CAHIERS DE
TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
CATÉGORIQUES

CHRISTIAN LAIR

Dualités pour les structures algébriques esquissées

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 15, nº 4 (1974), p. 353-376

<http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1974__15_4_353_0>

CAHIERS DE TOPOLOGIE
ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE
Vol. XV-4

DUALITES POUR LES STRUCTURES ALGEBRIQUES ESQUISSEES*

par Christian LAIR

INTRODUCTION

Ce texte a pour but d'étudier la notion de dualité pour les structures algébriques.

Le mot dualité recouvre des notions très diverses. Par exemple, si A est un anneau, on lui associe un anneau dual A^*, c'est-à-dire une structure «duale» mais de même espèce que A.
Par contre, si E est un A-module à gauche sur A, on peut aisément lui associer un A^*-module à droite dual, il s'agit d'une structure algébrique d'espèce différente, nous dirons que cette espèce est *duale* de la première espèce.
Enfin, connaissant les axiomes de la structure de groupe (par exemple), on écrit facilement ceux de la structure de co-groupe. Cependant il n'existe aucun isomorphisme «de dualité» entre la catégorie des groupes et celle des co-groupes (réduite à un point!).

L'étude que nous avons entreprise justifie ces trois sortes de dualités.

Pour la mener à bien il nous a fallu choisir une théorie des structures algébriques utilisable. Nous avons opté pour la Théorie des Esquisses telle qu'elle est développée dans [C.O.S.S.] et dans [E.G.C.E]. Il est d'ailleurs indispensable de connaître la terminologie et les notations de [E.G.C.E.] pour lire le présent texte.

Nous montrons, tout d'abord, comment construire les espèces duales d'une espèce donnée. Puis, une espèce étant choisie, nous indiquons comment construire les structures algébriques de cette espèce, duales d'une structure algébrique donnée de cette espèce et «à valeurs dans une catégorie» donnée. Ces deux sortes de dualités sont entièrement décrites

* Conférence donnée au Colloque d'Amiens (1973).

à l'aide de deux couples formés d'un groupe et d'un de ses sous-groupes. Les opérations (à droite ou à gauche) de ces groupes sur des catégories particulières permettent, par construction du «produit semi-direct» (croisé) associé, d'étudier la notion d'homomorphisme contravariant et celle de structure algébrique involutive et commutative. On obtient ainsi des théorèmes d'involutisation et d'abélianisation. Cette théorie de la dualité appliquée, intuitivement, à l'«esquisse d'esquisse» permet de construire la co-espèce d'une espèce donnée, c'est-à-dire l'esquisse qui décrit les co-structures associées aux structures décrites par une esquisse donnée. On interprète ainsi la dualité «groupes-cogroupes» signalée plus haut.

Une fois de plus, je me dois de remercier très vivement Mme A. Bastiani et M. C. Ehresmann, non seulement parce qu'ils m'ont donné la possibilité d'exposer ces résultats lors du Colloque «T.A.C.» à Amiens, mais aussi parce que l'aide permanente dont ils me font bénéficier a permis que ces résultats existent! .

Nous reprenons toutes les notations de [E.G.C.E.] . Fn particulier, $\mathfrak{M}$ est la catégorie pleine d'applications entre ensembles d'un même univers $\mathfrak{U}$ et $\mathfrak{F}$ est la catégorie des foncteurs entre catégories correspondante. $\mathfrak{I}$ et $\mathfrak{I}'$ sont des parties de $\mathfrak{F}_0$ (ensemble des objets de $\mathfrak{F}$) et $\mathcal{O}^{\mathfrak{I}\mathfrak{I}'}$ est la catégorie des morphismes entre esquisses $\mathfrak{I}$-projectives et $\mathfrak{I}'$-inductives. Si $I^{\cdot}$ est une catégorie, $I^{\cdot}_{+}$ (resp. $I^{\cdot}_{-}$) est la catégorie obtenue en ajoutant à $I^{\cdot}$ un élément final (resp. initial). Un foncteur g de $I^{\cdot}$ vers $I'^{\cdot}$ s'étend d'une manière unique en un foncteur g_{+} de $I^{\cdot}_{+}$ vers $I'^{\cdot}_{+}$ appliquant l'élément final de $I^{\cdot}_{+}$ sur celui de $I'^{\cdot}_{+}$. On définit de même le foncteur g_{-} de $I^{\cdot}_{-}$ vers $I'^{\cdot}_{-}$ compatible avec les éléments initiaux.

Enfin, si σ et $\bar{\sigma}$ sont des esquisses, nous notons $\mathcal{O}(\bar{\sigma},\sigma)^{\square\square}$ la catégorie des transformations naturelles entre morphismes de σ vers $\bar{\sigma}$. Si $H^{\cdot}$ est une catégorie, $\Sigma(H^{\cdot})$ désigne l'esquisse $\mathfrak{I}$-projective et $\mathfrak{I}'$-inductive obtenue en munissant $H^{\cdot}$ de toutes ses $\mathfrak{I}$-limites projectives naturalisées et de toutes ses $\mathfrak{I}'$-limites inductives naturalisées.

0. Notations.

Si $I^{\cdot}$ est une catégorie, $Aut(I^{\cdot})$ désigne le groupe des foncteurs inversibles de $I^{\cdot}$ vers $I^{\cdot}$. A tout $g \in Aut(I^{\cdot})$ on associe trivialement un foncteur $g_{-} \in Aut(I^{\cdot}_{-})$ (resp. $g_{+} \in Aut(I^{\cdot}_{+})$).

Si σ est une esquisse $\mathcal{J}$-projective et $\mathcal{J}'$-inductive, nous désignons par $Aut(\sigma)$ le groupe des réalisations inversibles de σ vers σ.

Dans toute cette section $\sigma = (S^{\cdot}, A, A')$ est une esquisse $\mathcal{J}$-projective et $\mathcal{J}'$-inductive fixée.

1. Espèces duales.

Nous savons que les magmas unitaires à droite (par exemple) sont des $\mathcal{M}$-structures algébriques d'espèce l'esquisse de magma unitaire à droite (et qu'il n'est pas bien difficile de construire). Les magmas unitaires à gauche sont également des $\mathcal{M}$-structures algébriques d'espèce l'esquisse de magma unitaire à gauche. Ces deux esquisses sont différentes et ne sont pas isomorphes. Cependant, intuitivement, un magma unitaire à droite est «dual» d'un magma unitaire à gauche. Plus précisément, la catégorie des homomorphismes entre magmas unitaires à droite (et associée à $\mathcal{U}$) est «canoniquement» isomorphe à celle des homomorphismes entre magmas unitaires à gauche (associée à $\mathcal{U}$).

C'est cette notion intuitive de dualité que nous voulons décrire et préciser ici. Nous établirons ainsi que l'esquisse de magma unitaire à droite est d'une espèce duale de celle de magma unitaire à gauche, et qu'entre des catégories de structures algébriques d'espèces duales existent des isomorphismes «canoniques» de dualisation.

A l'esquisse $\mathcal{J}$-projective et $\mathcal{J}'$-inductive σ, nous associons le groupe

$$\delta_{\sigma} = \prod_{N \in A} Aut(I^{\cdot}_{N}) \times \prod_{N' \in A'} Aut(I'^{\cdot}_{N'})$$

lorsque $I^{\cdot}_{N} = I^{\cdot}$, pour tout $N : I^{\cdot}_{-} \to S^{\cdot}$ qui appartient à A, et $I'^{\cdot}_{N'} = I'^{\cdot}$, pour tout $N' : I'^{\cdot}_{+} \to S^{\cdot}$ qui appartient à A'.

A tout élément $g = ((g_{N})_{N \in A}, (g'_{N'})_{N' \in A'}) \in \delta_{\sigma}$, nous associons l'esquisse $\mathcal{J}$-projective et $\mathcal{J}'$-inductive $\sigma_{g} = (S^{\cdot}, A_{g}, A'_{g})$ définie par :

- $A_g = \{ N.(g_{N^-}) \mid N \in A \}$
- $A'_g = \{ N'.(g'_{N'^+}) \mid N' \in A' \}$.

Nous dénotons alors par $\mathcal{G}_\sigma$ le sous-groupoïde plein de $\mathcal{V}_\gamma^{\mathcal{I}\mathcal{I}'}$, dont l'ensemble des σ_g, lorsque $g \in \delta_\sigma$, est une classe d'objets.

PROPOSITION 1. *Le groupe δ_σ opère à droite sur le groupoïde $\mathcal{G}_\sigma$.*

PREUVE. Supposons que $\phi = (\sigma'', F, \sigma') \in \mathcal{G}_\sigma$ et soit g un élément de δ_σ. Au couple (ϕ, g) nous associons la réalisation $\phi_g = (\sigma''_g, F, \sigma'_g)$. Ceci a bien un sens puisque l'on constate sans difficulté que le groupe δ_σ est égal au groupe $\delta_{\sigma'}$ et au groupe $\delta_{\sigma''}$; on définit alors σ'_g et σ''_g comme on l'a fait pour σ_g. Il est clair que $\phi_g \in \mathcal{G}_\sigma$ et que ceci définit une opération à droite du groupe δ_σ sur le groupoïde $\mathcal{G}_\sigma$.

Nous savons que le groupoïde $\mathcal{G}_\sigma$ est somme de sous-groupoïdes (disjoints) transitifs (et de ce fait maximaux). Autrement dit, si σ' est un objet de $\mathcal{G}_\sigma$, il existe un sous-groupoïde maximal $\check{\sigma}'$ de $\mathcal{G}_\sigma$, transitif et qui contient σ'.

Nous désignerons par δ'_σ le sous-groupe de δ_σ, stabilisateur du sous-groupoïde $\check{\sigma}$ de $\mathcal{G}_\sigma$. C'est dire que δ'_σ est le sous-groupe de δ_σ dont les éléments sont les $g \in \delta_\sigma$ tels que σ'_g appartient à $\check{\sigma}$, pour tout $\sigma' \in \check{\sigma}$.

Nous notons alors par $\mathcal{E}_\sigma = \delta_\sigma / \delta'_\sigma$ l'ensemble des classes à droite dans δ_σ, modulo δ'_σ.

Nous allons montrer que l'espace homogène $\mathcal{E}_\sigma$ permet de décrire les espèces duales de l'espèce σ.

Nous dirons qu'une esquisse $\mathcal{I}$-projective et $\mathcal{I}'$-inductive $\bar{\sigma}$ est *en auto-dualité* si, et seulement si, pour tout $g \in \delta_{\bar{\sigma}}$ on a $\bar{\sigma}_g = \bar{\sigma}$.

Supposons que $\bar{\sigma}$ soit un prototype $\mathcal{I}$-projectif et $\mathcal{I}'$-inductif large (resp. strict) en auto-dualité. Choisissons, pour tout $\check{g} \in \mathcal{E}_\sigma$, un et un seul objet $\sigma_{\check{g}}$ dans $\check{\sigma}_g$, si $g \in \check{g}$. En particulier, nous pouvons choisir $\sigma_{\delta'_\sigma} = \sigma$.

Nous dirons que $\mathcal{E}_\sigma$ est *l'espace homogène sur* δ_σ *des espèces duales de* σ. L'esquisse $\mathcal{J}$-projective et $\mathcal{J}'$-inductive $\sigma_{\check{g}}$ sera dite *espèce* $\check{g}$*-duale de* σ, pour tout $\check{g} \in \mathcal{E}_\sigma$.

Il est clair que si $\phi = (\bar{\sigma}, F, \sigma_{\check{g}})$ est une réalisation et $\check{g}' \in \mathcal{E}_\sigma$, alors $\phi' = (\bar{\sigma}, F, \sigma_{\check{g}'})$ est une autre réalisation, puisque $\bar{\sigma}$ est en autodualité. Il en résulte que la surjection qui à tout objet ϕ de $\mathcal{O}(\bar{\sigma}, \sigma_{\check{g}})^{\square\square}$ associe l'objet ϕ' de $\mathcal{O}(\bar{\sigma}, \sigma_{\check{g}'})^{\square\square}$ se prolonge en un foncteur inversible

$$\underline{\Delta}^{\bar{\sigma}}(\check{g}, \check{g}') : \mathcal{O}(\bar{\sigma}, \sigma_{\check{g}})^{\square\square} \to \mathcal{O}(\bar{\sigma}, \sigma_{\check{g}'})^{\square\square}.$$

Ces constatations permettent de démontrer trivialement la :

PROPOSITION 2. *La surjection* $\underline{\Delta}^{\bar{\sigma}}$, *qui à tout couple* $(\check{g}, \check{g}')$ *de* $\mathcal{E}_\sigma \times \mathcal{E}_\sigma$ *associe* $\underline{\Delta}^{\bar{\sigma}}(\check{g}, \check{g}')$, *définit un foncteur :*

$$\Delta^{\bar{\sigma}} : (\mathcal{E}_\sigma \times \mathcal{E}_\sigma)^{\perp} \to \check{\mathcal{F}}_\gamma,$$

du groupoïde des couples de $\mathcal{E}_\sigma$ *vers un groupoïde d'isomorphismes entre les catégories d'homomorphismes entre* $\bar{\sigma}$*-structures algébriques larges (resp. strictes) d'espèces les espèces duales de* σ.

L'isomorphisme $\Delta^{\bar{\sigma}}(\check{g}, \check{g}')$ sera dit *isomorphisme de* $\check{g}'$*-dualisation pour les* $\bar{\sigma}$*-structures algébriques larges (resp. strictes) d'espèce* $\check{g}$*-duale de* σ.

Si $\mathcal{E}_\sigma$ est un espace homogène réduit à deux éléments, nous dirons simplement *espèce duale de* σ et *isomorphisme de dualisation* plutôt que $\check{g}$-espèce duale de σ et isomorphisme de $\check{g}$-dualisation, si $\check{g}$ est le seul élément de $\mathcal{E}_\sigma$ différent de δ'_σ.

Par exemple, si $\bar{\sigma} = \Sigma(\mathfrak{M})$, il s'agit d'un prototype (large) en autodualité. Supposons que σ soit précisément l'esquisse de magma unitaire à droite. Alors δ_σ est isomorphe à $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ et $\mathcal{E}_\sigma$ n'a que deux éléments. L'espèce duale de σ est l'esquisse de magma unitaire à gauche (à isomorphisme près). L'isomorphisme de dualisation correspondant est celui qui à tout magma unitaire à droite associe son magma unitaire à gauche dual dans le sens intuitif.

Les espèces duales sont donc décrites à l'aide de l'espace homogène des classes à droite d'un groupe, modulo un de ses sous-groupes.

2. Structures duales.

Les notions précédentes décrivent la dualité entre des structures algébriques d'espèces différentes (et non isomorphes). Il existe cependant une notion de dualité entre des structures algébriques de même espèce. Par exemple, la structure duale d'une catégorie est encore une catégorie! C'est cette notion de dualité que nous décrivons maintenant. De même que les espèces duales d'une esquisse ont été décrites à l'aide de l'espace homogène des classes à droite d'un groupe modulo un de ses sous-groupes, nous décrirons les structures duales de même espèce à l'aide d'un groupoïde de classes à gauche d'un groupe modulo un de ses sous-groupes.

Pour ce faire nous reprenons les notations et les résultats qui précèdent. Désignons par $\mathcal{C}^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{V}^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$ dont les objets sont les esquisses $\mathcal{J}$-projectives et $\mathcal{J}'$-inductives en auto-dualité.

Remarquons que si $H^{\cdot} \in \hat{\mathcal{F}}_0$ est une catégorie, alors le prototype $\mathcal{J}$-projectif et $\mathcal{J}'$-inductif $\Sigma(H^{\cdot})$ est nécessairement un objet de $\mathcal{C}^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$.

Soit $q^{\mathcal{J}\mathcal{J}'} : \mathcal{C}^{\mathcal{J}\mathcal{J}'} \to \mathcal{V}^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$ le foncteur injection canonique.

Si $\sigma = (S^{\cdot}, A, A')$ est un objet de $\mathcal{V}^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$, posons :

$$\underline{Q}(\sigma) = (S^{\cdot}, Q'(A), Q''(A')),$$

lorsque :

$$Q'(A) = \{ N.(g_-) \mid g \in Aut(I^{\cdot}_N) \text{ et } N : I^{\cdot}_{N-} \to S^{\cdot} \text{ appartient à } A \},$$

$$Q''(A') = \{ N'.(g_+) \mid g \in Aut(I^{\cdot}_{N'}) \text{ et } N' : I^{\cdot}_{N'+} \to S^{\cdot} \text{ appartient à } A' \}.$$

Il est évident que, si $\phi = (\sigma_2, F, \sigma_1)$ est une réalisation, alors $\underline{Q}(\phi) = (\underline{Q}(\sigma_2), F, \underline{Q}(\sigma_1))$ en est également une. Enfin, la surjection $\underline{Q}$ ainsi définie est évidemment à valeurs dans $\mathcal{C}^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$ et définit un foncteur $Q : \mathcal{V}^{\mathcal{J}\mathcal{J}'} \to \mathcal{C}^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$.

Il n'y a aucune difficulté à démontrer que :

PROPOSITION 1. *Le foncteur Q est adjoint à gauche au foncteur $q^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$.*

Nous avons étudié en 1 le «nombre» (ou l'espace homogène) des sous-groupoïdes transitifs maximaux de $\mathcal{G}_\sigma$; ceci nous a permis d'introduire la notion de dualité pour les espèces. Pour achever l'étude de $\mathcal{G}_\sigma$ il nous suffit donc d'étudier chacun de ses sous-groupoïdes transitifs maximaux. Pour tout objet σ' de $\mathcal{G}_\sigma$ il est clair que $\check{\sigma}'$ est isomorphe au au sous-groupoïde transitif maximal $\check{\sigma}$, dont σ est un objet. Pour étudier un quelconque de ces sous-groupoïdes il nous suffit donc d'étudier ce seul sous-groupoïde transitif et maximal de $\mathcal{G}_\sigma$.

Pour tout objet σ' de $\check{\sigma}$, nous désignons par:

$$\iota_{\sigma'} = (Q(\sigma), i_{\sigma'}, \sigma')$$

la réalisation telle que $i_{\sigma'}$ soit le foncteur identité. Il est clair que $\iota_{\sigma'}$ est un morphisme canonique définissant $Q(\sigma)$ comme $q^{\mathfrak{G}'}$-structure libre sur σ'.

En conséquence, pour tout automorphisme $\gamma' \in Aut(\sigma')$, il existe un et un seul automorphisme

$$\overline{\gamma}' \in Aut(Q(\sigma)) \text{ tel que } \iota_{\sigma'} . \gamma' = \overline{\gamma}' . \iota_{\sigma'} .$$

Ceci montre que $Aut(\sigma')$ s'identifie à un sous-groupe de $Aut(Q(\sigma))$, au moyen d'un homomorphisme de groupes, injectif:

$$Aut(\sigma') \xrightarrow{[\iota_{\sigma'}]} Aut(Q(\sigma)).$$

Comme $Aut(\sigma')$ est isomorphe à $Aut(\sigma)$, le groupoïde $\check{\sigma}$ étant transitif, le sous-groupe $[\iota_{\sigma'}](Aut(\sigma'))$ et le sous-groupe $[\iota_\sigma](Aut(\sigma))$ de $Aut(Q(\sigma))$ sont conjugués.

Nous poserons, désormais

$$d_\sigma = Aut(Q(\sigma)) \text{ et } d'_\sigma = [\iota_\sigma](Aut(\sigma)).$$

Plus généralement, si σ' et σ'' sont deux objets de $\check{\sigma}$ et si $\gamma = (\sigma'', G, \sigma')$ est un morphisme de $\check{\sigma}$, il existe un unique automorphisme

$$\overline{\gamma} \in d_\sigma \text{ tel que: } \overline{\gamma} . \iota_{\sigma'} = \iota_{\sigma''} . \gamma .$$

Désignons par $\mathcal{S}_\sigma = d_\sigma // d'_\sigma$ le groupoïde dont les morphismes sont les triplets $(H'', \tilde{\gamma}, H')$ tels que:

- H' et H'' sont deux classes à gauche de d_σ modulo d'_σ.
- $\tilde{\gamma} . H' = H''$.

Il est clair que la surjection qui à tout $\gamma = (\sigma'', G, \sigma') \in \check{\sigma}$ associe $(K'', \bar{\gamma}, K')$, où K' et K'' sont les classes de $Q(g_\sigma(\sigma', \sigma))$ et de $Q(g_\sigma(\sigma'', \sigma))$ (si $g_\sigma(\sigma', \sigma) \in \sigma'.\check{\sigma}.\sigma$ et $g_\sigma(\sigma'', \sigma) \in \sigma''.\check{\sigma}.\sigma$) définit un foncteur $J : \check{\sigma} \to \mathcal{S}_\sigma$.

Inversement, supposons que $(H'', \tilde{\gamma}, H') \in \mathcal{S}_\sigma$. Comme H' est une classe à gauche modulo d'_σ, il existe au moins un automorphisme :

$$\tilde{\gamma}' = (Q(\sigma), G', Q(\sigma)), \text{ tel que } \tilde{\gamma}'.d'_\sigma = H'.$$

Ceci signifie que, pour tout $N \in A$ (resp. $N' \in A'$), il existe $\tilde{N} \in A$ et $g_N \in Aut(I^\cdot)$ (resp. $\tilde{N}' \in A'$ et $g'_{N'} \in Aut(I^{\cdot\cdot})$), lorsque $N : I^\cdot_- \to S^\cdot$ (resp. $N' : I^{\cdot\cdot}_+ \to S^\cdot$), tels que $G'.N = (\tilde{N}.g_N)_-$ (resp. $G'.N' = (\tilde{N}'.g'_{N'})_+$). Inversement, pour tout $\tilde{N} \in A$ (resp. $\tilde{N}' \in A'$) il existe un et un seul $N \in A$ et un g_N (resp. $N' \in A'$ et un $g'_{N'}$) tels que $G'.N = \tilde{N}.g_{N-}$ (resp. $G'.N' = \tilde{N}'.g'_{N'+}$), puisque G' est un foncteur inversible. Posons

$$g' = ((g_N)_{N \in A}, (g'_{N'})_{N' \in A'}).$$

Alors g' est élément de $\mathcal{S}_\sigma$ et il est clair que $\gamma' = (\sigma_{g'}, G', \sigma)$ est une réalisation telle que $\bar{\gamma}' = \tilde{\gamma}'$. Notons que g' n'est pas l'unique élément de $\mathcal{S}_\sigma$ à vérifier cette égalité mais que, si g'_1 en est un autre, alors on a nécessairement : $\sigma_{g'} = \sigma_{g'_1}$.

Un raisonnement analogue vaut pour H'' et fournit une réalisation $\gamma'' = (\sigma_{g''}, G'', \sigma)$ telle que $\bar{\gamma}'' = \tilde{\gamma}''$, $\tilde{\gamma}''$ étant un automorphisme de $Q(\sigma)$ vérifiant $\tilde{\gamma}''.d'_\sigma = H''$.

On constate sans difficulté que, si $\tilde{\gamma} = (Q(\sigma), G, Q(\sigma))$ et si l'on pose $\gamma = (\sigma_{g''}, G, \sigma_{g'})$ (en conservant les notations précédentes), alors γ est une réalisation inversible telle que $\bar{\gamma} = \tilde{\gamma}$. On définit ainsi une surjection $\underline{J}'$ de $\mathcal{S}_\sigma$ vers $\check{\sigma}$. Elle définit évidemment un foncteur $J' : \mathcal{S}_\sigma \to \check{\sigma}$, tel que

$$J.J' = \mathcal{S}_\sigma \text{ et } J'.J = \check{\sigma},$$

en vertu de la construction de J'.

Ainsi nous avons démontré que :

PROPOSITION 2. *Les groupoïdes $\mathcal{S}_\sigma = d_\sigma // d'_\sigma$ et $\check{\sigma}$ sont isomorphes.*

Supposons, de plus, que $\bar{\sigma}$ soit un prototype $\mathcal{G}$-projectif et $\mathcal{G}'$-inductif large (resp. strict) en auto-dualité. Comme $Q(\sigma)$ est une $q^{\mathcal{G}\mathcal{G}'}$-

structure libre sur σ, il existe un isomorphisme canonique (associé à ι_σ):

$$\mho(\bar{\sigma}, \iota_\sigma)^{-1} : \mho(\bar{\sigma}, \sigma)^{\square\square} \xrightarrow{\sim} \mho(\bar{\sigma}, Q(\sigma))^{\square\square}.$$

Comme manifestement la surjection qui, à tout $\tilde{\gamma} \in Aut(Q(\sigma))$, associe $\mho(\bar{\sigma}, \tilde{\gamma}) \in Aut(\mho(\bar{\sigma}, Q(\sigma))^{\square\square})$ définit un homomorphisme de groupes :

$$\nabla_Q^{\bar{\sigma}} : d_\sigma \longrightarrow Aut(\mho(\bar{\sigma}, Q(\sigma))^{\square\square}),$$

on en déduit l'homomorphisme de groupes

$$\nabla^{\bar{\sigma}} : d_\sigma \longrightarrow Aut(\mho(\bar{\sigma}, \sigma)^{\square\square}).$$

dont la surjection sous-jacente associe à tout automorphisme $\tilde{\gamma} \in d_\sigma$ l'automorphisme de $\mho(\bar{\sigma}, \sigma)^{\square\square}$ qui s'écrit

$$\mho(\bar{\sigma}, \iota_\sigma) . \mho(\bar{\sigma}, \tilde{\gamma}) . \mho(\bar{\sigma}, \iota_\sigma)^{-1}.$$

Ceci permet d'énoncer :

PROPOSITION 3. *La surjection* $\underline{\nabla}^{\bar{\sigma}}$, *qui à tout élément* $\tilde{\gamma}$ *du groupe* d_σ *(des automorphismes de* $Q(\sigma)$*) associe l'automorphisme*

$$\mho(\bar{\sigma}, \iota_\sigma) . \mho(\bar{\sigma}, \tilde{\gamma}) . \mho(\bar{\sigma}, \iota_\sigma)^{-1},$$

définit un homomorphisme du groupe d_σ *vers le groupe des automorphismes de la catégorie des homomorphismes entre* $\bar{\sigma}$*-structures algébriques larges (resp. strictes) d'espèce* σ.

Bien entendu, $\nabla^{\bar{\sigma}}(d'_\sigma)$ est un sous-groupe de $Aut(\mho(\bar{\sigma}, \sigma)^{\square\square})$. Il en résulte qu'à $\nabla^{\bar{\sigma}}$ on peut associer un foncteur:

$$\overline{\nabla}^{\bar{\sigma}} : d_\sigma // d'_\sigma \longrightarrow Aut(\mho(\bar{\sigma}, \sigma)^{\square\square}) // \nabla^{\bar{\sigma}}(d'_\sigma),$$

ou si l'on préfère :

$$\overline{\nabla}^{\bar{\sigma}} : \mathfrak{S}_\sigma \longrightarrow Aut(\mho(\bar{\sigma}, \sigma)^{\square\square}) // \nabla^{\bar{\sigma}}(d'_\sigma).$$

Nous dirons que $\mathfrak{S}_\sigma$ est le *groupe des dualités de structures algébriques d'espèce* σ.

De même, si $\tilde{\gamma} \in d_\sigma$, nous dirons que $\nabla^{\bar{\sigma}}(\tilde{\gamma})$ est *l'automorphisme de* $\tilde{\gamma}$*-dualisation des* $\bar{\sigma}$*-structures algébriques larges (resp. strictes) d'espèce* σ, tandis que, si ϕ est un objet de $\mho(\bar{\sigma}, \sigma)^{\square\square}$, son image

$\nabla^{\overline{\sigma}}(\tilde{\gamma})(\phi)$ sera appelée la $\overline{\sigma}$-*structure algébrique large* (resp. *stricte*) $\tilde{\gamma}$-*duale de* ϕ.

Il se peut que d_σ soit isomorphe au groupe (additif) $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, dans ce cas nous dirons *automorphisme de dualisation* et *structure algébrique large* (resp. *stricte*) *duale de* ϕ plutôt que automorphisme de $\tilde{\gamma}$-dualisation et structure algébrique large (resp. stricte) $\tilde{\gamma}$-duale, si $\tilde{\gamma}$ est l'élément de d_σ différent de son élément neutre.

Par exemple, si σ est l'esquisse de catégories, alors d_σ est isomorphe à $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ et l'isomorphisme de dualisation des $\Sigma(\mathfrak{M})$-structures algébriques larges d'espèce σ s'identifie au foncteur de $\mathfrak{F}$ dans $\mathfrak{F}$ qui à tout foncteur associe son foncteur dual. On retrouve des résultats analogues lorsque σ est l'esquisse de groupes (groupes abéliens, anneaux.....).

Ainsi, la notion de structure duale de même espèce est entièrement décrite à l'aide du groupe d_σ et de son sous-groupe d'_σ, qui permet de «reconstituer» le groupoïde $\check{\sigma}$. En d'autres termes, la notion de dualité (aussi bien entre structures qu'entre espèces) est entièrement représentée à l'aide du groupoïde $\mathcal{G}_\sigma$, c'est-à-dire à l'aide de deux couples formés d'un groupe et d'un de ses sous-groupes. Le premier couple, à l'aide de l'espace homogène des classes, décrit le nombre de composantes transitives maximales de $\mathcal{G}_\sigma$, le second décrit, à l'aide du groupoïde des classes à gauche, l'une quelconque de ces composantes.

3. Homomorphismes contravariants.

Nous reprenons les notations et les résultats précédents. Nous allons montrer brièvement comment on retrouve, à l'aide des notions de dualités précédentes, la notion d'homomorphisme (entre structures algébriques) contravariant ou covariant, notamment la notion de foncteur contravariant ou covariant.

PROPOSITION 1. *Le groupe des dualités de structures algébriques d'espèce* σ *opère à droite sur la catégorie* $\mathcal{O}(\overline{\sigma},\sigma)^{\square\square}$.

PREUVE. En effet, on sait que $\mathcal{O}(\overline{\sigma},\sigma)^{\square\square}$ est «canoniquement» isomorphe à $\mathcal{O}(\bar{\sigma}, Q(\sigma))^{\square\square}$. Comme $d_\sigma = Aut(Q(\sigma))$ opère à droite, par composition sur $\mathcal{O}(\bar{\sigma}, Q(\sigma))^{\square\square}$, la proposition est démontrée.

Il suit de la proposition que l'on peut associer à cette opération, à droite, de d_σ sur $\mathcal{O}(\bar{\sigma}, \sigma)^{\square\square}$ une catégorie produit croisé [C.A.S.T.] (rappelons qu'il s'agit d'une notion généralisant celle de produit semi-direct d'un groupe par un deuxième groupe qui opère à droite sur le premier), que nous notons $\mathcal{K}(\mathcal{O}(\bar{\sigma}, \sigma)^{\square\square}, d_\sigma)^{\cdot}$. Ses éléments sont les triplets $(\phi, \tilde{\gamma}, \tau)$ tels que :

- ϕ est un objet de $\mathcal{O}(\bar{\sigma}, \sigma)^{\square\square}$, noté $\phi = (\bar{\sigma}, F, \sigma)$,
- $\tilde{\gamma}$ est un élément de d_σ , noté $\tilde{\gamma} = (Q(\sigma), G, Q(\sigma))$,
- τ s'identifie à la transformation naturelle $T = (F' \cdot \underline{T}, F_1)$ telle que $\phi_1 = (\bar{\sigma}, F_1, \sigma)$ et $\phi' = (\bar{\sigma}, F', \sigma)$ sont deux réalisations.
- $\nabla^{\bar{\sigma}}(\tilde{\gamma})(\phi) = \phi_1$.

Nous dirons qu'un tel morphisme est un *homomorphisme $\tilde{\gamma}$-variant entre les $\bar{\sigma}$-structures algébriques larges* (resp. *strictes*) *d'espèce* σ que sont ϕ et ϕ'. La catégorie $\mathcal{K}(\mathcal{O}(\bar{\sigma}, \sigma)^{\square\square}, d_\sigma)^{\cdot}$ sera dite *catégorie produit croisé des homomorphismes, à variance dans d_σ, entre $\bar{\sigma}$-structures algébriques larges* (resp. *strictes*) *d'espèce* σ.

Lorsque d_σ est isomorphe à $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, un homomorphisme $\tilde{\gamma}$-variant sera appelé un *homomorphisme covariant* si $\tilde{\gamma}$ est élément neutre de d_σ, tandis que, si $\tilde{\gamma}$ est l'unique élément non neutre de d_σ, un homomorphisme $\tilde{\gamma}$-variant sera dit *homomorphisme contravariant*.

Par exemple, si σ est l'esquisse de catégories, alors d_σ est isomorphe à $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ et un homomorphisme covariant entre deux catégories (c'est-à-dire entre deux $\Sigma(\mathfrak{M})$-structures algébriques larges d'espèce σ) s'identifie à un foncteur covariant (c'est-à-dire à un foncteur) tandis qu'un homomorphisme contravariant entre deux catégories s'identifie à à un foncteur contravariant. Il en résulte que l'ensemble des foncteurs covariants et contravariants entre des catégories dont l'ensemble sous-jacent appartient à $\mathcal{U}$ forme une catégorie produit croisé (le composé d'un foncteur covariant avec un foncteur contravariant étant un foncteur contravariant évident, alors que le composé de deux foncteurs contravariants est bien entendu un foncteur covariant).

4. Structures involutives.

La notion de produit croisé associé à l'opération d'un groupe sur une catégorie peut s'étendre lorsque l'on remplace la catégorie par un graphe multiplicatif et lorsque ce graphe multiplicatif est sous-jacent à une esquisse. Nous allons montrer qu'alors on peut construire l'esquisse des structures involutives d'espèce une esquisse donnée.

Nous reprenons les résultats et les notations antérieurs.

Le groupe d_σ étant constitué des automorphismes de $Q(\sigma)$, il opère à gauche sur le graphe multiplicatif $S^\cdot$, sous-jacent à $Q(\sigma)$. A cette opération nous associons le graphe multiplicatif produit croisé que nous notons $S^\cdot_v$. Ses éléments sont les triplets $(z, \tilde{\gamma}, u)$ tels que:

- z est un élément de $S^\cdot$ et u en est un objet,
- $\tilde{\gamma} = (Q(\sigma), G, Q(\sigma))$ est un automorphisme de $Q(\sigma)$,
- $G(u)$ est la source de z.

Rappelons également que la source d'un tel triplet est, dans $S^\cdot_v$, le triplet $(u, Q(\sigma), u)$, alors que son but est le triplet $(u', Q(\sigma), u')$, lorsque u' est le but de z dans $S^\cdot$. Dans ces conditions, si $(z', \tilde{\gamma}', u'_1)$ est un autre élément de $S^\cdot_v$, le composé $(z', \tilde{\gamma}', u'_1).(z, \tilde{\gamma}, u)$ est défini si, et seulement si:

- $G(u) = u'_1$, si $\tilde{\gamma}' = (Q(\sigma), G', Q(\sigma))$,
- $z'.G'(z)$ est défini dans $S^\cdot$,

alors le composé est $(z'.G'(z), \tilde{\gamma}'.\tilde{\gamma}, u)$.

La surjection i_v qui, à tout morphisme z de $S^\cdot$ de source u, associe $(z, Q(\sigma), u)$, définit un foncteur:

$$i_v : S^\cdot \longrightarrow S^\cdot_v .$$

Nous munissons $S^\cdot_v$ de la structure d'esquisse $\mathcal{I}$-projective et $\mathcal{I}'$-inductive $\sigma_v = (S^\cdot_v, A_v, A'_v)$ définie par:

- $A_v = \{ N_v \mid \text{il existe } N \in A \text{ tel que } i_v . N = N_v \}$,
- $A'_v = \{ N'_v \mid \text{il existe } N' \in A \text{ tel que } i_v . N' = N'_v \}$.

Il en résulte que $\iota_v = (\sigma_v, i_v, \sigma)$ est une réalisation.

Si $\bar{\sigma}$ est un prototype $\mathcal{J}$-projectif et $\mathcal{J}'$-inductif large (resp. strict) en auto-dualité, la réalisation ι_v définit un foncteur:

$$\mho(\bar{\sigma}, \iota_v): \mho(\bar{\sigma}, \sigma_v)^{\square\square} \longrightarrow \mho(\bar{\sigma}, \sigma)^{\square\square}.$$

Nous dirons que σ_v est *l'esquisse $\mathcal{J}$-projective et $\mathcal{J}'$-inductive des structures algébriques involutives naturalisées d'espèce* σ. Un objet $\phi_v \in \mho(\bar{\sigma}, \sigma_v)$ s'appellera une *$\bar{\sigma}$-structure algébrique large* (resp. *stricte*) *involutive naturalisée d'espèce* σ (c'est aussi une $\bar{\sigma}$-structure algébrique large (resp. stricte) d'espèce σ_v). Nous dirons alors que $\phi_v . \iota_v$ est une *$\bar{\sigma}$-structure algébrique large* (resp. *stricte*) *involutive d'espèce* σ.

Par exemple, si σ est l'esquisse de catégories et si $\bar{\sigma} = \Sigma(\mathfrak{M})$, une $\bar{\sigma}$-structure algébrique large involutive d'espèce σ s'identifie à une catégorie involutive (c'est-à-dire une catégorie pour laquelle il existe un isomorphisme, involutif, vers sa duale), alors qu'une $\bar{\sigma}$-structure algébrique large involutive naturalisée d'espèce σ s'identifie à une catégorie involutive pour laquelle on précise un isomorphisme «naturel» involutif vers sa duale.

Nous pouvons préciser la notion de structure algébrique involutive naturalisée de telle sorte que les «involutions» en certaines des unités de $S^{\cdot}_v$ soient des identités. Précisément, soit S'_0 une partie de la classe $S^{\cdot}_0$ des objets de $S^{\cdot}$ (qui est aussi la classe des objets de $S^{\cdot}{}_v$). Nous supposons dans toute cette partie, que S'_0 est *ponctuellement stable par* d_σ, ce qui signifie que, si $u \in S'_0$ et si $\tilde{\gamma} = (Q(\sigma), G, Q(\sigma))$ appartient à d_σ, on a $G(u) = u$.

Nous dirons qu'une $\bar{\sigma}$-structure algébrique large (resp. stricte) involutive naturalisée d'espèce σ, s'écrivant $\phi = (\bar{\sigma}, F, \sigma_v)$, est une *$\bar{\sigma}$-structure algébrique large* (resp. *stricte*) *involutive S'_0-naturalisée d'espèce* σ si, et seulement si:

$$F(u, \tilde{\gamma}, u) = F(u, Q(\sigma), u), \text{ pour tout } u \in S'_0 \text{ et tout } \tilde{\gamma} \in d_\sigma.$$

Nous désignons par $\mho_{S'_0}(\bar{\sigma}, \sigma_v)^{\square\square}$ la sous-catégorie pleine de $\mho(\bar{\sigma}, \sigma_v)^{\square\square}$ ayant pour objets les $\bar{\sigma}$-structures algébriques larges (resp. strictes) involutives S'_0-naturalisées d'espèce σ. Soit $S^{\cdot}_{v, S'_0}$ le graphe multiplicatif quasi-quotient de $S^{\cdot}_{v}$ par la relation d'équivalence qui identifie tout $(u, \tilde{\gamma}, u)$ à $(u, Q(\sigma), u)$, dès que $u \in S'_0$ et que $\tilde{\gamma} \in d_{\sigma}$. Notons $k : S^{\cdot}_{v} \to S^{\cdot}_{v, S'_0}$ le foncteur «passage au quotient» qui en résulte et notons $\sigma_{v, S'_0} = (S^{\cdot}_{v, S'_0}, A_{v, S'_0}, A'_{v, S'_0})$ l'esquisse $\mathfrak{I}$-projective et $\mathfrak{I}'$-inductive définie par :

- $A_{v, S'_0} = \{ N_1 \mid$ il existe $N \in A_v$ tel que $k . N = N_1 \}$,
- $A'_{v, S'_0} = \{ N'_1 \mid$ il existe $N' \in A'_v$ tel que $k . N' = N'_1 \}$.

Il en résulte la réalisation $\kappa = (\sigma_{v, S'_0}, k, \sigma_v)$ dont on vérifie sans peine qu'elle est un épimorphisme de $\mathcal{O}^{\mathfrak{I}\mathfrak{I}'}$.

Moyennant ces conditions, nous avons :

PROPOSITION 1. *La catégorie* $\mathcal{O}_{S'_0}(\bar{\sigma}, \sigma_v)^{\square\square}$ *est isomorphe à la catégorie* $\mathcal{O}(\bar{\sigma}, \sigma_{v, S'_0})^{\square\square}$.

PREUVE. Elle est immédiate.

Autrement dit, nous pouvons appeler σ_{v, S'_0} *l'esquisse $\mathfrak{I}$-projective et $\mathfrak{I}'$-inductive des structures algébriques involutives S'_0-naturalisées d'espèce* σ.

Remarquons qu'alors

$$\mathcal{O}(\bar{\sigma}, \kappa) : \mathcal{O}(\bar{\sigma}, \sigma_{v, S'_0})^{\square\square} \longrightarrow \mathcal{O}(\bar{\sigma}, \sigma_v)^{\square\square}$$

est un foncteur injectif (car κ est un épimorphisme) induisant par l'isomorphisme de la proposition précédente le foncteur injection canonique de $\mathcal{O}_{S'_0}(\bar{\sigma}, \sigma_v)^{\square\square}$ dans $\mathcal{O}(\bar{\sigma}, \sigma_v)^{\square\square}$. Il en résulte le foncteur :

$$\mathcal{O}(\bar{\sigma}, \kappa . \iota_v) : \mathcal{O}(\bar{\sigma}, \sigma_{v, S'_0})^{\square\square} \longrightarrow \mathcal{O}(\bar{\sigma}, \sigma).^{\square\square}.$$

En général ce dernier foncteur n'est pas injectif. Nous étudions en 5 une condition suffisante pour qu'il le soit. Ceci nous conduira à définir la notion de structure commutative.

Citons, pour terminer cette partie, un exemple simple. Supposons de nouveau que σ soit l'esquisse de catégories et $\bar{\sigma} = \Sigma(\mathfrak{M})$. On sait que le graphe multiplicatif sous-jacent à σ admet une unité u_0 qui «représente» la classe des unités d'une catégorie (que σ permet d'esquisser). On constate que $S'_0 = \{ u_0 \}$ est ponctuellement stable. Une

$\Sigma(\mathfrak{M})$-structure algébrique large involutive $\{u_0\}$-naturalisée s'identifie alors à une catégorie involutive pour laquelle on précise un isomorphisme particulier vers sa duale et qui laisse fixe les unités.

5. Structures commutatives.

Nous reprenons les notations et les résultats qui précèdent.

Nous dirons que S_0' est une *partie idéale pour* σ si, et seulement si :

- S_0' est une partie de S_0, ponctuellement stable par d_σ,
- pour tout prototype $\mathcal{J}$-projectif et $\mathcal{J}'$-inductif large $\bar{\sigma}$, pour tout couple (ϕ_1, ϕ_2) de deux réalisations de σ vers $\bar{\sigma}$ telles que $\phi_l = (\bar{\sigma}, F_l, \sigma)$, lorsque $l = 1, 2$, et pour tout couple (T_1, T_2) de deux transformations naturelles $T_l = (F_1, \underline{T}_l, F_2)$ si $l = 1, 2$, les égalités

$$T_1(u) = T_2(u), \text{ pour tout } u \in S_0',$$

impliquent l'égalité $T_1 = T_2$.

Remarquons que, si σ admet une idée (au sens de [I.M.S.A.]) σ_0, la classe des unités S_0' de son graphe multiplicatif sous-jacent, si elle est ponctuellement stable par d_σ, est idéale pour σ. Il en est ainsi des esquisses de structures algébriques usuelles.

La condition précédente implique, évidemment :

PROPOSITION 1. *Si $\bar{\sigma}$ est un prototype $\mathcal{J}$-projectif et $\mathcal{J}'$-inductif en autodualité, si S_0' est une partie idéale pour σ, la catégorie $\mathcal{O}(\bar{\sigma}, \sigma_{v,S_0'})^{\square\square}$ s'identifie à une sous-catégorie pleine de $\mathcal{O}(\bar{\sigma}, \sigma)^{\square\square}$.*

PREUVE. Elle est évidente.

De manière générale, nous dirons que les structures algébriques involutives S_0'-naturalisées sont des *structures algébriques S_0'-commutatives d'espèce* σ si, et seulement si, S_0' est une partie idéale pour σ. Nous dirons alors que $\sigma_{v,S_0'}$ est l'esquisse des *structures algébriques S_0'-commutatives d'espèce* σ.

Par exemple, l'esquisse usuelle de magma (resp. monoïde, groupe..) admet une partie idéale de la forme $\{u\}$ (où u «représente» l'ensemble sous-jacent). On montre facilement que $\sigma_{v,\{u\}}$ est l'esquisse de magma commutatif (resp. monoïde commutatif, groupe commutatif...) telle qu'une construction explicite, à partir des axiomes, l'aurait fournie.

6. Foncteurs d'involutisation et d'abélianisation.

Nous allons montrer rapidement que, moyennant certaines hypothèses qui dans le cas des structures usuelles sont toujours vérifiées, les foncteurs

$$\mho(\bar{\sigma}, \iota_v) : \mho(\bar{\sigma}, \sigma_v)^{\square\square} \longrightarrow \mho(\bar{\sigma}, \sigma)^{\square\square}$$

et

$$\mho(\bar{\sigma}, \kappa . \iota_v) : \mho(\bar{\sigma}, \sigma_{v, S_0^{\cdot}})^{\square\square} \longrightarrow \mho(\bar{\sigma}, \sigma)^{\square\square}$$

admettent des adjoints (lorsque l'on reprend les notations précédentes).

Pour ce faire, outre les hypothèses et les notations précédentes que nous reprenons, nous supposons que :

- $\mathcal{I}' = \emptyset$ et $\mathcal{I}$ est un ensemble «petit» de «petites» catégories.

- $L = \omega_{l+1}$ est l'ordinal régulier d'indice $l+1$, lorsque l est l'ordinal borne supérieure des ordinaux $\bar{I}$, où $I^{\cdot}$ parcourt $\mathcal{I}$,

- $H^{\cdot} \in \mathcal{F}_0$ est une catégorie à $\mathcal{I}$-limites projectives,

- $H^{\cdot}$ est une catégorie à $< l' >$-limites inductives, pour tout ordinal $l' \leqslant L$, où $< l' >$ est la catégorie associée à l'ensemble ordonné canonique sur l',

- les $< l' >$-limites inductives et les $\mathcal{I}$-limites projectives commutent dans $H^{\cdot}$,

- $\sigma = (S^{\cdot}, A, \emptyset)$ est un objet de $\mho^{\mathcal{I}\emptyset}$ tel que S est petit.

Alors on sait que, pour toute autre esquisse $\mathcal{I}$-projective et $\emptyset$-inductive $\sigma' = (S'^{\cdot}, B, \emptyset)$ petite et toute réalisation $\phi = (\sigma', F, \sigma)$, le foncteur

$$\mho(\Sigma(H^{\cdot}), \phi) : \mho(\Sigma(H^{\cdot}), \sigma')^{\square\square} \longrightarrow \mho(\Sigma(H^{\cdot}), \sigma)^{\square\square}$$

admet un adjoint (voir par exemple [F.S.C.A.]).

Il en résulte :

PROPOSITION 1. *Les foncteurs*

$$\mho(\Sigma(H^{\cdot}),\ \iota_v) : \mho(\Sigma(H^{\cdot}), \sigma_v)^{\square\square} \longrightarrow \mho(\Sigma(H^{\cdot}), \sigma)^{\square\square}$$

et

$$\mho(\Sigma(H^{\cdot}),\ \kappa.\ \iota_v) : \mho(\Sigma(H^{\cdot}), \sigma_{v,S'_0})^{\square\square} \longrightarrow \mho(\Sigma(H^{\cdot}), \sigma)^{\square\square}$$

admettent des foncteurs adjoints :

$$Inv(\Sigma(H^{\cdot}), \sigma) : \mho(\Sigma(H^{\cdot}), \sigma)^{\square\square} \longrightarrow \mho(\Sigma(H^{\cdot}), \sigma_v)^{\square\square}$$

et $\quad Inv_{S'_0}(\Sigma(H^{\cdot}), \sigma) : \mho(\Sigma(H^{\cdot}), \sigma)^{\square\square} \longrightarrow \mho(\Sigma(H^{\cdot}), \sigma_{v,S'_0})^{\square\square}$,

pour toute partie ponctuellement stable S'_0 *de* S_0.

En particulier, si S'_0 est une partie idéale pour σ, le foncteur $\mho(\Sigma(H^{\cdot}),\ \kappa.\ \iota_v)$ admet un adjoint. C'est dire que $\mho(\Sigma(H^{\cdot}), \sigma)^{\square\square}$ est une catégorie à projections dans sa sous-catégorie pleine isomorphe à $\mho(\Sigma(H^{\cdot}), \sigma_{v,S'_0})^{\square\square}$. Nous noterons $Ab\acute{e}_{S'_0}(\Sigma(H^{\cdot}), \sigma)$ ce foncteur projection.

Nous dirons que $Inv(\Sigma(H^{\cdot}), \sigma)$ (resp. $Inv_{S'_0}(\Sigma(H^{\cdot}), \sigma)$) est le *foncteur d'involutisation* (resp. *d'involutisation* S'_0*-naturalisée*). De même, nous dirons que $Ab\acute{e}_{S'_0}(\Sigma(H^{\cdot}), \sigma)$ est le *foncteur d'abélianisation relative à* S'_0.

Par exemple, si σ est l'esquisse de magma (resp. monoïde, groupe) et si $H^{\cdot} = \mathfrak{M}$, le foncteur d'abélianisation relatif à $S'_0 = \{u\}$ est le foncteur usuel qui à un magma (resp. monoïde, groupe) associe son magma (resp. monoïde, groupe) abélien usuel.

Remarquons que nous pourrions énoncer un théorème de coadjonction analogue dans le cas où $\mathfrak{I} = \emptyset$ et $\mathfrak{I}' \in \mathfrak{U}$.

7. Application : Costructures.

La notion de dualisation telle qu'elle est décrite précédemment permet de retrouver celle de costructure [E.G.C.E.] .

Pour cela nous allons décrire l'esquisse d'esquisse $\mathfrak{I}$-projective et $\mathfrak{I}'$-inductive. Remarquons qu'une description de l'esquisse d'une esquisse stricte (au sens de [E.G.C.E.]) est effectuée dans [E.C.Q.T.] .

Dans tout ce qui suit, $U^{\cdot}$ désigne le graphe multiplicatif sous-jacent à l'esquisse de graphe multiplicatif [E.C.Q.T.]. Rappelons qu'il possède trois unités : u_0 représentant la classe des unités d'un graphe multiplicatif, u représentant la classe sous-jacente, $u * u$ représentant la classe des couples de deux morphismes composables de ce graphe multiplicatif. En particulier, si $I^\cdot$ est une catégorie, il lui correspond une réalisation $F_{I^\cdot}$ de l'esquisse de graphe multiplicatif.

Décrivons en particulier l'esquisse d'esquisse $\{I^\cdot\}$-projective. Désignons par $V_1^\cdot$ le graphe multiplicatif contenant comme sous-graphes multiplicatifs disjoints $U^\cdot \times U^{\cdot *}$ et $U^\cdot$ et les morphismes $(z,(u,u'))$ de source (u,u') et de but u, où :

- (u,u') est un objet de $U^\cdot \times U^\cdot$,
- $z \in F_{I^\cdot}(u')$.

Soit $V_2^\cdot$ le graphe multiplicatif admettant $V_1^\cdot$ pour sous-graphe multiplicatif et tel que les composés

$$x.(z,(u_1,u')) \quad \text{et} \quad ((F_{I^\cdot}(x)(z),(u_2,u')).(x,u')$$

soient définis et égaux, pour tout $x : u_1 \to u_2$ appartenant à $U^\cdot$. Désignons par $\wedge U^\cdot$ la catégorie subdivision du graphe multiplicatif $U^\cdot$. Soit G le foncteur de $\wedge U^\cdot$ vers $V_2^\cdot$ défini par :

$$G(y,\alpha(y)) = (y,\alpha(y)), \quad G(\beta(y),y) = (\beta(y),y),$$

pour tout $y \in U$. Soit $V_3^\cdot$ le graphe multiplicatif somme fibrée des deux foncteurs

$$G : \wedge U^\cdot \longrightarrow V_2^\cdot \quad \text{et} \quad E(\wedge U^\cdot) : \wedge U^\cdot \longrightarrow (\wedge U^\cdot)_- .$$

Désignons par e l'image dans $V_3^\cdot$ du sommet du cône projectif $(\wedge U^\cdot)_-$. Alors, $V^\cdot$ désigne le graphe multiplicatif admettant $V_3^\cdot$ pour sous-graphe multiplicatif et un morphisme $j : e' \to e$ où $e' \notin V_3^\cdot$.

Dans tout ce qui suit, nous désignons, de plus, par $\sigma_{\mathfrak{N}'} = (U^\cdot, A)$ l'esquisse $\{\wedge \mathbf{2}\}$-projective de graphe multiplicatif. Nous rappelons que A n'a qu'un seul élément qui exprime qu'un morphisme de u_0 vers u est un monomorphisme représentant l'injection de la classe des objets d'un graphe multiplicatif vers sa classe sous-jacente.

Désignons par $F_{I^\cdot}(u')^d$, pour tout objet u' de $U^\cdot$, la catégorie discrète sur l'ensemble $F_{I^\cdot}(u')$. Alors $\hat{\sigma}_{\{I^\cdot\}} = (V^\cdot, B)$ est l'esquisse

$\{\wedge 2, \wedge U^{\cdot}\} \cup \{F_{I^{\cdot}_{-}}(u')^d \mid u' \in U_0\}$-projective telle que :

- $B \supset A$, en identifiant l'élément de A à un cône projectif à valeurs dans le sur-graphe multiplicatif $V^{\cdot}$ de $U^{\cdot}$,

- pour tout objet u' de $U^{\cdot}$, le cône projectif $N_{u,u'} : (F_{I^{\cdot}_{-}}(u')^d)_{-} \to V^{\cdot}$, défini par

$$N_{u,u'}(z,0) = (z,(u,u')) \quad \text{pour tout} \quad z \in F_{I^{\cdot}_{-}}(u')$$

est élément de B,

- l'injection canonique $(\wedge U^{\cdot})_{-} \to V^{\cdot}$ est élément de B,

- le cône projectif $(\wedge 2)_{-} \to V^{\cdot}$ «représentant» j comme un monomorphisme est élément de B.

L'esquisse $\hat{\sigma}_{\{I^{\cdot}\}}$ ainsi décrite est *l'esquisse d'esquisse* $\{I^{\cdot}\}$-*projective,* plus précisément :

PROPOSITION 1. *La catégorie des réalisations* $\ddot{\mathcal{O}}(\hat{\mathfrak{M}}, \hat{\sigma}_{\{I^{\cdot}\}})^{\square}$ *est équivalente à la catégorie* $\mathcal{O}^{\{I^{\cdot}\}}$.

On obtient de façon analogue l'esquisse $\hat{\sigma}'_{\{I^{\cdot\cdot}\}}$ d'esquisse $\{I^{\cdot\cdot}\}$-inductive. Il suffit de remplacer dans ce qui précède $I^{\cdot}_{-}$ par $I^{\cdot\cdot}_{+}$.

Désignons par J l'ensemble réunion des ensembles

$$\{\wedge 2, \wedge U^{\cdot}\} \cup \{F_{I^{\cdot}_{-}}(u')^d \mid u' \in U_0\} \quad \text{et} \quad \{F_{I^{\cdot\cdot}_{+}}(u')^d \mid u' \in U^{\cdot}_0\},$$

lorsque $I^{\cdot} \in \mathfrak{I}$ et $I^{\cdot\cdot} \in \mathfrak{I}'$.

Il est clair que, pour tout $I^{\cdot} \in \mathfrak{I}$ et tout $I^{\cdot\cdot} \in \mathfrak{I}'$, les esquisses $\hat{\sigma}_{\{I^{\cdot}\}}$ et $\hat{\sigma}'_{\{I^{\cdot\cdot}\}}$ sont des objets de $\hat{\mathcal{O}}^J$. Il en est de même de $\sigma_{\mathfrak{N}'}$. De plus, il existe deux réalisations «injections canoniques»

$$\begin{tikzcd} & \sigma_{\mathfrak{N}'} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \hat{\sigma}_{\{I^{\cdot}\}} & & \hat{\sigma}'_{\{I^{\cdot\cdot}\}} \end{tikzcd}$$

En effectuant dans $\mathcal{O}^J$ la somme fibrée de ces réalisations, on obtient *l'esquisse* J-*projective* $\hat{\sigma}_{\mathfrak{I}\mathfrak{I}'}$ *d'esquisse* $\mathfrak{I}$-*projective et* $\mathfrak{I}'$-*inductive.*

De manière précise :

PROPOSITION 2. *La catégorie des réalisations* $\mho(\hat{\mathfrak{M}}, \hat{\sigma}_{\mathfrak{g}\mathfrak{g}'})^{\square\square}$ *est équivalente à la catégorie* $\mho^{\mathfrak{g}\mathfrak{g}'}$.

Désignons par $g_A = (g_N)_{N \in B}$ l'unique élément de $\delta_{\hat{\sigma}_{\mathfrak{g}\mathfrak{g}'}}$ tel que g_N soit l'automorphisme identique si $N \notin A$ et que g_N ne soit pas l'automorphisme identique si $N \in A$. On montre aisément que:

PROPOSITION 3. *La catégorie des réalisations* $\mho(\hat{\mathfrak{M}}, (\hat{\sigma}_{\mathfrak{g}\mathfrak{g}'})_{g_A})^{\square\square}$ *est équivalente à la catégorie* $\mho^{\mathfrak{g}'*\mathfrak{g}*}$. *L'isomorphisme de dualisation:*

$$\Gamma : \hat{\mho}(\hat{\mathfrak{M}}, \hat{\sigma}_{\mathfrak{g}\mathfrak{g}'})^{\square\square} \xrightarrow{\sim} \hat{\mho}(\hat{\mathfrak{M}}, (\hat{\sigma}_{\mathfrak{g}\mathfrak{g}'})_{g_A})^{\square\square}$$

induit alors l'isomorphisme :

$$(\cdot)^* : \mho^{\mathfrak{g}\mathfrak{g}'} \xrightarrow{\sim} \mho^{\mathfrak{g}'*\mathfrak{g}*}$$

de co-spécification [E.G.C.E.].

Intuitivement, si σ est un objet de $\mho^{\mathfrak{g}\mathfrak{g}'}$, son image σ^* par cet isomorphisme décrit les *costructures d'espèce* σ.

APPENDICE

A. En 4 et 5 nous avons défini les structures algébriques involutives naturalisées d'espèce σ de manière globale, i.e. en exigeant que de telles structures soient isomorphes à *toutes* leurs duales. Nous avons procédé de la même manière pour définir les structures algébriques involutives S'_0-naturalisées ou les structures algébriques S'_0-commutatives d'espèce σ. On peut définir, plus généralement, de telles notions d'un point de vue partiel.

Reprenons les notations de 4 et 5 et désignons par Γ une partie (non vide) de d_σ.

Soit $S^{\cdot}_{v,\Gamma}$ le sous-graphe multiplicatif de $S^{\cdot}_v$ dont les morphismes sont les seuls $(z,\tilde{\gamma},u)$ tels que $\tilde{\gamma}\in\Gamma$. On munit évidemment $S^{\cdot}_{v,\Gamma}$ de la structure d'esquisse $\mathcal{I}$-projective et $\mathcal{I}'$-inductive $\sigma_{v,\Gamma}$ induite par σ_v. Un objet de $\mathcal{O}(\overline{\sigma},\sigma_{v,\Gamma})^{\square\square}$ est dit *une $\overline{\sigma}$-structure algébrique large (resp. stricte) Γ-involutive naturalisée d'espèce σ et $\sigma_{v,\Gamma}$ sera l'esquisse de ces structures.*

Si, de plus, S'_0 est ponctuellement stable par Γ (i.e. si, pour pour tout $\gamma=(Q(\sigma),G,Q(\sigma))$ appartenant à Γ et tout $u\in S'_0$, on a $G(u)=u$), nous désignons par σ_{v,Γ,S'_0} le graphe multiplicatif quasi-quotient de $S^{\cdot}_{v,\Gamma}$ par la relation d'équivalence identifiant tout $(u,\tilde{\gamma},u)$ à $(u,Q(\sigma),u)$ dès que $\tilde{\gamma}\in\Gamma$.

Le foncteur «passage au quotient» détermine alors une esquisse $\mathcal{I}$-projective et $\mathcal{I}'$-inductive image de σ_{v,Γ,S'_0} que nous appellerons *esquisse des structures algébriques Γ-involutives et S'_0-naturalisées d'espèce σ.*

Enfin, si S'_0 est une partie *Γ-idéale* de S'_0 (notion qu'on définit sans difficultés), alors les structures algébriques Γ-involutives et S'_0-naturalisées d'espèce σ s'appelleront aussi des *structures algébriques (S'_0,Γ)-commutatives d'espèce σ.*

Bien entendu on établit aisément des théorèmes d'«involutisation» et d'«abélianisation» (relatif à Γ).

B. Nous n'avons considéré dans ce qui précède (et pour simplifier) que des réalisations de σ dans des prototypes $\bar{\bar{\sigma}}$ en auto-dualité. Si dans la description des structures algébriques à équivalence près ceci suffit largement, puisque tout prototype de la forme $\Sigma(H^{\cdot})$ est en auto-dualité, il n'en est plus ainsi dans la description des structures algébriques à isomorphismes près, i.e. en utilisant des prototypes stricts $\bar{\bar{\bar{\sigma}}}$ non nécessairement en auto-dualité.

Il est donc nécessaire d'étudier comment la théorie précédente de la dualité (des structures notamment) se «projette» dans des catégories de réalisations $\mho(\bar{\bar{\sigma}},\sigma)^{\square\square}$, où $\bar{\bar{\bar{\sigma}}}$ est un prototype strict.

Pour ce faire, supposons donc que $\bar{\bar{\bar{\sigma}}}$ soit un prototype $\mathcal{I}$-projectif et $\mathcal{I}'$-inductif strict et que σ soit une esquisse $\mathcal{I}$-projective et $\mathcal{I}'$-inductive. Il est commode de faire l'hypothèse que σ est $\bar{\bar{\bar{\sigma}}}$*-régulière*, c'est-à-dire notamment [E.G.C.E.] que l'injection canonique

$$i : \mho(\bar{\bar{\bar{\sigma}}},\sigma)^{\square\square} \longrightarrow \mho(\Sigma(H^{\cdot}),\sigma)^{\square\square}$$

définit une équivalence de catégories (i.e. que $\mho(\Sigma(H^{\cdot}),\sigma)^{\square\square}$ est un élargissement de $\mho(\bar{\bar{\bar{\sigma}}},\sigma)^{\square\square}$ au sens de [C.A.S.T.]).

Bien entendu, il en résulte que i possède un inverse à gauche déterminé $j : \mho(\Sigma(H^{\cdot}),\sigma)^{\square\square} \to \mho(\bar{\bar{\bar{\sigma}}},\sigma)^{\square\square}$ et on peut choisir une équivalence naturelle

$$T : Id_{\mho(\Sigma(H^{\cdot}),\sigma)^{\square\square}} \Longrightarrow i.j.$$

De ceci résulte qu'à tout $\tilde{\gamma} \in Aut(Q(\sigma)) = d_{\sigma}$ on peut associer un endofoncteur :

$$\bar{\bar{\tilde{\gamma}}} : \mho(\bar{\bar{\bar{\sigma}}},\sigma)^{\square\square} \longrightarrow \mho(\bar{\bar{\bar{\sigma}}},\sigma)^{\square\square}$$

défini de telle manière que le diagramme ci-dessous commute.

$$\begin{tikzcd}
\mho(\bar{\bar{\bar{\sigma}}},\sigma)^{\square\square} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\bar{\bar{\tilde{\gamma}}}"'] & \mho(\Sigma(H^{\cdot}),\sigma)^{\square\square} \arrow[d] \\
\mho(\bar{\bar{\bar{\sigma}}},\sigma)^{\square\square} & \mho(\Sigma(H^{\cdot}),\sigma)^{\square\square} \arrow[l, "j"]
\end{tikzcd}$$

Sans hypothèse supplémentaire, on ne peut pas, en général, affirmer que

$\tilde{\tilde{\gamma}}$ est un isomorphisme (et a fortiori que, si c'en est un, $\tilde{\tilde{\gamma}}^{-1}$ est son inverse). De même, on ne peut affirmer que $\widetilde{\gamma . \tilde{\gamma}'} = \tilde{\tilde{\gamma}} . \tilde{\tilde{\gamma}}'$. Autrement dit, la théorie de la dualité, dans ce cas, n'est pas représentée par un foncteur $d_\sigma \rightarrow Aut(\mho(\bar{\bar{\sigma}}, \sigma)^{\square\square})$ i.e. par un groupe d'automorphismes, mais par un groupe, à isomorphisme près, d'équivalences de $\mho(\bar{\bar{\sigma}}, \sigma)^{\square\square}$ vers elle-même.

Plus précisément, désignons par $M(\sigma)$ le monoïde libre engendré par l'ensemble pointé sous-jacent au groupe d_σ. Soit λ_σ la 2-catégorie telle que :

- son unique objet «est» l'élément neutre de d_σ,
- ses 1-morphismes sont les éléments de $M(\sigma)$,
- ses 2-morphismes sont les couples (X, Y) tels que $X = (a_1, \dots, a_n)$ est un mot (resp. $X = a_1 . a_2 \dots a_n$ est un composé) d'éléments de d_σ et $Y = a_1 \dots a_n$ le composé (resp. $Y = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ le mot) constitué de ces éléments. Désignons, de même, par $End_{2\gamma}(\mho(\bar{\bar{\sigma}}, \sigma))$ la 2-catégorie dont le seul objet est $\mho(\bar{\bar{\sigma}}, \sigma)^{\square\square}$, les 1-morphismes les endofoncteurs de $\mho(\bar{\bar{\sigma}}, \sigma)^{\square\square}$ et les 2-morphismes les équivalences naturelles.

L'application définie par $\tilde{\gamma} \mapsto \tilde{\tilde{\gamma}}$ se prolonge alors en un 2-foncteur

$$\tilde{\tilde{\nabla}}^{\bar{\sigma}} : \lambda_\sigma \longrightarrow End_{2\gamma}(\mho(\bar{\bar{\sigma}}, \sigma)).$$

Nous disons que $\tilde{\tilde{\nabla}}^{\bar{\sigma}}$ *décrit les équivalences de dualités.* On peut, bien entendu, développer comme précédemment la théorie des structures involutives et commutatives d'espèce σ.

Dans la plupart des cas, il se trouve que $\tilde{\tilde{\nabla}}^{\bar{\sigma}}$ est à valeurs dans la sous-2-catégorie (qui est une catégorie) constituée par $Aut(\mho(\bar{\bar{\sigma}}, \sigma)^{\square\square})$; nous dirons alors que σ est $\bar{\bar{\sigma}}$*-régulière pour la dualité des structures* et le 2-foncteur $\tilde{\tilde{\nabla}}^{\bar{\sigma}}$ «décrit» un groupe d'isomorphismes de dualités. C'est le cas de tous les exemples usuels.

Des remarques et une formalisation analogues peuvent être faites pour la dualité des espèces.

BIBLIOGRAPHIE

[C.A.S.T.] C. EHRESMANN, *Catégories et Structures*, Dunod, Paris 1965.

[C.O.S.S.] A. BASTIANI et C. EHRESMANN, Categories of sketched structures, *Cah. Topo. et Géo. Diff.*, XIII-2, Paris (1972).

[E.C.Q.T.] A. BURRONI, Esquisses des catégories à limites et des quasi-topologies, *Esquisses Mathématiques* 5, Paris (1970).

[E.G.C.E.] C. LAIR, Etude générale de la catégorie des esquisses, *Esquisses Mathématiques* 23, Paris (1975).

[F.S.C.A.] F. FOLTZ et C. LAIR, Fermeture standard des catégories algébriques, *Cah. Topo. et Géo. Diff.*, XIII-3, Paris (1972).

[I.M.S.A.] C. LAIR, Idées et maquettes de structures algébriques, *Cah. Topo. et Géo. Diff.* XII-1, Paris (1971).

UER de Mathématiques
Université Paris 7, Tour 45
2, Place Jussieu
75005 PARIS.