CAHIERS DE
TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
CATÉGORIQUES

R. LAVENDHOMME

Variations sur un thème de Yoneda

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 15, nº 2 (1974), p. 145-155

<http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1974__15_2_145_0>

CAHIERS DE TOPOLOGIE
ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE Vol. XV-2

VARIATIONS SUR UN THEME DE YONEDA *

par R. LAVENDHOMME

1. Introduction.

A titre de motivation, rappelons d'abord divers théorèmes qui s'apparentent au lemme de Yoneda.

1° On a d'abord le lemme de Yoneda relatif bien connu. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie monoïdale symétrique fermée (ou un peu plus généralement une catégorie de base au sens de [2]). Soit $\mathfrak{X}$ une catégorie relative à $\mathcal{C}$ et $F : \mathfrak{X} \to \mathcal{C}$ un foncteur relatif. Si $N_{\mathcal{C}}(\mathfrak{X}(A,-), F)$ désigne l'objet (de $\mathcal{C}$) des transformations naturelles de $\mathfrak{X}(A,-)$ vers F, on a

$$N_{\mathcal{C}}(\mathfrak{X}(A,-), F) \simeq FA \simeq \mathcal{C}(I, FA)$$

(cf. [3], [4] ou [6]).

2° Dans la même situation on sait que l'on a aussi au niveau simplement ensembliste :

$$Nat(\mathfrak{X}(A,-), F) \simeq Hom_{\mathcal{C}}(I, FA)$$

(cf. [5]).

3° Soient F et G deux foncteurs d'une catégorie $\mathcal{A}$ vers $\underline{Ens}$. Une relation naturelle de F vers G consiste en la donnée, pour chaque objet A de $\mathcal{A}$, d'une relation

$$\phi_A : FA \mathrel{-\!\!\circ\!\!\rightarrow} GA \,,$$

en sorte que pour tout x de A vers A' le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} FA \arrow[r, "Fx"] \arrow[d, "\phi_A"'] & FA' \arrow[d, "\phi_{A'}"] \\ GA \arrow[r, "Gx"'] & GA' \end{tikzcd}$$

Désignant par $N_R(F, G)$ l'ensemble des relations naturelles de F vers G, on a le lemme de Yoneda «relationnel» suivant :

★ Conférence donnée au Colloque d'Amiens 1973.

$$N_R(h^A, F) \simeq P(F(A)) \simeq R(1, FA),$$

où h^A désigne le foncteur $Hom_{\mathcal{A}}(A, \cdot)$, $P(X)$ l'ensemble des parties de X, $R(X, Y)$ l'ensemble des relations de X vers Y et où 1 désigne l'objet unité de $\underline{Ens}$, c'est-à-dire un singleton.

4° Soient F et G des 2-foncteurs d'une 2-catégorie $\underline{\mathcal{A}}$ vers Cat. Un «distributeur naturel» de F vers G consiste en la donnée, pour tout objet A de $\underline{\mathcal{A}}$, d'un distributeur (cf. [1])

$$\phi_A : FA \mathrel{-\!\!\circ\!\!\rightarrow} GA$$

de sorte que, pour toute 2-cellule de $\mathcal{A}$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "x"] \arrow[r, bend right, "y"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \xi"] & A' \end{tikzcd},$$

le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} FA \arrow[r, bend left, "Fx"] \arrow[r, bend right, "Fy"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow F\xi"] \arrow[d, "\phi_A"'] & FA' \arrow[d, "\phi_{A'}"] \\ GA \arrow[r, bend left, "Gx"] \arrow[r, bend right, "Gy"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow G\xi"] & GA' \end{tikzcd}$$

On définit trivialement la notion de morphisme de distributeurs naturels et on obtient évidemment une «catégorie des distributeurs naturels» de F vers G que nous désignerons par $N_{\underline{Dis}}(F, G)$.

On peut alors vérifier à la main le lemme de Yoneda relationnel suivant :

$$N_{\underline{Dis}}(h^A, F) \simeq \widehat{FA} \simeq \underline{Dis}(1, FA),$$

où h^A désigne le 2-foncteur $\underline{Hom}_{\mathcal{A}}(A, -)$, où $\widehat{X}$ (avec X une catégorie) désigne la catégorie des préfaisceaux d'ensembles sur X, où $\underline{Dis}(X, Y)$ désigne la catégorie des distributeurs de la catégorie X vers la catégorie Y et où 1 désigne l'objet unité de Cat, c'est-à-dire la catégorie singleton.

Ces situations présentent manifestement divers points communs. Nous nous proposons donc de démontrer ici un «lemme de Yoneda relationnel relatif» contenant les divers exemples cités. On aurait pu évidemment multiplier ces exemples; le lecteur en construira facilement en considérant divers «objets de relations» tels que

- dans la catégorie des ensembles, $R(A,B)$, ensemble des applications partielles de A vers B;

- dans la catégorie des espaces de Banach et des applications linéaires et continues, l'espace de Banach $R(A,B)=L(A,B'')$, où B'' est le bidual de B.

Dans le dernier paragraphe nous indiquerons un procédé général de construction de tels exemples à partir d'un triple relatif ou d'un J-triple relatif.

2. Le lemme de Yoneda relationnel relatif.

On considère la situation suivante:

1° $\mathcal{C}$ est une catégorie monoïdale symétrique fermée (ou une catégorie de base), $\mathcal{X}$ une catégorie relative à $\mathcal{C}$ et $F:\mathcal{X}\to\mathcal{C}$ un $\mathcal{C}$-foncteur.

2° $\mathcal{D}$ est une catégorie quasi-basique au sens de [2]. On désigne son bifoncteur interne par $\mathcal{H}$ et son évaluation par ε, dont la naturalité n'est pas supposée relative.

3° On se donne un bifoncteur $R:\mathcal{C}^*\times\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ muni des morphismes de «composition»: $R^{A'}_{A,B}: R(A,B)\longrightarrow\mathcal{H}(R(A',A),R(A',B))$,

$$R^{A,B}_{B'}: R(A,B)\longrightarrow\mathcal{H}(R(B,B'),R(A,B'))$$

que l'on suppose relativement naturels en A et B et quadratiquement relativement naturels en A' et B'. On pensera intuitivement à $R(A,B)$ comme à un objet représentant au niveau de $\mathcal{D}$ les relations de A vers B.

4° On se donne un morphisme de catégories pré-basiques de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{D}$, i. e. un foncteur $J:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ et des morphismes $J_{A,B}:J(\mathcal{C}(A,B))\to\mathcal{H}(JA,JB)$ relativement naturels en A et B. On posera $H(A,B)=J(\mathcal{C}(A,B))$ et on vérifie facilement que $\mathcal{C}$ devient ainsi une catégorie $\mathcal{D}$-prérelative au sens de [2]. On suppose alors que «les morphismes sont des relations» c'est-à-dire que l'on se donne, de manière relativement naturelle en A et B:

$$m_{A,B} : H(A,B) \to R(A,B).$$

5° Nous postulons enfin les deux axiomes d'unitarité suivants:

a) le morphisme $\mu_{A,B}$ défini par

$$\begin{tikzcd}
R(A,B) \arrow[rr, "\mu_{A,B}"] \arrow[dr, "R^I_{A,B}"'] & & \mathcal{H}(H(I,A),R(I,B)) \\
& \mathcal{H}(R(I,A),R(I,B)) \arrow[ur, "\mathcal{H}(m_{I,A},1)"'] &
\end{tikzcd}$$

est un isomorphisme.

b) Définissons $j_A : H(I,I) \to R(A,A)$ par

$$\begin{tikzcd}
H(I,I) \arrow[r, "j_A"] & R(A,A) \\
H(I,\mathcal{C}(A,A)) \arrow[u, "H(1,i_A)"] \arrow[r, "\sim"] & H(A,A) . \arrow[u, "m_{A,A}"']
\end{tikzcd}$$

Le diagramme suivant est alors commutatif:

$$\begin{tikzcd}
R(I,A) \arrow[r, "R^{I,A}_A"] \arrow[dr, "\mu_{I,A}"'] & \mathcal{H}(R(A,A),R(I,A)) \arrow[d, "\mathcal{H}(j_A,1)"] \\
& \mathcal{H}(H(I,I),R(I,A))
\end{tikzcd}$$

Ces deux axiomes sont les analogues relationnels des axiomes d'unitarité d'Eilenberg-Kelly pour les catégories fermées [5].

Si F et G sont alors des $\mathcal{C}$-foncteurs de $\mathcal{X}$ vers $\mathcal{C}$, on définit l'objet de $\mathcal{D}$ des relations naturelles, s'il existe, comme la limite à gauche $N_R(F,G)$ de la famille des diagrammes suivants:

$$\begin{tikzcd}
& R(FX,GX) \arrow[r, "R^{FX,GX}_{GY}"] & \mathcal{H}(R(GX,GY),R(FX,GY)) \arrow[d, "\mathcal{H}(G'_{X,Y},1)"] \\
N_R(F,G) \arrow[ur, "\pi_X"] \arrow[dr, "\pi_Y"'] & & \mathcal{H}(\mathcal{X}'(X,Y),R(FX,GY)) \\
& R(FY,GY) \arrow[r, "R^{FX}_{FY,GY}"'] & \mathcal{H}(R(FX,FY),R(FX,GY)) \arrow[u, "\mathcal{H}(F'_{X,Y},1)"']
\end{tikzcd}$$

où on a défini $\mathfrak{X}' : \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \to \mathfrak{D}$ par $\mathfrak{X}'(X,Y) = H(I, \mathfrak{X}(X,Y))$ et $F'_{X,Y}$: $\mathfrak{X}'(X,Y) \to R(FX,FY)$ par

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{X}'(X,Y) \arrow[rr, "F'_{X,Y}"] \arrow[d, equal] & & R(FX,FY) \\
H(I,\mathfrak{X}(X,Y)) \arrow[dr, "{H(1,F_{X,Y})}"'] & & H(FX,FY) \arrow[u, "m_{FX,FY}"'] \arrow[dl, "\sim"'] \\
& H(I,\mathcal{C}(FX,FY)) . &
\end{tikzcd}$$

On vérifie facilement qu'il revient au même de définir $N_R(F,G)$ comme $\int_X R(FX,GX)$.

On a alors le théorème suivant, qui est le lemme de Yoneda relationnel relatif :

THEOREME. *Pour tout objet X de $\mathfrak{X}$, l'objet $N_R(\mathfrak{X}(X,\cdot),F)$ existe et on a un isomorphisme naturel en X :*

$$N_R(\mathfrak{X}(X,\cdot),F) \simeq R(\dot{I},FX).$$

ESQUISSE DE LA DEMONSTRATION. Il suffit de vérifier que $\dot{R}(I,FX)$ est bien la limite à gauche définissant $N_R(\mathfrak{X}(X,\cdot),F)$.

a) Il faut d'abord définir, pour chaque Y de X, un morphisme

$$\lambda^Y : R(I,FX) \longrightarrow R(\mathfrak{X}(X,Y),FY).$$

Pour ce faire on définit d'abord une sorte de morphisme d'évaluation

$$\bar{\varepsilon}^B_A : R(I,A) \longrightarrow R(\mathcal{C}(A,B),B)$$

par :

$$\begin{tikzcd}
R(I,A) \arrow[rr, "\bar{\varepsilon}^B_A"] \arrow[d, "R^{I,A}_B"'] & & R(\mathcal{C}(A,B),B) \\
\mathcal{H}(R(A,B),R(I,B)) \arrow[dr, "{\mathcal{H}(m_{A,B},1)}"'] & & \mathcal{H}(H(I,\mathcal{C}(A,B)),R(I,B)) \arrow[u, "\wr\ \mu^{-1}_{\mathcal{C}(A,B),B}"'] \arrow[dl, "\sim"] \\
& \mathcal{H}(H(A,B),R(I,B)) &
\end{tikzcd}$$

On définit alors λ^Y par :

$$\begin{tikzcd} R(I,FX) \arrow[rr, "\lambda^Y"] \arrow[dr, "\bar{\varepsilon}^{FY}_{FX}"'] & & R(\mathfrak{X}(X,Y),FY) \\ & R(\mathcal{C}(FX,FY),FY) \arrow[ur, "R(F_{X,Y},1)"'] & \end{tikzcd}$$

On vérifie que les (λ^Y) rendent commutatifs les diagrammes que les (π^Y) font commuter, par définition de $N_R(\mathfrak{X}(X,-),F)$, de manière universelle. On a donc un morphisme

$$R(I,FX) \longrightarrow N_R(\mathfrak{X}(X,-),F).$$

b) Si on a une famille de morphismes

$$\zeta^Y : Z \longrightarrow R(\mathfrak{X}(X,Y),FY)$$

qui fait aussi commuter les diagrammes analogues, on définit

$$\alpha : Z \dashrightarrow R(I,FX)$$

par :

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "\zeta^X"'] & & R(I,FX) \\ & R(\mathfrak{X}(X,X),FX) \arrow[ur, "R(i_X,1)"'] & \end{tikzcd}$$

et on vérifie que $\lambda^Y \circ \alpha = \zeta^Y$ pour tout Y et que α est unique. Ceci achève la démonstration.

3. Exemples : triples relatifs et J-triples relatifs.

Comme premier type d'exemple nous considérons une catégorie monoïdale symétrique fermée $\mathcal{C}$ (ou une catégorie de base) munie d'un triple relatif $\underline{T}=(T,\eta,\mu)$. On obtient un cas particulier de la situation générale décrite plus haut en faisant $\mathfrak{D}=\mathcal{C}$ et en définissant le bifoncteur «relation» par : $R(A,B)=\mathcal{C}(A,TB)$. C'est en somme une relativisation de la catégorie de Kleisli du triple $\underline{T}$.

On vérifie alors que l'on a bien les données et axiomes conduisant au lemme de Yoneda relationnel relatif. C'est ainsi que les morphismes de composition sont donnés par :

$$\begin{tikzcd}
R(A,B) \arrow[r, "R^{A'}_{A,B}"] \arrow[d, equal] & \mathcal{C}(R(A',A),R(A',B)) \arrow[d, equal] \\
\mathcal{C}(A,TB) \arrow[d, "T_{A,TB}"] & \mathcal{C}(\mathcal{C}(A',TA),\mathcal{C}(A',TB)) \\
\mathcal{C}(TA,TTB) \arrow[r, "\mathcal{C}(1,\mu_B)"'] & \mathcal{C}(TA,TB) \arrow[u, "\mathcal{C}^{A'}_{TA,TB}"']
\end{tikzcd}$$

et

$$\begin{tikzcd}
R(A,B) \arrow[r, "R^{A,B}_{B'}"] \arrow[d, equal] & \mathcal{C}(R(B,B'),R(A,B')) \arrow[d, equal] \\
\mathcal{C}(A,TB) \arrow[d, "\mathcal{C}^{A,TB}_{TB'}"] & \mathcal{C}(\mathcal{C}(B,TB'),\mathcal{C}(A,TB')) \\
\mathcal{C}(\mathcal{C}(TB,TB'),\mathcal{C}(A,TB')) \arrow[r, "\mathcal{C}(\mathcal{C}(1,\mu_{B'}),1)"'] & \mathcal{C}(\mathcal{C}(TB,TTB'),\mathcal{C}(A,TB')) \arrow[u, "\mathcal{C}(T_{B,TB'},1)"']
\end{tikzcd}$$

Les morphismes

$$m_{A,B} : \mathcal{C}(A,B) \longrightarrow R(A,B) = \mathcal{C}(A,TB)$$

sont simplement donnés par $m_{A,B} = \mathcal{C}(1_A, \eta_B)$. Les axiomes d'unitarité sont alors des conséquences de la définition des triples relatifs. Et on peut appliquer le lemme de Yoneda relationnel relatif.

L'exemple des relations naturelles cité sous (3) dans l'introduction est évidemment de ce type. Il suffit de prendre sur <u>Ens</u> le triple des parties (l'unité étant l'application singleton et la multiplication étant la réunion), le foncteur «partie» dont il est question ici est évidemment le foncteur covariant opérant par image directe et non le foncteur contravariant opérant par image réciproque.

L'exemple des distributeurs naturels (cité sous (4) dans l'introduction) ressemble fort à l'exemple précédent. Si, par impossible, on pouvait négliger les questions de «taille» logique (ou d'univers), on pourrait présenter les choses comme suit : la catégorie <u>Ens</u> y est remplacée par *Cat* ; le foncteur partie quant à lui est remplacé par le foncteur associant, à toute catégorie $\mathfrak{A}$, sa catégorie de préfaisceaux d'ensembles $\hat{\mathfrak{A}}$. Ce foncteur est «spontanément» contravariant (comme le foncteur partie) mais il peut être rendu covariant par extension de Kan de préfaisceaux. L'unité, remplaçant l'application singleton, est le plongement de Yoneda plongeant toute catégorie $\mathfrak{A}$ dans $\hat{\mathfrak{A}}$. On pourrait formellement définir une multiplication, analogue de l'union, mais l'itération du foncteur «préfaisceau d'ensembles» est délicate à manier car, si le foncteur partie augmente la cardinalité, le foncteur préfaisceau d'ensembles augmente lui «l'illégitimité». Pour traiter correctement de cette situation, il faut donc considérer deux catégories $\underline{Cat}$ et $\underline{CAT}$, l'une la catégorie des petites catégories, l'autre la catégorie (illégitime) des grosses catégories (ou travailler avec deux univers U et V avec $U \in V$). Soit J l'inclusion de $\underline{Cat}$ dans $\underline{CAT}$, nous devrons considérer un J-triple relatif en un sens que nous allons indiquer.

Soient $(\mathcal{C}, I, i, j)$ et $(\mathfrak{D}, I', i', j')$ deux catégories de base (par exemple deux catégories monoïdales symétriques fermées) et soit J un morphisme de catégories de base de $\mathcal{C}$ vers $\mathfrak{D}$. Rappelons que la donnée d'un tel morphisme consiste en un foncteur J de $\mathcal{C}$ vers $\mathfrak{D}$ muni de morphismes

$$J_{A,B} : J(\mathcal{C}(A,B)) \longrightarrow \mathfrak{D}(JA, JB)$$

relativement naturels en A et B et d'un morphisme $J_o : I' \to JI$ tel que les deux diagrammes suivants commutent :

$$\begin{array}{ccc} JI & \xrightarrow{Jj_A} & J(\mathcal{C}(A,A)) \\ {\scriptstyle J_o}\uparrow & & \downarrow{\scriptstyle J_{A,A}} \\ I' & \xrightarrow[j'_{JA}]{} & \mathfrak{D}(JA,JA) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} J(\mathcal{C}(I,A)) & \xrightarrow{J_{I,A}} & \mathfrak{D}(JI,JA) \\ {\scriptstyle Ji_A}\uparrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathfrak{D}(J_o,1)} \\ JA & \xrightarrow[i'_{JA}]{} & \mathfrak{D}(I',JA) \end{array}$$

On voit alors que $\mathcal{C}$ devient une catégorie $\mathfrak{D}$-relative en posant

$$H(A,B) = J(\mathcal{C}(A,B))$$

et en définissant $h_A : I' \to H(A,A)$ par $h_A = J(j_A) \circ J_o$.

Nous supposerons en outre que $J_o : I' \to JI$ est un isomorphisme.

Un J-triple consiste alors en la donnée :

1° d'un foncteur relatif $T : \mathcal{C} \to \mathfrak{D}$,

2° d'une transformation naturelle relative $\eta : J \Longrightarrow T$,

3° de morphismes $\lambda_{A,B} : \mathfrak{D}(JA, TB) \longrightarrow \mathfrak{D}(TA, TB)$,

ces données devant satisfaire aux axiomes suivants :

(T1) Le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{D}(JA,TB) \arrow[r, "\lambda_{A,B}"] \arrow[dr, equal] & \mathfrak{D}(TA,TB) \arrow[d, "\mathfrak{D}(\eta_A, 1)"] \\
& \mathfrak{D}(JA,TB) .
\end{tikzcd}$$

(T2) Le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
H(A,B) \arrow[r, "J_{A,B}"] \arrow[drr, "T_{A,B}"'] & \mathfrak{D}(JA,JB) \arrow[r, "\mathfrak{D}(1,\eta_B)"] & \mathfrak{D}(JA,TB) \arrow[d, "\lambda_{A,B}"] \\
& & \mathfrak{D}(TA,TB) .
\end{tikzcd}$$

(T3) Les deux diagrammes suivants commutent :

$$\begin{tikzcd}
& \mathfrak{D}(TA,TB) \arrow[rr, "\mathfrak{D}^{JC}"] & & \mathfrak{D}(\mathfrak{D}(JC,TA),\mathfrak{D}(JC,TB)) \arrow[d, "\mathfrak{D}(1,\lambda_{C,B})"] \\
\mathfrak{D}(JA,TB) \arrow[ur, "\lambda_{A,B}"] \arrow[d, "\lambda_{A,B}"] & & & \mathfrak{D}(\mathfrak{D}(JC,TA),\mathfrak{D}(TC,TB)) \\
\mathfrak{D}(TA,TB) \arrow[rr, "\mathfrak{D}^{TC}"] & & \mathfrak{D}(\mathfrak{D}(TC,TA),\mathfrak{D}(TC,TB)) \arrow[ur, "\mathfrak{D}(\lambda_{C,A},1)"'] &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{D}(\mathfrak{D}(TB,TC),\mathfrak{D}(JA,TC)) \arrow[rr, "\mathfrak{D}(\lambda_{B,C},1)"'] & & \mathfrak{D}(\mathfrak{D}(JB,TC),\mathfrak{D}(JA,TC)) \arrow[d, "\mathfrak{D}(1,\lambda_{A,C})"] \\
\mathfrak{D}(JA,TB) \arrow[u, "\mathfrak{D}_{TC}"] \arrow[d] & & \mathfrak{D}(\mathfrak{D}(JB,TC),\mathfrak{D}(TA,TC)) \\
\mathfrak{D}(TA,TB) \arrow[r, "\mathfrak{D}_{TC}"'] & \mathfrak{D}(\mathfrak{D}(TB.TC),\mathfrak{D}(TA,TC)) \arrow[ur, "\mathfrak{D}(\lambda_{B,C},1)"'] &
\end{tikzcd}$$

Les deux premiers axiomes expriment les conditions d'unitarité du J-triple, le troisième exprime à la fois la naturalité relative de $\lambda_{A,B}$

et l'associativité du J-triple. Notons que, si $\mathfrak{D}$ est monoïdale symétrique fermée, on peut remplacer l'axiome T3 par la commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{D}(JA,TB)\otimes\mathfrak{D}(JB,TC) \arrow[r, "\lambda_{A,B}\otimes\lambda_{B,C}"] \arrow[d, "1\otimes\lambda_{B,C}"] & \mathfrak{D}(TA,TB)\otimes\mathfrak{D}(TB,TC) \arrow[dd, "M"] \\
\mathfrak{D}(JA,TB)\otimes\mathfrak{D}(TB,TC) \arrow[d, "M"] & \\
\mathfrak{D}(JA,TC) \arrow[r, "\lambda_{A,C}"] & \mathfrak{D}(TA,TC)
\end{tikzcd}$$

On obtient alors un cas particulier de la situation générale en posant

$$R(A,B)=\mathfrak{D}(JA,TB).$$

Les morphismes de composition sont définis par :

$$\begin{tikzcd}
R(A,B) \arrow[rr, "R^X_{A,B}"] \arrow[d, equal] & & \mathfrak{D}(R(X,A),R(X,B)) \arrow[d, equal] \\
\mathfrak{D}(JA,TB) \arrow[dr, "\lambda_{A,B}"'] & & \mathfrak{D}(\mathfrak{D}(JX,TA),\mathfrak{D}(JX,TB)) \\
& \mathfrak{D}(TA,TB) \arrow[ur, "\mathfrak{D}^{JX}"'] &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
R(A,B) \arrow[rr, "R_Y^{A,B}"] \arrow[d, equal] & & \mathfrak{D}(R(B,Y),R(A,Y)) \arrow[d, equal] \\
\mathfrak{D}(JA,TB) \arrow[dr, "\mathfrak{D}_{TY}"'] & & \mathfrak{D}(\mathfrak{D}(JB,TY),\mathfrak{D}(JA,TY)) \\
& \mathfrak{D}(\mathfrak{D}(TB,TY),\mathfrak{D}(JA,TY)) \arrow[ur, "\mathfrak{D}(\lambda_{B,Y},1)"'] &
\end{tikzcd}$$

Les morphismes $m_{A,B}: H(A,B)\to R(A,B)$ sont définis par:

$$\begin{tikzcd}
H(A,B) \arrow[rr] \arrow[dr, "J_{A,B}"'] & & \mathfrak{D}(JA,TB) \\
& \mathfrak{D}(JA,JB) \arrow[ur, "\mathfrak{D}(1,\eta_B)"'] &
\end{tikzcd}$$

On vérifie facilement les axiomes voulus et on obtient le lemme de Yoneda relationnel relatif.

Le lecteur intéressé par le détail des calculs qui ne sont qu'esquissés dans le présent article pourra les trouver en [7] et [8] .

Bibliographie.

[1] J. BENABOU, Les distributeurs, *Sém. Math. Pure* n° 33, Institut de mathématique, U.C.L. (1973), polycopié 71pp.

[2] F. BORCEUX et R. LAVENDHOMME, Une axiomatique de l'algèbre catégorique relative, *Ann. Soc. Sc. Bruxelles* 87 (1973), 187-207.

[3] B.J. DAY and G.M. KELLY, Enriched functors categories, Rep. Midwest Category Seminar III, *Lecture Notes* 106, Springer (1969), 178-191.

[4] E.J. DUBUC, Kan extensions in enriched category theory, *Lecture Notes* 145 (1970), 172 pp.

[5] S. EILENBERG and G.M. KELLY, Closed categories, *Proc. Conf. categorical Algebra, La Jolla,* Springer (1966), 421-562.

[6] R. LAVENDHOMME, Algèbre catégorique relative V, lemmes de Yoneda, *Sém. Math. Pure* n° 4, Inst. Math. U.C.L. (1970), polycopié 27pp.

[7] R. LAVENDHOMME, Lemme de Yoneda relationnel relatif, *Sém. Math. Pure* (à l'impression).

[8] R. LAVENDHOMME, Sur les *J*-triples relatifs, *Sém. Math. Pure* (à l'impression).

Institut de Mathématique
Université Catholique de Louvain
1348 LOUVAIN-LA-NEUVE
BELGIQUE