CAHIERS DE
TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
CATÉGORIQUES

EDUARDO DUBUC
HORACIO PORTA

La comonade de la kelleyfication convexe

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 15, nº 4 (1974), p. 343-352

<http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1974__15_4_343_0>

CAHIERS DE TOPOLOGIE
ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE
Vol. XV-4

LA COMONADE DE LA KELLEYFICATION CONVEXE

par Eduardo DUBUC (1) *et Horacio PORTA* (2)

1. Cette note reprend [15]. On se propose ici de fournir des démonstrations catégoriques de quelques résultats de [15], de clarifier leurs relations réciproques et aussi de précéder le tout d'un bref commentaire historique.

Soit E un espace vectoriel topologique localement convexe séparé et considérons la topologie sur E engendrée par toutes les semi-normes définies sur E et dont les *restrictions aux sous-ensembles compacts de E sont continues*. Evidemment, cette topologie est aussi localement convexe et séparée. On notera ℓE l'espace E muni de cette nouvelle topologie.

Dans [15] on a considéré les espaces E pour lesquels $E = \ell E$ (sous le nom d'«espaces compactement déterminés»).

Des notions semblables ont été considérées par plusieurs auteurs, et il nous semble intéressant d'en donner ici la chronique abrégée:

1950: GROTHENDIECK démontre son théorème de complétion pour les espaces localement convexes généraux (v. [8]).

1954: PTAK (v. [16]) introduit la notion de «presque intérieur», au sujet du théorème du graphe fermé (pour les développements ultérieurs voir [10]).

1955: COLLINS (v. [1]) introduit la topologie «faible-bornée-convexe» (Anglais: «convex bounded weak* topology»): si E est le

1- Recherche «subventionnée en partie» par «Projecto Multinacional de Matematica del Programa Regional de Desarrollo Cientifico e Technologico de la O.E.A.».

2- Recherche «subventionnée en partie» par des subventions de la N.S.F.

dual faible d'un espace de Banach, alors la topologie faible-bornée-convexe coïncide avec la topologie ℓE . KELLEY (dans un exercice de son livre [11]) définit les «k-espaces», que l'on a appelé aussi «espaces de Kelley».

1957 : DAY étudie la topologie faible-bornée dans son livre [2] .

1959 : SPANIER (v. [18]) introduit les «groupes faibles», où les opérations sont continues seulement sur les ensembles compacts.

1964 : DUDLEY étudie la notion de «continuité pour les suites» en vue de l'analyse fonctionnelle (v. [4]).

1967 : STEENROD (v. [19]) démontre que les espaces de Kelley forment une catégorie «convenable» d'espaces topologiques [i.e. si $(x,y) \mapsto F(x,y)$ est une fonction continue à deux variables, la fonction à une variable $x \mapsto (y \mapsto F(x,y))$ prend ses valeurs dans l'espace des fonctions continues, et est aussi continue. Vice-versa, si $x \mapsto F_x$ est une telle fonction, la fonction à deux variables $(x,y) \mapsto F_x(y)$ est continue] très appropriée pour l'étude des CW-complexes, des espaces fonctionnels, etc..., et considère le foncteur de Kelleyfication. Voici le premier travail sur les espaces de Kelley conçu du point de vue catégorique.

NOBLE (thèse) fait une étude systématique du foncteur de Kelleyfication. Il considère aussi (dernier chapitre) les «k-groupes», c'est-à-dire les groupes topologiques qui se comportent dans la catégorie des groupes topologiques séparés comme les espaces de Kelley dans la catégorie des espaces topologiques séparés.

1970 : WHEELER (thèse) étudie de façon exhaustive les topologies faible-bornée et faible-bornée-convexe.

1971 : DUBUC et PORTA (v. [3]) considèrent le foncteur de Kelleyfication pour les algèbres topologiques et l'utilisent pour développer une théorie de Gelfand catégorique.

1972 : PORTA (v. [15], qui n'est d'ailleurs qu'une suite de [3]) considère les espaces compactement engendrés *per se* et leurs relations avec d'autres familles traditionnelles (espaces bornologiques, etc...).

SEIP (v. [17]) étudie les propriétés catégoriques et le calcul différentiel dans les espaces compactement engendrés.

1973 : FRÖLICHER et JARCHOW ([7], voir aussi leur Note [6], de 1972) étudient le foncteur de Kelleyfication $E \mapsto kE$ et le foncteur de convexification $E \mapsto cE$ pour faire la théorie de dualité. Il arrive que $\ell = ck$, de sorte que certains résultats de [7] se trouvent aussi dans [15].

Nous pensons qu'il faut citer aussi trois directions de recherche qui sont fort liées à la nôtre :

- celle de WAELBROECK et ses collaborateurs;
- celle de plusieurs mathématiciens qui s'occupent de la «topologie stricte» : BUCK, GILES, RUBEL, RYFF, SENTILES, SHIELDS;
- celle du groupe de Lyon, les «compactologues» BUCHWALTER, PUPIER, ROUX, etc....

Enfin, nous voulons remarquer que les mots allemands «kompact erzeugter Raum» utilisés par Seip, par Frölicher et Jarchow pour désigner les espaces $E = \ell E$ sont dangereusement proches de «weakly compactly generated space», utilisé dès 1970 pour une notion tout à fait différente introduite par LINDENSTRAUSS (v. [12]). C'est pour cela que nous avons choisi «espace compactement déterminé» dans [15]. Néanmoins, pour des raisons historiques, nous proposons maintenant l'usage des mots «espace de Collins» pour désigner les espaces E tels que $E = \ell E$, et nous les emploierons par la suite.

2. Soit V la catégorie des espaces localement convexes, séparés, réels et des applications linéaires continues. Soit $\mathbf{R}^+ = [0, +\infty]$ la demi-droite non-négative. Pour chaque $E' \xrightarrow{f} E$ dans V, l'application $p.f : E' \to \mathbf{R}^+$ est une semi-norme quelle que soit la semi-norme $p : E \to \mathbf{R}^+$.

Il est facile de voir que $p \cdot f$ est continue sur les sous-ensembles compacts dès que p l'est; donc, $\ell E' \xrightarrow{f} \ell E$ est toujours continue. Ceci montre que ℓ définit un foncteur $V \xrightarrow{\ell} V$ (avec $\ell f = f$). De plus, il est clair que pour $E \in V$ nous aurons $\ell\ell E \sim \ell E$ et $\ell E \to E$ canoniquement, avec l'application identité (on utilise le signe $\sim$ pour les isomorphismes dans V). Ceci veut dire (v. [5] ou [13]) que ℓ est une *comonade idempotente* sur V, que l'on appellera la comonade de la *Kelleyfication convexe*. Les $E \in V$ pour lesquels on a $E \sim \ell E$ sont exactement les *coalgèbres de* ℓ (v. [13]).

Nous proposons la

2.1. DEFINITION. Un *espace de Collins* est une coalgèbre de la comonade de Kelleyfication convexe.

Donc, un espace de Collins est la même chose qu'un espace compactement déterminé.

Les espaces de Collins forment une sous-catégorie pleine

$$V^{(l)} \xrightarrow{\quad i \quad} V;$$

il y a une coreflection $V \xrightarrow{u} V^{(l)}$ ($u : E \mapsto \ell E$ qui est un adjoint à droite de de i. On conclut donc (v. [13]):

2.2. PROPOSITION (cf. Prop. 1.6 dans [15]). *Les colimites des espaces de Collins sont des espaces de Collins. C'est-à-dire, $V^{(l)}$ est fermée pour les colimites: dès que $E_\alpha \in V^{(l)}$, nous avons*

$$i(\underrightarrow{colim}\, E_\alpha) = \underrightarrow{colim}(i E_\alpha).$$

2.3. COROLLAIRE (cf. Cor. de 1.6 dans [15]). *Les espaces (LF) sont des espaces de Collins.*

Contrairement à ce que l'on pourrait conjecturer d'après la Prop. 2.2, le foncteur ℓ ne commute pas avec les colimites. Nous avons posé ce problème (dans 1.7 de [15]) et M$^{\text{elle}}$ Suzanne Dierolf l'a résolu. Nous remercions M$^{\text{elle}}$ Dierolf, qui nous a donné la permission de reproduire ici son exemple.

2.4. EXEMPLE (de S. Dierolf). Soit E un espace vectoriel réel de dimension infinie, E^* et E^{**} le dual et le bidual algébriques de E. Soit $\{e^*_\alpha\}_{\alpha\in A}$ une base pour E^* et $\{e^{**}_\alpha\}_{\alpha\in A}$ le système biorthogonal canonique de $\{e^*_\alpha\}$, c'est-à-dire on définit e^{**}_α par $e^{**}_\alpha(\Sigma s_\beta e^*_\beta)=s_\alpha$. Soit $\{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n,\dots\}$ un sous-ensemble infini de A, et posons $x_j=e^{**}_{\alpha_j}$ pour $j=1,2,\dots$Puisque $E\subset E^{**}$ comme d'habitude, on peut considérer les sous-espaces suivants :

$$E_0=E\ ,\quad E_j=E+[x_1,\dots,x_j]\ ,$$

où l'on désigne par $[x_1,\dots,x_j]$ le sous-espace engendré par x_1,x_2, ... et x_j.

Maintenant, nous munissons E^{**} de la topologie faible $\sigma(E^{**},E^*)$ (pour laquelle $e^{**}\to 0$ équivaut à $e^{**}(e^*)\to 0$ pour chaque $e^*\in E^*$). Il est clair que nous aurons $x_j\to 0$.

Si nous prenons les topologies relatives sur les E_j, on obtiendra un système $E_0\to E_1\to E_2\to\dots$.

Il suivra de quelques remarques ci-dessous que $\ell(\underrightarrow{colim}\,E_j)\neq \underrightarrow{colim}\,\ell E_j$. Pour cela nous utiliserons trois résultats bien connus (voir [9]):

A) E est dense dans E^{**} pour $\sigma(E^{**},E^*)$.

B) Si K est un sous-ensemble de E^{**} compact pour $\sigma(E^{**},E^*)$ et si K est contenu dans ($E+$sous-espace de dimension finie), alors le sous-espace engendré par K est de dimension finie aussi.

C) Soit V un espace vectoriel muni de sa topologie localement convexe la plus fine. Si $K\subset V$ est compact, alors le sous-espace engendré par K est de dimension finie.

On tire de A que $\underrightarrow{colim}\,E_j=\bigcup_{j=1}^{\infty}E_j$ avec la topologie relative de E^{**}. Donc, $\underrightarrow{colim}\,E_j$ contient des compacts (tel $\{x_1,x_2,\dots\}\cup\{0\}$) dont l'enveloppe linéaire est de dimension infinie.

Maintenant, d'après B, chaque sous-ensemble compact d'un E_j est de dimension finie, et par conséquent les ℓE_j sont munis des topologies localement convexes les plus fines. Il s'ensuit que $\underrightarrow{colim}\,\ell E_j$ est aussi muni de la topologie localement convexe la plus fine. Donc (v. C) cet espace ne contient que des compacts de dimension finie. Mais alors, comme $\underrightarrow{colim}\, \ell E_j$ et $\underrightarrow{colim}\, E_j$ n'ont pas la même famille de compacts, il est nécessaire que l'on ait $\ell\, \underrightarrow{colim}\, E_j \neq \underrightarrow{colim}\, \ell E_j$, ce qu'il fallait démontrer.

Cependant, il y a des cas intéressants où ℓ commute avec certaines colimites. D'abord il résulte des définitions que :

2.5. PROPOSITION. *Etant donné un système E_α dans V pour lequel tout compact $K \subset \underrightarrow{colim}\, E_\alpha$ est l'image d'un compact $K_\alpha \subset E_\alpha$ pour un indice α convenable, on aura $\ell\, \underrightarrow{colim}\, E_\alpha = \underrightarrow{colim}\, \ell E_\alpha$.*

Nous remarquons aussi que dans V et $V^{(l)}$, les coproduits finis (c'est-à-dire, les sommes directes) coïncident avec les produits finis. Comme d'habitude, du fait que $u : E \to \ell E$ est un adjoint à droite nous déduisons qu'il préserve toutes les limites (voir [13], V.5, Th. 1). Donc

2.6. PROPOSITION. *$\ell(\sum_{\alpha\in A} E_\alpha) = \sum_{\alpha\in A} \ell E_\alpha$ pour A fini.*

Puisque $\ell = iu$.

Les Propositions 2.5 et 2.6 ont les corollaires suivants :

2.7. COROLLAIRE (cf. Prop. 1.8 de [15]). *Si $E = \underrightarrow{colim}\, E_n$ est une colimite stricte dans V (ce qui veut dire que E_n est un sous-espace fermé de E_{n+1}), alors $\ell\, \underrightarrow{colim}\, E_n = \underrightarrow{colim}\, \ell E_n$.*

C'est clair, puisque d'après [9], IV.1.3, Prop. 3, tout compact $K \subset E$ est l'image d'un $K_n \subset E_n$.

2.8. COROLLAIRE (cf. Prop. 1.9 de [15]). *Si E_α, $\alpha \in A$, est une famille arbitraire d'espaces localement convexes, alors $\ell(\sum_{\alpha\in A} E_\alpha) = \sum_{\alpha\in A} \ell E_\alpha$.*

On obtient ceci de 2.5 et 2.6 en posant

$$\sum_{\alpha\in A} E_\alpha = \underset{J}{\underrightarrow{colim}} \sum_{\alpha\in J} E_\alpha, \quad J \subset A \quad \text{fini},$$

et en utilisant le fait bien connu que tout compact $K \subset \sum_{\alpha\in A} E_\alpha$ est contenu dans l'un des $\sum_{\alpha\in J} E_\alpha$.

Nous considérons maintenant le cas dual, c'est-à-dire, les limites projectives (= limites, tout court). D'abord, ℓ ne commute pas avec les limites générales, ce qu'on peut voir de plusieurs façons :

(1) dans 2.2 de [15] nous avons donné un exemple ;

(2) pour chaque espace localement compact X, soit $E=C(X)$ l'espace des fonctions continues avec la convergence uniforme sur les compacts de X. On a $E=\underleftarrow{lim}\, C(K)$, $K\subset X$ compact. Mais, $C(K)$ étant un espace de Banach, c'est aussi un espace de Collins et l'on arriverait à

$$\ell C(X)=\ell\, \underleftarrow{lim}\, C(K)=\underleftarrow{lim}\, \ell C(K)=\underleftarrow{lim}\, C(K)=C(X).$$

Alors il suffit de choisir des X localement compacts pour lesquels $C(X)$ n'est pas de Collins;

(3) en généralisant (2), tout espace localement convexe *complet* est la limite projective d'une famille d'espaces de Banach, et il s'ensuivrait que tous les espaces complets seraient de Collins. Mais il est facile de trouver des contre-exemples.

On va considérer maintenant des cas particuliers intéressants.

Nous avons déjà remarqué que

$$u:V\to V^{(l)},\quad u:E\mapsto \ell E,$$

étant un adjoint à droite, commute avec toutes les limites projectives. Donc, comme $\ell E=(i.u)E$, pour démontrer que ℓ commute avec les limites d'une classe particulière, il faut et il suffit de le démontrer pour i ou, ce qui revient au même, que $V^{(l)}$ est fermée pour ces limites.

2.9. PROPOSITION (cf. Prop. 1.10 de [15] et Satz 5.6 de [7]). *Les produits arbitraires d'espaces de Collins sont des espaces de Collins.*

Donc, d'après la remarque avant 2.9, nous avons :

2.10. COROLLAIRE (Cf. Prop. 1.10 de [15]). *Si E_α est une famille arbitraire d'espaces localement convexes, alors $\ell(\prod_\alpha E_\alpha)=\prod_\alpha \ell E_\alpha$.*

DEMONSTRATION DE 2.9. Soit E_α, $\alpha\in A$, une famille d'espaces de Collins, $E=\prod_\alpha E_\alpha$, et soit $p:E\to \mathbf{R}^+$ ($\mathbf{R}^+=[0,+\infty]$) une semi-norme sur E, continue sur les compacts de E. Considérons maintenant la propriété suivante d'un sous-ensemble B de A:

«si $x=\{x_\alpha\}\in E$ et si $x_\alpha=0$ sauf pour un ensemble fini d'indices α tous appartenant à B, alors $p(x)=0$».

Il est clair que l'ensemble vide jouit de cette propriété. Il est facile de voir que, si M désigne la réunion des $B\subset A$ qui ont cette propriété, alors elle est aussi vraie pour M. Donc, M est le *plus grand* sous-ensemble de A ayant la propriété ci-dessus.

On va démontrer que $N=A\setminus M$ est fini. Soit $\beta\in N$. Si pour chaque $x=\{x_\alpha\}$ avec $x_\alpha=0$ lorsque $\alpha\neq\beta$, on avait $p(x)=0$, alors on pourrait agrandir M en ajoutant β. Donc, il y a des $x=\{x_\alpha\}$ avec $x_\alpha=0$ lorsque $\alpha\neq\beta$ et pour lesquels $p(x)\neq 0$. Si l'on suppose que N est infini, il existera une suite $x^{(n)}=\{x_\alpha^{(n)}\}$ avec

$$x_\alpha^{(n)}=0 \quad \text{sauf pour} \quad \alpha=\beta_n\in N$$

et telle que $p(x^{(n)})\neq 0$. En multipliant par des constantes convenables, on peut même supposer que $p(x^{(n)})=1$. Mais il est clair que $x^{(n)}\to 0$ si nous choisissons les β_n tous différents, et, $\{x^{(n)}\}$ étant une suite, l'ensemble $\{x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots \lim x^{(n)}\}$ est compact. Donc

$$0=p(0)=p(\lim x^{(n)})=\lim p(x^{(n)})=1,$$

contradiction. On conclut que N est fini.

Soit maintenant $x=\{x_\alpha\}\in E$ et soit

$$K=\prod_\alpha \{0, x_\alpha\}\subset \prod_\alpha E_\alpha=E,$$

où $\{0, x_\alpha\}$ est la paire formée par 0 et x_α. Pour $J\subset A$ fini, les éléments $x_J=\{x'_\alpha\}$ définis par

$$x'_\alpha=x_\alpha \text{ si } \alpha\in J \text{ et } x'_\alpha=0 \text{ si } \alpha\notin J$$

convergent vers x. Mais il est clair que x, x_J appartiennent à l'ensemble compact K. Donc $p(x)=\lim p(x_J)$. Comme $p(x_J)=p(x_N)$ si $J\subset N$, nous avons $p(x)=p(x_N)$ pour tout x.

Cela signifie que p se factorise comme suit:

$$\begin{tikzcd} \prod_{\alpha\in A} E_\alpha \arrow[rr, "p"] \arrow[dr] & & \mathbf{R}^+ \\ & \prod_{\alpha\in N} E_\alpha \arrow[ur, dashed, "p'"'] & \end{tikzcd}$$

et N étant fini, p' est nécessairement continu en vue de la Proposition 2.6. Alors p est continu et E est un espace de Collins.

REFERENCES

[1] COLLINS, H.S., Completeness and compactness in linear topological spaces, *Trans. A.M.S.* 79 (1955), 256-280.

[2] DAY, M.M., *Normed linear spaces*, Springer-Verlag, Berlin (1957; 2nd Ed. 1962; 3rd Ed. 1973).

[3] DUBUC, E. and PORTA, H., Convenient categories of topological algebras, and their duality theory, *J. Pure Appl. Algebra* 1 (1971), 281-316 (announced in *Bull. A.M.S.* 77 (1971), 975-979).

[4] DUDLEY, R.M., On sequential convergence, *Trans. A.M.S.* 112 (1964), 483-507; correction same Trans. 148 (1970), 623-624.

[5] ECKMANN, B., *Seminar on triple and categorical homology theory; Introduction*, Lecture Notes 80, Springer-Verlag, 1969.

[6] FRÖLICHER, A. and JARCHOW, H., La réflexivité des espaces vectoriels à génération compacte, *C.R.A.S. Paris*, Ser. A, 274 (1972), 616-617.

[7] FRÖLICHER, A. and JARCHOW, H., Zur Dualitätstheoric kompakt erzeugter und lokalkonvexer Vektorräume (to appear in *Comm. Math. Helv.*).

[8] GROTHENDIECK, A., Sur la complétion du dual d'un espace vectoriel topologique, *C.R.A.S. Paris* 230 (1950), 605-606.

[9] GROTHENDIECK, A., *Espaces Vectoriels Topologiques*, Sao Paulo, 1954.

[10] HUSSAIN, T., *Open mapping and closed graph theorem in topological vector spaces*, Oxford Univ. Press, 1965.

[11] KELLEY, J., *General Topology*, Van Nostrand, Princeton, 1955.

[12] LINDENSTRAUSS, J., Some aspects of the theory of Banach spaces, *Advances in Math.* 5 (1970), 159-180.

[13] MAC LANE, S., *Categories for the working mathematician*, Springer-Verlag, N.Y. - Heidelberg-Berlin, 1971.

[14] NOBLE, N.L., *k-spaces and some generalizations*, Univer. of Rochester, Ph. D. dissertation, 1967.

[15] PORTA, H., Compactly determined locally convex spaces, *Math. Annalen* 196 (1972), 91-100.

[16] PTAK, V., On complete topol. vector spaces, *Czech. Math. Jour.* 3 (78) (1953), 301-364.

[17] SEIP, U., *Kompakt erzeugte Vektorraüme und Analysis,* Lecture Notes 273, Springer-Verlag, 1972.

[18] SPANIER, E., Infinite symmetric products, function spaces, and duality, *Ann. Math.* 69 (1959), 142-198.

[19] STEENROD, N.E., A convenient category of topological spaces, *Mich. Math. J.* 14 (1967), 133-152.

[20] WHEELER, R., *The equicontinuous weak*-topology and semireflexivity,* Univ. of Missouri, Ph. D. dissertation, 1970.

Département de Mathématiques
Université du Québec à
MONTREAL, P. Q.
CANADA

et

Department of Mathematics
University of Illinois
URBANA Illinois
U. S. A.