CAHIERS DE
TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
CATÉGORIQUES

GÉRARD BOURDAUD

# Espaces d'Antoine et semi-espaces d'Antoine

*Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques*, tome 16, nº 2 (1975), p. 107-133

<http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1975__16_2_107_0>

CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE

Vol. XVI-2 (1975)

# ESPACES D'ANTOINE ET SEMI-ESPACES D'ANTOINE

par Gérard BOURDAUD

## INTRODUCTION

Les fondements théoriques de cet article se trouvent dans le travail d'ANTOINE [1] sur les «catégories d'ensembles structurés» (une C.E.S. étant une catégorie munie d'un foncteur d'oubli vers la catégorie des ensembles et «contenant les morphismes constants»). Rappelons, en substance, ce que montre ANTOINE : étant donnée une C.E.S. $\mathcal{C}$, il existe une «plus petite» C.E.S. $\hat{\mathcal{C}}$, complète et fermée contenant $\mathcal{C}$ (dans une terminologie plus récente : $\hat{\mathcal{C}}$ est une catégorie cartésienne fermée dont l'objet final est un générateur).

Une fois assuré de l'existence de la catégorie $\hat{\mathcal{C}}$, on peut être tenté, dans les cas particuliers, d'en donner une représentation aussi «concrète» que possible. On procède en général de la façon suivante : supposons connue une C.E.S., disons $\tilde{\mathcal{C}}$, complète fermée contenant $\mathcal{C}$ ; $\tilde{\mathcal{C}}$ n'est pas nécessairement la plus petite des telles catégories; mais la propriété universelle de $\hat{\mathcal{C}}$ nous assure que $\hat{\mathcal{C}}$ s'identifie à une sous-catégorie de $\tilde{\mathcal{C}}$. On peut alors se demander quelles conditions imposer à un objet de $\tilde{\mathcal{C}}$ pour qu'il s'identifie à un objet de $\hat{\mathcal{C}}$ ; on a, bien sûr, intérêt à donner à ces conditions la forme la plus simple possible.

Cette méthode est utilisée systématiquement par MACHADO [11], pour étudier le cas où $\mathcal{C}$ est la catégorie des espaces topologiques : il utilise comme catégorie $\tilde{\mathcal{C}}$ la catégorie des espaces quasi-topologiques — Limesraüme de KOWALSKY [10], FISCHER [8] — et donne ainsi une condition nécessaire et suffisante (Prop. 2.6) pour qu'une quasi-topologie «soit» un objet de $\hat{\mathcal{C}}$. Malheureusement, cette condition est très complexe et donc peu utilisable en pratique.

MACHADO n'obtient une formalisation simple que dans le cas des structures séparées : il montre en effet (Prop. 4.5) que les $\hat{\mathcal{C}}$-objets séparés sont simplement les pseudo-topologies (au sens de CHOQUET [6]) séparées.

Au § I, nous remettons en chantier la condition de MACHADO, pour la scinder en trois conditions très simples - l'une d'entre elles étant la condition pseudo-topologique, les deux autres étant vérifiées trivialement par les quasi-topologies séparées.

Au § II, nous abordons le cas où $\mathcal{C}$ est la catégorie des espaces semi-topologiques (ou espaces à fermeture, au sens de ČECH [5] - voir aussi [7]). $\tilde{\mathcal{C}}$ est, là encore, la catégorie des espaces quasi-topologiques. Le résultat obtenu est surprenant : la catégorie $\hat{\mathcal{C}}$ est la catégorie des espaces pseudo-topologiques.

Dans un travail antérieur [3,4], nous avons étudié les quasi-topologies et les pseudo-topologies du point de vue des structures de convergence (au sens de MOORE et SMITH [12]) qui leur sont associées. Il était intéressant de caractériser de même les espaces d'Antoine par leurs structures de convergence : c'est ce que nous faisons au § III, en reformulant en termes de convergence les conditions dégagées au § I; cette reformulation a d'ailleurs pour effet de les «concrétiser» encore un peu.

Le quatrième paragraphe n'est pas écrit : nous voudrions y aborder le cas où $\mathcal{C}$ est la catégorie des structures uniformes. On peut prévoir que la première difficulté est de ne pas disposer d'avance d'une catégorie $\tilde{\mathcal{C}}$.

Nous reprenons les notations de MACHADO [11], les lettres grasses servant à distinguer les espaces de leurs ensembles sous-jacents. Si $\mathbf{X}$ est un espace quasi-topologique, on note $\nu\mathbf{X}$ l'espace semi-topologique sous-jacent : un voisinage de $x \in X$ pour cette semi-topologie est une partie de $X$ qui appartient à tout filtre $\mathbf{X}$-convergeant vers $x$ (cf. [3], prop. I.1.1). $\tilde{\mathbf{X}}$ désigne l'espace topologique sous-jacent à $\mathbf{X}$ : les ouverts de $\tilde{\mathbf{X}}$ sont les parties de $X$ qui sont $\nu\mathbf{X}$-voisinages de chacun de leurs points. $\mathcal{V}(x)$ désigne le filtre des voisinages de $x$, le contexte indiquant pour quelle semi-topologie.

$\mathcal{Q}\mathcal{T}$ désigne la catégorie des quasi-topologies. $\mathcal{S}\mathcal{T}$ désigne la sous-catégorie pleine de $\mathcal{Q}\mathcal{T}$ dont les objets sont les semi-topologies ( [11] p. 12 ), isomorphe à la catégorie des espaces à fermeture ( [3], proposition I.1.6 et [7] ).

Il n'existe pas de terminologie standard pour la notion de semi-topologie ; dans les texte anglais on rencontre souvent, pour désigner le même type de structure, les termes : «pretopology», «neighbourhood space».

$\mathcal{S}\mathcal{T}$ est une sous-catégorie pleine de $\mathcal{P}\mathcal{T}$, catégorie des pseudo-topologies ( [11] prop. 3.4 et [6] ). $\mathcal{S}\mathcal{T}$ contient comme sous-catégorie pleine la catégorie $\mathcal{T}$ des espaces topologiques.

D'après ANTOINE ( [1] p. 407 ), il existe deux plus petites catégories complètes fermées, $\mathfrak{Ant}$ et $\mathcal{S}\mathfrak{Ant}$, contenant respectivement $\mathcal{T}$ et $\mathcal{S}\mathcal{T}$. Le foncteur d'inclusion de $\mathcal{S}\mathcal{T}$ dans $\mathcal{P}\mathcal{T}$ admet un adjoint ( [3], prop. I.1.1 et I.1.13 ) : il est donc compatible avec les structures initiales ( [3] prop. I.3.10 ) ; il est également compatible avec les structures canoniques ( [11] prop. 1.3 en remplaçant $\mathcal{T}$ par $\mathcal{S}\mathcal{T}$ ). Il en résulte que $\mathcal{S}\mathfrak{Ant}$ s'identifie à une sous-catégorie pleine de $\mathcal{P}\mathcal{T}$, de même façon que $\mathfrak{Ant}$ ( [11] § 1 ). Les objets de $\mathfrak{Ant}$ et de $\mathcal{S}\mathfrak{Ant}$ s'appellent respectivement espaces d'Antoine et semi-espaces d'Antoine.

REMARQUE. Depuis la conception de cet article ( sept. 74 ), des doutes nous sont venus quant à l'exactitude du théorème d'Antoine. Si ces doutes sont confirmés, il est probable que la catégorie $\mathfrak{Ant}$ n'a pas la propriété universelle annoncée par ANTOINE. Il faut alors se contenter d'une définition «relative» de cette catégorie : parmi toutes les sous-catégories de $\mathcal{Q}\mathcal{T}$ qui sont stables par **Hom** et par structures initiales, $\mathfrak{Ant}$ est la plus petite qui contienne $\mathcal{T}$. Le lecteur pourra constater que cette restriction théorique n'affecte en rien les résultats présentés ici.

# I. CARACTERISATION DES ESPACES D'ANTOINE

## I.1. Espaces à domaines fermés.

DEFINITION I.1.1. Soit $\mathbf{X}$ un espace quasi-topologique et $F$ un filtre sur $X$. On appelle *domaine de convergence de* $F$ l'ensemble, noté $E(F)$, des éléments $x$ de $X$ tels que $F \underset{\mathbf{X}}{\to} x$.

DEFINITION I.2.2. Un espace quasi-topologique $\mathbf{X}$ est dit « *à domaines fermés* » si, pour tout filtre $F$ sur $X$, $E(F)$ est un fermé (pour la topologie de $\tilde{\mathbf{X}}$).

§ Un espace, même semi-topologique, n'est pas nécessairement à domaines fermés : reprenons l'exemple 3.9 de MACHADO [11]. $\mathbf{N}$ est l'espace semi-topologique d'ensemble sous-jacent l'ensemble des entiers naturels où, pour chaque $n \in N$, $\mathcal{V}(n)$ est le filtre des sur-ensembles de

$$A_{n+1} = \{ m \mid 1 \leqslant m \leqslant n+1 \}.$$

Soit $n > 1$ et $F$ le filtre des sur-ensembles de $n+1$. $F \underset{\mathbf{N}}{\to} n$; en effet, tout voisinage de $n$ contient $A_{n+1}$, donc aussi $n+1$. Par contre $F \underset{\mathbf{N}}{\not\to} n-1$, puisque $n+1 \notin A_n$ qui est un voisinage de $n-1$. Ainsi

$$E(F) \neq \emptyset \quad \text{et} \quad E(F) \neq N;$$

la topologie de $\tilde{\mathbf{N}}$ étant grossière, $E(F)$ n'est pas fermé.

LEMME I.1.3. *Tout espace topologique est à domaines fermés.*

§ Soit $\mathbf{X}$ un espace topologique, $F$ un filtre sur $X$ et

$$O = X - E(F).$$

Si $x \in O$, c'est que $F \underset{\mathbf{X}}{\not\to} x$, donc : il existe un voisinage ouvert $U$ de $x$ tel que $U \notin F$. Mais alors $U \subset O$; en effet, si $y \in U$, $U$ est un voisinage de $y$ qui n'appartient pas à $F$, d'où : $F \underset{\mathbf{X}}{\not\to} y$. Ainsi $O$ est un ouvert.

LEMME I.1.4. *Si* $\mathbf{X'}$ *est un espace à domaines fermés, alors, quel que soit* $\mathbf{X}$, *l'espace* $\mathbf{Hom(X',X)}$ *est à domaines fermés.*

§ Posons $\mathbf{Y} = \mathbf{Hom(X',X)}$. On a le morphisme d'évaluation :

$$Ev : \mathbf{Y} \times \mathbf{X} \to \mathbf{X'},$$

qui induit, pour tout $x \in X$, un morphisme :

$$Ev_x : \mathbf{Y} \to \mathbf{X'} : f \mapsto f(x).$$

Par fonctorialité, $Ev_x$ est également un morphisme de $\tilde{\mathbf{Y}}$ vers $\tilde{\mathbf{X}}'$. Par définition de $\mathbf{Hom}(\mathbf{X'}, \mathbf{X})$, on a $H \underset{\mathbf{Y}}{\to} f$ si et seulement si :

$$\text{Pour tout } x \in X \text{ et tout } G \underset{\mathbf{X}}{\to} x,\ Ev(H \times G) \underset{\mathbf{X'}}{\to} f(x).$$

Ainsi $E(H) = \bigcap_{\substack{x \in X \\ G \to x}} Ev_x^{-1}(E(Ev(H \times G)))$. Si $\mathbf{X'}$ est à domaines fermés $E(Ev(H \times G))$ est un $\tilde{\mathbf{X}}'$-fermé; $Ev_x$ étant continue, on en déduit que $E(H)$ est un $\tilde{\mathbf{Y}}$-fermé.

LEMME I.1.5. *Si* $\mathbf{X}$ *est l'espace quasi-topologique initial déterminé par les espaces à domaines fermés* $\mathbf{X}_i$ *et les applications* $f_i : X \longrightarrow X_i$, *i parcourant un ensemble* $I$, *alors* $\mathbf{X}$ *est à domaines fermés.*

§ Il suffit de remarquer que, par définition des structures initiales dans $\mathfrak{Q}\mathfrak{T}$, pour tout filtre $F$ sur $X$ on a

$$E(F) = \bigcap_{i \in I} f_i^{-1}(E(f_i F)),$$

et que $f_i$ est continue de $\tilde{\mathbf{X}}$ vers $\tilde{\mathbf{X}}_i$.

§ La caractérisation ( [11] définition I.4) des espaces d'Antoine et les trois lemmes précédents ont pour conséquence immédiate :

PROPOSITION I.1.6. *Tout espace d'Antoine est à domaines fermés.*

## I.2. L'opérateur étoile.

On sait que la catégorie des espaces à fermeture est isomorphe à celle des semi-topologies. De façon précise, dans un espace semi-topologique $\mathbf{X}$, on définit $\bar{A}$ comme l'ensemble des $x \in X$ tels que tout voisinage de $x$ rencontre $A$. On pose $\bar{y} = \overline{\{y\}}$.

DEFINITION I.2.1. Soit $\mathbf{X}$ un espace semi-topologique, $x \in X$ et $A \subset X$. *On note* $x^*$ l'ensemble des $y \in X$ tels que $x \in \bar{y}$ et $A^*$ la réunion des $x^*$, où $x$ parcourt $A$.

PROPOSITION I.2.2. *L'opérateur étoile est une fermeture compatible avec les réunions quelconques. Si l'espace* $\mathbf{X}$ *est topologique, l'opéra-*

*teur étoile est une fermeture topologique.*

§ Il est évident que :

$$A \subset A^*,\quad A \subset B \Longrightarrow A^* \subset B^* \quad \text{et} \quad \emptyset^* = \emptyset .$$

Nous allons vérifier que, pour une famille quelconque $(A_i)_{i\in I}$ de parties de $X$, on a : $(\bigcup_{i\in I} A_i)^* = \bigcup_{i\in I} A_i^*$. En effet,

$$(y \in (\bigcup_{i\in I} A_i)^*) \Longleftrightarrow (\exists x \in \bigcup_{i\in I} A_i : y \in x^*) \Longleftrightarrow$$

$$(\exists i \in I,\ \exists x \in A_i : y \in x^*) \Longleftrightarrow (\exists i \in I : y \in A_i^*) .$$

Si $\mathbf{X}$ est topologique, on a $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$ pour tout $A \subset X$. Vérifions que $A^{**} = A^*$. Si $z \in A^{**}$, il existe $y \in A^*$ tel que $z \in y^*$; par suite il existe $x \in A$ tel que $y \in x^*$. Par définition de l'étoile, ceci donne :

$$x \in \bar{y} \quad \text{et} \quad y \in \bar{z}, \quad \text{d'où} \quad x \in \bar{\bar{z}} = \bar{z}.$$

Ainsi $z \in x^*$ avec $x \in A$.

DEFINITION I.2.3. Un espace quasi-topologique $\mathbf{X}$ est muni de l'opérateur étoile associé à la semi-topologie de $\nu\mathbf{X}$. Si $F$ est un filtre sur $X$, *on note* $F^*$ le filtre sur $X$ engendré par les $A^*$, où $A$ parcourt $F$.

§ $F^*$ est bien un filtre, puisque, pour $A$ et $B$ éléments de $F$, on a $A^* \cap B^* \supset (A \cap B)^*$ (cf. 2.2).

PROPOSITION I.2.4. *Soit* $\mathbf{X}$ *un espace quasi-topologique. Pour tout* $x \in X$, *on a :* $x^* = \{ y \mid y^{\varepsilon} \underset{\mathbf{X}}{\to} x \}$ (où $y^{\varepsilon}$ = filtre des sur-ensembles de $y$).

§ Nous allons montrer que $\bar{y} = E(y^{\varepsilon})$.

Si $y^{\varepsilon} \to x$, alors tout $\nu\mathbf{X}$-voisinage de $x$ appartient à $y^{\varepsilon}$, donc contient $y$. Réciproquement, si $x \notin E(y^{\varepsilon})$, c'est que, pour tout $F \underset{\mathbf{X}}{\to} x$, on a : $y^{\varepsilon} \not\supset F$. Par suite, on peut choisir $A_F \in F$ tel que $y \notin A_F$ ; alors $\bigcup_{F \to x} A_F$ est un $\nu\mathbf{X}$-voisinage de $x$ qui ne contient pas $y$. Ainsi $x \notin \bar{y}$.

DEFINITION I.2.5. Un espace quasi-topologique $\mathbf{X}$ est dit *étoile-stable* si, pour tout filtre $F$ sur $X$ et tout $x \in X$ :

$$F \underset{\mathbf{X}}{\to} x \Longrightarrow F^* \underset{\mathbf{X}}{\to} x .$$

§ L'implication réciproque est toujours vraie, car $F^* \subset F$. Tout espace séparé est étoile-stable, puisque, dans ce cas, l'opérateur étoile est l'identité.

On peut retenir une version plus «parlante» de la définition 2.5 :

Dans l'espace $\mathbf{X}$, on ne change rien à la convergence d'un filtre $F$ si on ajoute à chaque élément $A$ de $F$ tous les points $y$ de $X$ tels que $y^{\varepsilon}$ converge vers un point de $A$.

Cette caractérisation paraîtra encore plus intuitive en termes de convergence des filets (cf. III).

### I.3. L'opérateur point.

Dans un espace quasi-topologique $\mathbf{X}$, on peut définir un autre opérateur «étoile»: celui associé à la topologie de $\tilde{\mathbf{X}}$ ; pour le distinguer de l'opérateur défini en 2.3, nous le noterons par un point. D'où:

DEFINITION I.3.1. Soit $\mathbf{X}$ un espace quasi-topologique, $x \in X$ et $A \subset X$. *On note* $x^{\bullet}$ l'ensemble des $y \in X$ tels que $x$ appartienne à la $\tilde{\mathbf{X}}$-fermeture de $\{y\}$. On désigne par $A^{\bullet}$ la réunion des $x^{\bullet}$, où $x$ parcourt $A$.

NOTATIONS. Pour la distinguer de $\bar{x}$, fermeture de $\{x\}$ pour la semi-topologie $\nu\mathbf{X}$, nous noterons $Ad(x)$ la fermeture de $\{x\}$ pour la topologie de $\tilde{\mathbf{X}}$ : c'est, par définition, le plus petit $\tilde{\mathbf{X}}$-fermé qui contienne $x$.

DEFINITION I.3.2. Un espace quasi-topologique $\mathbf{X}$ est dit $T_1$ si tous les points de $X$ sont des $\tilde{\mathbf{X}}$-fermés.

§ Dans le cas des espaces semi-topologiques, cette définition coïncide avec celle de DETOURBET ([7] p. XIX). En effet, DETOURBET qualifie de $T_1$ un espace à fermeture $\mathbf{X}$ où, pour tout couple $(x, y)$ de points distincts de $X$, il existe un voisinage de $x$ qui ne contient pas $y$. Il montre que c'est encore équivalent à dire que, pour tout $x \in X$, on a $\bar{x} = \{x\}$ ; or, on vérifie classiquement que, dans un espace semi-topologique, dire que $A$ est un $\tilde{\mathbf{X}}$-fermé équivaut à dire que $\bar{A} = A$.

PROPOSITION I.3.3. *Dans un espace quasi-topologique* $\mathbf{X}$ *les énoncés suivants sont équivalents :*

*(i)* $\mathbf{X}$ *est* $T_1$.

*(ii) L'opérateur étoile est l'identité.*

*(iii) L'opérateur point est l'identité.*

§ Par définition, $\mathbf{X}$ est $T_1$ si $Ad(x) = \{x\}$, mais ceci est équivalent à dire que $\bar{x} = \{x\}$, d'après la remarque suivant 3.2.

NOTATIONS : Rappelons ici quelques notions introduites par MACHADO [11] . Soit $\mathbf{X}$ un espace quasi-topologique.

- Si $A$ est une partie de $\mathbf{X}$, on note $A^o$ l'ensemble des ouverts de $\tilde{\mathbf{X}}$ qui incluent $A$ ( [11] p. 9).

- On note $\Omega$ l'espace topologique de Sierpinski (sur $\{0, 1\}$), et $\Omega\mathbf{X} = \mathbf{Hom}(\Omega, \mathbf{X})$.

- $\hat{\mathbf{X}}$ est l'espace quasi-topologique initial d'ensemble sous-jacent $X$ déterminé par l'espace $\Omega\Omega\mathbf{X}$ et l'application $\alpha$ de $X$ dans $\Omega\Omega\mathbf{X}$ qui, à tout $x \in X$, associe l'ensemble des ouverts qui contiennent $x$ ( [11], p. 8).

MACHADO montre ( [11] proposition 2.3) que $\mathbf{X}$ est un espace d'Antoine si et seulement si $\mathbf{X} = \hat{\mathbf{X}}$. Il donne aussi un critère de convergence dans $\hat{\mathbf{X}}$ ( [11] lemme 2.5):

CRITERE DE MACHADO : Soit $H$ un filtre sur $X$ et $a \in X$. Alors $H \underset{\hat{\mathbf{X}}}{\to} a$ si et seulement si le couple $(H, a)$ vérifie la condition:

(A) Quels que soient l'ouvert $\omega$ de $\tilde{\mathbf{X}}$ et le filtre $F$ sur $\Omega\mathbf{X}$ tels que $a \in \omega$ et que, pour tout $G \underset{\mathbf{X}}{\to} x$ et tout $x \in \omega$, il existe $B \in G$ vérifiant $B^o \in F$, alors il existe $A \in H$ tel que $A^o \in F$.

LEMME I.3.4. *Dans tout espace quasi-topologique* $\mathbf{X}$, *on a:*

*(i) Pour toute partie* $A$ *de* $X$ *:*

$$(A^\bullet)^o = A^o .$$

*(ii) Pour toutes parties* $A$ *et* $B$ *de* $X$ *:*

$$A^\bullet \subset B^\bullet \iff A^o \supset B^o .$$

§ (i) D'après 2.2, on a $A \subset A^\bullet$, d'où $(A^\bullet)^o \subset A^o$.

Supposons que $\omega \notin (A^\bullet)^o$. Il existe alors $y \in A^\bullet$ tel que $y \notin \omega$ et il existe aussi $x \in A$ tel que $x \in Ad(y)$. Comme $y \in X - \omega$ qui est fermé, $Ad(y) \subset X - \omega$. Ainsi $x \in A$ et $x \notin \omega$, ce qui montre que $\omega \notin A^o$.

(ii) a) Si $A^\bullet \subset B^\bullet$, alors $(A^\bullet)^o \supset (B^\bullet)^o$, ce qui donne, d'après le (i), $A^o \supset B^o$.

b) Supposons que $B^o \subset A^o$ ; alors :

$$\begin{aligned} & \forall y (X - Ad(y) \in B^o \implies X - Ad(y) \in A^o) \\ \iff & \forall y (B \subset X - Ad(y) \implies A \subset X - Ad(y)) \\ \iff & \forall y (A \cap Ad(y) \neq \emptyset \implies B \cap Ad(y) \neq \emptyset). \end{aligned}$$

Mais :

$$B \cap Ad(y) \neq \emptyset \iff \exists x \in B : x \in Ad(y) \iff y \in B^\bullet.$$

Ainsi $A^\bullet \subset B^\bullet$.

PROPOSITION I.3.5. *Soit* $\mathbf{X}$ *un espace quasi-topologique,* $H$ *un filtre sur* $X$ *et* $a \in X$. *Alors* $H \underset{\hat{\mathbf{X}}}{\to} a$ *si et seulement si le couple* $(H, a)$ *vérifie:*

(B') *Quels que soient l'ouvert* $\omega$ *de* $\tilde{\mathbf{X}}$ *avec* $a \in \omega$ *et la famille* $(A_{G,x})_{x \in \omega,\, G \to x}$ *telle que* $A_{G,x} \in G$, *il existe* $(G_1, x_1), \ldots, (G_n, x_n)$ *tels que :* $(A_{G_1,x_1} \cup \cdots \cup A_{G_n,x_n})^\bullet \in H$.

§ Il s'agit de montrer que, pour tout couple $(H, a)$, la condition (A) de MACHADO équivaut à (B').

a) (A) $\implies$ (B'). Soit $\omega$ un ouvert de $\tilde{\mathbf{X}}$ tel que $a \in \omega$ et $(A_{G,x})$ une famille vérifiant les hypothèses de (B'). Considérons, sur $\Omega\mathbf{X}$ le filtre $F$ qui admet pour base l'ensemble des :

$$(A_{G_1,x_1} \cup \cdots \cup A_{G_n,x_n})^o = A^o_{G_1,x_1} \cap \cdots \cap A^o_{G_n,x_n},$$

pour toute famille finie de couples $(G, x)$. D'après (A), il existe $A \in H$ tel que $A^o \in F$. C'est donc qu'il existe $(G_1, x_1), \ldots, (G_n, x_n)$ tels que:

$$A^o \supset (A_{G_1,x_1} \cup \cdots \cup A_{G_n,x_n})^o,$$

ce qui entraîne, d'après le lemme 3.4 :

$$A \subset A^\bullet \subset (A_{G_1,x_1} \cup \cdots \cup A_{G_n,x_n})^\bullet,$$

donc :

$$(A_{G_1,x_1} \cup \cdots \cup A_{G_n,x_n})^\bullet \in H.$$

b) (B') $\Longrightarrow$ (A). Soit $\omega$ un ouvert de $\tilde{\mathbf{X}}$ et $F$ un filtre sur $\Omega\mathbf{X}$ tel que $a \in \omega$ et que, pour tout $x \in \omega$ et tout $G \to x$, il existe une partie, disons $A_{G,x}$, de $G$ telle que $A^{o}_{G,x} \in F$. La condition (B') entraîne l'existence de la famille finie $(G_1, x_1), \dots, (G_n, x_n)$ telle que :

$$(A_{G_1,x_1} \cup \dots \cup A_{G_n,x_n})^{\bullet} \in H;$$

mais l'on a :

$$(A_{G_1,x_1} \cup \dots \cup A_{G_n,x_n})^{\bullet o} = (A_{G_1,x_1} \cup \dots \cup A_{G_n,x_n})^{o}$$
$$= A^{o}_{G_1,x_1} \cap \dots \cap A^{o}_{G_n,x_n} \in F.$$

## I.4. Les espaces d'Antoine.

Avant de donner leur caractérisation, il nous reste à voir le rapport entre les opérateurs étoile et point dans les espaces à domaines fermés.

PROPOSITION I.4.1. *Dans un espace à domaines fermés, les opérateurs étoile et point coïncident.*

§ L'intérêt de cette proposition est de rapprocher une notion «efficace» (l'opérateur point à cause de 3.5) d'une notion assez «intuitive» (l'opérateur étoile). Elle est conséquence de :

LEMME I.4.2. *Soit* $\mathbf{X}$ *un espace à domaines fermés. Pour tout* $x \in X$, *on a :* $\bar{x} = Ad(x)$.

§ On a toujours $\bar{x} \subset Ad(x)$, car la semi-topologie de $\nu\mathbf{X}$ est plus fine que celle de $\tilde{\mathbf{X}}$.

Inversement, dans un espace à domaines fermés, on a $\bar{x} = E(x^{\varepsilon})$ (cf. 2.4), donc $\bar{x}$ est un $\tilde{\mathbf{X}}$-fermé qui contient $x$ ; d'où $Ad(x) \subset \bar{x}$.

PROPOSITION I.4.3. *Soit* $\mathbf{X}$ *un espace à domaines fermés,* $x$ *et* $y$ *deux éléments de* $X$ *et* $F$ *un filtre sur* $X$. *Si* $y \in x^{\bullet}$ *et* $F \underset{\mathbf{X}}{\to} y$, *alors* $F \underset{\mathbf{X}}{\to} x$. *Tout espace à domaines fermés est un espace polytopologique au sens de* KATZ.

§ Si $y \in x^{\bullet}$, c'est que $x \in \bar{y} = Ad(y)$. Si $y \in E(F)$, qui est fermé, on a aussi $Ad(y) \subset E(F)$ et donc $x \in E(F)$.

Un espace à domaines fermés est, par suite, polytopologique, d'après un résultat de KATZ ( [9] théorème I.1.5 ).

THEOREME I.4.4. *Soit* **X** *un espace quasi-topologique.* **X** *est un espace d'Antoine si et seulement si :*

*( i )* **X** *est pseudo-topologique,*

*( ii )* **X** *est à domaines fermés,*

*( iii )* **X** *est étoile-stable.*

COROLLAIRE I.4.5. *Tout espace pseudo-topologique* $T_1$ *à domaines fermés est un espace d'Antoine.*

D'après la proposition 3.3. tout espace $T_1$ est trivialement étoile-stable; le corollaire est donc une conséquence immédiate de 4.4. Il contient comme cas particulier la proposition 4.5 de MACHADO. Passons maintenant à la démonstration du théorème.

*a ) Nécessité des conditions.*
Si **X** est un espace d'Antoine, on sait déjà que **X** est pseudo-topologique ( [11] proposition 3.8 ) et à domaines fermés ( Proposition 1.6 ). Reste à vérifier que **X** est étoile-stable.

**X** étant un espace d'Antoine, pour qu'un filtre $H$ converge vers $x$ , il suffit que $(H, x)$ vérifie la condition (B') de 3.5 (cf. [11] 2.6).

Soit $F \underset{\mathbf{X}}{\to} x$. Soit $\omega$ un ouvert de $\tilde{\mathbf{X}}$ contenant $x$ et

$$(A_{G,y})_{y \in \omega,\ G \to y}$$

une famille telle que $A_{G,y} \in G$. Parmi les couples $(G, y)$, il y a le couple $(F, x)$ et l'on a : $A^{\bullet}_{F,x} = A^{*}_{F,x} \in F^*$ . Ainsi $(F^*, x)$ vérifie (B').

*b )* Supposons réunies les trois conditions de 4.4. Pour montrer que **X** est un espace d'Antoine, il suffit de montrer que, pour tout filtre $H$ sur $X$ et tout $x \in X$ tels que $(H, x)$ vérifie (B'), on a $H \underset{\mathbf{X}}{\to} x$. Comme **X** est pseudo-topologique, on peut se limiter au cas où $H$ est un ultra-filtre.

Supposons que $H \underset{\mathbf{X}}{\not\to} x$ et que $(H, x)$ vérifie (B'). On a $x \in \omega = X - E(H)$ qui est un ouvert. Pour tout couple $(G, y)$ tel que $y \in \omega$ et $G \underset{\mathbf{X}}{\to} y$, on a $G^* \underset{\mathbf{X}}{\to} y$, donc $H \not\supset G^*$ et l'on peut choisir $A_{G,y} \in G$ tel que

$A^*_{G,y} \notin H$.

Puisque $(H, x)$ a la propriété (B'), il existe une famille

$$(G_1, x_1), \dots, (G_n, x_n)$$

telle que, si

$$A = A_{G_1, x_1} \cup \dots \cup A_{G_n, x_n},$$

on ait : $A^\bullet \in H$. Mais, par ailleurs, $X - A^*_{G,y} \in H$, puisque $H$ est un ultrafiltre; d'où

$$\bigcap_{i=1,\dots,n} (X - A^*_{G_i, x_i}) = X - A^\bullet \in H,$$

ce qui est contradictoire.

## II. SEMI-ESPACES D'ANTOINE

### II.1. Première caractérisation.

PROPOSITION II.1.1. *Un espace quasi-topologique* $\mathbf{X}$ *est un semi-espace d'Antoine si et seulement s'il est l'espace quasi-topologique initial déterminé par une famille, indexée par* $I$, *d'espaces quasi-topologiques de la forme* $\mathbf{Hom}(\mathbf{X}'_i, \mathbf{X}_i)$ *et d'applications* $f_i : X \to Hom(\mathbf{X}'_i, \mathbf{X}_i)$, *où chaque* $\mathbf{X}_i$ *et chaque* $\mathbf{X}'_i$ *est un espace semi-topologique.*

§ Il suffit, pour s'en convaincre, de reprendre les propositions 1.5, 1.6, et 1.8 de [11] en remplaçant partout «topologie» par «semi-topologie» et «Antoine» par «semi-Antoine».

### II.2. L'espace des voisinages.

Soit $\Lambda$ l'espace semi-topologique dont l'ensemble sous-jacent est $\Lambda = \{0, 1, 2\}$ et dont les filtres de voisinages sont définis par:

$$\mathfrak{V}(0) = \{\Lambda\}, \quad \mathfrak{V}(1) = \{\Lambda\}, \quad \mathfrak{V}(2) = \{\{0,1,2\}, \{1,2\}\}.$$

$\Lambda$ n'est pas un espace topologique ($\{1,2\}$ n'est pas un voisinage de $1$); d'ailleurs on voit très facilement que la topologie de $\tilde{\Lambda}$ est grossière.

Si $\mathbf{X}$ est un espace quasi-topologique, on note $\Lambda\mathbf{X}$ l'ensemble des couples $(V, A)$ tels que $A \subset V \subset X$ et que, pour tout $x \in A$, $V$ soit un $\nu\mathbf{X}$-voisinage de $x$. (On peut dire plus simplement «$V$ est un voisinage de $A$».)

PROPOSITION II.2.1. *Il y a une bijection canonique entre* $\Lambda\mathbf{X}$ *et* $Hom(\Lambda, \mathbf{X})$.

§ Par adjonction ([3] proposition 1.1), on a :

$$Hom(\Lambda, \mathbf{X}) \sim Hom(\Lambda, \nu\mathbf{X}).$$

On peut donc se limiter au cas où $\mathbf{X}$ est semi-topologique.

Si $(V, A) \in \Lambda\mathbf{X}$, on définit $f: X \to \Lambda$ par:

$$f(x)=0 \text{ si } x \notin V,\ f(x)=1 \text{ si } x \in V - A,\ f(x)=2 \text{ si } x \in A.$$

Pour s'assurer de la continuité de $f$, il suffit de montrer que $x \in A$ entraîne $\mathfrak{V}(2) \subset f\mathfrak{V}(x)$ (dans les autres cas, c'est trivial); mais précisément, $V$ est un voisinage de $x$ tel que $f(V) \subset \{1, 2\}$.

Inversement, si $f \in Hom(\Lambda, \mathbf{X})$, on définit: $V = f^{-1}(\{1, 2\})$ et $A = f^{-1}(2)$. Alors $V$ est un voisinage de $A$; en effet, si $x \in A$, on a:

$$\mathfrak{V}(2) \subset f\mathfrak{V}(x), \text{ d'où: } V = f^{-1}(\{1, 2\}) \in \mathfrak{V}(x).$$

DEFINITION II.2.2. *On désigne par* $\Lambda\mathbf{X}$ l'espace quasi-topologique obtenu en transportant sur $\Lambda\mathbf{X}$ la quasi-topologie de $\mathbf{Hom}(\Lambda, \mathbf{X})$.

REMARQUES. $\Lambda\mathbf{X}$ contient entre autres tous les couples $(V, \emptyset)$ avec $V \subset X$ et $(\omega, \omega)$ avec $\omega$ ouvert de $\tilde{\mathbf{X}}$. Par ailleurs, l'espace des ouverts $\Omega\mathbf{X}$ ([11] 2.1) s'identifie à un sous-espace de $\Lambda\mathbf{X}$ par l'injection canonique : $\omega \mapsto (\omega, \omega)$ (Démonstration à l'aide de [11] 0.1).

NOTATION : Si $C \subset X$, on note $C^{\&}$ l'ensemble des $(V, A) \in \Lambda\mathbf{X}$ tels que $C \subset V$. On a, dans $\Lambda\mathbf{X}$, le critère de convergence suivant:

PROPOSITION II.2.3. *Soit* $H$ *un filtre sur* $\Lambda\mathbf{X}$ *et* $(V, A) \in \Lambda\mathbf{X}$. *On a* $H \underset{\Lambda\mathbf{X}}{\to} (V, A)$ *si et seulement si, pour tout* $x \in A$ *et tout* $F \underset{\mathbf{X}}{\to} x$, *il existe*

$C \in F$ tel que $C^{\&} \in H$.

§ Dans $\mathbf{Hom}(\Lambda, \mathbf{X})$, si $f$ est l'application associée à $(V, A)$ on a :

$$H \to (V, A) \iff \forall x \ \forall F \ (F \to x \implies HF \supset \mho(f(x))).$$

$\mho(f(x))$ étant trivial quand $f(x) \neq 2$, l'énoncé précédent équivaut à :

$$\forall x \in A, \quad \forall F \to x, \quad \exists C \in F, \quad \exists m \in H : \ m(C) \subset \{1, 2\}$$

$$\iff \forall x \in A, \quad \forall F \to x, \quad \exists C \in F, \quad \exists m \in H : \forall g \in m, \ g(C) \subset \{1, 2\}.$$

Retraduit dans l'espace des voisinages, cet énoncé devient :

$$\iff \forall x \in A, \ \forall F \to x, \ \exists C \in F, \ \exists m \in H : \forall (W, B) \in m, \ C \subset W.$$

Mais il est clair que :

$$(\exists m \in H : \forall (W, B) \in m, \ C \subset W) \iff (\exists m \in H : m \subset C^{\&})$$

$$\iff (C^{\&} \in H).$$

PROPOSITION II.2.4. *a) Pour toutes parties $C$ et $D$ de $X$, on a :*

$$C^{\&} \subset D^{\&} \iff D \subset C.$$

*b) Pour toute famille $(C_i)_{i \in I}$ de parties de $X$ :*

$$(\bigcup_{i \in I} C_i)^{\&} = \bigcap_{i \in I} C_i^{\&}.$$

§ a) Si $D \subset C$, soit $(V, A) \in C^{\&}$. On a $C \subset V$, donc $D \subset V$ et $(V, A) \in D^{\&}$. Inversement, si $C^{\&} \subset D^{\&}$, alors $(C, \emptyset) \in C^{\&}$, d'où

$$(C, \emptyset) \in D^{\&} \text{ et } D \subset C.$$

b) Evident d'après les définitions.

## II.3. Seconde caractérisation.

Nous allons voir que l'espace des voisinages joue vis-à-vis des semi-topologies le même rôle que l'espace des ouverts en topologie.

§ L'évaluation $Ev : \mathbf{X} \times \mathbf{Hom}(\Lambda, \mathbf{X}) \to \Lambda$ induit une application continue :

$$\mathbf{X} \to \mathbf{Hom}(\Lambda, \Lambda\mathbf{X}) : \ x \mapsto [f \mapsto f(x)].$$

En termes de voisinages, on obtient une application continue $\lambda : \mathbf{X} \to \Lambda\Lambda\mathbf{X}$ qui, à tout $x \in X$, associe $(v(x), a(x))$, où $v(x)$ est l'ensemble des couples $(V, A)$ tels que $x \in V$ et $a(x)$ l'ensemble des couples $(V, A)$ tels que $x \in A$.

THEOREME II.3.1. *Soit* $\mathbf{X}$ *un espace quasi-topologique.* $\mathbf{X}$ *est un semi-espace d'Antoine si et seulement si* $\mathbf{X}$ *est l'espace quasi-topologique initial déterminé par* $\Lambda\Lambda\mathbf{X}$ *et l'application* $\lambda$ *de* $X$ *vers* $\Lambda\Lambda\mathbf{X}$.

§ La démonstration est formellement identique à celle de la proposition 2.3 de [11]. On utilise les deux lemmes suivants :

LEMME II.3.2. *Si* $\mathbf{X}$ *et* $\mathbf{Y}$ *sont des espaces quasi-topologiques, il existe une application continue de* $\Lambda\mathbf{Y}\times\mathbf{X}$ *vers* $\Lambda(\mathbf{Hom}(\mathbf{Y},\mathbf{X}))$ *qui, à* $((V, A), x)$, *associe le couple :*

$$(\{f \mid f(x) \in V\}, \quad \{f \mid f(x) \in A\}).$$

§ La démonstration est analogue à celle de ([2] proposition 1.4).

On a les applications continues suivantes, en notant $Co$ la composition des applications :

$$Co \times id : \mathbf{Hom}(\mathbf{Y},\mathbf{X})\times\mathbf{Hom}(\Lambda,\mathbf{Y})\times\mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Hom}(\Lambda,\mathbf{X})\times\mathbf{X}$$

$$(f, g, x) \longmapsto (g \circ f, x) \quad ,$$

$$Ev : \mathbf{Hom}(\Lambda,\mathbf{X})\times\mathbf{X} \longrightarrow \Lambda .$$

On en déduit par composition, et en traduisant dans l'espace des voisinages de $\mathbf{Y}$, l'application continue :

$$\mathbf{Hom}(\mathbf{Y},\mathbf{X})\times\Lambda\mathbf{Y}\times\mathbf{X} \longrightarrow \Lambda$$

$$(f, (V, D), x) \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin f^{-1}(V) \\ 1 & \text{si } x \in f^{-1}(V) - f^{-1}(D) \\ 2 & \text{si } x \in f^{-1}(D). \end{cases}$$

Cette application induit une nouvelle application continue :

$$\Lambda\mathbf{Y}\times\mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Hom}(\Lambda, \mathbf{Hom}(\mathbf{Y},\mathbf{X})) \sim \Lambda(\mathbf{Hom}(\mathbf{Y},\mathbf{X})),$$

qui est précisément l'application recherchée.

LEMME II.3.3. *Si* $\mathbf{X}$ *est un espace quasi-topologique,* $\mathbf{Y}$ *un semi-espace d'Antoine et* $f$ *une application de* $X$ *dans* $Y$, *alors* $f$ *est continue de* $\mathbf{X}$

*vers* $\mathbf{Y}$ *si et seulement si:*

*(i) Pour tout* $(V, A) \in \Lambda\mathbf{Y}$, $(f^{-1}(V), f^{-1}(A)) \in \Lambda\mathbf{X}$.

*(ii) L'application* $(V, A) \mapsto (f^{-1}(V), f^{-1}(A))$ *est continue de* $\Lambda\mathbf{Y}$ *vers* $\Lambda\mathbf{X}$.

§ La démonstration est analogue à celle de ( [2] proposition 1.5 ).

1° Si $f$ est continue de $\mathbf{X}$ vers $\mathbf{Y}$, (i) est vérifié à cause des propriétés fonctorielles de la correspondance : $\mathbf{X} \mapsto \nu\mathbf{X}$ (adjointe du foncteur d'inclusion de $\mathfrak{S}\mathfrak{T}$ dans $\mathfrak{Q}\mathfrak{T}$ ).

(ii) est également vérifiée, parce que l'application cherchée est à un isomorphisme près l'application :

$$\mathbf{Hom}(\Lambda, \mathbf{Y}) \longrightarrow \mathbf{Hom}(\Lambda, \mathbf{X}) : \ g \mapsto g \circ f.$$

(Ceci montre que la correspondance $\mathbf{X} \mapsto \Lambda\mathbf{X}$ définit un endofoncteur contravariant de $\mathfrak{Q}\mathfrak{T}$.)

2° La réciproque se montre en trois étapes, en raison de la caractérisation 1.1 des semi-espaces d'Antoine.

*Etape 1 :* $\mathbf{Y}$ est un espace semi-topologique.

Par adjonction, il suffit de montrer que $f$ est continue de $\nu\mathbf{X}$ vers $\mathbf{Y}$. Ainsi il s'agit de vérifier que $f\mathfrak{V}(x) \supset \mathfrak{V}(f(x))$. Soit $V' \in \mathfrak{V}(f(x))$. On a :

$$(V', f(x)) \in \Lambda\mathbf{Y}, \text{ d'où} : (f^{-1}(V'), f^{-1}(f(x))) \in \Lambda\mathbf{X}.$$

Mais $x \in f^{-1}(f(x))$, donc $f^{-1}(V') \in \mathfrak{V}(x)$.

*Etape 2 :* $\mathbf{Y} = \mathbf{Hom}(\mathbf{B}, \mathbf{A})$, où $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ sont semi-topologiques.

Pour montrer que $f$ est continue de $\mathbf{X}$ vers $\mathbf{Hom}(\mathbf{B}, \mathbf{A})$, il suffit de montrer la continuité de :

$$\tilde{f} : \mathbf{X} \times \mathbf{A} \to \mathbf{B} : (x, a) \mapsto f(x)(a).$$

$\mathbf{B}$ étant semi-topologique, il suffit d'après l'étape 1 de vérifier que $\tilde{f}$ a les propriétés (i) et (ii).

D'après 3.2 et l'hypothèse sur $f$, on a les applications continues:

$$\Lambda\mathbf{B} \times \mathbf{A} \to \Lambda\,\mathbf{Hom}(\mathbf{B}, \mathbf{A}) : \ ((V, D), a) \mapsto (\{h \mid h(a) \in V\}, \{h \mid h(a) \in D\}),$$

$$\Lambda\,\mathbf{Hom}(\mathbf{B}, \mathbf{A}) \to \Lambda\mathbf{X} : (V, D) \mapsto (f^{-1}(V), f^{-1}(D)).$$

Par composition, on obtient l'application continue :

$$\Lambda\mathbf{B}\times\mathbf{A}\to\Lambda\mathbf{X}:((V,D),a)\mapsto(\{x\,|\,f_x(a)\in V\},\{x\,|\,f_x(a)\in D\}),$$

qui induit une application continue :

$$\Lambda\mathbf{B}\to\mathbf{Hom}(\Lambda\mathbf{X},\mathbf{A})\sim\bar{\Lambda}(\mathbf{A}\times\mathbf{X}):(V,D)\mapsto(\tilde{f}^{-1}(V),\tilde{f}^{-1}(D)).$$

*Etape 3:* Cas général: $\mathbf{Y}$ est la structure initiale déterminée par des applications $g_i:\mathbf{Y}\to\mathbf{Hom}(\mathbf{B}_i,\mathbf{A}_i)$, avec $\mathbf{B}_i$ et $\mathbf{A}_i$ semi-topologiques. Pour montrer que $f$ est continue de $\mathbf{X}$ vers $\mathbf{Y}$, il suffit d'établir la continuité des $g_i\circ f$. On vérifie immédiatement (en utilisant l'application continue $\Lambda g_i$, cf. étape 1) que $g_i\circ f$ vérifie (i) et (ii); la conclusion est la conséquence de l'étape 2.

DEMONSTRATION DU THEOREME 3.1:

1° Si $\mathbf{X}$ est une structure initiale comme dit dans l'énoncé, alors $\mathbf{X}$ est un semi-espace d'Antoine à cause :

de la caractérisation 1.1, $\Lambda\Lambda\mathbf{X}$ étant un semi-espace d'Antoine,

de la transitivité des structures initiales.

2° Supposons réciproquement que $\mathbf{X}$ soit un semi-espace d'Antoine. Soit $f:\mathbf{Y}\to\mathbf{X}$, une application telle que $\lambda\circ f$ soit continue de $\mathbf{Y}$ vers $\Lambda\Lambda\mathbf{X}$. Pour montrer la continuité de $f$, il suffit, d'après 3.3, de montrer que $f$ vérifie (i) et (ii).

L'application continue :

$$\lambda\circ f:\mathbf{Y}\to\Lambda\Lambda\mathbf{X}:y\mapsto(\{(V,A)\,|\,f(y)\in V\},\{(V,A)\,|\,f(y)\in A\})$$

induit l'application continue :

$$\mathbf{Y}\times\Lambda\mathbf{X}\longrightarrow\Lambda$$

$$(y,(V,A))\mapsto\begin{cases}0 & \text{si } f(y)\notin V\\ 1 & \text{si } f(y)\in V-A\\ 2 & \text{si } f(y)\in A\end{cases}$$

qui induit elle-même l'application continue :

$$\Lambda\mathbf{X}\longrightarrow\mathbf{Hom}(\Lambda,\mathbf{Y})\sim\Lambda\mathbf{Y}$$

$$(V,A) \longmapsto \left( y \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } f(y) \notin V \\ 1 & \text{si } f(y) \in V - A \\ 2 & \text{si } f(y) \in A \end{cases} \right) \sim (f^{-1}(V), f^{-1}(A)) .$$

## II.4. Espaces pseudo-topologiques et semi-espaces d'Antoine.

THEOREME II.4.1. *Tout espace pseudo-topologique est un semi-espace d'Antoine et réciproquement.*

§ On a déjà remarqué dans l'introduction qu'un semi-espace d'Antoine est nécessairement pseudo-topologique. Pour montrer la réciproque, on utilise le même argument que MACHADO :

LEMME II.4.2. *Soit* $\mathbf{X}$ *un espace pseudo-topologique,* $H$ *un filtre sur* $X$ *et* $x \in X$. *Pour que* $H \underset{\mathbf{X}}{\to} x$, *il suffit que* $(H, x)$ *vérifie :*

(C) *Quelle que soit la famille* $(A_G)_{G \to x}$ *avec* $A_G \in G$, *il existe une famille finie* $G_1, \dots, G_n$ *telle que* $A_{G_1} \cup \dots \cup A_{G_n} \in H$.

§ Même démonstration que dans [11], proposition 4.5; l'hypothèse de séparation n'intervient pas dans la démonstration de MACHADO.

NOTATION. Nous noterons $\check{\mathbf{X}}$ l'espace quasi-topologique initial défini par $\Lambda\Lambda\mathbf{X}$ et $\lambda : X \to \Lambda\Lambda\mathbf{X}$. D'après 3.1, il nous suffit de montrer que $\mathbf{X} = \check{\mathbf{X}}$, c'est-à-dire que $H \underset{\check{\mathbf{X}}}{\to} x$ entraîne $H \underset{\mathbf{X}}{\to} x$.

LEMME II.4.3. *Soit* $\mathbf{X}$ *un espace quasi-topologique,* $H$ *un filtre sur* $X$ *et* $x \in X$. *On a* $H \underset{\check{\mathbf{X}}}{\to} x$ *si et seulement si* $(H, x)$ *vérifie* (C).

§ D'après 2.3, on a :

$$H \underset{\check{\mathbf{X}}}{\to} x \iff \lambda H \underset{\Lambda\Lambda\mathbf{X}}{\longrightarrow} \lambda(x)$$

$$\iff \forall (V,A) \in a(x),\ \forall K \underset{\Lambda\mathbf{X}}{\longrightarrow} (V,A),\ \exists D \in K : D^{\&} \in \lambda H .$$

Soit, en développant :

$\iff$ (I) Pour tout $A$ contenant $x$, tout voisinage de $A$ et tout filtre $K$ sur $\Lambda\mathbf{X}$ tels que, pour tout $y \in A$ et tout $F \underset{\mathbf{X}}{\to} y$, il existe $E \in F$ tel que $E^{\&} \in K$, il existe $D \in K$ tel que $D^{\&} \in \lambda H$.

La mention «tout voisinage de $A$» est manifestement redondante, tout $A$ ayant au moins un voisinage ($X$ par exemple! ).

L'énoncé : «$\exists D \in K : D^{\&} \in \lambda H$» est équivalent à :

$$\exists C \in H : C^{\&} \in K.$$

En effet, s'il existe $C \in H$ tel que $C^{\&} \in K$, prenons $D = C^{\&}$. Montrons que $\lambda(C) \subset D^{\&}$: si $(v,a) \in \lambda(C)$, c'est que $v = v(z)$ avec $z \in C$. On a $D \subset v(z)$; en effet, si $(V,A) \in D = C^{\&}$, alors $C \subset V$, d'où: $z \in V$ et $(V,A) \in v(z)$; ainsi $(v,a) \in D^{\&}$.

Réciproquement, s'il existe $D \in K$ tel que $D^{\&} \in \lambda H$, c'est que $D^{\&} \supset \lambda(C)$ avec $C \in H$. Il s'ensuit $C^{\&} \supset D$; en effet, si $(V,A) \in D$ et $z \in C$, on a $\lambda(z) \in D^{\&}$, donc $D \subset v(z)$ et $(V,A) \in v(z)$, ce qui entraîne : $z \in V$. Ainsi $(V,A) \in D^{\&}$ et $C^{\&} \in K$.

On voit de cette façon que l'énoncé (I) équivaut à :

(II) Pour tout $A \ni x$ et tout filtre $K$ sur $\Lambda\mathbf{X}$ vérifiant : pour tout $y \in A$ et tout $F \underset{\mathbf{X}}{\rightarrow} y$, il existe $D \in F$ tel que $D^{\&} \in K$, il existe $C \in H$ tel que $C^{\&} \in K$.

Vérifions que (II) $\Longrightarrow$ (III): il suffit de faire $A = \{x\}$ dans (II). Réciproquement, supposons (III) vérifié. Prenons $A \ni x$ et $K$ un filtre sur $\Lambda\mathbf{X}$ vérifiant les hypothèses de (II). Comme $x \in A$, il existe en particulier, pour tout $F \underset{\mathbf{X}}{\rightarrow} x$, un $D \in F$ tel que $D^{\&} \in K$. Ainsi, d'après (III), il existe $C \in H$ tel que $C^{\&} \in K$.

*Reste à montrer que, pour tout couple $(H,x)$,* (III) $\Longleftrightarrow$ (C).

a) (III) $\Longrightarrow$ (C). Soit $(A_G)_{G \to x}$, avec $A_G \in G$. L'ensemble $\{A_G^{\&} \mid G \to x\}$ engendre un filtre sur $\Lambda\mathbf{X}$, en effet, toute intersection des $A_G^{\&}$ est non vide, puisqu'elle contient $(X,X)$. Soit $K$ le filtre ainsi engendré; $K$ vérifie les hypothèses de (III). On peut donc trouver $C \in H$ tel que $C^{\&} \in K$. Ainsi il existe $G_1, \dots, G_n$ tels que :

$$C^{\&} \supset A_{G_1}^{\&} \cap \dots \cap A_{G_n}^{\&},$$

ce qui d'après 2.4 implique :

$$A_{G_1} \cup \dots \cup A_{G_n} \supset C, \quad \text{d'où: } A_{G_1} \cup \dots \cup A_{G_n} \in H.$$

b) (C) $\Longrightarrow$ (III). Soit $K$ un filtre sur $\Lambda\mathbf{X}$ tel que, pour tout

$G \to x$, il existe une partie, disons $A_G \in G$, telle que $A_G^{\&} \in K$. D'après (C) il existe $G_1, \dots, G_n$ tels que :

$$A_{G_1} \cup \dots \cup A_{G_n} \in H.$$

Mais alors :

$$(A_{G_1} \cup \dots \cup A_{G_n})^{\&} = A_{G_1}^{\&} \cap \dots \cap A_{Gn}^{\&} \in K.$$

## III. CONVERGENCES ASSOCIEES ET EXEMPLES

### III.1. Convergences d'Antoine.

On appelle classiquement «filet» (en anglais: «net» ou «directed set») une famille $\{x_a \mid a \in A\}$, où $A$ est un ensemble préordonné filtrant (c'est-à-dire tel que deux éléments quelconques de $A$ ont toujours un majorant commun). Si les $x_a$ sont éléments d'un ensemble $X$, l'ensemble des $\{x_b \mid b \geqslant a\}$, $a$ parcourant $A$, forme une base de filtre sur $X$.

Nous préférons le point de vue «application» au point de vue «famille» et nous considérons un filet comme une application $s$ d'un ensemble préordonné filtrant A dans un ensemble $X$; le filtre associé est désigné par $F_s$ (voir [3] I.2.4 et [4]). Inversement, à tout filtre $F$ sur $X$, on peut associer un filet $s_F$ tel que $F_{s_F} = F$: c'est l'application de source

$$A_F = \{(C, x) \mid x \in C \in F\}$$

définie par: $s_F(C, x) = x$, l'ensemble $A_F$ étant préordonné par la relation :

$(C, x) \leqslant (C', x')$ si et seulement si $C' \subset C$ ([3] Proposition 1.2.8).

Si $\mathbf{X}$ est un espace quasi-topologique, on peut munir $X$ d'une structure de convergence en décidant que le filet $s$ converge vers le point $x$ de $X$ si et seulement si $F_s \underset{\mathbf{X}}{\to} x$.

Pour éviter des difficultés logiques, on est tenu de préciser à quelle classe d'ensembles filtrants les sources de nos filets sont censées appartenir : nous supposerons que cette classe est «assez grande» pour contenir les ensembles filtrants que l'on peut construire usuellement à l'aide de l'ensemble $X$. Ce postulat est raisonnable quand on considère l'ensemble $X$ isolément, mais peut paraître abusif si l'on s'intéresse à la catégorie de toutes les structures de convergence. Nous n'aborderons pas ici ce problème.

Nous avons indiqué ([3] proposition II.2.10 et [4] théorème II) des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une convergence donnée soit la structure de convergence d'une pseudo-topologie. D'après le théorème II.4.1, ces conditions caractérisent les convergences associées à des semi-espaces d'Antoine. Pour caractériser les «convergences d'Antoine», il faut traduire de plus en termes de convergence les conditions :

(ii) $\mathbf{X}$ est à domaines fermés,

(iii) $\mathbf{X}$ est étoile-stable.

NOTATIONS. Convenons d'écrire $y \to x$ pour dire indifféremment que le filtre $\dot{y}^{\varepsilon}$ converge vers $x$ ou qu'un quelconque filet constant en $y$ converge vers $x$.

DEFINITION III.1.1. Soit $s$ et $s'$ deux filets sur $X$, de sources respectives $A$ et $A'$. On dit que *$s'$ est un sous-filet de $s$* s'il existe une application $p$ de $A'$ dans $A$ telle que :

(i) Pour tout $a \in A$, il existe $a' \in A'$ tel que $b' \geqslant a'$ entraîne $p(b') \geqslant a$.

(ii) $s' = s \circ p$.

L'application $p$ est appelée «morphisme» dans [3,4] ; nous reprenons ici la terminologie anglaise «subnet».

PROPOSITION III.1.2. *Soit $X$ un ensemble muni d'une convergence. Les conditions suivantes sont nécessaires et suffisantes pour que cette convergence provienne d'une structure de semi-espace d'Antoine sur $X$ :*

*(i) Si un filet $s$ converge vers $x$, tout sous-filet de $s$ converge aussi vers $x$.*

*ii) Si un filet $s$ ne converge pas vers $x$, il existe un sous-filet de $s$ dont aucun sous-filet ne converge vers $x$.*

§ C'est une conséquence immédiate de II.4.1 et [4] théorème II.

Pour étudier les convergences d'Antoine, on est amené à définir l'opérateur étoile sur les filets :

DEFINITION III.1.3. Le filet $s^*$ s'obtient à partir de $s$ en «agrégeant» à chacun des $s_a$ tous les éléments $y$ de $X$ tels que $y \to s_a$. Pour cela $A$ étant la source de $s$, on définit $A'$ comme étant l'ensemble des couples $(a, y) \in A \times X$ tels que $y \to s_a$, préordonné par la relation :

$$(a, y) \leqslant (a', y') \text{ si et seulement si } a \leqslant a',$$

et $s^*$ est le filet de source $A'$ défini par $s^*(a, y) = y$.

PROPOSITION III.1.4. *Les conditions suivantes sont nécessaires et suffisantes pour qu'une convergence sur $X$ provienne d'une structure d'espace d'Antoine :*

- *Les conditions (i) et (ii) de 1.2, et de plus :*

*(iii) Quels que soient les filets $s$ et $t$ sur $X$, si $s$ converge vers $x$ et si $t$ converge vers chacun des $s_a$ ($a$ parcourant la source de $s$), alors $t$ converge aussi vers $x$.*

*(iv) Quel que soit le filet $s$ sur $X$, dès que $s$ converge vers $x$, $s^*$ converge aussi vers $x$.*

§ a) Supposons que la convergence donnée provienne de l'espace d'Antoine $\mathbf{X}$. Comme $\mathbf{X}$ est pseudo-topologique, (i) et (ii) sont vérifiées. La condition (iii) dit que, pour tout filet $s$, l'ensemble des points de convergence de $s$ est un $\tilde{\mathbf{X}}$-fermé (cf. [3] proposition II.2.7); or cet ensemble coïncide avec $E(F_s)$ et $\mathbf{X}$ est à domaines fermés.

Si $s$ converge vers $x$, c'est que $F_s \underset{\mathbf{X}}{\to} x$. Puisque $\mathbf{X}$ est étoile-stable, on a aussi $F_s^* \underset{\mathbf{X}}{\to} x$.

Or $F_{s^*} \supset F_s^*$; en effet, si $a$ appartient à la source de $s$, on a: $s(a^{\leqslant})^* \supset s^*((a, s_a)^{\leqslant})$. Ainsi $s^*$ converge vers $x$.

b) Les conditions (i) et (ii) assurent que la convergence donnée provient d'un espace pseudo-topologique $\mathbf{X}$ .

$\mathbf{X}$ est à domaines fermés ; en effet, $E(F)$, pour tout filtre $F$ sur $X$, est l'ensemble des points de convergence de $s_F$ et, d'après (iii), cet ensemble est un $\widetilde{\mathbf{X}}$-fermé.

Soit $F \underset{\mathbf{X}}{\to} x$ ; puisque $s_F$ converge vers $x$, donc $s_F^*$ converge aussi vers $x$ d'après (iv). Nous allons voir que $F^* \supset F_{s_F^*}$ . La source de $s_F^*$ est l'ensemble $A'_F$ des $(C, x, y)$ tels que $x \in C \in F$ et $y \to x$, préordonné par la relation :

$$(C, x, y) \leqslant (C', x', y') \iff C' \subset C.$$

Dès que $(C, x, y) \in A'_F$ , on a $C^* \subset s_F^*((C, x, y)^{\leqslant})$. Ainsi $F^* \underset{\mathbf{X}}{\to} x$, et nous avons montré que $\mathbf{X}$ est étoile-stable.

## III.2. Exemples.

Trois contre-exemples illustreront les conditions du théorème I.4.4 ; suivant les cas, nous utiliserons filets ou filtres.

EXEMPLE III.2.1. *Un espace pseudo-topologique qui n'est ni étoile-stable, ni à domaines fermés.*

§ L'exemple 3.9 de [11], déjà cité en I.1.2, convient. En voici un autre:

L'espace $\mathbf{X}$ a pour ensemble sous-jacent $\mathbf{R}$ . C'est un espace semi-topologique où les filtres de voisinages sont :

- Pour $x \notin ]0, 1[$ , le filtre de voisinages usuel sur $\mathbf{R}$ .
- Pour $x \in ]0, 1[$ , le filtre des sur-ensembles de $]0, 1[$ .

Vérifions d'abord que $\mathbf{X}$ n'est pas à domaines fermés. Soit $H$ le filtre engendré par les intervalles $]0, a[$ avec $a > 0$. Ce filtre converge vers $0$ ; en effet tout $\mathbf{R}$-voisinage de $0$ contient un intervalle $]0, a[$ . Il converge vers tout point de $]0, 1[$ , puisque $]0, 1[ \in H$.

$H$ ne converge vers aucun autre point de $\mathbf{R}$, car, si $x$ n'est pas dans $[0, 1[$ , on peut trouver un voisinage de $x$ qui ne rencontrerait pas $]0, 1/2[$ , ainsi $\mathcal{V}(x) \not\subset H$.

$E(H) = [0, 1[$ n'est pas fermé ; en effet $\mathbf{R} - [0, 1[$ contient $1$ , mais n'est pas un voisinage de $1$.

Pour montrer que **X** n'est pas étoile-stable, il suffit de vérifier que $\mathcal{V}(0) \not\subset \mathcal{V}(0)^*$. Or $V = ]-1/2, 1/2[$ est un voisinage de $0$, mais il ne peut exister $W \in \mathcal{V}(0)$ tel que $W^* \subset V$; en effet, $W$ contiendrait nécessairement des $x > 0$, et l'on aurait $W^* = W \cup ]0, 1[$.

EXEMPLE III.2.2 : *Un espace pseudo-topologique étoile-stable qui n'est pas à domaines fermés.*

Nous allons construire plus précisément un espace semi-topologique $T_1$ qui ne soit pas à domaines fermés:

L'ensemble sous-jacent à **X** est l'ensemble des réels positifs ou nuls. Les voisinages de $0$ et des irrationnels sont ceux de la topologie usuelle de $[0, +\infty[$. Le filtre des voisinages d'un rationnel $r$ est engendré par les $\{r\} \cup [A, +\infty[$, où $A$ parcourt $X$.

Pour montrer que **X** n'est pas à domaines fermés, nous allons utiliser la proposition III.1.4 (iii).

Soit $s$ et $t$ les suites définies par $s_n = 1/n$ et $t_n = n$. On a $s \to 0$ dans **X** et $t \to s_n$ pour tout $n$; cependant $t \not\to 0$.

Pour montrer que **X** est $T_1$, nous allons utiliser la caractérisation en termes de voisinages (cf. DETOURBET). Etant donnés deux points distincts de $X$, il faut trouver un voisinage de l'un qui ne contient pas l'autre :

- S'ils sont tous deux irrationnels, ou que l'un est irrationnel et l'autre nul, c'est évident.
- Si $r \in \mathbf{Q}$ et $r \neq 0$, alors $[0, r[$ est un voisinage de $0$ qui ne contient pas $r$ et $[r, +\infty[$ un voisinage de $r$ qui ne contient pas $0$.
- Si $r$ et $s$ sont deux rationnels non nuls distincts, soit par exemple $r$ le plus grand des deux. $[r, +\infty[$ est un voisinage de $r$ qui ne contient pas $s$ et $\{s\} \cup [2r, +\infty[$ un voisinage de $s$ qui ne contient pas $r$.
- Si $r$ est un rationnel non nul et $i$ un irrationnel, posons :

$$d = \inf(|r-i|, i).$$

On voit que $]i-d, i+d[$ est un voisinage de $i$ qui ne contient pas $r$ et $\{r\} \cup [2i, +\infty[$ un voisinage de $r$ qui ne contient pas $i$.

EXEMPLE III.2.3 : *Un espace pseudo-topologique à domaines fermés qui n'est pas étoile-stable.*

$X$ est l'ensemble des réels, $\mathbf{X}$ est l'espace semi-topologique défini de la façon suivante :

On pose $a_n = 1/n$ et $b_n = 1 - 1/n$, pour $n$ entier positif,

$$A = \{a_n \mid n \geqslant 3\} \quad \text{et} \quad B = \{b_n \mid n \geqslant 3\}.$$

Si $x \notin A \cup B$, on prend pour $\mathcal{V}(x)$ le filtre de $\mathbf{R}$-voisinages usuel.

Pour $n \geqslant 3$, on prend pour $\mathcal{V}(a_n) = \mathcal{V}(b_n)$ le filtre des sur-ensembles de $\{a_n, b_n\}$.

$\mathbf{X}$ n'est pas étoile-stable; en effet, le filet $a$ converge évidemment vers $0$, ce qui n'est pas le cas du filet $a^*$; ce filet a pour source l'ensemble des $(n,x) \in [3, \rightarrow[ \times \mathbf{R}$ tels que : $x = a_n$ ou $b_n$. Aussi grand que soit $n$, on a

$$(n,x) \leqslant (n, b_n) \quad \text{et} \quad a^*(n, b_n) = b_n$$

qui n'appartient pas à $]-1/2, 1/2[$, voisinage de $0$.

Montrons que $\mathbf{X}$ est à domaines fermés. Soit $s$ un filet convergent.

$1^{er}$ *cas :* Il existe $n \geqslant 3$ tel que $s$ converge vers $a_n$ ou $b_n$ ; c'est donc qu'à partir d'un certain rang on a $s(c) = a_n$ ou $b_n$. Le filet $s$ ne peut converger vers aucun autre élément de $A \cup B$ que $a_n$ et $b_n$; en effet, si $s$ convergeait vers $a_i$ ou $b_i$ $(i \neq n)$, on aurait, à partir d'un certain rang :

$$s(c) \in \{a_n, b_n\} \cap \{a_i, b_i\} \text{ , qui est vide.}$$

$s$ ne peut converger vers aucun réel $x \notin A \cup B$ ; en effet, pour

$$d = \inf(|x - a_n|, |x - b_n|),$$

$]x-d, x+d[$ est un voisinage de $x$ qui ne contient ni $a_n$ ni $b_n$. Aussi l'ensemble des points de convergence de $s$ est-il $\{a_n, b_n\}$, et l'on montre que cet ensemble est fermé par les mêmes arguments.

$2^{ème}$ *cas : $s$* ne converge vers aucun point de $A \cup B$; c'est donc que $s$ converge vers au moins un $x \notin A \bigcup B$. Cet $x$ est nécessairement unique; en effet, si $y \neq x$ et $s \to y$, on a aussi $y \notin A \bigcup B$, par hypothèse, donc $x$ et $y$ ont des voisinages disjoints, ce qui est contradictoire.

Le domaine de convergence de $s$ est $\{x\}$, qui est fermé; en effet, si $y \neq x$:

- ou bien $y \notin A \bigcup B$, auquel cas $]y-|y-x|, y+|y-x|[$ est un voisinage de $y$ inclus dans $X-\{x\}$.

- ou bien $y=a_n$ ou $b_n$, avec $n \geqslant 3$, auquel cas $\{a_n, b_n\}$ est un voisinage de $y$ qui est inclus dans $X-\{x\}$.

## BIBLIOGRAPHIE

[1] ANTOINE P., Etude élémentaire des catégories d'ensembles structurés, *Bul. Soc. Math. Belge* XVIII, 2 et 4 (1966).

[2] ANTOINE P., Notions de compacité et quasi-topologie, *Cahiers de Topo. et Géo. Diff.* XIV-3 (1973).

[3]. BOURDAUD G., *Espaces à convergences,* Thèse de 3ème cycle, Paris (1973).

[4] BOURDAUD G., Sur les convergences quasi-topologiques, *C.R.A.S. Paris* t. 278, série A (1973), pp. 85-88.

[5] ČECH E., *Topological spaces,* Prague, 1966.

[6] CHOQUET G., Convergences, *Ann. Univ. Grenoble* 23 (1947-48).

[7] DETOURBET G., Espaces à fermetures, *Esquisses Math.* 16, Paris (1971).

[8] FISCHER H.R., Limesraüme, *Math. Ann.* 137 (1959), pp. 269-303.

[9] KATZ M.P., *Propriétés des quasi-topologies,* Thèse, Moscou, 1972 (exposé par F. Berquier, Paris, 1973).

[10] KOWALSKY H.J., Limesraüme und Komplettierung, *Math. Nach.* 12 (1954), pp. 301-340.

[11] MACHADO A., Espaces d'Antoine et pseudo-topologies, *Cahiers de Topo. et Géo. Diff.* XIV-3 (1973).

[12] MOORE et SMITH, A general theory of limits, *Amer. Jour. of Math.* 44 (1922).

U. E. R. de Mathématiques
Université Paris 7, Tour 45
2 Place Jussieu
75005 PARIS