}}$, les termes de T-triples et T-cotriples. En fait les T-pseudo-algèbres à droite se ramènent à la donnée de T^{sym}-pseudo-algèbres à gauche, où T^{sym} est le 2-triple induit de façon évidente sur $\underline{\underline{C}}^{sym}$ par T.

1.2. Morphismes à gauche et à droite. (*)

Soit $\theta = (A, b, \iota, \kappa)$ et $\theta' = (A', b', \iota', \kappa')$ deux T-pseudo-algèbres (à gauche); on dit que $(f, \mu): \theta \to \theta'$ est un *morphisme à gauche (entre T-pseudo-algèbres à gauche)* si $f: A \to A'$ est un morphisme de $\underline{\underline{C}}$ et μ un 2-morphisme de la forme :

$$\begin{tikzcd} TA \arrow[r, "Tf"] \arrow[d, "b"'] & TA' \arrow[d, "b'"] \arrow[dl, phantom, "\Swarrow\mu"] \\ A \arrow[r, "f"'] & A' \end{tikzcd}$$

(1.2.1) $\quad \mu : b' \circ Tf \to f \circ b ,$

vérifiant les axiomes de cohérence :

(1.2.2) $\quad (\mu \circ IA) \perp (\iota' \circ f) = f \circ \iota ,$

(1.2.3) $\quad (\mu \circ KA) \perp (\kappa' \circ T^2 f) = (f \circ \kappa) \perp (\mu \circ Tb) \perp (b' \circ T\mu) ,$

qui s'expriment aussi par la commutativité des diagrammes :

$$\begin{tikzcd} & b' \circ IA' \circ f \arrow[dr, "\mu \circ IA"] & \\ f \arrow[ur, "\iota' \circ f"] \arrow[rr, "f \circ \iota"] & & f \circ b \circ IA \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & b \circ KA' \circ T^2 f \arrow[r, "\mu \circ KA"] & f \circ b \circ KA \\ b' \circ Tb' \circ T^2 f \arrow[ur, "\kappa' \circ T^2 f"] \arrow[dr, "b' \circ T\mu"'] & & \\ & b' \circ Tf \circ Tb \arrow[r, "\mu \circ Tb"'] & f \circ b \circ Tb \arrow[uu, "f \circ \kappa"'] \end{tikzcd}$$

(*) Le lecteur qui désire seulement connaître la signification de ces définitions peut se reporter au paragraphe 1-6, où les morphismes sont interprétés comme des pseudo-algèbres sur le 2-triple T^2.

et celle des 2-diagrammes :

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "IA"] \arrow[dr, "1_A"'] \arrow[rrr, bend left, "f"] & TA \arrow[r, "Tf"] \arrow[d, "b"] \arrow[d, phantom, shift right=3ex, "\iota"] & TA' \arrow[d, "b'"] \arrow[d, phantom, shift right=3ex, "\mu"] \arrow[d, phantom, shift left=3ex, "\iota'"] \arrow[r, phantom, shift left=3ex, "1"] & A' \arrow[l, "IA'"'] \arrow[dl, "1_{A'}"] \\
& A \arrow[r, "f"'] & A' \arrow[r, phantom, shift right=3ex, "1"] &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
T^2A \arrow[r, "Tb"] \arrow[d, "KA"'] \arrow[rrr, bend left, "T^2f"] & TA \arrow[r, "Tf"] \arrow[d, "b"] \arrow[dl, phantom, "\kappa"] & TA' \arrow[d, "b'"] \arrow[dl, phantom, "\mu"] \arrow[dr, phantom, "\kappa'"] \arrow[r, phantom, shift left=3ex, "T\mu"] & T^2A' \arrow[l, "Tb'"'] \arrow[d, "KA'"] \\
TA \arrow[r, "b"'] \arrow[rrr, bend right, "Tf"'] & A \arrow[r, "f"'] & A' \arrow[d, phantom, "\mu"] & TA' \arrow[l, "b"']
\end{tikzcd}$$

Par contre $(f, \mu) : \theta \to \theta'$ *est un morphisme à droite* (toujours entre T-pseudo-algèbres à gauche θ et θ') si $f: A \to A'$ $(\underline{\underline{C}})$ et si μ est un 2-morphisme dans le sens opposé :

$$\begin{tikzcd}
TA \arrow[r, "Tf"] \arrow[d, "b"'] & TA' \arrow[d, "b'"] \\
A \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, phantom, "\mu"] & A'
\end{tikzcd}$$

(1.2.4) $\quad \mu : f \circ b \to b' \circ Tf,$

vérifiant les axiomes de cohérence :

(1.2.5) $\quad (\mu \circ IA)^{1}(f \circ \iota) = \iota' \circ f,$

(1.2.6) $\quad (\mu \circ KA)^{1}(f \circ \kappa) = (\kappa' \circ T^2 f)^{1}\, (b' \circ T\mu)^{1} (\mu \circ Tb),$

c'est-à-dire, rendant commutatifs les diagrammes :

$$\begin{tikzcd}
& f \circ b \circ IA \arrow[dr, "\mu \circ IA"] & \\
f \arrow[ur, "f \circ \iota"] \arrow[rr, "\iota' \circ f"'] & & b' \circ Tf \circ IA
\end{tikzcd}$$

$$
\begin{tikzcd}
& f\circ b\circ KA \arrow[drr, "\mu\circ KA"] & & \\
f\circ b\circ Tb \arrow[ur, "f\circ\kappa"] \arrow[dr, "\mu\circ Tb"'] & & & b'\circ Tf\circ KA \\
& b'\circ Tf\circ Tb \arrow[r, "b'\circ T\mu"'] & b'\circ Tb'\circ T^2 f \arrow[ur, "\kappa'\circ T^2 f"'] &
\end{tikzcd}
$$

ou rendant commutatifs les 2-diagrammes :

$$
\begin{tikzcd}
T^2A \arrow[r, "KA"] \arrow[d, "Tb"'] \arrow[rrr, bend left, "T^2 f"] & TA \arrow[r, "Tf"] \arrow[d, "b"] \arrow[dl, phantom, "\kappa"] & TA' \arrow[d, "b'"] \arrow[phantom, loop above, "1"] \arrow[dl, phantom, "\mu"] \arrow[dr, phantom, "\kappa'"] & T^2A' \arrow[l] \arrow[d] \\
TA \arrow[r, "b"'] \arrow[rrr, bend right, "Tf"'] & A \arrow[r, "f"'] & A' \arrow[phantom, loop below, "\mu"] & TA' \arrow[l, "b'"] \arrow[phantom, loop right, "T\mu"]
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "IA"] \arrow[dr, "1_A"'] \arrow[rrr, bend left, "f"] & TA \arrow[r, "Tf"] \arrow[d, "b"] \arrow[dl, phantom, "\iota"] & TA' \arrow[d, "b'"] \arrow[phantom, loop above, "1"] \arrow[dl, phantom, "\mu"] \arrow[dr, phantom, "\iota'"] & A' \arrow[l] \arrow[dl, "1_{A'}"] \\
& A \arrow[r, "f"'] & A' \arrow[phantom, loop below, "\iota"] &
\end{tikzcd}
$$

De même entre les T-pseudo-algèbres à droite il y a des morphismes à droite et à gauche. Ces quatre notions se réduisent à deux en passant de T à T^{sym}. Pour un 2-cotriple on obtiendrait encore quatre notions, mais elles se réduisent aux cas précédents en passant de T à T^{op}, induit sur $\underline{\underline{C}}^{op}$ par T de façon évidente.

1.3. 2-morphismes.

Si $(f,\mu): \theta \to \theta'$ et $(g,\nu): \theta \to \theta'$ sont deux morphismes (à gauche sous-entendu lorsque cela n'est pas précisé), on dit que

$$\sigma : (f, \mu) \to (g, \nu) : \theta \to \theta'$$

est un 2-morphisme (entre morphismes à gauche de T-pseudo-algèbres) ou un *2-morphisme à gauche* si $\sigma : f \to g$ est un 2-morphisme de $\underline{\underline{C}}$ vérifiant la condition de cohérence :

(1.3.1) $\nu \mathbin{\vdots} (b' \circ T\sigma) = (\sigma \circ b) \mathbin{\vdots} \mu$,

qui exprime la commutativité du diagramme :

$$\begin{tikzcd}
 & b' \circ Tg \arrow[dr, "\nu"] & \\
b' \circ Tf \arrow[ur, "b' \circ T\sigma"] \arrow[dr, "\mu"'] & & g \circ b \\
 & f \circ b \arrow[ur, "\sigma \circ b"'] &
\end{tikzcd}$$

ou celle du 2-diagramme :

$$\begin{tikzcd}
TA \arrow[rr, bend left, "Tf"] \arrow[rr, bend right, "Tg"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow T\sigma"] \arrow[d, "b"'] & & TA' \arrow[d, "b'"] \arrow[d, phantom, shift right=4ex, "\mu"] \arrow[d, phantom, shift left=5ex, "\nu"] \\
A \arrow[rr, bend left, "f"] \arrow[rr, bend right, "g"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow \sigma"] & & A'
\end{tikzcd}$$

De même, si

$$(f, \mu) : \theta \to \theta' , \quad (g, \nu) : \theta \to \theta'$$

sont deux morphismes à droite (toujours entre T-pseudo-algèbres à gauche), on dit que $\sigma : (f, \mu) \to (g, \nu)$ *est un 2-morphisme à droite* si

$$\sigma : f \to g : A \to A' \quad (\underline{\underline{C}})$$

vérifie la relation :

(1.3.2) $\nu \mathbin{\vdots} (\sigma \circ b) = (b' \circ T\sigma) \mathbin{\vdots} \mu$,

donc rend commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & b'\circ Tf \arrow[rd, "b'\circ T\sigma"] & \\
f\circ b \arrow[ru, "\mu"] \arrow[rd, "\sigma\circ f"'] & & b'\circ Tg \\
 & g\circ b \arrow[ru, "\nu"'] &
\end{tikzcd}$$

et le 2-diagramme :

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
TA \arrow[r, bend left, "Tf"{name=U}] \arrow[r, bend right, "Tg"'{name=D}] \arrow[d, "b"'] \arrow[from=U, to=D, phantom, "T\sigma\Downarrow"] & TA' \arrow[d, "b'"] \arrow[d, phantom, "\mu\ \ \ \nu"] \\
A \arrow[r, bend left, "f"{name=U2}] \arrow[r, bend right, "g"'{name=D2}] \arrow[from=U2, to=D2, phantom, "\sigma\Downarrow"] & A'
\end{tikzcd}$$

1.4. Première et deuxième lois de composition.

Considérons trois T-pseudo-algèbres θ, θ', θ'' et deux morphismes à gauche

$$(f,\mu): \theta \to \theta', \qquad (f',\mu'): \theta' \to \theta'';$$

on définit un composé $(f'',\mu''): \theta \to \theta''$, noté $(f',\mu')\circ(f,\mu)$, en posant

(1.4.1) $f'' = f'\circ f$,

(1.4.2) $\mu'' = (f'\circ\mu)\mathbin{\dot{-}}(\mu'\circ Tf)$.

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=large]
TA \arrow[r, "Tf"] \arrow[rr, bend left, "Tf''"] \arrow[d, "b"'] & TA' \arrow[r, "Tf'"] \arrow[d, "b'"] \arrow[r, phantom, bend left, "\Downarrow 1"] & TA'' \arrow[d, "b''"] \arrow[d, phantom, "\mu''"] \\
A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "f''"'] \arrow[ru, phantom, "\mu"] & A' \arrow[r, "f'"] \arrow[ru, phantom, "\mu'"] \arrow[r, phantom, bend right, "1\Downarrow"] & A''
\end{tikzcd}$$

De même, si les morphismes sont à droite, le composé (f'',μ'') est défini par

$$(1.4.3) \quad f'' = f' \circ f ,$$

$$(1.4.4) \quad \mu'' = (\mu' \circ Tf) \perp (f' \circ \mu).$$

$$\begin{tikzcd}
TA \arrow[r, "Tf"] \arrow[d, "b"'] \arrow[rr, bend left, "Tf''"] & TA' \arrow[r, "Tf'"] \arrow[d, "b'"] \arrow[r, phantom, bend left=20, "\Uparrow 1"] & TA'' \arrow[d, "b''"] \\
A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "f''"'] \arrow[ur, phantom, "\mu \Nearrow"] & A' \arrow[r, "f'"] \arrow[ur, phantom, "\mu' \Nearrow"] \arrow[r, phantom, bend right=20, "1 \Downarrow"] & A'' \arrow[loop right, "\mu''"]
\end{tikzcd}$$

PROPOSITION 1.4.5. *Les relations* (1.4.1) *et* (1.4.2) *définissent un morphisme à gauche. Les relations* (1.4.3) *et* (1.4.4) *définissent un morphisme à droite.*

PREUVE (morphisme à gauche). Vérifions les relations (1.2.2) et (1.2.3) pour (f'', μ''):

$$(\mu'' \circ IA) \perp (\iota'' \circ f'') =$$

$$[\,[(f' \circ \mu) \perp (\mu' \circ Tf)] \circ IA] \perp (\iota'' \circ f' \circ f) =$$

$$(f' \circ \mu \circ IA) \perp (\mu' \circ Tf \circ IA) \perp (\iota'' \circ f' \circ f) =$$

$$(f' \circ \mu \circ IA) \perp [\,[(\mu' \circ IA') \perp (\iota'' \circ f')] \circ f] \underset{(1.2.2)}{=}$$

$$(f' \circ \mu \circ IA) \perp (f' \circ \iota' \circ f) = f' \circ [(\mu \circ IA) \perp (\iota' \circ f)] \underset{(1.2.2)}{=}$$

$$f' \circ f \circ \iota = f'' \circ \iota .$$

$$(\mu'' \circ KA) \perp (\kappa'' \circ T^2 f'') =$$

$$[\,[(f' \circ \mu) \perp (\mu' \circ Tf)] \circ KA] \perp (\kappa'' \circ T^2 f' \circ T^2 f) =$$

$$(f' \circ \mu \circ KA) \perp (\mu' \circ Tf \circ KA) \perp (\kappa'' \circ T^2 f' \circ T^2 f) =$$

$$(f' \circ \mu \circ KA) \perp [\,[(\mu' \circ KA') \perp (\kappa'' \circ T^2 f')] \circ T^2 f] \underset{(1.2.3)}{=}$$

$$(f' \circ \mu \circ KA) \perp (f' \circ \kappa' \circ T^2 f) \perp (\mu' \circ Tb' \circ T^2 f) \perp (b'' \circ T\mu' \circ T^2 f) =$$

$$[f' \circ [(\mu \circ KA) \perp (\kappa' \circ T^2 f)]\,] \perp (\mu' \circ Tb' \circ T^2 f) \perp (b'' \circ T\mu' \circ T^2 f) \underset{(1.2.3)}{=}$$

$$(f' \circ f \circ \kappa) \perp (f' \circ \mu \circ Tb) \perp (f' \circ b' \circ T\mu) \perp (\mu' \circ Tb' \circ T^2 f) \perp (b'' \circ T\mu' \circ T^2 f) \underset{(0.1.10)}{=}$$

$$(f' \circ f \circ \kappa) \perp (f' \circ \mu \circ Tb) \perp (\mu' \circ T\mu) \perp (b'' \circ T\mu' \circ T^2 f) \underset{(0.1.10)}{=}$$

$(f' \circ f \circ \kappa) ! (f' \circ \mu \circ Tb) ! (\mu' \circ Tf \circ Tb) ! (b'' \circ Tf' \circ T\mu) ! (b'' \circ T\mu' \circ T^2 f) =$
$(f'' \circ \kappa) ! (\mu'' \circ Tb) ! (b'' \circ T\mu'').$

(Morphisme à droite). Vérifions également (1.2.2) et (1.2.3):

$$(\mu'' \circ IA) ! (f'' \circ \iota) =$$

$$[\,[(\mu' \circ Tf) ! (f' \circ \mu)] \circ IA\,] ! (f' \circ f \circ \iota) =$$

$$(\mu' \circ Tf \circ IA) ! (f' \circ \mu \circ IA) ! (f' \circ f \circ \iota) \underset{(1.2.5)}{=}$$

$$(\mu' \circ Tf \circ IA) ! (f' \circ \iota' \circ f) = (\mu' \circ IA' \circ f) ! (f' \circ \iota' \circ f) \underset{(1.2.5)}{=}$$

$$\iota'' \circ f' \circ f = \iota'' \circ f''.$$

$$(\mu'' \circ KA) ! (f'' \circ \kappa) =$$

$$[\,[(\mu' \circ Tf) ! (f' \circ \mu)] \circ KA\,] ! (f' \circ f \circ \kappa) =$$

$$(\mu' \circ Tf \circ KA) ! (f' \circ \mu \circ KA) ! (f' \circ f \circ \kappa) \underset{(1.2.6)}{=}$$

$$(\mu' \circ Tf \circ KA) ! (f' \circ \kappa' \circ T^2 f) ! (f' \circ b' \circ T\mu) ! (f' \circ \mu \circ Tb) =$$

$$(\mu' \circ KA' \circ T^2 f) ! (f' \circ \kappa' \circ T^2 f) ! (f' \circ b' \circ T\mu) ! (f' \circ \mu \circ Tb) \underset{(1.2.6)}{=}$$

$$(\kappa'' \circ T^2 f' \circ T^2 f) ! (b'' \circ T\mu' \circ T^2 f) ! (\mu' \circ Tb' \circ T^2 f) ! (f' \circ b' \circ T\mu) ! (f' \circ \mu \circ Tb) \underset{(0.1.10)}{=}$$

$$(\kappa'' \circ T^2 f' \circ T^2 f) ! (b'' \circ T\mu' \circ T^2 f) ! (b'' \circ Tf' \circ T\mu) ! (\mu' \circ Tf \circ Tb) ! (f' \circ \mu \circ Tb) =$$

$$(\kappa'' \circ T^2 f'') ! (b'' \circ T\mu'') ! (\mu'' \circ Tb). \quad \blacksquare$$

Si

$$\sigma : (f, \mu) \to (g, \nu) : \theta \to \theta'$$

et

$$\sigma' : (f', \mu') \to (g', \nu') : \theta' \to \theta''$$

sont deux σ-morphismes, on définit également un composé

$$\sigma'' : (f'', \mu'') \to (g'', \nu'') : \theta \to \theta'',$$

où $(f'', \mu'') = (f', \mu') \circ (f, \mu)$, $(g'', \nu'') = (g', \nu') \circ (g, \nu)$ et où

(1.4.6) $\quad \sigma'' = \sigma' \circ \sigma$;

ceci aussi bien pour des morphismes à gauche qu'à droite.

PROPOSITION 1.4.7. *La relation* (1.4.6) *définit bien un 2-morphisme à gauche ou à droite selon que* σ *et* σ' *sont des 2-morphismes à gauche, ou à droite.*

PREUVE. Cette composition n'exprime rien d'autre que la composition de deux «cylindres» au sens de [Be]. ■

Nous appellerons *premières lois de composition* les lois ainsi définies; elles vont nous servir à définir les 2-catégories de pseudo-algèbres; et nous appellerons *deuxième loi de composition* la loi suivante : Si

$$\sigma : (f, \mu) \to (g, \nu), \quad \tau : (g, \nu) \to (h, \lambda)$$

sont deux 2-morphismes à gauche ou à droite (mais tous les deux du même côté), on en obtient un troisième $\rho : (f, \mu) \to (h, \lambda)$ en posant :

(1.4.8) $\rho = \tau \mathbin{!} \sigma$.

1.5. Catégories de pseudo-algèbres.

T est un 2-triple sur une 2-catégorie $\underline{\underline{C}}$.

PROPOSITION 1.5.1. *Les T-pseudo-algèbres à gauche $\theta = (A, h, \iota, \kappa)$ forment les objets d'une 2-catégorie $2\text{-}\overleftarrow{\underline{\underline{Alg}}}(T)$ dont les morphismes sont les morphismes à gauche et les 2-morphismes ceux définis en 1.3. Ils forment également les objets d'une 2-catégorie $2\text{-}\overrightarrow{\underline{\underline{Alg}}}(T)$ dont les morphismes sont les morphismes à droite.*

PREUVE. C'est un exercice facile sur les «carrés» et les «cylindres» tels qu'ils sont définis dans [Be]. ■

DEFINITION 1.5.2. *Soit θ et $\theta' = (A', h', \iota', \kappa')$ des T-pseudo-algèbres; on dit que $f : \theta \to \theta'$ est un morphisme strict si $f : A \to A'$ est un morphisme de $\underline{\underline{C}}$ et si :*

(1.5.3) $h' \circ Tf = f \circ h$;

(1.5.4) $\iota' \circ f = f \circ \iota$;

(1.5.5) $\kappa' \circ T^2 f = f \circ \kappa$.

Il est clair qu'il revient au même de dire que, en notant 1 le 2-morphisme identité de $f \circ h$, $(f, 1) : \theta \to \theta'$ est un morphisme à gauche, ou bien un morphisme à droite. On identifiera ces trois notions, de même que, si θ est telle que ι et κ sont des unités, on identifie θ et la T-algèbre (A, h). On notera $2\text{-}\underline{\underline{Alg}}(T)$ la 2-catégorie ayant pour objets les T-pseudo-algèbres, pour morphismes les morphismes stricts et pour 2-morphismes tous ceux de

2-$\overrightarrow{\underline{\underline{Alg}}}(T)$ par exemple. On notera $\underline{\underline{Alg}}(T)$ la 2-catégorie des T-algèbres, mais on voit apparaître d'autres 2-catégories notées $\overleftarrow{\underline{\underline{Alg}}}(T)$ et $\overrightarrow{\underline{\underline{Alg}}}(T)$, dont les objets sont les T-algèbres, mais dont les morphismes ne sont pas stricts (ce qui n'est pas interdit) et sont respectivement les morphismes à gauche et à droite lorsqu'on identifie les T-algèbres à des T-pseudo-algèbres à gauche.

Ceci n'épuise pas toutes les 2-catégories que nous pourrions mettre en évidence; elles consisteraient à parler des T-pseudo-algèbres à droite ou encore à partir d'un cotriple. On les obtient en changeant T, successivement en T^{op} ou T^{sym} (0.1.12).

Signalons enfin un cas particuler important :

DEFINITION 1.5.6. *Une T-pseudo-algèbre (A, h, ι, κ) telle que ι et κ soient des isomorphismes (i. e. 2-morphismes inversibles) s'appellera une T-iso-algèbre.*

1.6. Les morphismes interprétés comme pseudo-algèbres.

Le résultat (1.6.5) ci-dessous est à peu près évident. Son intérêt est de servir de guide à certaines définitions, par exemple pour trouver la «bonne» notion de morphisme entre 2-triples, et de donner une interprétation aux formules (1.2.2) et (1.2.3).

On note $\underline{2}$ la catégorie qui a seulement deux objets distincts 0 et 1 et un seul morphisme non unité $0 \to 1$. Si T est un 2-triple sur la 2-catégorie $\underline{\underline{C}}$, on définit par induction un 2-triple $T^{\underline{2}}$ sur $\underline{\underline{C}}^{\underline{2}}$, sans difficulté. On note $Fl(\underline{\underline{C}})$ l'ensemble des morphismes de la 2-catégorie $\underline{\underline{C}}$; on a alors la formule suivante :

$$(1.6.1) \qquad Fl(\underline{\underline{Alg}}(T)) \xrightarrow{\sim} Ob(\underline{\underline{Alg}}(T^{\underline{2}})),$$

qui est tout à fait triviale.

A la 2-catégorie $\underline{\underline{C}}$, on associe *une 2-catégorie des «squares»* [Be] notée $\overleftarrow{Sq}(\underline{\underline{C}})$ égale à la sous-2-catégorie pleine de $\overleftarrow{\underline{\underline{Ps}}}(\underline{2}, \underline{\underline{C}})$ dont les objets sont les 2-foncteurs $\underline{2} \to \underline{\underline{C}}$. Un tel foncteur est identifié à un morphisme $p: X_1 \to X_2$ $(\underline{\underline{C}})$, et un morphisme de $\overleftarrow{Sq}(\underline{\underline{C}})$ est un «square» $\tilde{\pi}: p \to p'$, où π est un 2-morphisme de $\underline{\underline{C}}$ de la forme :

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "p"'] & X'_1 \arrow[d, "p'"] \arrow[dl, phantom, "\swarrow\pi"] \\ X_2 \arrow[r, "f_2"'] & X'_2 \end{tikzcd}$$

Leur composition $\tilde{\pi}'' = \tilde{\pi}' \circ \tilde{\pi}$:

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "p"'] & X'_1 \arrow[r, "f'_1"] \arrow[d, "p'"] \arrow[dl, phantom, "\swarrow\pi"] & X''_1 \arrow[d, "p''"] \arrow[dl, phantom, "\swarrow\pi'"] \\ X_2 \arrow[r, "f_2"'] & X'_2 \arrow[r, "f'_2"'] & X''_2 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X_1 \arrow[r, "f''_1"] \arrow[d, "p"'] & X''_1 \arrow[d, "p''"] \arrow[dl, phantom, "\swarrow\pi''"] \\ X_2 \arrow[r, "f''_2"'] & X''_2 \end{tikzcd}$$

est définie par les relations :

(1.6.2) $\quad f''_1 = f'_1 \circ f_1 \,, \quad f''_2 = f'_2 \circ f_2 \,,$

(1.6.3) $\quad \pi'' = (f'_2 \circ \pi) \,\dot{}\, (\pi' \circ f_1)\,.$

Les 2-morphismes de $\overleftarrow{Sq}(\underline{\underline{C}})$ sont les «cylindres» de [Be]. On prolonge sans difficulté cette définition en un 2-foncteur :

(1.6.4) $\quad \overleftarrow{Sq} : 2\text{-}\underline{\underline{Cat}} \to 2\text{-}\underline{\underline{Cat}}\,,$

et on peut aussi construire, par exemple, un 2-triple $\overleftarrow{Sq}(T)$ sur $\overleftarrow{Sq}(\underline{\underline{C}})$, sans référence à aucun univers.

PROPOSITION 1.6.5. *On a une bijection*

$$Ob(2\text{-}\underline{\underline{Alg}}(\overleftarrow{Sq}(T))) \xrightarrow{\sim} Fl(2\text{-}\underline{\underline{Alg}}(T))\,.$$

2. SUR LE THEOREME DE LINTON ETENDU AUX STRUCTURES PSEUDO-ALGEBRIQUES

Nous allons donner l'analogue du théorème de Linton (0.4.21) pour les T-pseudo-algèbres. C'est un premier pas vers les structures telles qu'on les rencontre dans la pratique : définies par lois et axiomes.

Dans tout ce chapitre, T est un 2-triple sur la 2-catégorie $\underline{\underline{C}}$. On renvoie à (0.4.13) pour la définition de la 2-théorie $\underline{\underline{T}}$; on posera :

(2.1.1) $\overline{F} = F_{Kl}$, $\overline{U} = U_{Kl}$,

(2.1.2) $\psi \,\overline{\circ}\, \phi = \psi \circ_{\underline{\underline{T}}^{op}} \phi$ et $\overline{1}_X = 1_X^{(\underline{\underline{T}}^{op})}$ pour tout

$$Z \xrightarrow{\psi} Y \xrightarrow{\phi} Z \quad (\underline{\underline{T}}) .$$

(On a $\overline{1}_X = IX$.)

Par contre, tous les composés et éléments neutres non specifiés sont relatifs à $\underline{\underline{C}}$. Enfin on ne définira pas les foncteurs et les pseudo-foncteurs sur les 2-morphismes chaque fois que ces définitions auront un caractère d'évidence : en particulier lorsqu'il s'agit d'imiter formellement la définition déjà faite sur les morphismes (*).

2.1. Structure p.a. associée à une T-pseudo-algèbre.

DEFINITION 2.1.3. *On dit que* (A, H, s) *est une* T*-structure pseudo-algébrique (ou simplement p. a.) si* A *est un objet de* $\underline{\underline{C}}$ *et si*

$$(H, s) : \underline{\underline{T}}^{op} \to \underline{\underline{Cat}}$$

est un pseudo-foncteur (0.3.1) vérifiant les conditions suivantes («conditions d'homogénéité») :

(2.1.4) $HX = Hom_{\underline{\underline{C}}}(X, A)$,

(2.1.5) $H[\psi \,\overline{\circ}\, (\overline{F} f)] = (H\psi)(h_A f)$,

(2.1.6) $H[(\overline{F} g) \,\overline{\circ}\, \phi] = (h_A g)(H\phi)$,

(2.1.7) $(sY)(h_A f) = (h_A f)(sX)$,

(*) «Pour définir un foncteur $f: C \to C'$, nous nous contenterons de définir l'objet $f(S)$ de C' pour tout objet S de C, chaque fois qu'il n'y aura aucune ambiguïté sur la manière de définir $f(b)$ pour une flèche b de C...» (S.G.A. 3-exposé 1, M. DEMAZURE)

(2.1.8) $s(\xi,\psi)(h_A f) = s[\xi, \psi \mathbin{\bar\circ} (\bar F f)]$,

(2.1.9) $s[\xi, (\bar F g) \mathbin{\bar\circ} \phi] = s[\xi \mathbin{\bar\circ} (\bar F g), \phi]$,

(2.1.10) $s[(\bar F k) \mathbin{\bar\circ} \psi, \phi] = (h_A k) s(\psi, \phi)$,

cela, pour toutes données de la forme

$$R \xrightarrow{\xi} Z \xrightarrow{\psi} Y \xrightarrow{\phi} X \quad (\underline{\underline{T}}),$$
$$R \xrightarrow{k} Z \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} X \quad (\underline{\underline{C}}) .$$

Pour faciliter les références, traduisons la pseudo-fonctorialité (0. 3.1) de (H, s) dans les notations qui lui sont propres:

(2.1.11) $sX : 1_{HX} \to H \bar 1_X$,

(2.1.12) $s(\psi, \phi) : (H\psi)(H\phi) \to H(\psi \mathbin{\bar\circ} \phi)$,

avec les relations de cohérence:

(2.1.13) $s(\bar 1_Y, \phi) \,\text{!}\, [(sY)(H\phi)] = H\phi =$
$s(\phi, \bar 1_X) \,\text{!}\, [(H\phi)(sX)]$,

(2.1.14) $s(\xi \mathbin{\bar\circ} \psi, \phi) \,\text{!}\, [s(\xi, \psi)(H\phi)] =$
$s(\xi, \psi \mathbin{\bar\circ} \phi) \,\text{!}\, [(H\xi) s(\psi, \phi)]$.

Toutes ces formules de (2.1.4) à (2.1.14) sont écrites dans $\underline{\underline{Cat}}$. On interprétera

$\phi : Y \to X$ $(\underline{\underline{T}})$ comme un «Y-uplet de lois X-aires»,

$x : X \to A$ $(\underline{\underline{C}})$ comme un «X-uplet d'éléments de A »;

on utilise alors les notations ci-dessous de «pseudo-opérateur à droite», plus proches des manipulations concrètes (on a $x \in Ob(HX)$):

(2.1.15) $x.\phi = (H\phi)x : Y \to A$ $(\underline{\underline{C}})$,

(2.1.16) $S(x, X) = (sX)x : x \to x.\bar 1_X : X \to A$ $(\underline{\underline{C}})$,

(2.1.17) $S(x, \phi, \psi) = s(\psi, \phi)x : (x.\phi).\psi \to x.(\phi \circ_{\underline{\underline{T}}} \psi) : Z \to A$ $(\underline{\underline{C}})$.

Alors les formules de (2.1.5) à (2.1.10) se réécrivent, pour $x : X \to A$ $(\underline{\underline{C}})$:

(2.1.18) $(x \circ f).\psi = x.(Tf \circ \psi)$,

(2.1.19) $x.(\phi \circ g) = (x.\phi) \circ g$,

(2.1.20) $S(x \circ f, Y) = S(x, X) \circ f$,

(2.1.21) $S(x \circ f, \psi, \xi) = S(x, Tf \circ \psi, \xi)$, (2.1.22) $S(x, \phi \circ g, \xi) = S(x, \phi, Tg \circ \xi)$,

(2.1.23) $S(x, \phi, \psi \circ k) = S(x, \phi, \psi) \circ k$.

De même le groupe de formules (2.1.13), (2.1.14) devient:

(2.1.24) $S(x, \phi, 1_Y^{(\underline{\underline{T}})}) \mathbin{{}^{1}} [S(x.\phi, Y)] = x.\phi =$

$$S(x, 1_X^{(\underline{\underline{T}})}, \phi) \mathbin{{}^{1}} [S(x, X).\phi],$$

(2.1.25) $S(x, \phi, \psi \circ_{\underline{\underline{T}}} \sigma) \mathbin{{}^{1}} S(x.\phi, \psi, \xi) =$

$$S(x, \phi \circ_{\underline{\underline{T}}} \psi, \xi) \mathbin{{}^{1}} [S(x, \phi, \psi).\xi],$$

ces dernières relations étant schématisées par la commutativité des diagrammes suivants:

$$\begin{tikzcd}
 & (x.\phi).1_Y^{(\underline{\underline{T}})} \arrow[dr] & \\
x.\phi \arrow[ur] \arrow[rr, "1"] \arrow[dr] & & x.\phi \\
 & (x.1_X^{(\underline{\underline{T}})}).\phi \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & x.(\phi \circ_{\underline{\underline{T}}} \psi).\xi \arrow[dr] & \\
{[(x.\phi).\psi].\xi} \arrow[ur] \arrow[dr] & & x.(\phi \circ_{\underline{\underline{T}}} \psi \circ_{\underline{\underline{T}}} \xi) \\
 & (x.\phi).(\psi \circ_{\underline{\underline{T}}} \xi) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

PROPOSITION 2.1.26. *Soit* (A, H, s) *une T-structure p.a.; posons*

$$\theta = (A, b, \iota, \kappa), \text{ où:}$$

(2.1.27) $b = 1_A . 1_{TA}$,

(2.1.28) $\iota = S(1_A, A): 1_A \to 1_A . 1_A^{(\underline{\underline{T}})}$,

(2.1.29) $\kappa = S(1_A, 1_{TA}, 1_{T^2A}):$

$$(1_A . 1_{TA}).1_{T^2A} \to 1_A.(1_{TA} \circ_{\underline{\underline{T}}} 1_{T^2A})$$

(par exemple, dans cette dernière formule, il faut lire bien sûr

$$1_A : A \to A \quad (\underline{\underline{C}}),$$

tandis que

$$1_{TA} : TA \to A \quad (\underline{\underline{T}}) \quad \text{et} \quad 1_{T^2A} : T^2A \to TA \quad (\underline{\underline{T}});$$

alors θ est une T-pseudo-algèbre.

PREUVE. Calculons d'abord les sources et buts des 2-morphismes ι et κ :

$$1_A \cdot 1_A^{\underline{\underline{(T)}}} \underset{(0.4.14)}{=} 1_A \cdot IA \underset{(2.1.19)}{=} (1_A \cdot 1_{TA}) \circ IA \underset{(2.1.27)}{=} b \circ IA.$$

$$(1_A \cdot 1_{TA}) \cdot 1_{T^2A} = b \cdot 1_{T^2A} \underset{(2.1.18)}{=} 1_A \cdot Tb \underset{(2.1.19)}{=}$$
$$(1_A \cdot 1_{TA}) \circ Tb = b \circ Tb.$$

$$1_A \cdot (1_{TA} \circ_{\underline{\underline{T}}} 1_{T^2A}) = 1_A \cdot KA = (1_A \cdot 1_{TA}) \circ KA = b \circ KA.$$

Ceci est conforme aux diagrammes (1.1.2) :

$$\iota : 1_A \to b \circ IA, \qquad \kappa : b \circ Tb \to b \circ KA.$$

Vérifions maintenant les relations (1.1.3) et (1.1.4) :

$$(\kappa \circ ITA) \perp (\iota \circ b) =$$
$$[S(1_A, 1_{TA}, 1_{T^2A}) \circ ITA] \perp [S(1_A, A) \circ (1_A \cdot 1_{TA})] \underset{(2.1.23/20)}{=}$$
$$S(1_A, 1_{TA}, ITA) \perp S(1_A \cdot 1_{TA}, TA) \underset{(2.1.24)}{=} 1_A \cdot 1_{TA} = b.$$

$$(\kappa \circ TIA) \perp (b \circ T\iota) =$$
$$[S(1_A, 1_{TA}, 1_{T^2A}) \circ TIA] \perp [(1_A \cdot 1_{TA}) \circ TS(1_A, A)] \underset{(2.1.23/19)}{=}$$
$$S(1_A, 1_{TA}, TIA) \perp (1_A \cdot TS(1_A, A)) \underset{(2.1.22/18)}{=}$$
$$S(1_A, IA, 1_{TA}) \perp (S(1_A, A) \cdot 1_{TA}) \underset{(2.1.24)}{=} 1_A \cdot 1_{TA} = b.$$

$$(\kappa \circ KTA) \perp (\kappa \circ T^2 b) =$$
$$[S(1_A, 1_{TA}, 1_{T^2A}) \circ KTA] \perp [S(1_A, 1_{TA}, 1_{T^2A}) \circ T^2(1_A \cdot 1_{TA})] =$$
$$S(1_A, 1_{TA}, KTA) \perp S(1_A, 1_{TA}, T^2(1_A \cdot 1_{TA})) =$$
$$S(1_A, 1_{TA}, 1_{T^2A} \circ_{\underline{\underline{T}}} 1_{T^3A}) \perp S(1_A \cdot 1_{TA}, 1_{T^2A}, 1_{T^3A}) \underset{(2.1.25)}{=}$$
$$S(1_A, 1_{TA} \circ_{\underline{\underline{T}}} 1_{T^2A}, 1_{T^3A}) \perp [S(1_A, 1_{TA}, 1_{T^2A}) \cdot 1_{T^3A}] \underset{(2.1.18)}{=}$$
$$S(1_A, KA, 1_{T^3A}) \perp [1_A \cdot TS(1_A, 1_{TA}, 1_{T^2A})] =$$

$$[S(1_A, 1_{TA}, 1_{T^2A}) \circ TKA] \mathbin{\text{ı}} [(1_A . 1_{TA}) \circ TS(1_A, 1_{TA}, 1_{T^2A})] = (\kappa \circ TKA) \mathbin{\text{ı}} (b \circ T\kappa),$$

ce qui termine la preuve. ■

PROPOSITION 2.1.30. *Inversement si* $\theta = (A, b, \iota, \kappa)$ *est une T-pseudo-algèbre, on détermine une T-structure pseudo-algébrique* (A, H, s) *en posant (mêmes notations) :*

(2.1.31) $x . \phi = b \circ Tx \circ \phi,$

(2.1.32) $S(x, X) = \iota \circ x,$

(2.1.33) $S(x, \phi, \psi) = \kappa \circ T^2 x \circ T\phi \circ \psi,$

H et s étant alors définis par les formules (2.1.15/16/17).

PREUVE. Les relations de (2.1.18) à (2.1.23) sont immédiates. Vérifions (2.1.24) et (2.1.25) :

$$S(x, \phi, IY) \mathbin{\text{ı}} S(x . \phi, Y) =$$

$$(\kappa \circ T^2 x \circ T\phi \circ IY) \mathbin{\text{ı}} (\iota \circ b \circ Tx \circ \phi) =$$

$$(\kappa \circ ITA \circ Tx \circ \phi) \mathbin{\text{ı}} (\iota \circ b \circ Tx \circ \phi) =$$

$$[(\kappa \circ ITA) \mathbin{\text{ı}} (\iota \circ b)] \circ Tx \circ \phi \underset{(1.1.3)}{=} b \circ Tx \circ \phi = x . \phi.$$

$$S(x, IX, \phi) \mathbin{\text{ı}} [S(x, X) . \phi] =$$

$$(\kappa \circ T^2 x \circ TIX \circ \phi) \mathbin{\text{ı}} (b \circ T\iota \circ Tx \circ \phi) =$$

$$(\kappa \circ TIA \circ Tx \circ \phi) \mathbin{\text{ı}} (b \circ T\iota \circ Tx \circ \phi) =$$

$$[(\kappa \circ TIA) \mathbin{\text{ı}} (b \circ T\iota)] \circ Tx \circ \phi \underset{(1.1.3)}{=} b \circ Tx \circ \phi = x . \phi.$$

$$S(x, \phi \circ_{\underline{T}} \psi, \xi) \mathbin{\text{ı}} [S(x, \phi, \psi) . \xi] =$$

$$(\kappa \circ TKA \circ T^3 x \circ T^2 \phi \circ T\psi \circ \xi) \mathbin{\text{ı}} (b \circ T\kappa \circ T^3 x \circ T^2 \phi \circ T\psi \circ \xi) =$$

$$[(\kappa \circ TKA) \mathbin{\text{ı}} (b \circ T\kappa)] \circ T^3 x \circ T^2 \phi \circ T\psi \circ \xi \underset{(1.1.4)}{=}$$

$$[(\kappa \circ KTA) \mathbin{\text{ı}} (\kappa \circ T^2 b)] \circ T^3 x \circ T^2 \phi \circ T\psi \circ \xi =$$

$$(\kappa \circ KTA \circ T^3 x \circ T^2 \phi \circ T\psi \circ \xi) \mathbin{\text{ı}} (\kappa \circ T^2 b \circ T^3 x \circ T^2 \phi \circ T\psi \circ \xi) =$$

$$(\kappa \circ T^2 x \circ T\phi \circ KY \circ T\psi \circ \xi) \mathbin{\text{ı}} (\kappa \circ T^2 (b \circ Tx \circ \phi) \circ T\psi \circ \xi) =$$

$$S(x, \phi, \psi \circ_{\underline{T}} \xi) \mathbin{\text{ı}} S(x . \phi, \psi, \xi). \quad ■$$

PROPOSITION 2.1.34. *Les correspondances définies par les propositions 2.1.26 et 2.1.30 sont bijectives et réciproques l'une de l'autre.*

PREUVE. Si (A, H, s) est une T-structure pseudo-algébrique, il faut prouver (2.1.31/32/33) à partir de (2.1.27/28/29), i.e.

$$x.\phi = (1_A . 1_{TA}) \circ Tx \circ \phi ,$$

$$S(x, X) = S(1_A, A) \circ x ,$$

$$S(x, \phi, \psi) = S(1_A, 1_{TA}, 1_{T^2A}) \circ T^2 x \circ T\phi \circ \psi ;$$

ce qui se fait aisément grâce à (2.1.18/ .../23).

Inversement, si (A, b, ι, κ) est une T-pseudo-algèbre, il faut démontrer le système (2.1.27/28/29) à partir de (2.1.31/32/33), i.e.

$$b = b \circ T1_A \circ 1_{TA} , \quad \iota = \iota \circ 1_A , \quad \kappa = \kappa \circ T^2 1_A \circ T1_{TA} \circ 1_{T^2A} ,$$

ce qui est tout à fait immédiat. ∎

2.2. Morphismes entre structures p. a.

Les notations sont les mêmes que dans 2.1.

DEFINITION 2.2.1. *Si $\overline{H} = (A, H, s)$ et $\overline{H}' = (A', H', s')$ sont des T-structures p. a., on dit que*

$$(m, \tilde{\mu}) : \overline{H} \to \overline{H}'$$

est un homomorphisme à gauche si $m : A \to A'$ est un morphisme de $\underline{\underline{C}}$ tel que :

$$(b'_m, \tilde{\mu}) : (H, s) \to (H', s') : \underline{\underline{T}}^{op} \to \underline{\underline{Cat}}$$

est une pseudo-transformation naturelle à gauche (0.3.6), *où b'_m est la famille indexée par $X \in Ob(\underline{\underline{C}})$ des foncteurs de la forme* (0.4):

$$b_m X : b_A X \to b_{A'} X ,$$

et si de plus on a les relations d'« homogénéité » suivantes :

$$(2.2.2) \quad \tilde{\mu}((\bar{F} g) \bar{\circ} \phi) = (b_{A'} g)(\tilde{\mu}\phi),$$

$$(2.2.3) \quad \tilde{\mu}(\psi \bar{\circ} (\bar{F} f)) = (\tilde{\mu}\psi)(b_A f),$$

où

$$Z \xrightarrow{\psi} Y \xrightarrow{\phi} X \qquad (\underline{\underline{T}})$$

$$Z \xrightarrow{\ g\ } Y \xrightarrow{\ f\ } X \quad (\underline{\underline{C}}).$$

La définition des pseudo-transformations naturelles à gauche (0.3.6) dans les notations propres à $(h'_m, \widetilde{\mu})$ expriment que $\widetilde{\mu}$ est une famille de transformations naturelles, indexées par $\phi : Y \to X \ (\underline{\underline{T}})$, de la forme:

(2.2.4) $\quad \widetilde{\mu}\phi : (H'\phi)(h_m X) \to (h_m Y)(H\phi)$,

telles que

(2.2.5) $\quad (h_m X)(sX) = \widetilde{\mu}_{IX} \perp [(s'X)(h_m X)]$,

(2.2.6) $\quad \widetilde{\mu}(\psi \mathbin{\bar{\circ}} \phi) \perp [s'(\psi, \phi)(h_m X)] =$

$$[(h_m Z)s(\psi, \phi)] \perp [(\widetilde{\mu}\psi)(H\phi)] \perp [(H'\psi)(\widetilde{\mu}\phi)].$$

Par analogie avec (2.1.15) et (2.1.17), pour tout

$$Y \xrightarrow[\underline{\underline{T}}]{\ \phi\ } X \xrightarrow[\underline{\underline{C}}]{\ x\ } A$$

posons (en notant «.'» l'action à droite dans (H', s')):

(2.2.7) $\quad M(x, \phi) = (\widetilde{\mu}\phi)x : (m \circ x).'\phi \to m \circ (x.\phi)$,

de sorte que les relations d'homogénéité (2.2.2) et (2.2.3) se traduisent par

(2.2.8) $\quad M(x, \phi \circ g) = M(x, \phi) \circ g$,

(2.2.9) $\quad M(x \circ f, \psi) = M(x, Tf \circ \psi)$

et les relations de cohérence (2.2.5) et (2.2.6) par

(2.2.10) $\quad m \circ S(x, X) = M(x, IX) \perp S'(m \circ x, X)$,

(2.2.11) $\quad M(x, \phi \circ_{\underline{\underline{T}}} \psi) \perp S'(m \circ x, \phi, \psi) =$

$$[m \circ S(x, \phi, \psi)] \perp M(x.\phi, \psi) \perp [M(x, \phi).'\psi],$$

ce qu'on résumera par la commutativité des diagrammes:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
m \circ x \arrow[rr] \arrow[dr] & & m \circ (x.IX) \\
& (m \circ x).'IX \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& (m \circ x).'(\phi \circ_{\underline{\underline{T}}} \psi) \arrow[dr] & \\
{[(m \circ x).'\phi].'\psi} \arrow[ur] \arrow[d] & & m \circ [x.(\phi \circ_{\underline{\underline{T}}} \psi)] \\
{[m \circ (x.\phi)].'\psi} \arrow[r] & m \circ [(x.\phi).\psi] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

PROPOSITION 2.2.12. *Soit* $(m, \tilde{\mu}): \overline{H} \to \overline{H}'$ *un morphisme à gauche (on garde les notations de* (2.2.1)*); posons*

$$(2.2.13) \quad \mu = M(1_A, 1_{TA}): (m \circ 1_A).' 1_{TA} \to m \circ (1_A . 1_{TA})$$

et soit θ, θ' *les T-pseudo-algèbres associées par* (2.2.26) *à* $\overline{H}$ *et* $\overline{H}'$*; alors* $(m, \mu): \theta \to \theta'$ *est un morphisme à gauche.*

PREUVE. Calculons les source et but de μ :

$$m \circ (1_A . 1_{TA}) = m \circ b,$$

$$(m \circ 1_A).' 1_{TA} = 1_{A'}.'(Tm \circ 1_{TA}) = (1_{A'}.' 1_{TA}) \circ Tm = b' \circ Tm,$$

ce qui est conforme à la définition (1.2.1).

Vérifions maintenant (1.2.2) et (1.2.3) :

$$(\mu \circ IA) \perp (\iota' \circ m) =$$

$$(M(1_A, 1_{TA}) \circ IA) \perp (S'(1_{A'}, A') \circ m) \underset{(2.2.8)}{=}$$

$$M(1_A, IA) \perp S'(m \circ 1_A, A) \underset{(2.2.10)}{=} m \circ S(1_A, A) = m \circ \iota$$

comme souhaité.

$$(\mu \circ KA) \perp (\kappa' \circ T^2 m) =$$

$$(M(1_A, 1_{TA}) \circ KA) \perp [S'(1_{A'}, 1_{TA'}, 1_{T^2A'}) \circ T^2 m] =$$

$$M(1_A, KA) \perp S'(m, 1_{TA}, 1_{T^2A}) =$$

$$M(1_A, 1_{TA} \circ_T 1_{T^2A}) \perp S'(m \circ 1_A, 1_{TA}, 1_{T^2A}) \underset{(2.2.11)}{=}$$

$$[m \circ S(1_A, 1_{TA}, 1_{T^2A})] \perp M(1_A . 1_{TA}, 1_{T^2A}) \perp [M(1_A, 1_{TA}).' 1_{T^2A}] =$$

$$[m \circ S(1_A, 1_{TA}, 1_{T^2A})] \perp [M(1_A, 1_{TA}) \circ T(1_A . 1_{TA})] \perp [(1_{A'}.' 1_{TA'}) \circ TM(1_A, 1_{TA})]$$

$$= (m \circ \kappa) \perp (\mu \circ Tb) \perp (b' \circ T\mu)$$

comme souhaité. ■

PROPOSITION 2.2.14. *Inversement,* $(m, \mu): \theta \to \theta'$ *étant un morphisme à gauche entre T-pseudo-algèbres,* $(b'_m, \tilde{\mu}): \overline{H} \to \overline{H}'$ *est un morphisme à gauche en posant*

$$(2.2.15) \quad M(x, \phi) = \mu \circ Tx \circ \phi$$

et où $\tilde{\mu}$ *est défini par* (2.2.7).

PREUVE. (2.2.8) et (2.2.9) ne posent aucun problème; vérifions (2.2.10) et (2.2.11):

$$M(x, IX)\perp S'(m\circ x, X) =$$

$$(\mu\circ Tx\circ IX)\perp(\iota'\circ m\circ x) = [(\mu\circ IA)\perp(\iota'\circ m)]\circ x \underset{(1.2.2)}{=}$$

$$(m\circ\iota)\circ x = m\circ S(x, X).$$

$$M(x, \phi\circ_{\underline{\underline{T}}}\psi)\perp S'(m\circ x, \phi, \psi) =$$

$$(\mu\circ Tx\circ KX\circ T\phi\circ\psi)\perp(\kappa'\circ T^2 m\circ T^2 x\circ T\phi\circ\psi) =$$

$$[(\mu\circ KA)\perp(\kappa'\circ T^2 m)]\circ T^2 x\circ T\phi\circ\psi \underset{(1.2.3)}{=}$$

$$(m\circ\kappa\circ T^2 x\circ T\phi\circ\psi)\perp(\mu\circ Tb\circ T^2 x\circ T\phi\circ\psi)\perp(b'\circ T\mu\circ T^2 x\circ T\phi\circ\psi) =$$

$$(m\circ S(x, \phi, \psi))\perp(M(x.\phi, \psi))\perp(M(x, \phi).'\psi).\ \blacksquare$$

THEOREME 2.2.16. *Ces correspondances définissent un isomorphisme de 2-catégories* (pour les morphismes à gauche et aussi pour les morphismes à droite).

PREUVE. Il faut, comme dans (2.1.34), exhiber une formule d'inversion. On peut prendre :

$$(2.2.17)\quad M(x, \phi) = M(1_A, 1_{TA})\circ Tx\circ\phi\ .$$

Il faudrait de plus préciser comment se fait la correspondance entre 2-morphismes et démontrer la 2-fonctorialité de l'isomorphisme... ; tout cela est évident. ■

2.3. Réduction d'une 2-théorie.

On reprend ici toutes les conventions énoncées au début de ce chapitre.

En pratique pour définir une structure algébrique, on ne se donne pas toute la théorie $\overline{F}: \underline{\underline{C}} \to \underline{\underline{T}}$ mais seulement un petit ensemble de lois et de relations qui détermine le reste de la 2-théorie. Nous allons étudier ici l'analogue de ce type de réduction pour les structures p. a. Toutefois, il faut remarquer que cettr réduction ne pourra pas être aussi forte que pour les structures algébriques. Prenons un exemple : comme on le verra dans la deuxième partie de cette étude, les 2-monoïdes (monoïdes dans $\underline{\underline{Cat}}$) et les pseudomonoïdes sont respectivement les structures algébriques et p. a. d'une même 2-théorie, mais cependant, contrairement aux 2-monoïdes, un pseudo-monoïde n'est pas déterminé par son élément neutre et sa multiplication ; il faut se donner pour tout entier n positif une multiplication n-aire (phénomène qui échappe quand on regarde seulement le cas des catégories monoïdales). Ceci tient essentiellement au fait que, si (A, H, s) est une T-structure p. a., l'homomorphisme de 2-graphes $H : \underline{\underline{T}}^{op} \to \underline{\underline{Cat}}$ ne commute pas avec les 2-limites projectives (voir (2.4) pour le comportement de H vis à vis des 2-limites projectives). D'autre part on ne dispose pas encore de l'analogue du «critère de Beck» pour les p. a., ce qui rend inévitable le passage par les réductions si on veut montrer qu'une structure définie par «lois et relations» est une structure p. a.

Soit $\overline{F} : \underline{\underline{C}} \to \underline{\underline{T}}$ une 2-théorie, $\underline{\underline{C}}_0$ une sous-2-catégorie pleine de $\underline{\underline{C}}$ et $\underline{\underline{T}}_0$ la sous-2-catégorie pleine de $\underline{\underline{T}}$ dont les objets sont les mêmes que ceux de $\underline{\underline{C}}_0$. On a un carré commutatif de 2-foncteurs

$$\begin{tikzcd} \underline{\underline{C}}_0 \arrow[r] \arrow[d, "F_0"'] & \underline{\underline{C}} \arrow[d, "\overline{F}"] \\ \underline{\underline{T}}_0 \arrow[r] & \underline{\underline{T}} \end{tikzcd}$$

i. e. F_0 est un «sous-2-foncteur plein» de $\overline{F}$.

DEFINITION 2.3.1. *On dit que F_0 (ou simplement $\underline{\underline{T}}_0$) est une réduction de $\overline{F}$ (ou de $\underline{\underline{T}}$) ssi les deux conditions ci-dessous* (2.3.2) *et* (2.3.3) *sont satisfaites :*

(2.3.2) *Le 2-foncteur composé*

$$\underline{\underline{C}} \longrightarrow \underline{\underline{Cat}}^{\underline{\underline{C}}^{op}} \longrightarrow \underline{\underline{Cat}}^{\underline{\underline{C}}_0^{op}}$$

est pleinement fidèle, où le premier 2-foncteur est le 2-plongement de Yoneda et où le second est le 2-foncteur u^* (0.5.1), *si $u : \underline{\underline{C}}_0 \to \underline{\underline{C}}$ est la 2-inclusion pleine.* Il revient au même de dire que pour tout $X \in Ob(\underline{\underline{C}})$ le 2-foncteur d'inclusion $\underline{\underline{C}}_{0,X} \to \underline{\underline{C}}$ est la 2-extension de Kan (0.5.2) le long du 2-foncteur d'inclusion $\underline{\underline{C}}_0 \to \underline{\underline{C}}_{0,X}$, où $\underline{\underline{C}}_{0,X}$ est la sous-2-catégorie pleine de $\underline{\underline{C}}$ qui a pour objets ceux de $\underline{\underline{C}}_0$ auxquels on a rajouté l'objet X.

(2.3.3) *Tout morphisme* $\lambda : U \to X \quad (\underline{\underline{T}})$ *et tout 2-morphisme*

$$l : \lambda \to \mu : U \to X \quad (\underline{\underline{T}})$$

sont $\underline{\underline{T}}_0$*-petits et ils se décomposent de « façon unique ».*

Nous allons expliciter la signification de ces termes en (2.3.4) et (2.3.8) :

(2.3.4) Dire que λ est $\underline{\underline{T}}_0$*-petit* signifie qu'il existe

$$\alpha : U \to V \quad (\underline{\underline{T}}_0), \qquad q : V \to X \quad (\underline{\underline{C}})$$

tels que

(2.3.5) $\lambda = \alpha \,\overline{\circ}\, \overline{F} q.$

De même l est $\underline{\underline{T}}_0$-petit s'il admet une décomposition

$$a : \alpha \to \beta : U \to V \quad (\underline{\underline{T}}_0), \qquad q : V \to X \quad (\underline{\underline{C}}),$$

(2.3.6) $l = a \,\overline{\circ}\, \overline{F} q.$

Considérons une deuxième décomposition de λ définie par :

$$\alpha' : U \to V' \quad (\underline{\underline{T}}_0), \qquad q' : V' \to X \quad (\underline{\underline{C}}),$$
$$\lambda = \alpha' \,\overline{\circ}\, \overline{F} q'.$$

Entre ces deux décompositions (α, q) et (α', q') de λ on peut avoir la relation suivante : il existe $m : V \to V' \quad (\underline{\underline{C}}_0)$ tel que

(2.3.7) $\alpha' = \alpha \,\overline{\circ}\, \overline{F} m\,, \quad q = q' \circ m\,,$

qui s'exprime par la commutativité des diagrammes :

$$(\underline{\underline{T}}_0) \quad \begin{tikzcd} & V \arrow[dd, "\overline{F} m"] \\ U \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[dr, "\alpha'"'] & \\ & V' \end{tikzcd} \qquad\qquad \begin{tikzcd} V \arrow[dd, "m"'] \arrow[dr, "q"] & \\ & X \\ V' \arrow[ur, "q'"'] & \end{tikzcd} \quad (\underline{\underline{C}})$$

Cette relation engendre sur l'ensemble des décompositions de λ une relation d'équivalence.

De même si on a une deuxième décomposition de l :

$$a' : \alpha' \to \beta' : U \to V' \quad (\underline{\underline{T}}_0), \qquad q' : V' \to X \quad (\underline{\underline{C}}),$$
$$l = a' \,\overline{\circ}\, \overline{F} q'\,,$$

on a la relation suivante entre ces deux décompositions (a, q) et (a', q') :

il existe $m : V \to V'$ $(\underline{\underline{C}}_0)$ tel que

$$a' = a \,\bar{\circ}\, \bar{F} m, \qquad q = q' \circ m .$$

Cette relation engendre également une relation d'équivalence et la condition d'« unicité » énoncée signifie que

(2.3.8) *toutes les décompositions de* λ *et de* l, *respectivement, sont équivalentes entre elles.*

DEFINITION 2.3.9. *Soit* $F_0 : \underline{\underline{C}}_0 \to \underline{\underline{T}}_0$ *un 2-foncteur (qui peut être quelconque dans le cadre de cette définition). On dit que* (h_0, H_0, s_0) *est une* F_0*-structure p. a. si*

$$(H_0, s_0) : \underline{\underline{T}}_0^{op} \to \underline{\underline{Cat}}$$

est un pseudo-foncteur et $h_0 : \underline{\underline{C}}_0^{op} \to \underline{\underline{Cat}}$ *un 2-foncteur tels qu'on ait les « relations d'homogénéité » suivantes calquées sur celles de* (2.1.3) *:*

(2.3.10) $H_0 X = h_0 X$,

(2.3.11) $H_0(\beta \,\bar{\circ}\, (F_0 u)) = (H_0 \beta)(h_0 u)$,

(2.3.12) $(s_0 V)(h_0 u) = (h_0 u)(s_0 U)$,

(2.3.13) $s_0(\gamma, \beta)(h_0 u) = s_0(\gamma, \beta \,\bar{\circ}\, (F_0 u))$,

(2.3.14) $s_0(\gamma, F_0 v) \,\bar{\circ}\, \alpha) = s_0(\gamma \,\bar{\circ}\, (F_0 v), \alpha)$,

(2.3.15) $s_0((F_0 w) \,\bar{\circ}\, \beta, \alpha) = (h_0 w) s_0(\beta, \alpha)$,

pour les données suivantes :

$$S \xrightarrow{\ \gamma\ } W \xrightarrow{\ \beta\ } V \xrightarrow{\ \alpha\ } U \qquad (\underline{\underline{T}}_0),$$

$$S \xrightarrow{\ w\ } W \xrightarrow{\ v\ } V \xrightarrow{\ u\ } U \qquad (\underline{\underline{C}}_0),$$

où le symbole « $\bar{\circ}$ » note la composition dans $\underline{\underline{T}}_0^{op}$ et où ci-dessous le symbole « $\bar{1}_X$ » note une unité $X \to X$ dans cette 2-catégorie. La pseudo-fonctorialité de (H_0, s_0) s'exprime par les « relations de cohérence » :

(2.3.16) $s_0(\bar{1}_V, \alpha)^{\perp} [(s_0 V)(H_0 \alpha)] = H_0 \alpha =$
$s_0(\alpha, \bar{1}_U)^{\perp} [(H_0 \alpha)(s_0 U)]$,

(2.3.17) $s_0(\gamma \,\bar{\circ}\, \beta, \alpha)^{\perp} [s_0(\gamma, \beta)(H_0 \alpha)] =$
$s_0(\gamma, \beta \,\bar{\circ}\, \alpha)^{\perp} [(H\gamma) s_0(\beta, \alpha)]$.

PROPOSITION 2.3.18. *On suppose à nouveau que* F_0 *est une réduction* (2.3.1) *de* $\overline{F}$. *La donnée d'une* F_0*-structure p. a.* (h_0, H_0, s_0) *telle que* h_0 *soit la restriction à* $\underline{\underline{C}}_0$ *d'un foncteur représentable* $h_A : \underline{\underline{C}}^{op} \to \underline{\underline{Cat}}$, *où* $A \in Ob(\underline{\underline{C}})$, *se prolonge en une* T*-structure p. a.* (2.1.3) (A, H, s), *de façon unique.*

PREUVE. Pour tout $X \in Ob(\underline{\underline{C}})$, posons :

(2.3.19) $\quad HX = h_A X.$

Pour tout $\lambda : U \to X \ (\underline{\underline{T}})$ il existe une décomposition $\lambda = \alpha \,\overline{\circ}\, (\overline{F} q)$ (2.3.5) et on pose

(2.3.20) $\quad H_1 \lambda = (H_0 \alpha)(h_A q)$.

Les relations d'unicité (2.3.7) montrent que $H_1 \lambda$ ne dépend pas de la décomposition choisie, car, si (α', q') est une autre décomposition de λ :

$$(H_0 \alpha)(h_A q) \underset{(2.3.7)}{=}$$
$$(H_0 \alpha)(h_A m)(h_A q') = (H_0 \alpha)(h_0 m)(h_A q') \underset{(2.3.11)}{=}$$
$$H_0 (\alpha \,\overline{\circ}\, (F_0 m))(h_A q') \underset{(2.3.7)}{=} (H_0 \alpha')(h_A q').$$

En particulier, on en tire :

(2.3.21) $\quad H_0 \alpha = H_1 \alpha$.

Soit maintenant $\phi : Y \to X \ (\underline{\underline{T}})$; on note $H\phi : HX \to HY$ l'unique foncteur tel que, pour tout $p : U \to Y \ (\underline{\underline{C}})$ avec $U \in Ob(\underline{\underline{C}}_0)$, on ait la relation :

(2.3.22) $\quad (h_A p)(H\phi) = H_1 ((\overline{F} p) \,\overline{\circ}\, \phi)$,

foncteur dont l'existence et l'unicité sont assurées par (2.3.2) exprimé au moyen des 2-coextensions de Kan et par le fait que h_A commute aux 2-coextensions de Kan (0.5.10), cette propriété étant étendue implicitement aux 2-morphismes de la forme

$$p \to p' : U \to Y \quad (\underline{\underline{C}}),$$

puis aux 2-morphismes

$$\phi \to \phi' : Y \to X \quad (\underline{\underline{T}}).$$

On va maintenant montrer que pour tout $\lambda : U \to X \ (\underline{\underline{T}})$, $U \in Ob(\underline{\underline{C}}_0)$, on a :

(2.3.23) $H\lambda = H_1\lambda$.

Soit $p : U' \to U$ $(\underline{\underline{C}}_0)$; $H\lambda$ est caractérisé par les relations :

$$(h_A p)(H\lambda) \underset{(2.3.22)}{=} H_1\lambda' , \quad \text{où } \lambda' = (\overline{F}p)\,\bar\circ\,\lambda .$$

Or il existe une décomposition $\lambda = \alpha\,\bar\circ\,(\overline{F}q)$, donc

$$H_1\lambda' = H_1((\overline{F}p)\,\bar\circ\,\alpha\,\bar\circ\,(\overline{F}q)) \underset{(2.3.20)}{=} H_0((\overline{F}p)\,\bar\circ\,\alpha)(h_A q) \underset{(2.3.21)}{=}$$

$$H_1(Fp\,\bar\circ\,\alpha)(h_A q) \underset{(2.3.22)}{=} (h_A p)(H_0\alpha)(h_A q) \underset{(2.3.20)}{=}$$

$$(h_A p)H_1(\alpha\,\bar\circ\,(Fq)) = (h_A p)(H_1\lambda)$$

ce qui, d'après la caractérisation citée de $H\lambda$, démontre (2.3.23). On a donc en combinant (2.3.22) et (2.3.23) :

(2.3.24) $H\alpha = H_0\alpha$,

qui signifie que H prolonge H_0 sur les morphismes. On étend sans difficulté la définition de H sur les 2-morphismes et on constate encore que H prolonge H_0 .

Avant de continuer la construction de s , résumons ce qui précède dans la propriété suivante :

(2.3.25) Pour tout $\phi : Y \to X$ $(\underline{\underline{T}})$ le foncteur $H\phi : HX \to HY$ est caractérisé par la commutativité du diagramme :

$$\begin{tikzcd} HV & & HY \arrow[ll, "h_A p"'] \\ HU \arrow[u, "H_0\alpha"] & & HX \arrow[ll, "h_A q"] \arrow[u, "H\phi"'] \end{tikzcd}$$

chaque fois que dans $\underline{\underline{T}}$ on a un carré commutatif

$$\begin{tikzcd} V \arrow[rr, "\overline{F}p"] \arrow[d, "\alpha"'] & & Y \arrow[d, "\phi"] \\ U \arrow[rr, "\overline{F}q"'] & & X \end{tikzcd}$$

avec $\alpha : V \to U$. $(\underline{\underline{T}}_0)$, $q : U \to X$, $p : V \to Y$ $(\underline{\underline{C}})$, i. e. la relation

(2.3.26) $(\overline{F}p)\,\bar\circ\,\phi = \alpha\,\bar\circ\,(\overline{F}q)$

entraîne

(2.3.27) $(h_A\, p)(H\phi) = (H\alpha)(h_A\, q)$,

ceci étant étendu de façon évidente aux 2-morphismes.

Nous n'avons pas encore utilisé la pseudo-fonctorialité de (H_0, s_0) ; nous allons construire s . Soit

$$Z \xrightarrow{\psi} Y \xrightarrow{\phi} X$$

deux morphismes de $\underline{\underline{T}}$; la transformation naturelle (2.1.12)

$$s(\psi, \phi) : (H\psi)(H\phi) \to H(\psi \,\bar{\circ}\, \phi)$$

est déterminée par les transformations naturelles $(h_A\, p)\, s(\psi, \phi)$ (puisque h_A commute avec les 2-coextensions de Kan) pour tout

$$p : U \to X \quad (\underline{\underline{C}}) \quad \text{et} \quad U \in Ob(\underline{\underline{C}}_0).$$

Pour cela considérons un diagramme commutatif de la forme :

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "\bar{F}p''"] \arrow[d, "\beta"'] & Z \arrow[d, "\psi"] \\ V \arrow[r, "\bar{F}p'"] \arrow[d, "\alpha"'] & Y \arrow[d, "\phi"] \\ U \arrow[r, "\bar{F}p"'] & X \end{tikzcd}$$

où

$$U \xrightarrow{p} X, \quad V \xrightarrow{p'} Y, \quad W \xrightarrow{p''} Z$$

sont dans $\underline{\underline{C}}$. Un tel diagramme existe et est unique d'après (2.3.3) à une équivalence près (que nous laissons au lecteur le soin de préciser). Alors $s(\psi, \phi)$ sera l'unique morphisme déterminé par les relations suivantes et leurs prolongements aux 2-morphismes :

(2.3.28) $(h_A\, p'')\, s(\psi, \phi) = s_0(\beta, \alpha)(h_A\, p)$.

Alors il est clair que

(2.3.29) $s(\beta, \alpha) = s_0(\beta, \alpha)$.

De même, pour tout $X \in Ob(\underline{\underline{C}})$, $sX : 1_{HX} \to H\, 1_X$ est l'unique transformation naturelle telle que

(2.3.30) $(h_A p)(sX) = (s_0 X)(h_A p)$

pour tout $p: U \to X$ $(\underline{\underline{C}})$, $U \in Ob(\underline{\underline{C}}_0)$. On a

(2.3.31) $sU = s_0 U$.

La propriété (2.3.2) et les relations de cohérence (2.3.16) et (2.3.17) permettent d'achever la démonstration sans difficulté. ■

2.4. H commute avec les crochets de $\varprojlim$.

La relation (2.1.4) $HX = h_A X$ montre que H commute avec les $\varprojlim$ (manière abrégée de dire que H commute avec toutes les 2-coextensions de Kan) qui proviennent de la catégorie $\underline{\underline{C}}$. Plus précisément, puisque $\bar{F}$ est un adjoint à gauche, il commute ainsi que h_A avec les $\varprojlim$ (voir (0.5.10) et (0.5.11)). Par exemple si $\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{Cat}}$, $A = \underline{A}$, $X = \underline{X}$ sont des petites catégories, on a $H\underline{X} = \underline{A}^{\underline{X}}$; mais par contre pour tout objet $\xi \in Ob(\underline{X})$, identifié avec le foncteur $\underline{1} \to \underline{X}$ qui transforme 0 en ξ, $H\xi: \underline{A}^{\underline{X}} \to \underline{A}$ n'est pas une projection canonique de cette $\varprojlim$; et plus généralement, comme on a eu déjà l'occasion de le dire, H ne commute pas avec les $\varprojlim$ de morphismes de $\underline{\underline{T}}$ (même lorsque ce sont des images par $\bar{F}$ de morphismes de $\underline{\underline{C}}$).

Il reste toutefois une propriété très utile de H :

PROPOSITION 2.4.1. *H commute avec les 2-crochets projectifs (dans $\underline{\underline{T}}^{op}$) pour les 2-limites projectives images par $\bar{F}$ de 2-limites projectives de $\underline{\underline{C}}^{op}$.* Précisons : Si $\phi: \underline{\underline{I}} \to \underline{\underline{C}}$ admet une 2-limite inductive et si $q: \phi \to X$ est un morphisme de 2-adjonction (0.4) vers un objet X de $\underline{\underline{C}}$, on en tire une 2-limite inductive $\bar{F}q: \bar{F}\phi \to X$ dans $\underline{\underline{T}}$, et pour tout morphisme $q': \phi \to X'$ dans $\underline{\underline{C}}^{\underline{I}}$, on a

(2.4.2) $H[q'] = [Hq']$

(voir définition du crochet en (0.5)).

PREUVE. C'est une conséquence immédiate des relations d'homogénéité. ■

Cette propriété donne aux pseudo-structures une grande maniabilité. Par exemple : si p et n sont deux nombres entiers, un p-uplet de lois n-aires $(\phi_1, \dots, \phi_p)$ (i.e. $\phi_i: A^n \to A$, $1 \leqslant i \leqslant p$ et A est un objet de $\underline{\underline{C}}$) donne

$$H[\phi_1, \dots, \phi_p] = [H\phi_1, \dots, H\phi_p] ,$$

qui permet de «calculer» le premier membre en le ramenant au calcul des $H\phi_i$.

BIBLIOGRAPHIE

Be. J. BENABOU, Introduction to bicategories, *Lecture Notes in Math.* 47, Springer (1967).

Bu. A. BURRONI, T-categories, *Cahiers Topo. et Géo. diff.* XII-3 (1971).

Bu'. A. BURRONI, Structures 2-algébriques, Colloque Amiens 1973, *Cahiers Topo. et Géo. diff.* XIV-2 (1973).

Bun. M. C. BUNGE, *Coherent extensions and relational algebras*, multigraphié, Zürich (Mars 1973).

Li. F. LINTON, Relative functorial semantics: adjointness results, *Lecture Notes in Math.* 99, Springer (1969).

U.E.R. de Mathématiques
Université Paris 7
2 Place Jussieu, 75005 PARIS

et

Théorie et Applications des Catégories
U.E.R. de Mathématiques
33 rue Saint-Leu, 80039 AMIENS CEDEX