

CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE CATÉGORIQUES

DANIEL TANRE

Connexité locale

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 15, n° 2 (1974), p. 181-212

http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1974__15_2_181_0

© Andrée C. Ehresmann et les auteurs, 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CONNEXITE LOCALE *

par Daniel TANRE

INTRODUCTION

Soit \mathcal{T} la catégorie des applications continues entre espaces topologiques, au-dessus d'un univers \mathcal{U} . Après avoir vérifié, à l'aide du théorème d'existence de structures libres, que le foncteur injection canonique de \mathcal{T}^{lc} vers \mathcal{T} admet un coadjoint, où \mathcal{T}^{lc} est la sous-catégorie pleine de \mathcal{T} ayant pour objets les espaces topologiques localement connexes, nous construisons explicitement un coadjoint λ par récurrence transfinie. Ce foncteur est déjà construit d'une manière un peu différente dans [0]. Nous signalons ensuite quelques propriétés du foncteur λ : il est compatible avec les sommes; à la réalisation d'une esquisse «algébrique» dans \mathcal{T} est canoniquement associée une réalisation de cette esquisse dans \mathcal{T}^{lc} .

Bien que le couple $(T, \lambda(T))$ ne soit pas toujours un feuilletage topologique (au sens de [7]), la construction de $\lambda(T)$ permet de résoudre divers problèmes sur les feuilletages topologiques. Ainsi:

- La catégorie des feuilletages topologiques à feuilles propres est à produits.

- Le foncteur d'oubli de cette catégorie vers la catégorie des applications n'est pas à structures quasi-quotients et il n'est pas \wedge -engendrant.

Une topologie sur E est la donnée, dans le treillis des parties de E , d'un ensemble de parties stable par réunions quelconques et par intersections finies. Il vient naturellement l'idée de généraliser cette situation en remplaçant le treillis des parties par un treillis quelconque; on obtient ainsi la notion de paratopologie [8]. Nous montrons que, sous certaines conditions, la construction précédente s'applique aux paratopo-

* Conférence donnée au Colloque d'Amiens 1973.

logies. Pour cela, nous définissons d'abord la catégorie \mathcal{K} des applications continues entre paratopologies, en donnant diverses caractérisations de ses morphismes, semblables à celles utilisées en Topologie; nous montrons que le foncteur d'oubli de \mathcal{K} vers la catégorie des treillis locaux complets est à structures finales.

Soit \mathcal{K}^{lc} la sous-catégorie pleine de \mathcal{K} ayant pour objets les paratopologies localement connexes. Si Ω est une paratopologie dans un treillis local complet $(E, <)$ et si la paratopologie discrète dans ce treillis est localement connexe (condition qui n'est pas toujours vérifiée, ainsi que le prouve un contre-exemple), nous construisons une paratopologie localement connexe colibre associée à Ω .

Enfin, dans un dernier paragraphe, nous donnons d'autres constructions de topologies localement connexes associées à une topologie T :

1° La topologie $\rho(T)$, plus fine que $\lambda(T)$, obtenue par «recollement» des topologies induites par T sur ses connexes et localement connexes. On voit par un contr'exemple que $\rho(T)$ peut être différente de $\lambda(T)$.

2° Si T est séparée, deux topologies de Kelley: la première, $\mu(T)$, est la topologie de Kelley localement connexe colibre associée à T , qui est construite par récurrence transfinie; la seconde est plus fine.

Les résultats de ce travail sont résumés dans [13].

Notations. Si E est un ensemble, $\mathcal{P}(E)$ désigne l'ensemble de ses parties. Si (E, T) est un espace topologique et si S est une partie de E , on note T/S la topologie induite par T sur S . La classe des objets d'une catégorie \mathcal{C} est représentée par \mathcal{C}_0 .

A - CONNEXITE LOCALE EN TOPOLOGIE

Rappelons qu'un espace topologique (E, T) est localement connexe ssi tout point de E possède un système fondamental de voisinages connexes [3].

Nous noterons \mathcal{T} la catégorie des applications continues entre espaces topologiques, au-dessus d'un univers \mathcal{U} [1], et \mathcal{T}^{lc} la sous-catégorie pleine de \mathcal{T} ayant pour objets les espaces topologiques localement connexes. Une application continue b de (E, T) vers (E', T') sera aussi désignée par le triplet $b = (T', \underline{b}, T)$, où \underline{b} est l'application de E vers E' sous-jacente à b .

Le but du paragraphe suivant est de construire un foncteur coadjoint au foncteur injection canonique θ^{lc} de \mathcal{T}^{lc} vers \mathcal{T} .

1. Topologie localement connexe colibre.

Nous allons d'abord montrer l'existence d'un tel foncteur à l'aide d'une construction analogue à celle faite par C. Ehresmann dans [6].

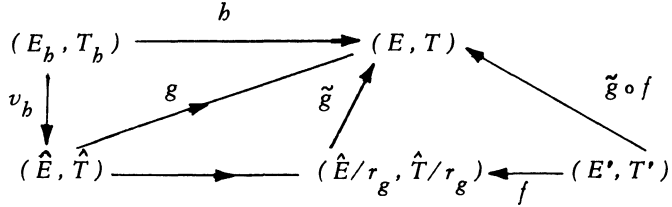
PROPOSITION A.1. *Le foncteur θ^{lc} de \mathcal{T}^{lc} vers \mathcal{T} admet un coadjoint.*

Δ Soit \mathcal{U} l'univers sur lequel est construite la catégorie \mathcal{T} ; on considère un univers $\hat{\mathcal{U}}$ tel que $\mathcal{U} \in \hat{\mathcal{U}}$ et $\mathcal{U} \subset \hat{\mathcal{U}}$, et l'univers $\tilde{\mathcal{U}}$ des éléments de $\hat{\mathcal{U}}$ équipotents à un élément de \mathcal{U} . Soit (E, T) un espace topologique tel que E appartienne à \mathcal{U} .

Notons (\hat{E}, \hat{T}) l'espace topologique somme des espaces topologiques localement connexes (E_b, T_b) tels que $E_b \in \mathcal{U}$ et qu'il existe une application continue b de T_b vers T . L'ensemble \hat{E} est un élément de $\tilde{\mathcal{U}}$ et \hat{T} est une topologie localement connexe. L'application g , crochet des applications \underline{b} , définit une application continue g de \hat{T} vers T .

Soit r_g la relation d'équivalence sur \hat{E} associée à g , et soit $(\hat{E}/r_g, \hat{T}/r_g)$ l'espace topologique localement connexe quotient de (\hat{E}, \hat{T}) par r_g . L'application g donne par passage au quotient une application continue injective \tilde{g} de \hat{T}/r_g vers T . On en déduit l'existence d'un ensemble E' , élément de \mathcal{U} , équipotent à \hat{E}/r_g par une bijection \underline{f} . Notons

(E', T') l'espace topologique image de $(\hat{E}/r_g, \hat{T}/r_g)$ par f^{-1} ; alors f définit un homéomorphisme de T' vers \hat{T}/r_g .



On vérifie aisément (par une méthode analogue à celle de [6]) que le couple $(\tilde{g} \circ f, (E', T'))$ est un $\theta^{\mathcal{L}_c}$ -éjecteur associé à (E, T) . ∇

Donnons maintenant une construction explicite de ce foncteur coadjoint.

Soit (E, T) un espace topologique. Pour tout voisinage U de x dans T , on note $K_{x,U}$ la composante connexe de x dans la topologie induite T/U et $V'(x)$ le filtre engendré par les $K_{x,U}$, où U parcourt le filtre $V(x)$ des voisinages de x dans T .

PROPOSITION A.2. L'application V' définit une topologie notée T^+ sur E , plus fine que T .

Δ $V'(x)$ définit évidemment un filtre sur E . De plus, ce filtre est engendré par la base de filtre obtenue en considérant seulement les $K_{x,U'}$ où U est ouvert dans T ; un tel $K_{x,U}$ appartient à $V'(y)$, pour tout y de $K_{x,U}$. L'application V' , vérifiant les axiomes d'une application «voisinage», définit une topologie T^+ sur E , plus fine que T par construction.

Remarquons que la topologie T^+ est identique à la topologie T ssi T est localement connexe. ∇

PROPOSITION A.3. Soit (E', T') un espace topologique localement connexe et f une application de E' dans E ; si f définit une application continue f de T' vers T , alors f définit aussi une application continue de T' vers T^+ .

Δ Soit U' un voisinage de $f(x)$ dans T^+ ; il existe un voisinage U de $f(x)$ dans T tel que $K_{x,U} \subset U'$. L'application f étant continue, $f^{-1}(U)$ est un voisinage de x dans T' . De la connexité locale de T' ,

on déduit l'existence d'un voisinage V de x , connexe et inclus dans $f^{-1}(U)$. Il s'ensuit $f(V) \subset U$ et, $f(V)$ étant connexe, il est inclus dans $K_{x,U}$; donc $f^{-1}(U')$ est un voisinage de x dans T' . ∇

THEOREME 1. *On peut construire explicitement, par récurrence transfinitie, un foncteur coadjoint au foncteur d'oubli de \mathcal{T}^{le} vers \mathcal{T} .*

Δ Soit (E, T) un espace topologique. Remarquons d'abord que toute topologie sur E , considérée comme définie par ses ouverts, est un élément de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$; notons δ' l'ordinal associé (i.e. le plus petit ordinal équipotent) à $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$ et δ l'ordinal successeur de δ' .

1° Soit T_1 la topologie T^+ associée à T par la proposition A.2 et soit ω un ordinal inférieur ou égal à δ . Supposons définie une suite transfinitie de topologies $(T_{\omega'})_{\omega' < \delta}$ sur E vérifiant les conditions :

- a) $T_{\omega'}$ est plus fine que T_{ξ} , pour tout ordinal ξ inférieur à ω' ;
- b) si f est une application continue d'un espace topologique localement connexe (E', T') vers (E, T) et si \underline{f} définit une application continue, notée f_{ξ} , de T' vers T_{ξ} , pour tout ordinal ξ inférieur à ω' , alors \underline{f} définit une application continue de T' vers $T_{\omega'}$.

Pour l'ordinal ω , nous définissons T_{ω} comme suit :

- Si ω admet un prédécesseur ω' , on pose $T_{\omega} = T_{\omega'}^+$; la suite $(T_{\xi})_{\xi < \omega+1}$ vérifie bien a et b d'après les propositions précédentes.

- Si ω est un ordinal limite, soit ϕ le foncteur de la catégorie des couples associée à l'ordre canonique sur ω vers la catégorie \mathcal{T} des applications continues, faisant correspondre au couple $(\xi, \xi+1)$ l'application identique sur E , continue de $T_{\xi+1}$ vers T_{ξ} . On définit (E, T_{ω}) comme étant la limite projective de ce foncteur.

T_{ω} est plus fine que T_{ξ} , pour tout ordinal ξ inférieur à ω ; si (E', T') est un espace topologique localement connexe et \underline{f} une application de E' dans E définissant une application continue f_{ξ} de T' vers T_{ξ} , pour tout ordinal ξ inférieur à ω , d'après la propriété universelle des limites projectives, \underline{f} définit aussi l'unique application continue f de T' vers T_{ω} vérifiant $p_{\xi} \circ f = f_{\xi}$, pour tout ordinal ξ inférieur à ω , où p_{ξ} est la projection canonique de la limite projective T_{ω} sur T_{ξ} . Remarquons

que T_ω est en fait la topologie borne supérieure des topologies T_ξ , pour ξ inférieur à ω . On construit ainsi $(T_\xi)_{\xi \leq \delta}$ par récurrence transfinie.

Si aucune des topologies T_ξ n'est localement connexe, elles sont toutes distinctes (Proposition A.2); ceci est impossible, l'ordinal associé à l'ensemble des topologies sur E étant strictement inférieur à δ . Nous pouvons donc affirmer que l'une des topologies T_ω est localement connexe et, par suite, toutes les topologies T_ξ , pour un ordinal ξ supérieur à ω , sont égales à T_ω . On en déduit en particulier que T_δ est localement connexe.

2° Montrons que T_δ vérifie la propriété universelle d'une structure colibre associée à T . Soit (E', T') un espace topologique localement connexe et f une application continue de (E', T') vers (E, T) ; par récurrence, étant donné que l'application sous-jacente définit une application continue f_ξ de T' vers T_ξ , pour tout ordinal ξ inférieur à δ , par construction, f définit une application continue vers T_δ . On en déduit que T_δ est un objet colibre associé à T pour le foncteur θ^{lc} . ∇

On pose $T_\delta = \lambda(T)$ et on construit un foncteur λ de \mathcal{T} vers \mathcal{T}^{lc} , coadjoint de θ^{lc} , en associant à l'application continue g de T vers T' l'application continue de $\lambda(T)$ vers $\lambda(T')$ définie par \underline{g} .

2. Premières applications et propriétés du foncteur λ .

En reprenant les notations de 1, la topologie $\lambda(T)$ est évidemment la moins fine des topologies localement connexes plus fines que T .

PROPOSITION A.4. Soit $((E_i, T_i))_{i \in I}$ une famille d'espaces topologiques localement connexe et f_i une application de E_i dans E , pour tout $i \in I$. La topologie finale T sur E associée est localement connexe.

Δ Par construction la topologie $\lambda(T)$ est plus fine que T . Par ailleurs, T_i étant localement connexe, la propriété universelle de λ rend l'application f_i continue de T_i vers $\lambda(T)$. Comme T est la topologie finale, il s'ensuit que T est plus fine que $\lambda(T)$. On en déduit que T est identique à $\lambda(T)$; a fortiori T est localement connexe. ∇

Si T est totalement discontinue, la topologie $\lambda(T)$ est évidemment discrète. La réciproque est fautive, comme le montre la proposition suivante :

PROPOSITION A.5. *Il existe des topologies T connexes telles que l'espace localement connexe $\lambda(T)$ associé soit discret.*

Δ Considérons la topologie usuelle T sur l'ensemble \mathbf{R} des réels et une topologie \hat{T} sur \mathbf{R} , connexe, plus fine que T et telle qu'aucun point n'admette de système fondamental de voisinages connexes (il en existe d'après [3]). Pour tout x de \mathbf{R} , il existe donc un voisinage I de x , ouvert dans \hat{T} , tel que tout intervalle J , inclus dans I et qui contient un intervalle ouvert auquel appartient x , soit non connexe dans \hat{T} .

Soit T' une topologie localement connexe plus fine que \hat{T} . La composante connexe de x dans I pour T' est un intervalle de la forme $(a, x]$ ou $[x, b)$, disons $(a, x]$. S'il existe y appartenant à $(a, x]$ et différent de x , alors on fait un raisonnement identique pour y relativement à un voisinage I' de y ouvert dans \hat{T} . La composante connexe de y dans I' pour T' est ouverte dans T' , et c'est un intervalle de la forme $(a', y]$ ou $[y, b')$, soit $(a', y]$. On en déduit que $] \leftarrow, y]$ est ouvert dans T' et que $(a, x]$ n'est pas connexe, $] \leftarrow, y]$ et $] y, \rightarrow [$ étant deux ouverts disjoints recouvrant $(a, x]$. La composante connexe de x dans I pour T' est donc égale à $\{x\}$; elle est ouverte dans T' , car T' est localement connexe. Il s'ensuit que T' est discrète et que $\lambda(\hat{T})$ est discrète. ∇

PROPOSITION A.6. *La catégorie \mathcal{J}^{lc} est à limites inductives et à limites projectives.*

Δ L'existence de limites inductives provient du fait que les sommes et les quotients de topologies localement connexes restent localement connexes. Par ailleurs, λ étant un foncteur coadjoint, il est compatible avec les limites projectives. En particulier, le produit dans \mathcal{J}^{lc} d'une famille $(T_i)_{i \in I}$ de topologies localement connexes est $\lambda(\prod_{i \in I} T_i)$.

PROPOSITION A.7. *Soit $\sigma = (C, \mu)$ une esquisse projective [9] et F une réalisation de σ dans la catégorie \mathcal{J} des topologies; alors $\lambda \circ F$ est*

une réalisation de σ dans \mathcal{J}^{lc} .

Δ C'est une conséquence immédiate du fait que λ est compatible avec les limites projectives. ∇

On déduit directement de cette proposition les résultats suivants :

- Si (E', T) est un groupe topologique, $(E', \lambda(T))$ est un groupe topologique. Si (E', T) est une catégorie topologique, $(E', \lambda(T))$ est une catégorie topologique.

- Si (E', T) est un groupe topologique opérant continûment sur un espace topologique (E', T') , alors $(E', \lambda(T))$ opère continûment sur $(E', \lambda(T'))$.

PROPOSITION A.8. *Le foncteur λ est compatible avec les sommes. On a $\lambda(T/A) = \lambda(\lambda(T)/A)$, pour toute partie A de E .*

Δ Soit $((E_i, T_i))_{i \in I}$ une famille d'espaces topologiques et (E, T) l'espace topologique somme. Soit T' la topologie sur E somme des topologies localement connexes $\lambda(T_i)$; alors T' est localement connexe et elle est plus fine que T , car $\lambda(T_i)$ est plus fine que T_i . L'injection canonique de T_i vers T définit une application continue de $\lambda(T_i)$ vers $\lambda(T)$, de sorte que la topologie somme T' est aussi plus fine que $\lambda(T)$. D'où $T' = \lambda(T)$.

L'injection canonique d'une partie A dans E est continue de la topologie $\lambda(T/A)$ vers $\lambda(T)$; par suite la topologie localement connexe $\lambda(T/A)$ est plus fine que $\lambda(T)/A$ et a fortiori que $\lambda(\lambda(T)/A)$. Puis, $\lambda(T)/A$ est plus fine que T/A , donc $\lambda(\lambda(T)/A)$ est plus fine que $\lambda(T/A)$. La seconde affirmation de l'énoncé en résulte. ∇

3. Applications aux feuilletages topologiques.

Rappelons d'abord les définitions suivantes.

Soit E un ensemble muni de deux topologies T et T' , où T' est localement connexe; on dira que (T, T') est un *feuilletage topologique* [7] si la condition suivante est vérifiée :

Pour tout $x \in E$, il existe un voisinage ouvert U' de x relativement à T' sur lequel T et T' induisent la même topologie.

Une composante connexe de T' est appelé une *feuille*.

Un morphisme entre feuilletages topologiques est un triplet $f = ((T, T'), \underline{f}, (T_1, T'_1))$, où (T, T') et (T_1, T'_1) sont des feuilletages topologiques sur E et E' respectivement et \underline{f} une application de E' dans E définissant une application continue de T_1 vers T et de T'_1 vers T' .

Un feuilletage topologique (T, T') est dit *propre* [7] si T et T' induisent la même topologie sur les feuilles.

Notons \mathcal{FJ} la catégorie des morphismes entre feuilletages topologiques, associée à un univers \mathcal{U} et \mathcal{FJ}_p la sous-catégorie pleine des morphismes entre feuilletages topologiques à feuilles propres. Nous allons répondre à la question suivante : le couple $(T, \lambda(T))$ définit-il toujours un feuilletage topologique? Pour cela, nous allons d'abord appliquer la construction de λ à la détermination de produits dans \mathcal{FJ}_p .

PROPOSITION A.9. *La catégorie \mathcal{FJ}_p des feuilletages à feuilles propres est à l -produits, pour tout $l \in \mathcal{U}$.*

Δ Remarquons d'abord que le «premier» foncteur d'oubli de \mathcal{FJ}_p vers T , qui à (T, T') associe T , admet un adjoint : à une topologie T , on associe le feuilletage topologique (T, T_d) , où T_d est la topologie discrète sur l'ensemble sous-jacent à T .

Soit $((T_i, T'_i))_{i \in I}$ une famille de feuilletages à feuilles propres. D'après la remarque précédente, si un produit existe dans \mathcal{FJ}_p , il doit être de la forme $(\prod_{i \in I} T_i, T'')$, où $\prod_{i \in I} T_i$ est la topologie produit de la famille $(T_i)_{i \in I}$.

Soit $\lambda(T')$ la topologie localement connexe associée à la topologie T' produit de la famille $(T'_i)_{i \in I}$. Les topologies T'_i étant localement connexes, la construction par récurrence transfinie s'arrête au premier stade. En effet, $(T')^+$ admet comme base d'ouverts l'ensemble des produits $\prod_{i \in I} U_i$, tels que U_i soit une feuille de T'_i sauf sur un ensemble fini J d'indices et que $U_j \in T'_j$, pour j appartenant à J . Il s'ensuit que $(T')^+$ est localement connexe et ses composantes sont les produits $\prod_{i \in I} F_i$ où F_i est une feuille de T'_i . Les feuilles étant propres dans T'_i , les topologies induites par $\prod_{i \in I} T_i$ et $(T')^+$ sur une composante coïncident. Le

couple $(\prod_{i \in I} T_i, (\prod_{i \in I} T'_i)^+)$ appartient donc à \mathcal{FJ}_p . On voit facilement qu'il vérifie la propriété universelle d'un produit dans la catégorie \mathcal{FJ} . ∇

COROLLAIRE 1. *Si $(T'_i)_{i \in I}$ est une famille de topologies localement connexes, alors $\lambda(\prod_{i \in I} T'_i)$ est la topologie $(\prod_{i \in I} T'_i)^+$ et les composantes dans $\lambda(\prod_{i \in I} T'_i)$ sont les produits $\prod_{i \in I} F_i$, où F_i est une composante connexe de T'_i .*

COROLLAIRE 2. *Une famille $((T_i, T'_i))_{i \in I}$ d'éléments de \mathcal{FJ}_0 admet un produit dans \mathcal{FJ} ssi tous les feuilletages considérés sont à feuilles propres, sauf pour un nombre fini d'indices.*

Δ Le foncteur d'oubli de \mathcal{FJ} vers \mathcal{J}^{loc} qui à (T, T') associe T' admet un adjoint: A une topologie localement connexe T' , on associe le feuilletage topologique trivial (T', T') . Ce foncteur est donc compatible avec les limites projectives, et une famille $((T_i, T'_i))_{i \in I}$ d'éléments de \mathcal{FJ}_0 aura comme produit, s'il existe, le couple $(\prod_{i \in I} T_i, (\prod_{i \in I} T'_i)^+)$, où $(\prod_{i \in I} T'_i)^+$ est le produit dans \mathcal{J}^{loc} de la famille $(T'_i)_{i \in I}$ (Corollaire 1). Or, on constate que $(\prod_{i \in I} T_i, (\prod_{i \in I} T'_i)^+)$ est un feuilletage topologique ssi tous les feuilletages (T_i, T'_i) sont à feuilles propres sauf pour un nombre fini d'indices. ∇

PROPOSITION A.10. *Soit T une topologie; $(T, \lambda(T))$ n'est pas toujours un feuilletage topologique à feuilles propres.*

Δ Supposons que $(T, \lambda(T))$ soit un feuilletage topologique à feuilles propres et notons K la composante connexe dans $\lambda(T)$ d'un point x de E . La topologie induite par T sur K est connexe et localement connexe. Soit K' une partie de E telle que $x \in K'$ et que T/K' soit connexe et localement connexe. La propriété universelle du foncteur λ permet d'établir la continuité de l'injection canonique de T/K' vers $\lambda(T)$. Il s'ensuit que K' est connexe dans $\lambda(T)$ et inclus dans K . Donc K est la plus grande partie connexe et localement connexe contenant x ; or on peut trouver des espaces topologiques dans lesquels une telle partie n'existe pas, d'où le résultat. ∇

COROLLAIRE. *$(T, \lambda(T))$ est un feuilletage topologique à feuilles propres ssi, pour tout élément x de E , la topologie induite par T sur la com-*

posante connexe K_x de x dans $\lambda(T)$ est localement connexe.

Δ La condition est nécessaire, d'après la démonstration précédente. Elle est suffisante, car elle entraîne que T et $\lambda(T)$ induisent la même topologie sur l'ouvert K_x de $\lambda(T)$ (proposition A.8). ∇

En fait, $(T, \lambda(T))$ peut ne pas même être un feuilletage topologique, comme le montrera le contr'exemple 2 de la partie C.

Le lemme suivant nous servira dans la démonstration de la proposition A.11.

LEMME A.1. *Un morphisme f de $\mathcal{F}\mathcal{J}$ est un épimorphisme (resp. un monomorphisme) ssi l'application sous-jacente est une surjection (resp. une injection).*

Δ Soit $f = ((T_1, T'_1), \underline{f}, (T, T'))$ un épimorphisme de $\mathcal{F}\mathcal{J}$ et soit $\underline{h}, \underline{h}'$ deux applications telles que $\underline{h} \circ \underline{f} = \underline{h}' \circ \underline{f}$. Considérons les éléments de $\mathcal{F}\mathcal{J}$ définis par :

$$b = ((T_g, T_g), \underline{h}, (T_1, T'_1)) \text{ et } b' = ((T_g, T_g), \underline{h}', (T_1, T'_1)),$$

où T_g est la topologie grossière sur le but de \underline{h} et \underline{h}' . L'égalité $b \circ f = b' \circ f$ entraîne $\underline{h} = \underline{h}'$. Donc f est surjective. La réciproque est immédiate.

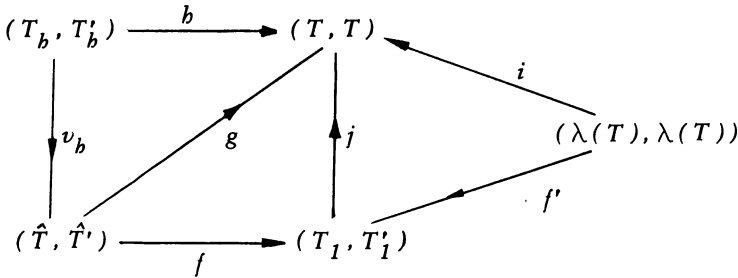
La démonstration de la deuxième assertion est analogue à celle-ci. ∇

PROPOSITION A.11. *Le foncteur d'oubli de $\mathcal{F}\mathcal{J}$ vers la catégorie \mathfrak{M} des applications n'est pas à structures quasi-quotients.*

Δ Nous allons supposer $\mathcal{F}\mathcal{J}$ à structures quasi-quotients et montrer qu'alors le couple $(T, \lambda(T))$ serait toujours un feuilletage topologique, quelle que soit la topologie T , ce qui est contraire au corollaire précédent. Définissons la catégorie \mathcal{Q} , construite sur un univers \mathcal{U} : Ses objets sont les couples (T, T') de topologies sur un ensemble E , ses morphismes les triplets $f = ((T, T'), \underline{f}, (T_1, T'_1))$, où \underline{f} définit une application continue de T_1 vers T et de T'_1 vers T' . Elle admet $\mathcal{F}\mathcal{J}$ pour sous-catégorie pleine. On considère un univers $\hat{\mathcal{U}}$ tel que $\mathcal{U} \in \hat{\mathcal{U}}$ et $\mathcal{U} \subset \hat{\mathcal{U}}$; on note $\hat{\mathcal{U}}$ l'univers des éléments de $\hat{\mathcal{U}}$ équipotents à un élément de \mathcal{U} .

Soit T une topologie sur un ensemble E appartenant à \mathcal{U} ; soit (T_b, T'_b) un élément de $\mathcal{F}\mathcal{J}$ tel qu'il existe un morphisme b de \mathcal{Q} de

source (T_b, T'_b) et de but (T, T) . Notons \hat{T} (resp. \hat{T}') la topologie somme des topologies T_b (resp. T'_b) telles que (T_b, T'_b) vérifie les conditions précédentes. Alors (\hat{T}, \hat{T}') est un feuilletage topologique dont l'ensemble sous-jacent appartient à $\hat{\mathcal{U}}$. Notons \mathcal{FJ} (resp. $\hat{\mathcal{L}}$) la catégorie des morphismes entre feuilletages topologiques (resp. entre couples de topologies) associée à l'univers $\hat{\mathcal{U}}$. Soit v_b le morphisme de (T_b, T'_b) vers (\hat{T}, \hat{T}') qui est défini par l'injection canonique associée à une somme. L'application \underline{g} , cocrochet des applications sous-jacentes aux morphismes b , engendre un élément g de $\hat{\mathcal{L}}$, de source (\hat{T}, \hat{T}') et de but (T, T) .



On note r_g la relation d'équivalence associée à g . Par hypothèse, il existe une structure quasi-quotient (T_1, T'_1) de (\hat{T}, \hat{T}') par r_g ; soit f le morphisme définissant la structure quasi-quotient. D'après le lemme précédent, l'application \underline{f} sous-jacente à f est surjective et on peut supposer que l'ensemble sous-jacent à (T_1, T'_1) appartient à \mathcal{U} (le raisonnement est identique à celui fait dans la proposition A.1). Soit j l'élément de \mathcal{L} tel que $j \circ f = g$; par construction, l'application \underline{j} sous-jacente à j est injective. Si $i = ((T, T), \underline{i}, (\lambda(T), \lambda(T)))$, où \underline{i} est l'application identique sur E , alors i est un des éléments b définis ci-dessus. Notons f' l'unique flèche de \mathcal{FJ} telle que $j \circ f' = i$. L'application \underline{j} ayant un inverse à droite est surjective, et l'on peut considérer T_1 et T'_1 comme des topologies sur E .

Par construction, T_1 est plus fine que T . Le couple (T, T_d) , où T_d est la topologie discrète sur E , est un élément de \mathcal{FJ} , donc T_1 est moins fine que T . On en déduit $T_1 = T$. Par ailleurs, T_1 est moins

fine que $\lambda(T)$. Donc T'_I , étant une topologie localement connexe plus fine que T , est plus fine que $\lambda(T)$, d'où $T'_I = \lambda(T)$. Ainsi $(T, \lambda(T))$ est un feuilletage topologique pour toute topologie T , ce qui est contraire aux résultats précédents. ∇

COROLLAIRE 1. *Le foncteur d'oubli de \mathcal{FJ}_p vers \mathfrak{M} n'est pas à structures quasi-quotients.*

Δ La démonstration précédente reste valable en remplaçant \mathcal{FJ} par \mathcal{FJ}_p . ∇

COROLLAIRE 2. *Le foncteur d'oubli de \mathcal{FJ}_p vers \mathfrak{M} n'est pas sous-engendrant.*

Δ En effet, la catégorie \mathcal{FJ}_p étant à produits, ceci entraînerait que \mathcal{FJ}_p est à structures quasi-quotients [6]. ∇

B - CONNEXITE LOCALE EN PARATOPOLOGIE

Une topologie sur E est la donnée, dans le treillis des parties de E , d'un ensemble de parties stable par réunions quelconques et par intersections finies. Il vient naturellement l'idée de généraliser cette situation en remplaçant le treillis des parties par un treillis quelconque; on obtient ainsi la notion de paratopologie [8].

Avant d'étudier sous quelles conditions la construction par récurrence transfinie précédemment établie s'étend au cas des paratopologies nous allons donner les principales définitions et propriétés utilisées par la suite.

1. Catégorie des applications continues entre paratopologies.

Un ensemble ordonné $(E, <)$ est un *treillis local complet* ssi:

(1) toute partie A de E admet une borne supérieure, notée $\vee A$ et appelée *agrégat* de A (ce qui implique que toute partie A a aussi une borne inférieure, notée $\wedge A$ et dite *intersection* de A),

(2) pour toute famille $(O_\alpha)_{\alpha \in I}$ d'éléments de E , et pour tout $a \in E$:

$$a \wedge \left(\bigvee_{\alpha \in I} O_\alpha \right) = \bigvee_{\alpha \in I} (a \wedge O_\alpha).$$

En particulier $(E, <)$ a un élément maximal noté 1 , et un élément minimal noté 0 .

Un *morphisme entre treillis locaux complets* $(E, <)$ et $(E', <')$ est un triplet $\bar{f} = ((E', <'), f, (E, <))$, où f est une application de E dans E' vérifiant :

- 1) $f(1) = 1$;
- 2) $f(0) = 0$;
- 3) $f\left(\bigwedge_{\alpha \in I} O_\alpha\right) = \bigwedge_{\alpha \in I} f(O_\alpha)$, pour toute famille $(O_\alpha)_{\alpha \in I}$ d'éléments de E ;
- 4) $f\left(\bigvee_{\alpha \in I} O_\alpha\right) = \bigvee_{\alpha \in I} f(O_\alpha)$, pour toute famille $(O_\alpha)_{\alpha \in I}$ d'éléments de E .

REMARQUE. L'application f étant compatible avec les intersections est l'adjointe d'une application notée f_* de E' dans E définie par (cf. [10]) : pour tout élément u de E' ,

$$f_*(u) = \bigwedge \{ x \in E \mid u <' f(x) \}.$$

Ces applications possèdent les propriétés suivantes :

- 1) f_* est compatible avec les agrégats de $(E', <')$ vers $(E, <)$;
- 2) pour tout u dans E' et tout v dans E , on a :

$$f_*(f(v)) < v \text{ et } u <' f(f_*(u));$$

- 3) $f_*(u) = 0$ ssi $u = 0$;
- 4) $f(f_*(f(v))) = f(v)$ et $f_*(f(f_*(u))) = f_*(u)$;
- 5) $f_*(u) < w$ et $f_*(u) \neq 0$ entraînent $f(w) \neq 0$;
- 6) $f(f_*(1)) = 1$;
- 7) $f_*(f(u \wedge f_*(1))) = f_*(f(u))$.

Une *paratopologie* dans un treillis local complet $(E, <)$ est un sous-ensemble Ω de E vérifiant :

- (O1) tout agrégat d'éléments de Ω appartient à Ω ;
- (O2) toute intersection finie d'éléments de Ω appartient à Ω .

EXEMPLE. Si on choisit pour Ω l'ensemble E tout entier, on obtient une

paratopologie appelée *paratopologie discrète*.

Soit Ω une paratopologie sur le treillis local complet $(E, <)$: les éléments de Ω sont appelés des *ouverts*. Si x est un élément de E , on appelle *voisinage de x* un élément v de E tel qu'il existe un ouvert w vérifiant $x < w < v$. Si l'on note $V(x)$ l'ensemble des voisinages de x , on voit que la paratopologie Ω peut aussi être définie [2] comme l'application «voisinage» V de E dans l'ensemble des filtres de $(E, <)$, laquelle vérifie:

- (i) $V(0) = E$;
- (ii) $z \in V(x)$ implique $x < z$;
- (iii) si $x = \bigvee_{\alpha \in I} x_\alpha$, alors $V(x) = \bigcap_{\alpha \in I} V(x_\alpha)$;
- (iv) si $v \in V(x)$, il existe $y \in V(x)$ tel que $v \in V(y)$.

En effet, si V est une application de E dans $\mathcal{P}(E)$ vérifiant les axiomes (i) à (iv), on obtient une paratopologie Ω dans $(E, <)$ en posant:

$$\omega \in \Omega \quad \text{ssi} \quad \omega \in V(\omega).$$

On a donc deux définitions équivalentes de paratopologies et on les utilisera indistinctement.

Remarquons aussi que l'axiome (iv) est équivalent à:

$$(iv)' \quad V^2(x) = V(x), \text{ pour tout } x \text{ de } E, \text{ où } V^2(x) = \bigcup_{y < x} V(y).$$

Un triplet $(E, <, \Omega)$, où Ω est une paratopologie dans un treillis local complet, sera appelé *espace paratopologique* et noté Ω . On note V_Ω (ou V si aucune confusion n'est possible) l'application associée à Ω .

Une *application continue entre espaces paratopologiques* est un triplet $F = (\Omega', f, \Omega)$, où $\Omega = (E, <, \Omega)$ et $\Omega' = (E', <', \Omega')$ sont des espaces paratopologiques et $((E', <'), f, (E, <))$ un morphisme entre treillis locaux complets vérifiant $f(\Omega) \subset \Omega'$. On dira aussi que f est continue de Ω vers Ω' .

PROPOSITION B.1. *Soit $\Omega = (E, <, \Omega)$ et $\Omega' = (E', <', \Omega')$ des espaces paratopologiques, $((E', <'), f, (E, <))$ un morphisme entre treillis locaux complets; alors (Ω', f, Ω) est continue ssi $V_\Omega(f_*(x)) \subset f_* V_{\Omega'}(x)$,*

pour tout x de E' .

Δ Supposons (Ω', f, Ω) continue et soit $u \in V_{\Omega'}(f_*(x))$; il existe $v \in \Omega$ tel que $f_*(x) < v < u$. Par hypothèse, $f(v) \in \Omega'$, d'où:

$$f(v) \in V_{\Omega'}(f(f_*(x))) \subset V_{\Omega'}(x).$$

De $f_*(f(v)) < v$, on déduit $v \in f_* V_{\Omega'}(x)$.

Réciproquement, supposons la deuxième condition de l'énoncé vérifiée et soit $w \in \Omega$. Par hypothèse, on a

$$V_{\Omega'}(f_*(f(w))) \subset f_* V_{\Omega'}(f(w)).$$

Comme $w \in V_{\Omega'}(f_*(f(w)))$, il existe $w' \in V_{\Omega'}(f(w))$ tel que $f_*(w') < w$.

On en déduit

$$w' < f(f_*(w')) < f(w) \quad \text{et} \quad f(w) = w'.$$

Donc $f(w) \in \Omega'$, car $f(w) \in V_{\Omega'}(f(w))$. ∇

REMARQUE. Pour tout filtre X' de $(E', <')$ et pour tout filtre X de $(E, <)$, on a $f f_* X' \subset X'$ et $X \subset f_* f X$.

COROLLAIRE. Sous les mêmes hypothèses que dans la proposition B.1, (Ω', f, Ω) est continue ssi $f V_{\Omega'}(f_*(x)) \subset V_{\Omega'}(x)$ pour tout $x \in E'$.

Notons \mathcal{H} la catégorie des applications continues entre espaces paratopologiques $\Omega = (E, <, \Omega)$ tels que E appartienne à un univers \mathcal{U} . Soit $p\mathcal{H}$ son foncteur d'oubli vers la catégorie des morphismes entre treillis locaux complets associée à \mathcal{U} .

PROPOSITION B.2. Le foncteur $p\mathcal{H}$ est à structures finales.

Δ Soit $(E, <)$ un treillis local complet, $(\Omega_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces paratopologiques $\Omega_i = (E_i, <_i, \Omega_i)$ et $(\bar{f}_i)_{i \in I}$ une famille de morphismes entre treillis locaux complets $\bar{f}_i = ((E, <), f_i, (E_i, <_i))$ pour tout i de I . Rappelons que « $p\mathcal{H}$ est à structures finales » signifie qu'il existe une et une seule paratopologie Ω dans $(E, <)$ telle que

1° f_i est continue de Ω_i vers Ω pour tout i de I (c'est-à-dire $f(\Omega_i) \subset \Omega$);

2° si g définit n morphisme de treillis locaux de $(E, <)$ vers

$(E', <')$ et si Ω' est une paratopologie dans $(E', <')$, alors g est continue de Ω vers Ω' ssi $g \circ f_i$ est continue de Ω_i vers Ω' , pour tout i de I .

L'unicité de Ω découle de la condition 2. On pose

$$\Omega_1 = \{ f_i(u_i) \mid u_i \in \Omega_i \}.$$

On appelle Ω_2 l'ensemble des intersections finies d'éléments de Ω_1 et Ω l'ensemble des agrégats d'éléments de Ω_2 .

Grâce à l'axiome de distributivité, Ω est une paratopologie dans $(E, <)$. Par construction, f_i est continue de Ω_i vers Ω . Soit $((E', <'), g, (E, <))$ un morphisme entre treillis locaux complets et Ω' une paratopologie dans $(E', <')$. Si g est continue de Ω vers Ω' , alors $g \circ f_i$ est continue pour tout i de I de Ω_i vers Ω' . Inversement, supposons $g \circ f_i$ continue de Ω_i vers Ω' pour tout i de I ; alors l'inégalité suivante est vérifiée pour tout i de I et tout x de E' :

$$V_{\Omega_i}(f_{i*}(g_*(x))) \subset f_{i*} \circ g_* V_{\Omega'}(x).$$

Il nous faut montrer, pour tout x de E' :

$$V_{\Omega}(g_*(x)) \subset g_* V_{\Omega'}(x).$$

Soit $u \in V_{\Omega}(g_*(x))$. Par définition, il existe un ensemble K , pour tout $k \in K$ une partie finie J_k de I et pour tout $j_k \in J_k$ un $u_j^k \in \Omega_j^k$ tels que

$$\bigvee_{k \in K} \bigwedge_{j \in J_k} f_j^k(u_j^k) < u \quad \text{et} \quad g_*(x) < \bigvee_{k \in K} \bigwedge_{j \in J_k} f_j^k(u_j^k).$$

$g \circ f_j^k$ étant continue, on a $g(f_j^k(u_j^k)) \in \Omega'$, pour tout $j_k \in J_k$. On en déduit, g définissant un morphisme de treillis complets:

$$x <' \bigvee_{k \in K} \bigwedge_{j \in J_k} g(f_j^k(u_j^k)) <' g(u) \quad \text{et} \quad g(u) \in V_{\Omega'}(x).$$

Il s'ensuit $u \in g_* V_{\Omega'}(x)$. ∇

CAS PARTICULIER. Nous dirons qu'une paratopologie Ω_1 est plus fine qu'une paratopologie Ω_2 si Ω_1 et Ω_2 sont deux paratopologies dans le même treillis local complet $(E, <)$ et si $\Omega_2 \subset \Omega_1$, c'est-à-dire si $(\Omega_1, i_E, \Omega_2)$ est continue. On obtient ainsi un ordre sur l'ensemble des paratopologies dans $(E, <)$. En outre, si $(E_i, <_i) = (E, <)$ et si f_i est

l'application identique sur E pour tout i de I , la paratopologie construite dans la proposition est la *paratopologie borne supérieure* de la famille $(\Omega_i)_{i \in I}$.

2. Connexité et connexité locale.

Soit $\Omega = (E, <, \Omega)$ un espace paratopologique. Si u est un élément quelconque de $(E, <)$, nous noterons Ω_u la paratopologie induite [2] par Ω sur le sous-treillis de $(E, <)$, défini par l'ensemble des minorants de u .

1° Un élément u de $(E, <)$, différent de 0 , est dit *connexe* dans Ω [4] si les conditions

$$u = u_1 \vee u_2, \quad u_1 \in \Omega_u, \quad u_2 \in \Omega_u \quad \text{et} \quad u_1 \wedge u_2 = 0$$

entraînent $u_1 = 0$ ou $u_2 = 0$.

2° On appelle *recouvrement* de Ω (ou de Ω) une famille $\mathcal{R} = (R_i)_{i \in I}$ d'éléments de Ω telle que:

$$(1) \quad \bigvee_{i \in I} R_i = 1.$$

\mathcal{R} est un *recouvrement localisant* [4] de Ω si de plus:

$$(2) \quad (\forall u \in \Omega) \quad (\exists J \in \mathcal{P}(I)) : u = \bigvee_{j \in J} R_j.$$

3° Ω est dite *localement connexe* [4] s'il existe un recouvrement localisant \mathcal{R} qui soit constitué d'ouverts connexes.

Soit \mathcal{R}_c l'ensemble de tous les connexes de Ω ; les *composantes connexes* [4] de Ω sont les éléments maximaux de $(\mathcal{R}_c, <)$. Ces éléments maximaux existent; en effet, soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de connexes d'une paratopologie Ω ; si pour tout couple (i, j) d'éléments de I on a $u_i \wedge u_j \neq 0$, alors $\bigvee_{i \in I} u_i$ est connexe [4].

Si $u < v$, le *saturé de u dans v* , noté $\rho_v(u)$, est [4] l'agrégat des composantes connexes de v d'intersection non nulle avec u . Le saturé $\rho_1(u)$ est noté $\rho(u)$.

Soit $\Omega = (E, <, \Omega)$ un espace paratopologique tel que la paratopo-

logie discrète dans $(E, <)$ soit localement connexe; alors les composantes connexes de Ω forment un recouvrement de Ω et l'application ρ possède les propriétés suivantes:

- (a) $x < \rho(x)$, pour tout x de E ,
- (b) $x < x'$ entraîne $\rho(x) < \rho(x')$,
- (c) $\rho(\rho(x)) = \rho(x)$, pour tout x de E ,
- (d) $\rho(\bigvee_{i \in I} x_i) = \bigvee_{i \in I} \rho(x_i)$.

La démonstration est identique à celle faite dans [4].

PROPOSITION B.3. Soit $\Omega = (E, <, \Omega)$ un espace paratopologique; les conditions suivantes sont équivalentes:

(I) Ω est localement connexe;

(II) pour tout $v \in \Omega$, les composantes connexes dans Ω_v forment un recouvrement de la paratopologie Ω_v et appartiennent à Ω ;

(III) pour tout $v \in \Omega$ et tout u tel que $u < v$, on a

$$u < \rho_v(u) \quad \text{et} \quad \rho_v(u) \in \Omega;$$

(IV) pour tout u de E et pour tout $v \in V_\Omega(u)$, $\rho_v(u)$ appartient à $V_\Omega(u)$.

Δ (I) et (III) sont trivialement équivalentes.

(I) \implies (II): soit $v \in \Omega$; une composante connexe dans Ω_v étant l'agrégat d'ouverts connexes est ouverte.

(II) \implies (I): soit $v \in \Omega$; on considère la famille $(R_i)_{i \in I}$ des composantes connexes dans la paratopologie Ω_v ; on a $\bigvee_{i \in I} R_i = v$. En faisant varier v dans Ω , on obtient un recouvrement localisant formé d'ouverts connexes.

(III) \implies (IV): soit $v \in V_\Omega(u)$; il existe $w \in V_\Omega(u)$ tel que $w \in \Omega$ et $w < v$. Le saturé $\rho_w(u)$ est ouvert et majore u , donc $\rho_w(u) \in V_\Omega(u)$. De $\rho_w(u) < \rho_v(u)$, on déduit $\rho_v(u) \in V_\Omega(u)$.

(IV) \implies (II): soit $v \in \Omega$ et w une composante connexe dans v . Alors $v \in V_\Omega(w)$ entraîne $\rho_v(w) \in V_\Omega(w)$. Puisque w est une composante connexe, $\rho_v(w) = w$ et $w \in \Omega$. ∇

REMARQUE. C'est la formulation (IV) qui nous sera le plus utile par la

suite; elle peut par ailleurs être généralisée au cas où il n'existe pas de base d'ouverts.

PROPOSITION B.4. Soit $\Omega = (E, <, \Omega)$ et $\Omega' = (E', <', \Omega')$ deux espaces paratopologiques. Soit $F = (\Omega', f, \Omega)$ une application continue entre espaces paratopologiques. Si v est connexe dans Ω' , alors $f_*(v)$ est connexe dans Ω .

Δ Soit w_1 et w_2 deux ouverts dans $f_*(v)$ vérifiant:

$$f_*(v) = w_1 \vee w_2 \quad \text{et} \quad w_1 \wedge w_2 = 0.$$

Il nous faut montrer $w_1 = 0$ ou $w_2 = 0$. On a

$$v <' f(f_*(v)) = f(w_1) \vee f(w_2),$$

d'où:

$$v = (f(w_1) \wedge v) \vee (f(w_2) \wedge v).$$

Supposons $f(w_1) \wedge f(w_2) \wedge v \neq 0$, alors $f_*(f(w_1) \wedge f(w_2) \wedge v) \neq 0$, d'après les propriétés rappelées dans B.1. On en déduit

$$f_*(f(w_1)) \wedge f_*(f(w_2)) \wedge f_*(v) \neq 0 \quad \text{et} \quad w_1 \wedge w_2 \wedge f_*(v) = w_1 \wedge w_2$$

est différent de 0. Ceci est en contradiction avec le choix de w_1 et w_2 ; il en résulte $f(w_1) \wedge f(w_2) \wedge v = 0$. Puisque v est connexe, il s'ensuit

$$f(w_1) \wedge v = 0 \quad \text{ou} \quad f(w_2) \wedge v = 0.$$

Supposons $f(w_1) \wedge v = 0$; on a $v = f(w_2) \wedge v$. De

$$f_*(v) < f_*(f(w_2)) \wedge f_*(v) < w_2 \wedge f_*(v) < w_2,$$

on déduit $f_*(v) = w_2$. D'où

$$w_2 \vee w_1 = w_2 \quad \text{et} \quad w_1 = w_2 \wedge w_1 = 0. \nabla$$

COROLLAIRE. Soit $w \in V_{\Omega'}(x)$, alors $f_*(\rho_w(x)) < \rho_{f_*(w)}(f_*(x))$.

Δ Ceci découle de la remarque suivante: si a est connexe et vérifie $a <' w$ et $a \wedge x \neq 0$, alors $f_*(a)$ est connexe et vérifie

$$f_*(a) < f_*(w), \quad f_*(a) \wedge f_*(x) \neq 0. \nabla$$

3. Paratopologie localement connexe engendrée.

Le but de ce paragraphe est d'associer à une paratopologie donnée Ω dans un treillis local complet $(E, <)$ une paratopologie $\lambda(\Omega)$ dans $(E, <)$, localement connexe, plus fine que Ω et moins fine que chaque paratopologie localement connexe plus fine que Ω .

Ce problème n'admet pas toujours une solution: nous donnerons l'exemple d'un treillis local où la paratopologie discrète n'est pas localement connexe. Nous étudierons donc ce problème dans le cas où la paratopologie discrète sur le treillis local complet considéré est localement connexe.

Soit $\Omega = (E, <, \Omega)$ un espace paratopologique; l'application voisinage V_Ω sera notée V dans ce paragraphe. On suppose que la paratopologie discrète Ω_d dans $(E, <)$ est localement connexe.

PROPOSITION B.5. Pour tout élément x de E , l'ensemble des $\rho_u(x)$, où u parcourt $V(x)$, est la base d'un filtre de $(E, <)$, noté $V^+(x)$.

Δ Il suffit pour cela de remarquer $\rho_u \wedge_{u'}(x) < \rho_u(x) \wedge \rho_{u'}(x)$. ∇

PROPOSITION B.6. L'application V^+ définit une paratopologie dans $(E, <)$, plus fine que Ω .

Δ Les axiomes (i), (ii) et (iii) des paratopologies sont trivialement vérifiés; en effet:

$$\rho(0) = 0, \quad x < \rho_u(x), \quad \rho_u(\bigvee_{\alpha \in I} x_\alpha) = \bigvee_{\alpha \in I} \rho_u(x_\alpha).$$

Soit $u \in V(x)$, où u est un ouvert dans Ω . La relation $u \in V(\rho_u(x))$ implique

$$\rho_u(\rho_u(x)) = \rho_u(x) \in V^+(\rho_u(x)).$$

Il existe donc une base d'ouverts dans $V^+(x)$ et V^+ vérifie (iv). Enfin il est évident que V^+ est plus fine que V . ∇

REMARQUE. $V^+ = V$ ssi V est localement connexe. Ceci provient de de la caractérisation (IV) des paratopologies localement connexes (Proposition B.3).

Notons $\Omega^+ = (E, <, \Omega^+)$ l'espace paratopologique défini par l'application V^+ .

PROPOSITION B.7. Soit $\Omega' = (E', <', \Omega')$ un espace paratopologique localement connexe et $F = (\Omega', f, \Omega)$ une application continue entre espaces paratopologiques; alors $F' = (\Omega', f, \Omega^+)$ est continue.

Δ Il nous faut montrer l'inégalité suivante pour tout x de E' : $V^+(f_*(x)) \subset f_* V_{\Omega'}(x)$. Si $u \in V^+(f_*(x))$, il existe $v \in V(f_*(x))$ tel que $\rho_v(f_*(x)) < u$. L'application f étant continue de Ω vers Ω' , il existe $w \in V_{\Omega'}(x)$ tel que $f_*(w) < v$. Comme Ω' est localement connexe, $\rho_w(x) \in V_{\Omega'}(x)$. Des relations:

$$f_*(\rho_w(x)) < \rho_{f_*(w)}(f_*(x)) < \rho_v(f_*(x)) < u,$$

on déduit $u \in f_* V_{\Omega'}(x)$. ∇

Soit \mathcal{H}^{lc} la sous-catégorie pleine de \mathcal{H} ayant pour objets les espaces paratopologiques localement connexes et soit θ^{lc} le foncteur injection canonique de \mathcal{H}^{lc} vers \mathcal{H} .

THEOREME 2. Tout espace paratopologique $\Omega = (E, <, \Omega)$ tel que la paratopologie discrète dans $(E, <)$ soit localement connexe engendre une θ^{lc} -structure libre.

Δ Nous avons obtenu précédemment les mêmes propriétés que dans le cas topologique et la démonstration du théorème 1 s'applique immédiatement ici. Il existe un espace paratopologique

$$\lambda(\Omega) = (E, <, \lambda(\Omega))$$

localement connexe vérifiant:

- $\lambda(\Omega)$ est plus fine que Ω ,
- si $\Omega' = (E', <', \Omega')$ est un espace paratopologique localement connexe et $F = (\Omega', f, \Omega)$ une application continue entre espaces paratopologiques, alors $F' = (\Omega', f, \lambda(\Omega))$ est continue. ∇

REMARQUE. La condition imposée au treillis $(E, <)$ dans ce paragraphe est vérifiée si le treillis est atomique. Les deux notions ne sont cependant

pas équivalentes: il suffit de prendre le treillis des ouverts d'une topologie localement connexe.

4. Généralisation aux treillis locaux.

Un *treillis local* est un ensemble ordonné $(E, <)$ vérifiant:

(1) toute partie majorée de $(E, <)$ admet une borne supérieure (en particulier il existe un plus petit élément 0);

(2) pour toute famille $(O_\alpha)_{\alpha \in I}$ d'éléments de E , et pour tout $a \in E$, on a:

$$a \wedge \left(\bigvee_{\alpha \in I} O_\alpha \right) = \bigvee_{\alpha \in I} (a \wedge O_\alpha).$$

Un *morphisme entre treillis locaux* est un triplet

$$\bar{f} = ((E', <'), f, (E, <))$$

vérifiant:

(1) f est croissante de $(E, <)$ vers $(E', <')$,

(2) $f(0) = 0$,

(3) f est l'adjointe d'une application croissante f_* de $(E', <')$ vers $(E, <)$, i.e. on a:

$$u' <' f(f_*(u')), \text{ pour tout } u' \text{ de } E',$$

$$f_*(f(u)) < u, \text{ pour tout } u \text{ de } E.$$

(4) f est compatible avec les bornes supérieures.

On définit une *paratopologie* dans un treillis local $(E, <)$ comme étant une partie Ω de E vérifiant:

(O₁) tout agrégat, s'il existe, d'éléments de Ω appartient à Ω ;

(O₂) toute intersection finie, non vide, d'éléments de Ω appartient à Ω .

Toutes les propriétés du premier paragraphe (morphisme continu, structures finales) sont encore vérifiées. La définition de connexe a ici aussi un sens. La définition de $\hat{\rho}_v(u)$ reste valable, car la paratopologie induite sur v a un plus grand élément.

On dira qu'un espace paratopologique $\Omega = (E, <, \Omega)$ dans un treillis local $(E, <)$ est *localement connexe* si, pour tout u de E et

pour tout $v \in V(u)$, $\rho_v(u)$ appartient à $V(u)$.

Tous les résultats des paragraphes 2 et 3 sont conservés; la rédaction a été faite avec des treillis locaux complets afin de ne pas alourdir les énoncés et les démonstrations.

5. Etude d'un treillis local pour lequel la paratopologie discrète n'est pas localement connexe.

Soit \mathcal{J}_0 l'ensemble des espaces topologiques (E, T) , où E appartient à l'univers \mathcal{U} . Soit α la relation d'ordre sur \mathcal{J}_0 définie par:

$(E, T) \alpha (E', T')$ ssi E est ouvert pour T' et si la topologie induite par T' sur E est identique à la topologie T .

Si (U_1, T_1) et (U_2, T_2) sont deux éléments de \mathcal{J}_0 majorés par (E, T) pour la relation d'ordre α , l'agrégat de (U_1, T_1) et (U_2, T_2) est le couple $(U_1 \cup U_2, T_1 \cup T_2)$, où $T_1 \cup T_2$ est la topologie recollement [3] des topologies T_1 et T_2 ; dans ce cas, c'est la topologie induite par T sur $U_1 \cup U_2$. Il s'ensuit immédiatement que (\mathcal{J}_0, α) est une classe inductive (i.e. toute partie majorée admet une borne supérieure). Plus précisément:

PROPOSITION B.9. (\mathcal{J}_0, α) est un treillis local [8].

PROPOSITION B.10. La paratopologie discrète Ω_d sur (\mathcal{J}_0, α) n'est pas localement connexe.

Δ Une topologie T est connexe dans Ω_d ssi

$$T = T_1 \vee T_2 \quad \text{et} \quad T_1 \wedge T_2 = \emptyset \quad \text{impliquent} \quad T_1 = \emptyset \quad \text{ou} \quad T_2 = \emptyset$$

Ici \emptyset dénote à la fois l'ensemble vide et la topologie sur cet ensemble. La notion de connexe dans Ω_d coïncide donc avec la définition usuelle de topologie connexe. Si Ω_d est localement connexe, toute topologie T est agrégat de topologies connexes définies sur des ouverts de T . En particulier, ceci signifierait que toute topologie totalement discontinue est discrète, ce qui est évidemment faux. ∇

PROPOSITION B.11. *L'ensemble des topologies localement connexes définit une paratopologie Ω^{lc} , localement connexe, dans (\mathcal{T}_o, α) .*

Δ Ω^{lc} est stable par intersections finies: en effet, si T et T' sont des topologies localement connexes, $T \wedge T'$ est localement connexe comme topologie induite par une topologie localement connexe sur un ouvert. Montrons que Ω^{lc} est stable par agrégats. Soit $((E_i, T_i))_{i \in I}$ une famille de topologies localement connexes majorée par une topologie T ; soit $x \in \bigcup_{i \in I} E_i$ et soit U un voisinage de x dans $\bigvee_{i \in I} T_i$. Il existe un indice i_0 tel que $x \in E_{i_0}$; ainsi $U \cap E_{i_0}$ est un voisinage de x dans T_{i_0} . La topologie T_{i_0} étant localement connexe et la topologie induite par $\bigvee_{i \in I} T_i$ sur E_{i_0} coïncidant avec T_{i_0} , on en déduit l'existence d'un voisinage connexe W de x dans la topologie $\bigvee_{i \in I} T_i$, tel que $W \subset U$. Tout ouvert de Ω^{lc} , c'est-à-dire toute topologie localement connexe, est l'agrégat des topologies connexes et localement connexes induites sur ses composantes connexes. Les topologies connexes et localement connexes forment un recouvrement localisant de Ω^{lc} , et Ω^{lc} est une paratopologie localement connexe. ∇

REMARQUE. L'ensemble des topologies localement compactes définit une paratopologie dans (\mathcal{T}_o, α) , l'ensemble des espaces de Baire également.

C - ESPACES DE KELLEY ET CONNEXITE LOCALE

1. Construction de la topologie $\rho(T)$.

Soit (E, T) un espace topologique. Nous allons construire une nouvelle topologie localement connexe $\rho(T)$ sur E par une méthode analogue à celle utilisée pour obtenir l'espace de Kelley associé à (E, T) .

LEMME C.1. *Soit σ une partie de $\mathcal{P}(E)$ formant un recouvrement de E ; il existe une topologie T_σ sur E , plus fine que T et telle que:*

1° A est fermé (resp. ouvert) dans T_σ ssi $A \cap S$ est fermé (resp. ouvert) dans T/S , pour toute partie $S \in \sigma$.

2° $T_\sigma/S = T/S$ pour tout $S \in \sigma$.

Δ T_σ est la topologie la plus fine rendant continues les injections canoniques de $(S, T/S)$ vers E . ∇

Si T est séparée et si σ est l'ensemble des compacts de T , la topologie T_σ est celle de l'espace de Kelley associé à (E, T) [13], qu'on notera $(E, k(T))$.

Nous allons étudier ici le cas où σ est l'ensemble des parties S de E telles que T/S soit connexe et localement connexe; la topologie ainsi construite sera notée $\rho(T)$.

PROPOSITION C.1. La topologie $\rho(T)$ est identique à la topologie T_σ , associée à l'ensemble σ des parties S de E telles que T/S soit localement connexe.

Δ Ceci résulte du fait qu'une topologie localement connexe est une somme de topologies connexes et localement connexes. ∇

PROPOSITION C.2. $\rho(T)$ est une topologie localement connexe plus fine que la topologie localement connexe colibre $\lambda(T)$. La topologie T est localement connexe ssi $T = \rho(T)$

Δ $\rho(T)$ est localement connexe comme topologie finale d'une famille de topologies localement connexes; par suite elle est plus fine que $\lambda(T)$. Si T est localement connexe, il résulte de la proposition C.1 que T est aussi plus fine que $\rho(T)$, d'où $T = \rho(T)$. ∇

On pourrait penser que $\rho(T)$ et $\lambda(T)$ sont égales; il n'en est rien, comme le montre le:

CONTR'EXEMPLE 1. Soit \mathbf{R}^2 le produit cartésien de l'ensemble \mathbf{R} des réels par lui-même. Notons F le sous-ensemble de \mathbf{R}^2 réunion du segment $[0, 1] \times \{0\}$ et des segments d'extrémités $(1/n-1, 0)$ et $(1/n, 1/nk)$, où n et k sont des entiers naturels non nuls. Soit T la topologie induite sur F par la topologie usuelle du plan. D'après Kuratowski [12], l'espace topologique (F, T) est un continu, localement connexe en $(0, 0)$.

La topologie $\lambda(T)$ est ici égale à la topologie T^+ ; décrivons-la: Un point z y a les mêmes voisinages que dans T , sauf si z est de la forme:

$$z = (x, 0), \text{ où } 0 \neq x \neq 1/n,$$

auquel cas z a pour voisinages élémentaires ses voisinages dans la topologie induite par T sur $\mathbf{R} \times \{0\}$.

Soit T' la topologie sur F définie en prenant comme voisinages élémentaires:

de $(0, 0)$, ses voisinages dans $T / \mathbf{R} \times \{0\}$,

d'un point différent de $(0, 0)$, ses voisinages dans T .

T' est strictement plus fine que T et il est aisé de vérifier que T et T' coïncident sur les parties de F connexes et localement connexes pour la topologie induite par T . Il s'ensuit que T' est moins fine que $\rho(T)$ et différente de $\lambda(T)$. Donc $\rho(T)$ est strictement plus fine que $\lambda(T)$.

Application aux feuilletages topologiques.

PROPOSITION C.3. *Si (T, T') est un feuilletage topologique à feuilles propres sur E , la topologie $\rho(T)$ est moins fine que T' .*

△ En utilisant la définition d'un feuilletage topologique à feuilles propres et la construction du lemme C.1, on constate que la topologie $\rho(T)$ est moins fine que $\rho(T')$. La topologie T' étant localement connexe, $\rho(T')$ est égale à T' , d'où le résultat. ▽

COROLLAIRE. *Si $(T, \lambda(T))$ est un feuilletage topologique à feuilles propres, alors $\lambda(T) = \rho(T)$.*

Nous avons vu dans la première partie que $(T, \lambda(T))$ ne définit pas toujours un feuilletage topologique à feuilles propres. Nous allons voir que $(T, \lambda(T))$ et $(T, \rho(T))$ peuvent ne pas définir des feuilletages topologiques, à l'aide du:

CONTR'EXEMPLE 2. On considère dans \mathbf{R}^2 la frontière A du carré de sommets $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$, $(1, 0)$. Soit G l'ensemble réunion de A et des segments d'extrémités $(1/2^n, 0)$ et $(1/2^n, 1)$ pour n parcourant l'ensemble des entiers naturels. On munit G de la topologie T induite

te par la topologie usuelle du plan. T n'est pas localement connexe en $(0, 1/2)$. Les topologies $\lambda(T)$ et $\rho(T)$ sont égales et coïncident avec T^+ . En considérant les voisinages du point $(0, 0)$, on constate que le couple $(T, \lambda(T)) = (T, \rho(T))$ n'est pas un feuilletage topologique.

2. Connexité locale dans les espaces de Kelley.

Notons \mathcal{K} la catégorie des applications continues entre espaces de Kelley (toujours supposés séparés) associée à un univers \mathcal{U} ; soit \mathcal{K}^{lc} la sous-catégorie pleine de \mathcal{K} ayant pour objets les espaces de Kelley localement connexes.

Soit \mathcal{J}_Δ la catégorie des applications continues entre espaces topologiques séparés associée à \mathcal{U} et \mathcal{J}_Δ^{lc} sa sous-catégorie pleine ayant pour objets les espaces topologiques localement connexes séparés.

PROPOSITION C.4. *Le foncteur d'insertion de \mathcal{K}^{lc} vers \mathcal{K} admet un coadjoint, noté λ' .*

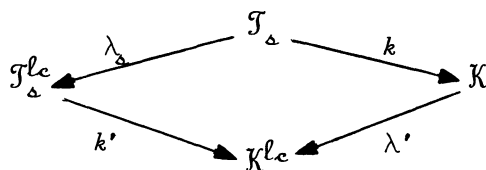
Δ On utilise la construction du théorème d'existence de structures libres [6], comme dans la proposition A.1. Cette méthode s'applique ici, car la somme d'espaces de Kelley localement connexes est un espace de Kelley localement connexe ainsi que le quotient d'un espace de Kelley localement connexe par une relation d'équivalence séparée. ∇

PROPOSITION C.5. *Le foncteur d'insertion de \mathcal{K}^{lc} vers \mathcal{J}_Δ^{lc} admet un adjoint, noté k' .*

Δ La démonstration est analogue à la précédente. ∇

Le foncteur λ de \mathcal{J} vers \mathcal{J}^{lc} admet pour restriction un foncteur λ_Δ de \mathcal{J}_Δ vers \mathcal{J}_Δ^{lc} , qui est un coadjoint du foncteur d'insertion de \mathcal{J}_Δ^{lc} vers \mathcal{J}_Δ . Soit k le coadjoint du foncteur d'insertion de \mathcal{K} vers \mathcal{J}_Δ .

COROLLAIRE. *Avec les notations précédentes, on a $k' \circ \lambda_\Delta = \lambda' \circ k$.*



3. Constructions d'espaces de Kelley localement connexes.

Soit (E, T) un espace topologique séparé.

PROPOSITION C.6. *On peut construire par récurrence transfinie l'espace de Kelley localement connexe $(E, \lambda'(k(T)))$ colibre associé à (E, T) .*

Δ Soit δ l'ordinal associé à $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$. On définit par récurrence une suite transfinie de topologies $(T_\omega)_{\omega \leq \delta}$ sur E telle que:

$$T_1 = \lambda(k(T));$$

si ω admet un prédécesseur ω' , on a $T_\omega = \lambda(k(T_{\omega'}))$;

si ω est un ordinal limite, T_ω est la topologie borne supérieure des topologies T_ξ , pour tous les ordinaux $\xi < \omega$.

Cette suite est stationnaire sur une topologie, notée $\mu(T)$. Comme dans le théorème 1, on vérifie que $(E, \mu(T))$ est l'espace de Kelley localement connexe colibre associé à (E, T) . ∇

REMARQUE. On obtiendrait le même résultat en partant de

$$T_1 = k(\lambda(T)) \text{ ou de } T_1 = k(T^+).$$

Construisons maintenant une nouvelle topologie sur E en choisissant pour σ , dans le lemme C.1, l'ensemble des parties S de E telles que T/S soit un continu localement connexe (ou, ce qui revient au même, un compact localement connexe). Notons $\bar{\rho}(T)$ la topologie obtenue.

PROPOSITION C.7. *$(E, \bar{\rho}(T))$ est un espace de Kelley localement connexe et $\bar{\rho}(T)$ est plus fine que $\rho(k(T))$.*

Δ $\bar{\rho}(T)$ est localement connexe comme topologie finale de topologies localement connexes. Montrons que $(E, \bar{\rho}(T))$ est un espace de Kelley: Soit F une partie de E dont la trace sur K soit un ouvert de la topologie $\bar{\rho}(T)/K$, pour tout compact K de $\bar{\rho}(T)$. Pour une partie H de E telle que T/H soit compacte et localement connexe, on a $T/H := \bar{\rho}(T)/H$ et $F \cap H$ est ouvert dans $\bar{\rho}(T)/H$. Il s'ensuit que F est un ouvert de la topologie $\bar{\rho}(T)$, par construction de celle-ci.

Soit A une partie de E telle que T/A soit compacte, connexe et localement connexe; $k(T)/A$ est alors identique à la topologie localement

connexe T/A , d'où:

$$\rho(k(T))/A = k(T)/A = T/A.$$

Par construction de $\bar{\rho}(T)$, on en déduit que $\rho(k(T))$ est moins fine. ∇

PROPOSITION C.9. *La topologie $\bar{\rho}(T)$ peut être distincte de $\mu(T)$.*

Δ Il suffit de considérer l'espace topologique (F, T) de Kuratowski décrit dans le contr'exemple 1. C'est un espace de Kelley, d'où $T = k(T)$. On a déjà vu que $\lambda(T)$ est strictement moins fine que $\rho(T)$. Il s'ensuit, d'après la proposition précédente, que $\lambda(T)$ est strictement moins fine que $\bar{\rho}(T)$. Donc $\mu(T)$ est strictement moins fine que $\bar{\rho}(T)$, car $\lambda(T)$ est une topologie de Kelley. ∇

BIBLIOGRAPHIE

0. A. GLEASON, Universally locally connected refinements, *Ill. J. Math.* 7 (1963).
1. A. BASTIANI, *Théorie des ensembles*, C.D.U., Paris, 1970.
2. J. BENABOU, Treillis locaux et paratopologies, *Séminaire Topo. et Géom. diff.* 1, Paris (1958).
3. N. BOURBAKI, *Topologie générale*, Hermann, Paris.
4. L. COPPEY, Paratopologies et feuilletages, *Cahiers Topo. et Géom. diff.* X-4, Paris (1968).
5. C. EHRESMANN, *Algèbre, 1^e partie*, C.D.U., Paris, 1968.
6. C. EHRESMANN, Construction de structures libres, *Lecture Notes in Math.* 92, Springer (1968).
7. C. EHRESMANN, Structures feuilletées, *Proc. 5th Canad. Congress*, Montréal (1961).
8. C. EHRESMANN, Gattungen von lokalen Strukturen, *Jahresb. Deutschen Math. Vereinigung* 60 (1957).
9. C. EHRESMANN, Esquisses et Types de structures algébriques, *Bul. Inst. Polit. Iași* XIV (1968).
10. R. GUITART, Relations, fermeture, continuité, *Esquisses Math.* 1, Paris (1970).
11. J.L. KELLEY, *General Topology*, Von Nostrand, Amsterdam, 1955.
12. K. KURATOWSKI, *Topology II*, Academic Press, New York, 1968.
13. D. TANRE, *C. R. A. S. Paris* 276 (1973); 277 (1973); 279 (1974).

Théorie et Applications des Catégories

Faculté des Sciences

33 rue Saint-Leu

80039 AMIENS

TABLE DES MATIERES

Introduction.

A. Connexité locale en Topologie.

1. Topologie localement connexe colibre.
2. Premières applications et propriétés du foncteur λ .
3. Applications aux feuilletages topologiques.

B. Connexité locale en Paratopologie.

1. Catégorie des applications continues entre paratopologies.
2. Connexité et connexité locale.
3. Paratopologie localement connexe engendrée.
4. Généralisation aux treillis locaux.
5. Etude d'un treillis local dans lequel la paratopologie discrète n'est pas localement connexe.

C. Espaces de Kelley et connexité locale.

1. Construction de la topologie $\rho(T)$.
2. Connexité locale dans les espaces de Kelley.
3. Constructions d'espaces de Kelley localement connexes.

Bibliographie