

# CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE CATÉGORIQUES

GÉRARD WEIDENFELD

MICHÈLE WEIDENFELD

## **Faisceaux et complétions universelles**

*Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques*, tome 15, n° 1 (1974), p. 83-108

[http://www.numdam.org/item?id=CTGDC\\_1974\\_\\_15\\_1\\_83\\_0](http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1974__15_1_83_0)

© Andrée C. Ehresmann et les auteurs, 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## FAISCEAUX ET COMPLETIONS UNIVERSELLES

par Gérard WEIDENFELD et Michèle WEIDENFELD

Soit  $\mathcal{A}$  une petite catégorie (resp. préadditive) munie d'une famille de cônes inductifs. Un faisceau est un foncteur (resp. additif) contravariant de  $\mathcal{A}$  vers  $Ens$  (resp.  $Ab$ ) qui transforme ces cônes en limites projectives. On associe de façon universelle un faisceau (additif) à tout  $\mathcal{A}^*$ -module, ce qui résoud le problème de complétion suivant : trouver une catégorie préadditive  $\tilde{\mathcal{A}}$  et un foncteur additif  $\mathcal{A} \rightarrow \tilde{\mathcal{A}}$  transformant les cônes de  $\mathcal{A}$  en limites inductives dans  $\tilde{\mathcal{A}}$  et universel pour cette propriété.

Si le faisceau associé à tout  $\mathcal{A}^*$ -module s'obtient par un produit tensoriel, la catégorie des faisceaux est équivalente à la catégorie des  $\tilde{\mathcal{A}}^*$ -modules. Dans le cadre de la théorie de la localisation cette situation caractérise les localisations exactes. Plus généralement elle correspond aux épimorphismes de catégories préadditives  $\mathcal{A} \rightarrow \tilde{\mathcal{A}}$  tels que les limites inductives créées dans  $\tilde{\mathcal{A}}$  soient  $Ab$ -absolues, c'est-à-dire préservées par tout foncteur additif. Un conoyau scindé est un exemple de limite  $Ab$ -absolue; ceci suggère de généraliser la notion d'anneau régulier au sens de Von Neumann aux petites catégories préadditives. On associe alors de façon « universelle » une catégorie régulière à toute petite catégorie préadditive.

Dans une troisième partie, on montre que, moyennant des hypothèses de connexité, l'étude de la complétion d'une petite catégorie (non préadditive) se déduit du cas additif via le foncteur « Algèbre libre ». En particulier il existe une bijection entre les complétions absolues d'une petite catégorie  $\mathcal{A}$  et les catégories de faisceaux sur  $\mathcal{A}$  telles que le foncteur « faisceau associé » soit équivalent à une extension de Kan.

### Notations.

- Si  $\mathcal{A}$  est une catégorie,  $\mathcal{A}_0$  désigne la classe de ses objets,  $\mathcal{A}^*$  la

catégorie duale, et, si  $\mathcal{U}$  est petite,  $Ens^{\mathcal{U}^*}$  la catégorie des foncteurs contravariants de  $\mathcal{U}$  dans  $Ens$ .

- Si  $\mathcal{U}$  est une petite catégorie préadditive,  $Ab^{\mathcal{U}^*}$  est la catégorie des foncteurs additifs contravariants de  $\mathcal{U}$  dans  $Ab$ .

- Pour tout  $A$  élément de  $\mathcal{U}_0$ , on note  $(., A)$  le foncteur contravariant représentable associé à  $A$ , à valeurs dans  $Ab$  si  $\mathcal{U}$  est préadditive.

- Un cône inductif sur  $\mathcal{U}$  est la donnée d'un triplet  $(\Gamma, \gamma, A)$  où  $\Gamma$  est un foncteur d'une petite catégorie  $I$  vers  $\mathcal{U}$  et  $\gamma$  une transformation naturelle de  $\Gamma$  vers le foncteur constant sur  $A$ . Si  $\mathcal{U}$  est préadditive, un tel cône induit au moyen du foncteur de Yonéda  $Y$  un cône inductif  $(\bar{\Gamma}, \bar{\gamma}, (., A))$  dans  $Ab^{\mathcal{U}^*}$ . On note alors  $U_{\Gamma}$  la limite canonique  $\varinjlim \bar{\Gamma}$  et  $\sigma_{\Gamma}: U_{\Gamma} \rightarrow (., A)$  est l'unique morphisme factorisant  $(\bar{\Gamma}, \gamma, (., A))$ .

- Soient  $\mathcal{U}$  et  $\mathcal{B}$  des petites catégories préadditives et  $\Phi: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{B}$  un foncteur additif; alors le foncteur «restriction»  $\Phi_*: Ab^{\mathcal{B}^*} \rightarrow Ab^{\mathcal{U}^*}$  ( $\Phi_*(F) = F\Phi$ ) admet pour adjoint à gauche l'extension de Kan additive  $\Phi^*$  et pour tout  $A$  de  $\mathcal{U}_0$ , on a  $\Phi^*(., A) = (., \Phi A)$ .

U. E. R. de Mathématiques  
33 rue Saint-Leu  
80039 AMIENS

**1. Faisceaux de groupes abéliens sur une petite catégorie préadditive.**

DEFINITION 1. Soit  $\mathcal{K} = \{(\Gamma, \gamma, A)\}$  un ensemble de cônes inductifs sur une petite catégorie (resp. préadditive)  $\mathcal{A}$ . On appelle  $\mathcal{K}$ -faisceau à valeurs dans  $Ens$  (resp. dans  $Ab$ ) un objet  $F$  de  $Ens^{\mathcal{A}^*}$  (resp. de  $Ab^{\mathcal{A}^*}$ ) tel que, pour tout  $(\Gamma, \gamma, A) \in \mathcal{K}$ , on ait  $(F(A), F(\gamma)) = \varprojlim F\Gamma$ . Lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté, on écrira simplement faisceau.

PROPOSITION 1.  $F \in (Ens^{\mathcal{A}^*})_o$  (resp.  $F \in (Ab^{\mathcal{A}^*})_o$ ) est un faisceau si, et seulement si, pour tout  $(\Gamma, \gamma, A) \in \mathcal{K}$ , le morphisme

$$Hom_{Ens}(\mathcal{A}^*(\sigma_\Gamma, F)) \text{ (resp. } Hom_{Ab}(\mathcal{A}^*(\sigma_\Gamma, F))$$

est un isomorphisme.

On notera  $\mathcal{F}_{\mathcal{K}}$ , ou plus simplement  $\mathcal{F}$ , la sous-catégorie pleine de  $Ens^{\mathcal{A}^*}$  (resp.  $Ab^{\mathcal{A}^*}$ ) dont les objets sont les  $\mathcal{K}$ -faisceaux à valeur dans  $Ens$  (resp.  $Ab$ ) et par  $j$  le foncteur d'inclusion.

PROPOSITION 2.  $j$  admet un adjoint.

DEMONSTRATION. Pour le cas non additif on peut trouver une démonstration dans [2].

- Supposons d'abord que  $\mathcal{A}$  soit préadditive et ait des sommes finies. Soit  $\mathbf{2}$  la catégorie discrète à deux objets et  $\mathcal{K}'$  l'ensemble des cônes  $(\Gamma', \gamma', A \oplus A)$ , où  $A$  est un objet de  $\mathcal{A}$ , où  $\Gamma'$  est le foncteur de  $\mathbf{2}$  vers  $\mathcal{A}$  tel que  $\Gamma'(1) = A$  et  $\Gamma'(2) = A$  et où  $\gamma'$  réalise  $A \oplus A$  comme limite inductive de  $\Gamma'$ . La catégorie  $Ab^{\mathcal{A}^*}$  est équivalente à la catégorie des  $\mathcal{K}'$ -faisceaux à valeurs dans  $Ens$ ; la catégorie des  $\mathcal{K}$ -faisceaux à valeurs dans  $Ab$  est équivalente à celle des  $\mathcal{K} \cup \mathcal{K}'$ -faisceaux à valeurs dans  $Ens$ , laquelle est une sous-catégorie réflexive de celle des  $\mathcal{K}'$ -faisceaux à valeurs dans  $Ens$ .

- Si  $\mathcal{A}$  est une catégorie préadditive quelconque, soit  $\mathcal{A}_I$  la sous-catégorie pleine de  $Ab^{\mathcal{A}^*}$  dont les objets sont les sommes finies de foncteurs  $(\cdot, A)_{A \in \mathcal{A}_o}$  et  $\mathcal{K}_I = Y\mathcal{K}$  la famille de cônes déduite de  $\mathcal{K}$  par le foncteur  $Y$ . Les catégories  $Ab^{\mathcal{A}^*}$  et  $Ab^{\mathcal{A}_I^*}$  étant équivalentes ainsi que les catégories de faisceaux correspondantes, on déduit le résultat général du cas précédent. ■

REMARQUE. On peut également établir directement la proposition dans le cas additif en imitant la démonstration de [2].

NOTATION. Toutes les catégories et tous les foncteurs considérés dans ce chapitre seront additifs (à l'exception des foncteurs définissant les cônes de  $\mathcal{K}$ ).

On désignera par  $\tilde{\cdot}$  un foncteur adjoint du foncteur  $j$ , par  $\eta_F$  le morphisme d'adjonction:  $F \rightarrow j\tilde{F}$ .  $\mathcal{F}$  ayant assez d'isomorphismes et le foncteur  $\tilde{\cdot}$  étant défini à un isomorphisme près, on en choisit une détermination telle que  $A \neq B$  dans  $\mathcal{Q}_0$  implique  $(\cdot, \tilde{A}) \neq (\cdot, \tilde{B})$ . On note alors par  $\tilde{\mathcal{Q}}$  la sous-catégorie pleine de  $Ab^{\mathcal{Q}^*}$  dont les objets sont les  $(\cdot, \tilde{A})$  où  $A$  appartient à  $\mathcal{Q}_0$  et par  $\Psi$  le foncteur de  $\mathcal{Q}$  vers  $\tilde{\mathcal{Q}}$  induit par  $\tilde{\cdot}$ .

COROLLAIRE 1.  $\mathcal{F}$  est une catégorie à limites inductives et limites projectives finies admettant  $(\cdot, \tilde{A})_{A \in \mathcal{Q}_0}$  comme générateurs.

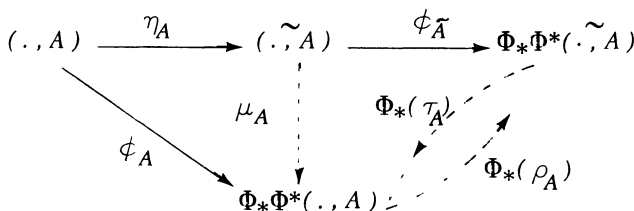
Ceci résulte de [7] proposition 9.2.

COROLLAIRE 2. Pour tout  $(\Gamma, \gamma, A) \in \mathcal{K}$ ,  $(\Psi(A), \Psi(\gamma))$  est une limite inductive de  $\Psi\Gamma$  dans  $\tilde{\mathcal{Q}}$ .

DEMONSTRATION.  $\tilde{\sigma}_\Gamma$  est un isomorphisme dans  $\mathcal{F}$ , donc  $(\cdot, \tilde{A})$  est isomorphe à  $\varinjlim_{Ab} \mathcal{Q}^* \tilde{\Gamma} = \varinjlim_{\mathcal{F}} \tilde{\Gamma} = \varinjlim_{\mathcal{F}} \Psi\Gamma$  et, le foncteur de Yonéda reflétant les isomorphismes, le corollaire est établi.

PROPOSITION 3. Soit  $\Phi$  un foncteur additif de  $\mathcal{Q}$  dans  $\mathcal{B}$  tel que pour tout  $(\Gamma, \gamma, A) \in \mathcal{K}$  on ait  $(\Phi(A), \Phi(\gamma)) = \varinjlim \Phi\Gamma$ . Alors il existe un foncteur additif  $\Lambda$ , unique à isomorphismes près, de  $\tilde{\mathcal{Q}}$  dans  $\mathcal{B}$  tel que  $\Phi = \Lambda\Psi$ .

DEMONSTRATION. Dans  $Ab^{\mathcal{Q}^*}$  on a le diagramme commutatif suivant:



où  $\phi_A$  et  $\phi_{\tilde{A}}$  sont les morphismes d'adjonction associés à  $(\Phi_*, \Phi^*)$ .

1°  $\Phi_*\Phi^*(., A) \in \mathcal{F}_0$  :

Par définition  $\Phi^*(., A) = \text{Hom}_{\mathcal{B}}(., \Phi(A))$  transforme les cônes limites inductives existant dans  $\mathcal{B}$  en limites projectives dans  $Ab$ . D'autre part le foncteur restriction  $\Phi_*$  commute avec les limites projectives, donc  $\Phi_*\Phi^*(., A)$  transforme la famille  $\mathcal{K}$  de cônes sur  $\mathcal{A}$  en limites projectives, i.e. est un faisceau. Par suite il existe un unique  $\mu_A$  tel que

$$\mu_A \eta_A = \phi_A.$$

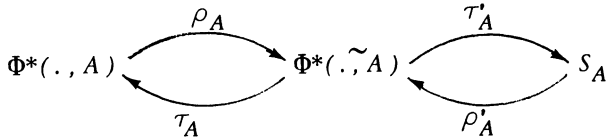
2°  $\Phi^*(., A)$  est facteur direct de  $\Phi^*(., \tilde{A})$ .

Dans  $Ab^{\mathcal{B}^*}$  il existe un unique  $\tau_A$  tel que  $\Phi_*(\tau_A)\phi_{\tilde{A}} = \mu_A$  et un unique  $\rho_A$  tel que :  $\Phi_*(\rho_A)\phi_A = \phi_{\tilde{A}}\eta_A$ , d'où

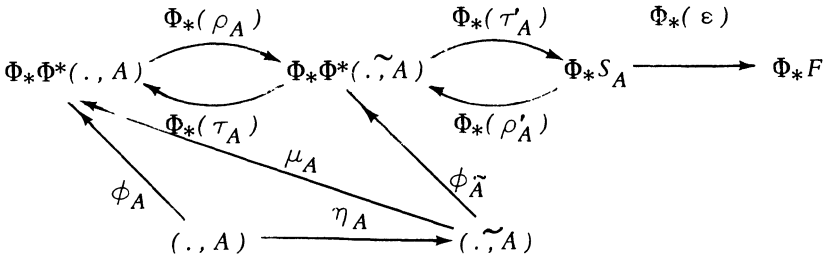
$$\Phi_*(\tau_A\rho_A)\phi_A = \Phi_*(\tau_A)\phi_{\tilde{A}}\eta_A = \phi_A,$$

et par adjonction  $\tau_A\rho_A = 1_{\Phi^*(., A)}$ . Soit  $S_A = \text{Coker } \rho_A$ ; alors

$$\Phi^*(., \tilde{A}) = \Phi^*(., A) \oplus S_A.$$



3° Soit  $\varepsilon : S_A \rightarrow F$  dans  $Ab^{\mathcal{B}^*}$ ; si  $\Phi_*F$  est un faisceau,  $\varepsilon = 0$ .



$$\Phi_*(\varepsilon)\Phi_*(\tau'_A)\phi_{\tilde{A}}\eta_A = \Phi_*(\varepsilon)\Phi_*(\tau'_A)\Phi_*(\rho_A)\phi_A = 0,$$

d'où

$$\Phi_*(\varepsilon)\Phi_*(\tau'_A)\phi_{\tilde{A}} = 0 = \Phi_*(\varepsilon\tau'_A)\phi_{\tilde{A}},$$

donc  $\varepsilon\tau'_A = 0$  et,  $\tau'_A$  étant un épimorphisme,  $\varepsilon = 0$ .

4° Définition de  $\Lambda : \tilde{\mathcal{A}} \rightarrow \mathcal{B}$  : - Sur les objets :  $\Lambda(., \tilde{A}) = \Phi(A)$ .

- Soit  $f: (\cdot, \tilde{A}) \rightarrow (\cdot, \tilde{A}')$ ; dans  $Ab \mathcal{B}^*$  on a :

$$\begin{array}{ccccc}
 (\cdot, \Phi(A)) = \Phi^*(\cdot, A) & \xrightarrow{\rho_A} & \Phi^*(\cdot, \tilde{A}) & \xrightarrow{\tau'_A} & S_A \\
 & \xleftarrow{\tau_A} & & \xleftarrow{\rho'_A} & \\
 & & \downarrow \Phi^*(f) & & \\
 (\cdot, \Phi(A')) = \Phi^*(\cdot, A') & \xrightarrow{\rho_{A'}} & \Phi^*(\cdot, \tilde{A}') & \xrightarrow{\tau'_{A'}} & S_{A'} \\
 & \xleftarrow{\tau_{A'}} & & \xleftarrow{\rho'_{A'}} &
 \end{array}$$

On pose  $(\cdot, \Lambda(f)) = \tau_A \cdot \Phi^*(f) \rho_A$ .

Avec des notations analogues, si  $g: (\cdot, \tilde{A}') \rightarrow (\cdot, \tilde{A}'')$ , on obtient :

$$\begin{aligned}
 (\cdot, \Lambda(g)\Lambda(f)) &= \tau_{A''} \cdot \Phi^*(g) \rho_{A'} \tau_A \cdot \Phi^*(f) \rho_A \\
 &= \tau_{A''} \cdot \Phi^*(g) (1_{\Phi^*(\cdot, \tilde{A}')} - \rho'_{A'} \tau'_{A'}) \Phi^*(f) \rho_A \\
 &= \tau_{A''} \cdot \Phi^*(g) \Phi^*(f) \rho_A - \tau_{A''} \cdot \Phi^*(g) \rho'_{A'} \tau'_{A'} \cdot \Phi^*(f) \rho_A.
 \end{aligned}$$

Or  $\tau_{A''} \cdot \Phi^*(g) \rho'_{A'} : S_{A'} \rightarrow \Phi^*(\cdot, \tilde{A}'')$  est nul d'après 3 et 1, et  $\Lambda$  est un foncteur additif tel que, pour tout  $b: A \rightarrow A'$  de  $\mathcal{U}$ , on ait :

$$(\cdot, \Lambda \Psi(b)) = \tau_A \cdot \Phi^*(\Psi(b)) \rho_A;$$

comme  $\Phi^*(\Psi(b)) \rho_A = \rho_A \cdot (\cdot, \Phi(b))$ , il s'ensuit

$$(\cdot, \Lambda \Psi(b)) = \tau_A \cdot \rho_A \cdot (\cdot, \Phi(b)) = (\cdot, \Phi(b)),$$

d'où  $\Lambda \Psi = \Phi$ .

5° Unicité de  $\Lambda$  à isomorphisme près :

Dans  $Ab \mathcal{U}^*$  on a le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 (\cdot, \tilde{A}) = \Psi_* \Psi^*(\cdot, A) & \xrightarrow{\mu_A} & \Psi_*(\Lambda_* \Lambda^*(\cdot, \tilde{A})) = \Phi_* \Phi^*(\cdot, A) \\
 \nwarrow \eta_A & \xrightarrow{\Psi_*(\delta_A)} & \nearrow \phi_A \\
 & (\cdot, A) &
 \end{array}$$

Dans  $Ab \mathcal{U}^*$  il existe un unique  $\delta_A: \Psi^*(\cdot, A) \rightarrow \Lambda_* \Lambda^*(\cdot, \tilde{A})$  tel que

$$\Psi_*(\delta_A) \eta_A = \mu_A \eta_A.$$

Montrons que  $\delta = (\delta_A)_A \in \mathcal{U}_0$  est un projecteur : soit  $\theta: \Psi^*(\cdot, A) \rightarrow \Lambda_* F$ ; il existe un unique  $\nu: \Phi^*(\cdot, A) \rightarrow F$  dans  $Ab \mathcal{B}^*$  tel que

$$\Phi_*(\nu) \phi_A = \Psi_*(\theta) \eta_A = \Phi_*(\nu) \Psi_*(\delta_A) \eta_A$$

et

$$\begin{aligned} \Psi_*(\Lambda_*(\nu)\delta_A)\eta_A &= \Psi_*\Lambda_*(\nu)\Psi_*(\delta_A)\eta_A = \Phi_*(\nu)\Psi_*(\delta_A)\eta_A \\ &= \Psi_*(\theta)\eta_A, \end{aligned}$$

d'où  $\Lambda_*(\nu)\delta_A = \theta$ . Enfin, si  $\Lambda_*(\nu')\delta_A = \theta$ , alors

$$\Psi_*(\Lambda_*(\nu')\delta_A)\eta_A = \Phi_*(\nu')\Psi_*(\delta_A)\eta_A = \Phi_*(\nu')\phi_A = \Psi_*(\theta)\eta_A$$

et par suite  $\nu = \nu'$ .

La relation  $\Lambda\Psi = \Phi$  détermine  $\Lambda$  avec unicité sur  $\tilde{\mathcal{A}}_0$ . Par conséquent le foncteur  $\Lambda$  est entièrement défini par les morphismes d'adjonction  $\delta_A: \Psi^*(., A) \rightarrow \Lambda_*\Lambda^*(., \tilde{\mathcal{A}})$  qui sont uniques à isomorphismes près. ■

NOTATIONS:  $\Psi\mathcal{K}$  étant la famille de cônes sur  $\tilde{\mathcal{A}}$  image de la famille  $\mathcal{K}$ , on désigne par  $\mathcal{F}_1$  la catégorie des  $\Psi\mathcal{K}$ -faisceaux. On note  $\bar{\Psi}$  l'adjoint à droite de  $\Psi_*$ , défini par :

$$\bar{\Psi}(\theta)(., \tilde{\mathcal{A}}) = [ (., \tilde{\mathcal{A}}), \theta ]_{Ab\mathcal{Q}^*} \text{ pour tout } \theta \text{ dans } Ab\mathcal{Q}^*.$$

PROPOSITION 4.  $\Psi_*$  induit une équivalence de  $\mathcal{F}_1$  sur  $\mathcal{F}$  d'équivalence inverse  $\bar{\Psi}|_{\mathcal{F}}$ .

DEMONSTRATION. Il est clair que  $\Psi_*$  applique  $\mathcal{F}_1$  dans  $\mathcal{F}$  et que  $\Psi_*$  est fidèle,  $\Psi$  étant surjectif sur les unités.

-  $\Psi_*$  est injectif sur les objets de  $\mathcal{F}_1$ : soient  $S$  et  $S'$  deux objets de  $\mathcal{F}_1$  tels que  $\Psi_*(S) = \Psi_*(S')$  et  $\mathcal{B}^*$  la sous-catégorie pleine de  $Ab$  engendrée par les graphes multiplicatifs  $S(\tilde{\mathcal{A}})$  et  $S'(\tilde{\mathcal{A}})$  images par  $S$  et  $S'$  de  $\tilde{\mathcal{A}}$ . Alors  $\mathcal{B}^*$  est une petite catégorie préadditive; soit  $Y_{\mathcal{B}}$  le plongement contravariant  $\mathcal{B}^* \rightarrow Ab^{\mathcal{B}^*}$  et  $\mathcal{B}$  la sous-catégorie pleine de  $Ab^{\mathcal{B}^*}$  dont les objets sont les  $Y_{\mathcal{B}}(B)$ , où  $B \in \mathcal{B}_0^*$ . Alors  $Y_{\mathcal{B}}S$  et  $Y_{\mathcal{B}}S'$  transforment les  $\Psi\mathcal{K}$ -cônes en limites inductives dans  $\mathcal{B}$ ; d'après la proposition 3,  $Y_{\mathcal{B}}S$  et  $Y_{\mathcal{B}}S'$  sont isomorphes et ont la même restriction à  $\tilde{\mathcal{A}}_0$ ; comme  $Y_{\mathcal{B}}$  est fidèle, on en déduit  $S = S'$ .

-  $\Psi_*\bar{\Psi} \simeq Id_{\mathcal{F}}$ : si  $\theta \in \mathcal{F}$  et  $A \in \mathcal{A}_0$ , on a :

$\Psi_*\bar{\Psi}(\theta)(A) = \bar{\Psi}(\theta)\Psi(A) = \bar{\Psi}(\theta)(., \tilde{\mathcal{A}}) = [ (., \tilde{\mathcal{A}}), \theta ] \simeq [ (., \tilde{\mathcal{A}}), \theta ]_{\mathcal{F}}$   
 et  $[ (., \tilde{\mathcal{A}}), \theta ]_{\mathcal{F}} \simeq [ (., A), \theta ]_{Ab\mathcal{Q}^*} \simeq \theta(A)$ ; en définitive  $\Psi_*\bar{\Psi}(\theta) \simeq \theta$ , au moyen d'isomorphismes naturels, soit  $\Psi_*\bar{\Psi} \simeq Id_{\mathcal{F}}$ . Ainsi  $\Psi_*|_{\mathcal{F}_1}$  est plein et est une équivalence. ■



COROLLAIRE 1. L'équivalence  $\Psi_*|_{\mathcal{F}_1}$  admet  $\Psi^*|_{\mathcal{F}}$  pour équivalence inverse si et seulement si  $\Psi$  est un épimorphisme dans la catégorie des petites catégories préadditives.

DEMONSTRATION. Si  $\Psi_*|_{\mathcal{F}_1}$  admet pour équivalence inverse  $\Psi^*|_{\mathcal{F}}$ ,  $\Psi^*|_{\mathcal{F}}$  est naturellement équivalent à  $\bar{\Psi}|_{\mathcal{F}}$  et

$$\Psi_*\Psi^*(., A) \simeq \Psi_*\bar{\Psi}(., A) \simeq (., A) \text{ pour tout } A \in \mathcal{A}_0;$$

il résulte alors de [5] que  $\Psi$  est un épimorphisme.

Réciproquement, si  $\Psi$  est un épimorphisme, le morphisme de coadjonction  $\Psi^*\Psi_* \rightarrow Id_{\mathcal{F}_1}$  est un isomorphisme et pour tout  $\theta \in \mathcal{F}$ , on a

$$\Psi^*(\theta) \simeq \Psi^*\Psi_*\bar{\Psi}(\theta) \simeq \bar{\Psi}(\theta).$$

COROLLAIRE 2.  $\Psi^*$  induit une équivalence de  $\mathcal{F}$  sur  $Ab^{\tilde{\mathcal{A}}^*}$  si et seulement si  $\mathcal{F}_1 = Ab^{\tilde{\mathcal{A}}^*}$ .

Ceci résulte de la proposition 4 et du fait que  $\mathcal{F}_1$  est fermé pour les isomorphismes.

La proposition 3 et le corollaire 2 de la proposition 4 suggèrent :

DEFINITIONS. 1° Soit  $\mathcal{A}$  une catégorie (resp. préadditive),  $\mathcal{K}$  une famille de cônes inductifs sur  $\mathcal{A}$  définissant des limites inductives dans  $\mathcal{A}$ . Ces limites inductives sont *absolues* (resp. *Ab-absolues*) si elles sont préservées par tout foncteur (resp. additif).

2° Soit  $\mathcal{K}$  une famille de cônes sur  $\mathcal{A}$  et  $\Phi$  un foncteur (resp. additif) de  $\mathcal{A}$  dans la petite catégorie (resp. préadditive)  $\mathcal{B}$ . On dit que  $\Phi$  est une  $\mathcal{K}$ -complétion (resp.  $(\mathcal{K}-Ab)$ -complétion) universelle de  $\mathcal{A}$  si :

- $\Phi$  transforme les cônes de  $\mathcal{A}$  en limites inductives dans  $\mathcal{B}$ .
- Pour tout foncteur (resp. additif)  $\Phi'$  de  $\mathcal{A}$  dans une petite catégorie (resp. préadditive)  $\mathcal{C}$  transformant les cônes de  $\mathcal{A}$  en limites inductives, il existe un unique foncteur (resp. additif)  $\Lambda$  tel que  $\Lambda\Phi = \Phi'$ .

3° Si dans la définition 2, on suppose de plus que les cônes de  $\mathcal{K}$  définissent des limites absolues, on dira que  $\Phi$  est une  $\mathcal{K}$  (resp. une  $(\mathcal{K}-Ab)$ -)complétion absolue universelle de  $\mathcal{A}$ .

On sait que toute catégorie préadditive  $\mathcal{A}$  admet une  $(\mathcal{K}-Ab)$ -complétion universelle. On en déduit à l'aide la proposition 3 que  $\Psi$  est en

en fait une  $(\mathcal{K}\text{-}Ab)$ -complétion universelle (i. e. le  $\Lambda$  vérifiant cette proposition est unique). Le corollaire 2 précédent donne une condition nécessaire et suffisante pour que cette complétion soit absolue. L'existence d'une  $\mathcal{K}$ -complétion universelle a été prouvée dans [3].

La forme complétée de  $\mathcal{A}$  peut être précisée par la construction suivante :

Soit  $\Phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  un foncteur (resp. additif) transformant les cônes  $\mathcal{K}$  de  $\mathcal{A}$  en limites inductives. On définit par récurrence pour tout ordinal  $\alpha$  une sous-catégorie  $\mathcal{B}_\alpha$  de  $\mathcal{B}$  par :

- $\mathcal{B}_0$  est la sous-catégorie de  $\mathcal{B}$  engendrée par  $\Phi(\mathcal{A})$ .
- Si  $\alpha$  admet un prédécesseur,  $\mathcal{B}_\alpha$  est la sous-catégorie de  $\mathcal{B}$  engendrée par  $\mathcal{B}_{\alpha-1}$  et l'ensemble des  $x \in \mathcal{B}$  tels qu'il existe  $(\Gamma, \gamma, A) \in \mathcal{K}, B \in \mathcal{B}_0$  et une transformation naturelle  $\rho$  de  $\Phi\Gamma$  vers  $\hat{B}$  dans  $\mathcal{B}$  tels que

$$x\Phi(\gamma) = \rho.$$

Si  $\alpha$  est un ordinal limite,  $\mathcal{B}_\alpha = \bigcup_{\lambda < \alpha} \mathcal{B}_\lambda$ .

Pour tout  $\alpha$ , on note  $\Phi = r_\alpha \Phi_\alpha$  la factorisation de  $\Phi$  au travers de  $\mathcal{B}_\alpha$ .

REMARQUES.

1°  $\mathcal{B}_\alpha = \mathcal{B}_{\alpha+1}$  si et seulement si les cônes  $\Phi_\alpha \mathcal{K}$  définissent des limites inductives dans  $\mathcal{B}_\alpha$ .

2° La construction s'arrête à partir d'un certain ordinal : sinon, soit  $\beta$  un ordinal strictement supérieur au cardinal de l'ensemble des flèches de  $\mathcal{B}$ ;  $\mathcal{B}_\beta$  serait une sous-catégorie de  $\mathcal{B}$  dont le cardinal de l'ensemble des flèches serait supérieur à celui de l'ensemble des flèches de  $\mathcal{B}$ , ce qui est impossible.

Soit  $\beta_0$  le plus petit ordinal pour lequel  $\mathcal{B}_\alpha = \mathcal{B}_{\alpha+1}$ .

PROPOSITION 5. Si  $\Psi : \mathcal{A} \rightarrow \tilde{\mathcal{A}}$  est la  $\mathcal{K}$  (resp.  $(\mathcal{K}\text{-}Ab)$ )-complétion universelle construite plus haut de  $\mathcal{A}$ , on a  $\mathcal{A}_{\beta_0} = \tilde{\mathcal{A}}$ .

DEMONSTRATION. De par la propriété universelle de  $\Psi$  il existe un unique  $\Lambda$  tel que  $\Lambda\Psi = \Psi_{\beta_0}$ ; alors  $r_{\beta_0} \Lambda\Psi = \Psi$  et  $r_{\beta_0} \Lambda = Id_{\tilde{\mathcal{A}}}$ ; par suite  $r_{\beta_0}$  est un foncteur injectif et surjectif et  $\mathcal{A}_{\beta_0} = \tilde{\mathcal{A}}$ . ■

Avant de donner quelques exemples on va énoncer :

PROPOSITION 6. Soit  $\Phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  comme ci-dessus, et  $\mathcal{K}_1 = \Phi\mathcal{K}$  l'image

des cônes de  $\mathcal{K}$  dans  $\mathcal{B}$ . Les  $\mathcal{K}_1$ -limites inductives dans  $\mathcal{B}$  sont absolues (resp. *Ab*-absolues) si et seulement si tout foncteur (resp. additif) de  $\mathcal{B}$  vers *Ens* (resp. *Ab*) commute avec ces limites.

DEMONSTRATION. Cf. [6]. ■

PROPOSITION 7. Soit  $\mathcal{K}$  une famille de cônes sur la catégorie préadditive  $\mathcal{A}$ . Les conditions suivantes sont équivalentes :

1° Il existe une  $(\mathcal{K}\text{-Ab})$ -complétion absolue universelle de  $\mathcal{A}$ .

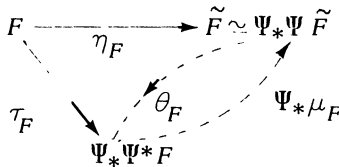
2°  $\Psi : \mathcal{A} \rightarrow \tilde{\mathcal{A}}$  est la  $(\mathcal{K}\text{-Ab})$ -complétion absolue universelle de  $\mathcal{A}$ .

3° Pour tout  $F \in \text{Ab}_0^{\tilde{\mathcal{A}}^*}$ , on a  $\Psi_* \Psi^* F \simeq \tilde{F}$ .

4° Le foncteur d'inclusion  $j$  de  $\mathcal{F}$  dans  $\text{Ab}^{\tilde{\mathcal{A}}^*}$  commute avec les épimorphismes et les sommes.

DEMONSTRATION. L'équivalence de 1 et 2 résulte du corollaire 2 proposition 4.

2  $\implies$  3 : Dans  $\text{Ab}^{\tilde{\mathcal{A}}^*}$  il existe un unique  $\mu_F$  tel que  $\Psi_* \mu_F \tau_F = \eta_F$ , où  $\tau_F$  est le morphisme d'adjonction.



D'autre part puisque  $\mathcal{F}_1 \simeq \text{Ab}^{\tilde{\mathcal{A}}^*}$ ,  $\Psi_* \Psi^* F \in \mathcal{F}_0$  et il existe un unique  $\theta_F$  tel que  $\theta_F \eta_F = \tau_F$ .  $\Psi$  étant un épimorphisme,  $\Psi_*$  est plein et il existe  $\theta'_F$  tel que  $\theta_F = \Psi_*(\theta'_F)$ ; par suite  $\Psi_*(\theta'_F)$  et  $\Psi_*(\mu_F)$  sont inverses l'un de l'autre.

3  $\implies$  4 provient du fait que  $\Psi_*$  et  $\Psi^*$  commutent avec les sommes et les épimorphismes.

4  $\implies$  2 : Sous ces hypothèses la famille  $(\cdot, \tilde{A})_{A \in \mathcal{A}_0}$  est un ensemble de petits générateurs projectifs de  $\mathcal{F}$ . Alors  $\mathcal{F}$  est équivalente à  $\text{Ab}^{\tilde{\mathcal{A}}^*}$  et, d'après le corollaire 2 de la proposition 4,  $\mathcal{F}_1 = \text{Ab}^{\tilde{\mathcal{A}}^*}$ , ce qui signifie que  $\Psi$  est une  $(\mathcal{K}\text{-Ab})$ -complétion absolue universelle de  $\mathcal{A}$ . ■

EXEMPLES.

1° Soit  $\mathcal{A}$  une petite catégorie préadditive exacte. Le foncteur

$R^0 : Ab^{\mathcal{Q}^*} \rightarrow Ab^{\mathcal{Q}^*}$  qui au foncteur  $F$  associe son 0-ième dérivé à droite est un foncteur faisceau.

2° «Foncteurs localisations». Si  $\mathcal{J}$  est une topologie de Grothendieck sur  $\mathcal{Q}$ , on lui associe une famille  $\mathcal{K}$  de cônes sur  $\mathcal{Q}$ , où

$$(\Gamma, \gamma, A) \in \mathcal{K} \text{ si et seulement si } \exists F \in \mathcal{J}, F \rightarrow (\cdot, A), F = \varinjlim_j Y\Gamma,$$

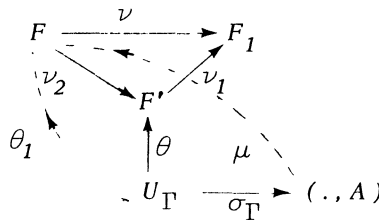
$\gamma$  étant la transformation naturelle de  $\Gamma$  vers  $A$  induite par  $j$ . Le foncteur localisation et le foncteur  $\sim$  sont naturellement équivalents. La  $\mathcal{K}$ -complétion est absolue si et seulement si  $\Psi^*$  est un épimorphisme plat de catégories préadditives (i.e.  $\Psi^*$  est un foncteur exact) (Cf. [7]).

3° Soit  $\mathcal{K}$  une famille de cônes sur  $\mathcal{Q}$  telle que, si  $(\Gamma, \gamma, A) \in \mathcal{K}$ , la limite  $U_\Gamma = \varinjlim Y\Gamma$  soit un petit projectif dans  $Ab^{\mathcal{Q}^*}$ . Alors  $\mathcal{Q}$  admet une  $(\mathcal{K}\text{-}Ab)$ -complétion absolue.

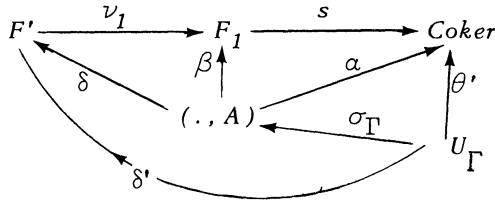
DEMONSTRATION. On va prouver que la condition 4 de la proposition 7 est vérifiée.

- Soit  $\nu$  un épimorphisme de faisceaux,  $F' = Im \nu$ ,  $\nu_1 \nu_2 = \nu$  une décomposition de  $\nu$  en «épi-mono» dans  $Ab^{\mathcal{Q}^*}$ . Pour que  $\nu$  soit un épimorphisme de  $Ab$ , il suffit que  $F'$  et  $Coker \nu$  soient des faisceaux.

Soit  $(\Gamma, \gamma, A) \in \mathcal{K}$  et  $\theta$  un morphisme de  $U_\Gamma$  vers  $F'$ . Par projectivité de  $U_\Gamma$  il existe  $\theta_1$  tel que  $\nu_2 \theta_1 = \theta$ ;  $\theta_1$  détermine un  $\mu$  tel que  $\mu \sigma_\Gamma = \theta_1$  et  $\nu_2 \mu$  relève  $\theta$ . L'unicité d'un tel relèvement se déduit du fait que  $\nu_1$  est un monomorphisme.



Si maintenant  $\theta'$  est un morphisme de  $U_\Gamma$  vers  $Coker \nu$ , un raisonnement analogue au précédent montre qu'il existe  $\alpha$  tel que  $\alpha \sigma_\Gamma = \theta'$ . Si  $\alpha'$  vérifie la même relation, il existe  $\beta$  tel que  $\beta \sigma_\Gamma = \alpha - \alpha'$ . De  $\beta \sigma_\Gamma = 0$  on déduit  $\delta'$  tel que  $\nu_1 \delta' = \beta \sigma_\Gamma$ ;  $F'$  et  $F_1$  étant des faisceaux, il existe  $\delta$  tel que  $\delta' = \delta \sigma_\Gamma$  et  $\beta = \nu_1 \delta$ ; par suite  $\alpha = \alpha'$ .



- Soit  $(F_i)_{i \in I}$  une famille de faisceaux et  $F = \bigoplus_{i \in I} F_i$  sa somme dans  $Ab^{\mathcal{Q}^*}$ ; alors  $F$  est un faisceau. En effet, si  $I$  est fini,  $F$ , isomorphe au produit des  $F_i$ , est un faisceau; dans le cas général,  $U_\Gamma$  étant petit, tout morphisme de  $U_\Gamma$  vers  $F$  se factorise par une somme finie, et par conséquent se relève de façon unique.

CAS PARTICULIERS DE L'EXEMPLE 3.

- On notera  $\mathcal{J}$  l'ensemble des catégories sources des foncteurs  $\Gamma$  pour  $(\Gamma, \gamma, A) \in \mathcal{K}$ .

a)  $\mathcal{J}$  est constitué de catégories discrètes finies.

b)  $\mathcal{J} = \{ \mathbf{1} \}$ ,  $\mathbf{1}$  désignant la catégorie ayant un seul objet et un seul morphisme. On retrouve les catégories de fractions d'une catégorie préadditive.

c)  $\mathcal{J} = \{ C \}$ , où  $C = 1 \begin{matrix} \xrightarrow{u} \\ \xleftarrow{v} \end{matrix} 2$  et  $(\Gamma, \gamma, A) \in \mathcal{K}$  si et seulement si:

$\Gamma(v) = 0, \gamma(2)\Gamma(u) = 0$  et il existe  $\rho: A \rightarrow \Gamma(2)$  tel que  $\gamma(2)\rho = Id_A$ .

Les cônes de  $\mathcal{K}$  se réalisent en conoyaux scindés.

d)  $\mathcal{Q}$  est une catégorie parfaite à gauche (Cf. [8]) et  $\mathcal{J}$  est constitué de catégories filtrantes finies. Ce résultat provient d'un théorème de Y. Bass qui se généralise aux catégories préadditives.

2. Régularisation d'une petite catégorie préadditive.

DEFINITION 1. Une petite catégorie préadditive  $\mathcal{Q}$  est régulière (au sens de Von Neumann) si pour tout morphisme  $f$  de  $\mathcal{Q}$  il existe un morphisme  $g$  dans  $\mathcal{Q}$  tel que  $fgf = f$ .

PROPOSITION 1. Si  $\mathcal{Q}$  est une catégorie préadditive, les conditions suivantes sont équivalentes:

a)  $\mathcal{Q}$  est régulière.

- b) Tout monomorphisme  $l \rightarrow (\cdot, A)$  où  $l$  est monogène est scindé.
- c) Tout monomorphisme  $l \rightarrow (\cdot, A)$  où  $l$  est de type fini est scindé.
- d) Tout  $\mathcal{A}$ -module à gauche est plat.
- e) Tout  $\mathcal{A}$ -module à droite est plat.

Dans le cas des anneaux ces équivalences apparaissent comme exercices dans [1], la démonstration est similaire pour une catégorie. ■

PROPOSITION 2. Si  $\mathcal{A}$  est une catégorie préadditive, les conditions suivantes sont équivalentes :

- a)  $\mathcal{A}$  est régulière.
- b) Dans  $Ab^{\mathcal{A}^*}$  les conoyaux des flèches de  $\mathcal{A}$  sont des épimorphismes scindés.
- c) Si  $\mathcal{A}_1$  est la sous-catégorie pleine de  $Ab^{\mathcal{A}^*}$  dont les objets forment un ensemble représentatif des projectifs de type fini de  $Ab^{\mathcal{A}^*}$ , les conoyaux de  $\mathcal{A}_1$  sont Ab-absolus.

Ces équivalences figurent également comme exercices dans [1]. ■

L'exemple 3b du chapitre 1 va nous permettre d'associer de façon « universelle » à toute petite catégorie préadditive une petite catégorie régulière.

PROPOSITION 3. Soit  $\mathcal{A}$  une petite catégorie préadditive; il existe une petite catégorie régulière  $\mathcal{A}_r$  et un foncteur  $\tau: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}_r$  tel que tout foncteur de  $\mathcal{A}$  vers une catégorie ayant des conoyaux scindés se factorise de façon unique par  $\tau$ .

DEMONSTRATION. Soit

$$L_1 = \{ l \in \mathcal{A} \mid (\cdot, l) \text{ n'admet pas de noyau scindé dans } Ab^{\mathcal{A}^*} \}.$$

On construit successivement :

1° Le graphe multiplicatif  $G_1$  :

$$(G_1)_0 = \mathcal{A}_0 \cup \{ A_l \mid l \in L_1 \}, \text{ ces deux ensembles étant disjoints.}$$

Les morphismes de  $G_1$  sont d'une part les morphismes de  $\mathcal{A}$  et d'autre part, pour tout  $l \in L_1$ ,  $l: B \rightarrow C$ , des morphismes

$$\mu_l: C \rightarrow A_l \text{ et } \rho_l: A_l \rightarrow C.$$

2° La catégorie  $\mathcal{A}_1^n$  préadditive libre associée à  $G_1$ .

3° La catégorie préadditive  $\mathcal{A}_1^i$  quotient de  $\mathcal{A}_1^n$  par la relation d'équivalence compatible engendrée par les relations élémentaires suivantes :

-  $(f * g, fg)$  si  $f$  et  $g$  sont des morphismes composables de  $\mathcal{A}$ ,  $fg$  dénotant leur composé dans  $\mathcal{A}$  et  $f * g$  celui dans  $\mathcal{A}_1^n$ ,

-  $(\mu_l * l, 0), \forall l \in L_1,$

-  $(\mu_l * \rho_l, 1_{A_l}) \forall l \in L_1.$

La relation engendrée n'identifiant jamais de morphismes (ni d'objets!) de  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{A}$  est une sous-catégorie de  $\mathcal{A}_1^i$ ; si  $f$  est dans  $\mathcal{A}$ , on notera encore par  $f$  son image dans  $\mathcal{A}_1^i$ .

4° Soit  $I$  la catégorie  $1 \begin{matrix} \xleftarrow{u} \\ \xrightarrow{v} \end{matrix} 2$  et  $K$  la famille de foncteurs  $\Gamma$  de  $I$  dans  $\mathcal{A}_1^i$  définie par :

$$\Gamma \in K \text{ si et seulement si } \Gamma(u) = l, \Gamma(v) = 0 \ (l \in L_1).$$

On désigne par

$$\mathcal{K} = \{(\Gamma, \gamma, A_l) \mid \Gamma \in K, \gamma(2) = \mu_l, \gamma(1) = 0\}$$

et on note  $\mathcal{A}_2$  la catégorie  $\tilde{\mathcal{A}}_1^i$  obtenue à partir de  $\mathcal{K}$ .

Le foncteur  $\mathcal{A}_1^i \xrightarrow{\sim} \tilde{\mathcal{A}}_1^i = \mathcal{A}_2$  définit  $\tilde{\mathcal{A}}_1^i$  comme  $(\mathcal{K}\text{-Ab})$ -complétion absolue de  $\mathcal{A}_1^i$  (un conoyau scindé est absolu).

Soit  $\Psi_{1,2}: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}_2$  le foncteur composé du foncteur inclusion  $j_1: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}_1^i$  et de  $\tilde{\sim}_1$ .

5° En itérant ce procédé, on obtient une suite  $(\mathcal{A}_i)_{i \in \mathbf{N}}$  de catégories et une famille  $\Psi_{i,i+1}: \mathcal{A}_i \rightarrow \mathcal{A}_{i+1}$ , où  $i \in \mathbf{N}$ , de foncteurs additifs.

- Pour tout  $i \in \mathbf{N}$ , le couple  $(\mathcal{A}_i, \Psi_{i,i+1})$  vérifie :

a)  $\Psi_{i,i+1}$  est injectif sur les objets de  $\mathcal{A}_i$ .

b) Pour tout  $f \in \mathcal{A}_i$ ,  $\Psi_{i,i+1}(f)$  admet un conoyau scindé dans  $Ab^{\mathcal{A}_{i+1}^*}$ .

c) Tout foncteur de  $\mathcal{A}_i$  dans une catégorie ayant des conoyaux scindés se factorise de façon unique à travers  $\Psi_{i,i+1}$ .

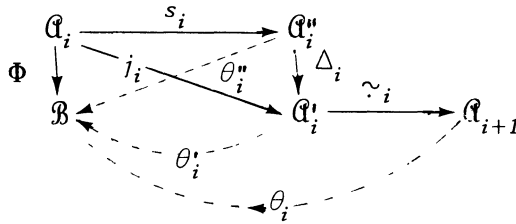
a) est immédiat par construction.

b) Soit  $f \in \mathcal{A}_i$ : si  $f \in L_1$ ,  $\Psi_{i,i+1}(f)$  admet un conoyau scindé  $\Psi_{i,i+1}(\mu_f)$  dans  $\mathcal{A}_{i+1}$ , donc dans  $Ab^{\mathcal{A}_{i+1}^*}$ .

Si  $f \notin L_i, (\cdot, f)$  a un conoyau scindé dans  $Ab^{\mathcal{Q}_i^*}$  et  $\Psi_{i, i+1}^*(\cdot, f) = (\cdot, \Psi_{i, i+1}(f))$  en a un dans  $Ab^{\mathcal{Q}_{i+1}^*}$ .

c) Soit  $\mathcal{B}$  une catégorie à conoyaux absolus et  $\Phi: \mathcal{Q}_i \rightarrow \mathcal{B}$  un foncteur additif. On désigne par :

- $s_i$  le foncteur canonique  $\mathcal{Q}_i \rightarrow \mathcal{Q}_i''$ ,
- $\Delta_i$  la surjection canonique réalisant  $\mathcal{Q}_i'$  comme catégorie quotient.



$j_i = \Delta_i s_i$  réalise  $\mathcal{Q}_i'$  comme sous-catégorie de  $\mathcal{Q}_i''$ .

On définit  $\theta_i''$  par :

$$\theta_i''(s_i(f)) = \Phi(f), \theta_i''(\mu_l) = \text{Coker } \Phi(l), \theta_i''(\rho_l) = \nu,$$

où  $\text{Coker } \Phi(l)\nu = 1_c$  :

$$B \xrightarrow{l} C \qquad \Phi(B) \xrightarrow{\Phi(l)} \Phi(C) \begin{matrix} \xrightarrow{\text{Coker } \Phi(l)} c \\ \xleftarrow{\nu} \end{matrix}$$

$\theta_i'' s_i = \Phi$  ; comme  $\theta_i''$  est compatible avec les relations élémentaires définissant  $\mathcal{Q}_i''$ , il existe un unique  $\theta_i'$  tel que

$$\theta_i' \Delta_i = \theta_i'', \text{ d'où } \theta_i' j_i = \Phi.$$

$\theta_i'$  transforme les cônes de  $\mathcal{K}_i$  en limites dans  $\mathcal{B}$ , il existe donc un unique  $\bar{\theta}_i$  tel que

$$\bar{\theta}_i \sim_i = \theta_i', \theta_i \Psi_{i, i+1} = \bar{\theta}_i \sim_i j_i = \theta_i' j_i = \Phi.$$

Si  $\bar{\theta}_i \Psi_{i, i+1} = \Phi$ , on a

$$\bar{\theta}_i \sim_i j_i = \Phi = \theta_i \sim_i j_i \text{ et } \bar{\theta}_i \sim_i \Delta_i(\mu_l) = \text{Coker } \Phi(l)$$

(car  $\sim_i \Delta_i(\mu_l)$  est un conoyau absolu de  $\sim_i j_i(l)$  dans  $\mathcal{Q}_{i+1}$ ) ; par suite  $\bar{\theta}_i \sim_i \Delta_i = \theta_i \sim_i \Delta_i$  ;  $\Delta_i$  étant une surjection, on obtient

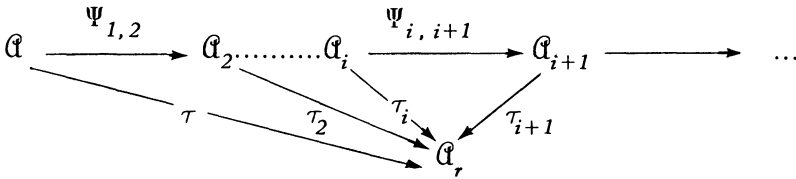
$$\bar{\theta}_i \sim_i = \theta_i \sim_i = \theta_i' \text{ et } \bar{\theta}_i = \theta_i,$$



ce qui établit c .

- Soit  $\mathcal{Q}_r$  la limite inductive du système filtrant de petites catégories pré-additives  $(\mathcal{Q}_i, \Psi_{i, i+1})_{i \in \mathbf{N}}$ . L'ensemble des objets de  $\mathcal{Q}_r$  est la réunion (croissante) des ensembles d'objets des  $\mathcal{Q}_i$ . Si  $A, B \in (\mathcal{Q}_r)_0$  il existe  $i_0$  tel que  $j > i_0, A, B \in (\mathcal{Q}_j)_0$  et

$$\text{Hom}_{\mathcal{Q}_r}(A, B) = \lim_{\substack{\longrightarrow \\ j \geq i_0}} \text{Hom}_{\mathcal{Q}_j}(A, B).$$



-  $\mathcal{Q}_r$  est petite.

-  $\mathcal{Q}_r$  est régulière : Soit  $b \in \mathcal{Q}_r$ ; on a  $b = \tau_i(b')$ , où  $i \in \mathbf{N}$  et  $b' \in \mathcal{Q}_i$ .

a) Si  $b' \notin L_i$ , il admet un conoyau scindé dans  $Ab^{\mathcal{Q}_i^*}$  et  $b$  en admet un dans  $Ab^{\mathcal{Q}_r^*}$ .

b) Si  $b' \in L_i, \psi_{i, i+1}(b')$  a un conoyau scindé dans  $\mathcal{Q}_{i+1}$  et

$$b = \tau_{i+1} \Psi_{i, i+1}(b')$$

en a un dans  $\mathcal{Q}_r$ .

Soit  $\mathcal{B}$  une catégorie préadditive ayant des conoyaux scindés,  $\Phi: \mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{B}$  un foncteur additif, on définit par récurrence au moyen de la propriété c une suite  $\Phi_i$  de foncteurs,  $\Phi_i: \mathcal{Q}_i \rightarrow \mathcal{B}$  telle que :

$$\Phi_1 = \Phi,$$

$$\Phi_{i+1} \text{ est l'unique foncteur tel que } \Phi_{i+1} \Psi_{i, i+1} = \Phi_i.$$

Par passage à la limite inductive, il existe un unique  $\theta: \mathcal{Q}_r \rightarrow \mathcal{B}$  tel que :

$$\theta \tau_i = \Phi_i \quad \forall i \in \mathbf{N}; \text{ en particulier } \theta \tau = \Phi. \blacksquare$$

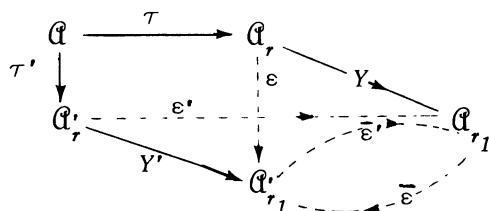
REMARQUES. 1°  $\mathcal{Q}_r$  est régulière si et seulement si  $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_r$  (si  $\mathcal{Q}$  est régulière,  $L_1 = \emptyset$ ).

2°  $\mathcal{Q}_r$  n'est pas défini à équivalence près ; cependant :

PROPOSITION 4. Si  $(\tau', \mathcal{Q}'_r)$  vérifie les conditions de la proposition 3 et si  $\mathcal{Q}'_{r_1}$  (resp.  $\mathcal{Q}'_r$ ) désigne la sous-catégorie pleine de  $Ab^{\mathcal{Q}'_r}$  (resp.  $Ab^{\mathcal{Q}'_r}$ ) dont les objets sont les projectifs de type fini,  $\mathcal{Q}'_{r_1}$  et  $\mathcal{Q}'_r$  sont

équivalentes. En particulier  $Ab\mathcal{A}_r^*$  et  $Ab\mathcal{A}'_r^*$  sont équivalentes.

DEMONSTRATION. Soit  $Y$  (resp.  $Y'$ ) le plongement canonique  $\mathcal{A}_r \rightarrow \mathcal{A}_{r_1}$  (resp.  $\mathcal{A}'_r \rightarrow \mathcal{A}'_{r_1}$ ).  $\mathcal{A}_{r_1}$  et  $\mathcal{A}'_{r_1}$  étant à conoyaux scindés, il existe  $\varepsilon$  (resp.  $\varepsilon'$ ) unique tel que  $\varepsilon\tau = Y'\tau'$  (resp.  $\varepsilon'\tau' = Y\tau$ ). Le foncteur  $\varepsilon^*$  (resp.  $\varepsilon'^*$ ) commutant avec les projectifs de type fini, sa restriction à  $\mathcal{A}_{r_1}$  (resp.  $\mathcal{A}'_{r_1}$ ) définit un foncteur  $\bar{\varepsilon}$  (resp.  $\bar{\varepsilon}'$ ) de  $\mathcal{A}_{r_1}$  dans  $\mathcal{A}'_{r_1}$  (resp. de  $\mathcal{A}'_{r_1}$  dans  $\mathcal{A}_{r_1}$ ) et  $\bar{\varepsilon}Y = \varepsilon$ ,  $\bar{\varepsilon}'Y' = \varepsilon'$ ; ainsi



$$\bar{\varepsilon}'\bar{\varepsilon}Y\tau = \bar{\varepsilon}'\varepsilon\tau = \bar{\varepsilon}'Y'\tau' = \varepsilon'\tau' = Y\tau;$$

de même  $\bar{\varepsilon}\bar{\varepsilon}'Y'\tau' = Y'\tau'$ ; par suite de la propriété universelle vérifiée par  $\tau$  (resp.  $\tau'$ ) on a

$$\bar{\varepsilon}'\bar{\varepsilon}Y = Y \quad \text{et} \quad \bar{\varepsilon}\bar{\varepsilon}'Y' = Y'.$$

$Y$  et  $Y'$  étant des épimorphismes de catégories préadditives :

$$\bar{\varepsilon}\bar{\varepsilon}' = Id_{\mathcal{A}'_{r_1}} \quad \text{et} \quad \bar{\varepsilon}'\bar{\varepsilon} = Id_{\mathcal{A}_{r_1}},$$

ce qui prouve l'équivalence annoncée. ■

COROLLAIRE. Soit  $\mathcal{A}$  une catégorie préadditive; il existe une catégorie régulière  $\mathcal{A}_r$  (définie à équivalence de sa catégorie de modules près) et un foncteur additif  $\tau: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}_r$  tels que, pour tout foncteur  $\Phi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ , où  $\mathcal{B}$  est une catégorie régulière et  $\Phi$  additif, il existe un unique foncteur additif  $\Lambda: Ab\mathcal{A}_r^* \rightarrow Ab\mathcal{B}^*$  tel que  $\Lambda\tau^* = \Phi^*$ .

### 3. Complétion universelle d'une petite catégorie.

DEFINITION. 1° Soit  $R$  un anneau unitaire; une  $R$ -algèbre est une catégorie préadditive  $\mathcal{A}$  telle que :

- a) pour tous objets  $A$  et  $B$  de  $\mathcal{A}$ ,  $Hom_{\mathcal{A}}(A, B)$  admet une structure de  $R$ -module à gauche (notée de même).

b) pour tous objets  $A, B$  et  $C$  de  $\mathcal{A}$  et tout  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(C, A)$ ,

$$\text{Hom}_{\mathcal{A}}(f, B): \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(C, B)$$

définit un homomorphisme de  $R$ -modules.

2° Si  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  sont des  $R$ -algèbres, un foncteur additif  $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  définit un *morphisme de  $R$ -algèbres* si pour tous objets  $A$  et  $B$  de  $\mathcal{A}$ , l'application de  $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B)$  dans  $\text{Hom}_{\mathcal{B}}(F(A), F(B))$  induite par  $F$  est  $R$ -linéaire.

On notera  $R\text{-Alg}$  la catégorie des morphismes de  $R$ -algèbres.

REMARQUE. Si  $\mathcal{A}$  est une  $R$ -algèbre et si  $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  est un foncteur additif dont la restriction aux objets est bijective, il existe une structure de  $R$ -algèbre sur  $\mathcal{B}$  telle que  $F$  définisse un morphisme de  $R$ -algèbres: si  $r \in R$  et  $x: B \rightarrow B'$  dans  $\mathcal{B}$ , on définit

$$r \cdot x = F(r \cdot A)x \quad \text{si } B' = F(A).$$

PROPOSITION 1. *Le foncteur d'oubli de  $R\text{-Alg}$  dans  $\text{Cat}$  admet un adjoint.*

On notera  $R?$  cet adjoint. Si  $\mathcal{A}$  est une petite catégorie,  $R\mathcal{A}$  est la  $R$ -algèbre libre sur  $\mathcal{A}$ , définie par:

$$(R\mathcal{A})_0 = \mathcal{A}_0 \quad \text{et} \quad \text{Hom}_{R\mathcal{A}}(A, B) = \bigoplus_{\text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B)} R,$$

la loi de composition étant définie de façon évidente.

On notera  $\theta_{\mathcal{A}}$  (ou  $\theta$  s'il n'y a pas de confusion possible) le foncteur injectif canonique de  $\mathcal{A}$  vers  $R\mathcal{A}$ . Si  $\phi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  est un foncteur,  $R\phi$  désignera l'unique morphisme de  $R$ -algèbres tel que  $R\phi \theta_{\mathcal{A}} = \theta_{\mathcal{B}} \phi$ .

PROPOSITION 2.  *$\theta$  reflète les limites inductives.*

DEMONSTRATION. Soit  $(\Gamma, \gamma, A)$  une limite inductive dans  $\mathcal{A}$  et  $\tau$  une transformation naturelle de  $\Gamma$  vers le foncteur constant  $\hat{B}$ . Dans  $R\mathcal{A}$ , il existe un  $\nu$  unique tel que  $\nu \theta(\gamma(i)) = \theta(\tau(i))$ ,  $\forall i \in I_0$  ( $I$  catégorie source de  $\Gamma$ ). Ce  $\nu$  s'écrit de façon unique sous la forme:

$$\nu = \sum_1^n r_j \theta(f_j), \quad \text{où } r_j \in R, \quad f_j \in \mathcal{A},$$

c'est-à-dire, pour tout objet  $i$  de  $I$ :

$$(1) \quad \sum_1^n r_j \theta(f_j \gamma(i)) = \theta(\tau(i)).$$

Par définition de  $R\mathcal{A}$ , il s'ensuit  $r_j = 0$  sauf pour l'indice  $j_0$  tel que l'on ait  $r_{j_0} = 1$ . Pour tout objet  $i$  de  $I$ , la relation (1) se réduit alors à

$$\theta(f_{j_0} \gamma(i)) = \theta(\tau(i)),$$

ce qui, joint à l'injectivité de  $\theta$ , prouve l'existence d'un unique morphisme  $f$  de  $\mathcal{A}$  tel que  $f\gamma(i) = \tau(i)$  pour tout objet  $i$  de  $I$ . ■

PROPOSITION 3.  $\theta$  préserve les limites inductives connexes.

DEMONSTRATION. Soit  $I$  une petite catégorie connexe,  $\Gamma$  un foncteur de  $I$  vers  $\mathcal{A}$  de limite inductive  $A$ , naturalisée par  $\gamma$ , et soit  $\rho$  une transformation naturelle de  $\theta\Gamma$  vers  $\theta\hat{B}$ . Pour tout objet  $i$  de  $I$ , on a

$$\rho(i) = \sum_1^{n_i} r_n^i \theta(f_n^i), \quad \text{où } f_n^i \in \mathcal{A}, \quad r_n^i \in R.$$

Si  $x \in \text{Hom}_I(i, l)$ , alors  $\rho(l)\theta(\Gamma(x)) = \rho(i)$ , c'est-à-dire

$$\sum_1^{n_l} r_n^l \theta(f_n^l) \theta(\Gamma(x)) = \sum_1^{n_i} r_n^i \theta(f_n^i);$$

$R\mathcal{A}$  étant une  $R$ -algèbre libre, il existe une bijection  $\sigma_l^i$  de  $\{1, \dots, n_i\}$  dans  $\{1, \dots, n_l\}$  telle que:

$$\left. \begin{array}{l} \text{a) } r_{\sigma_l^i(n)}^l = r_n^i \\ \text{b) } f_{\sigma_l^i(n)}^l \Gamma(x) = f_n^i \end{array} \right\} \text{ pour tout } n \in \{1, \dots, n_i\}.$$

La catégorie  $I$  étant connexe, pour tous objets  $i$  et  $l$ , il existe  $\sigma_l^i$  ou  $\sigma_i^l$ ; par suite  $n_i = N$  pour tout objet  $i$  de  $I$ . Posons

$$\tau_l^i = \begin{cases} \sigma_l^i & \text{si } \text{Hom}_I(i, l) \neq \emptyset \\ (\sigma_i^l)^{-1} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour tout  $n \leq N$  la famille  $(f_{\tau_l^i(n)}^l)_{l \in I}$  définit une transformation naturelle de  $\Gamma$  vers  $\hat{B}$  et il existe un unique  $\alpha_n^i \in \mathcal{A}$  tel que

$$\alpha_n^i \gamma(l) = f_{\tau_l^i(n)}^l \quad \text{pour tout objet } l \text{ de } I.$$

Posons  $\alpha^i = \sum_{n=1}^N r_n^i \theta(\alpha_n^i)$ ; pour tout objet  $l$  de  $I$  on obtient:

$$\begin{aligned} \alpha^i \theta(\gamma(l)) &= \sum_{n=1}^N r_n^i \theta(\alpha_n^i \gamma(l)) = \sum_{n=1}^N r_n^i \theta(f_{\tau_l^i(n)}^l) = \\ &= \sum_{n=1}^N r_{\tau_l^i(n)}^l \theta(f_{\tau_l^i(n)}^l) = \rho(l). \end{aligned}$$

Si maintenant  $\nu \theta(\gamma(l)) = \rho(l)$  pour tout objet  $l$  de  $I$ , on a

$$\begin{aligned} \nu &= \sum_{t=1}^m r_t \theta(g_t), \quad \text{où } r_t \in R, \quad g_t \in \mathcal{Q}, \text{ et} \\ \sum_{t=1}^m r_t \theta(g_t \gamma(l)) &= \sum_{t=1}^m r_t \theta(f_n^l), \end{aligned}$$

ce qui implique

$$m = N, \quad r_n = r_n^l, \quad g_n \gamma(l) = f_n^l; \quad \text{d'où } g_n = \alpha_n^i.$$

Ceci prouve que  $\nu = \alpha^i$  est indépendant de  $i$ , et la proposition en résulte. ■

Le foncteur  $\theta: \mathcal{Q} \rightarrow R\mathcal{Q}$  permet de définir un foncteur

$$\theta^*: \text{Ens } \mathcal{Q}^* \rightarrow \text{Ab } R\mathcal{Q}^*:$$

- Si  $F \in \text{Ens } \mathcal{Q}^*$ , si  $A$  et  $B$  sont des objets de  $\mathcal{Q}$  et si  $f \in R\mathcal{Q}$ , on note  $\theta^*F(A)$  le groupe sous-jacent au  $R$ -module libre sur  $F(A)$ , i.e.

$$\theta^*F(A) = \{ x = \sum_1^n r_i x_i \mid n \in \mathbb{N}, r_i \in R, x_i \in F(A) \}.$$

Si  $f \in \text{Hom}_R \mathcal{Q}(B, A)$  s'écrit  $f = \sum_1^p \mu_j f_j$ , où  $\mu_j \in R$  et  $f_j \in \mathcal{Q}$ , on pose

$$\theta^*F(f)(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p \mu_j r_i F(f_j)(x_i).$$

- Si  $\eta \in \text{Hom}_{\text{Ens } \mathcal{Q}^*}(F, G)$ , on pose

$$\theta^*(\eta)(A): \theta^*F(A) \rightarrow \theta^*G(A): \sum r_i x_i \rightsquigarrow \sum r_i \eta(A)(x_i).$$

Une vérification immédiate prouve que  $\theta^*$  est bien un foncteur satisfaisant aux propriétés suivantes:

- 1°  $\theta^*(\mathcal{Q}(\cdot, A)) = R\mathcal{Q}(\cdot, A)$ ,  $\theta^*(\mathcal{Q}(f, \cdot)) = R\mathcal{Q}(f, \cdot)$ .
- 2°  $\theta^*$  commute avec les limites inductives.
- 3°  $\theta^*$  préserve et reflète les monomorphismes.

NOTATION. Si  $\phi$  est un foncteur de la catégorie  $\mathcal{Q}$  dans la catégorie  $\mathcal{B}$ , on notera  $\phi^*$  le foncteur de  $\text{Ens } \mathcal{Q}^*$  vers  $\text{Ens } \mathcal{B}^*$  extension de Kan le long

de  $\phi$ , et  $R\phi^*$  l'extension de Kan additive de  $R\phi$ , de  $Ab^R\mathcal{Q}^*$  vers  $Ab^R\mathcal{B}^*$ .  
 Les propriétés 1 et 2 ci-dessus impliquent l'égalité:

$$(R\phi)^*\theta_{\mathcal{Q}}^* = \theta_{\mathcal{B}}^*\phi^*$$

PROPOSITION 4. Si  $R$  est un corps,  $R\phi^*$  est exact si, et seulement si,  $\phi^*$  préserve les monomorphismes.

DEMONSTRATION. - Si  $R\phi^*$  est exact, de l'égalité  $(R\phi)^*\theta_{\mathcal{Q}}^* = \theta_{\mathcal{B}}^*\phi^*$ , et de la propriété 3, on déduit que  $\theta_{\mathcal{B}}^*\phi^*$  préserve les monomorphismes, et comme  $\theta_{\mathcal{B}}^*$  les reflète,  $\phi^*$  les préserve.

- Réciproquement, il suffit de tester l'exactitude de  $R\phi^*$  sur les sous-foncteurs des foncteurs représentables de  $Ab^R\mathcal{Q}^*$  et la proposition résulte du lemme suivant.

LEMME.  $R$  étant un corps, soit  $J$  un sous-foncteur additif de  $R\mathcal{Q}(\cdot, A)$  et  $j$  le morphisme d'inclusion. Il existe un sous-foncteur  $I$  de  $\mathcal{Q}(\cdot, A)$ , dont l'inclusion  $j'$  vérifie  $\theta^*(j') = j$ .

DEMONSTRATION. Soit  $s: \bigoplus_{i \in L} R\mathcal{Q}(\cdot, A_i) \rightarrow R\mathcal{Q}(\cdot, A)$  tel que  $J = \text{Im } s$ . Si  $\sigma_i$  désigne la  $i^{\text{ème}}$  injection canonique  $R\mathcal{Q}(\cdot, A_i) \rightarrow \bigoplus_{i \in L} R\mathcal{Q}(\cdot, A_i)$ , on a  $s\sigma_i = R\mathcal{Q}(\cdot, f^i)$ , où  $f^i \in \text{Hom}_{R\mathcal{Q}}(A_i, A)$  s'écrit de façon unique

$$f^i = \sum_k^{n_i} r_k^i f_k^i \text{ où } r_k^i \in R, f_k^i \in \mathcal{Q}.$$

$$J(B) = \left\{ \sum_{i \in P} \sum_{f_i}^{n_i} r_k^i f_k^i x_i \mid x_i \in \text{Hom}_{R\mathcal{Q}}(B, A_i) \right\}$$

est un  $R$ -espace vectoriel admettant pour base

$$I_B = \{ f_k^i y_i \mid i \in L, y_i \in \text{Hom}_{\mathcal{Q}}(B, A_i) \}.$$

Si  $t \in \text{Hom}_{\mathcal{Q}}(C, B)$ , on a  $y_i t \in \text{Hom}_{\mathcal{Q}}(C, A_i)$  et, par définition de  $I_C$ ,  $f_k^i y_i t \in I_C$ . Par suite il existe un sous-foncteur  $I$  de  $\mathcal{Q}(\cdot, A)$  associant  $I_B$  à  $B$  et son morphisme d'inclusion  $j'$  vérifie  $\theta^*(j') = j$ . ■

Si  $\mathcal{Q}$  est une  $R$ -algèbre, la remarque 1 permet de voir que le problème de la  $(\mathcal{K}\text{-}Ab)$ -complétion universelle est en fait un problème universel dans  $R\text{-Alg}$ .

PROPOSITION 5. Soit  $\mathcal{A}$  une petite catégorie et  $\mathcal{K}$  une famille de cônes  $(\Gamma, \gamma, A)$  sur  $\mathcal{A}$  telle que les sources des foncteurs  $\Gamma$  soient des catégories connexes. Soit  $\phi' : R\mathcal{A} \rightarrow \tilde{R}\mathcal{A}$  une  $(\theta\mathcal{K}\text{-}Ab)$ -complétion universelle de  $R\mathcal{A}$ ; alors  $\tilde{R}\mathcal{A}$  est équivalente à une  $R$ -algèbre libre  $R\bar{\mathcal{A}}$  et  $\phi'$  est équivalent à  $R\phi$ , où  $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \bar{\mathcal{A}}$  est une  $\mathcal{K}$ -complétion universelle de  $\mathcal{A}$ .

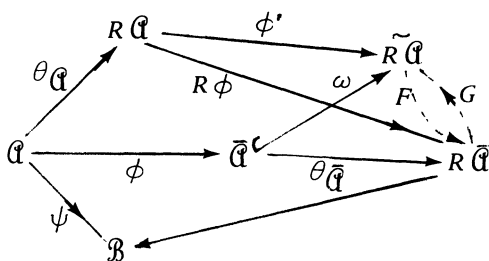
DEMONSTRATION. Soit  $\bar{\mathcal{A}}$  la plus petite sous-catégorie de  $\tilde{R}\mathcal{A}$  contenant  $\phi' \theta_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})$  et dans laquelle les images des cônes de  $\mathcal{K}$  définissent des limites inductives et  $\omega\phi = \phi' \theta_{\mathcal{A}}$  la décomposition de  $\phi' \theta_{\mathcal{A}}$  au travers de  $\bar{\mathcal{A}}$ . Par définition de la  $R$ -algèbre libre  $R\bar{\mathcal{A}}$ , il existe un  $G \in R\text{-Alg}$ , unique, tel que  $G\theta_{\bar{\mathcal{A}}} = \omega$ . D'autre part, par construction de  $\bar{\mathcal{A}}$  et vues les propositions,  $R\phi$  transforme les  $\theta_{\mathcal{A}}\mathcal{K}$ -cônes en limites inductives; il existe donc un unique  $F \in R\text{-Alg}$  tel que  $F\phi' = R\phi$ . Par suite :

$$GF\phi' \theta_{\mathcal{A}} = GR\phi \theta_{\mathcal{A}} = G\theta_{\bar{\mathcal{A}}}\phi = \omega\phi = \phi' \theta_{\mathcal{A}},$$

soit par adjonction  $GF\phi' = \phi'$  et, d'après la propriété universelle vérifiée par  $\phi'$ , on en déduit  $GF = Id_{\tilde{R}\mathcal{A}}$ . D'autre part

$$FG\theta_{\bar{\mathcal{A}}}\phi = F\omega\phi = F\phi' \theta_{\mathcal{A}} = R\phi \theta_{\mathcal{A}} = \theta_{\bar{\mathcal{A}}}\phi;$$

en utilisant la construction par récurrence de  $\bar{\mathcal{A}}$  (remarque chapitre 1), on voit que  $FG\theta_{\bar{\mathcal{A}}} = \theta_{\bar{\mathcal{A}}}$ , puis par adjonction que  $FG = Id_{R\bar{\mathcal{A}}}$ , ce qui établit la première partie de la proposition.



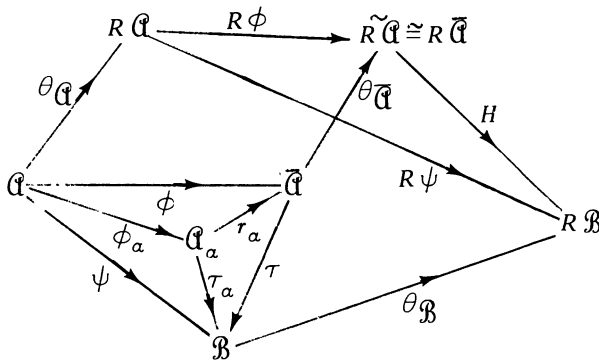
Soit maintenant  $\psi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  un foncteur transformant les cônes de  $\mathcal{K}$  en limites inductives.  $R\psi$  transformant les cônes de  $\theta_{\mathcal{A}}\mathcal{K}$  en limites inductives, il existe un unique  $H \in R\text{-Alg}$  tel que  $R\psi = HR\phi$ . On va montrer qu'il existe un unique  $\tau : \bar{\mathcal{A}} \rightarrow \mathcal{B}$  tel que

$$\tau\phi = \psi \quad \text{et} \quad H\theta_{\bar{\mathcal{A}}} = \theta_{\mathcal{B}}\tau \quad (\text{i. e. } H = R\tau),$$

ce qui, joint à la fidélité du foncteur  $R?$ , achèvera la démonstration. Sa-

chant que  $\bar{\mathcal{A}}$  est une limite inductive filtrante d'une famille  $(\mathcal{A}_\alpha, \phi_\alpha)$ , il suffit de définir pour tout ordinal  $\alpha$  un  $\tau_\alpha: \mathcal{A}_\alpha \rightarrow \mathcal{B}$  tel que

- (1)  $\tau_\alpha \phi_\alpha = \psi$ ,
- (2)  $H \theta_{\bar{\mathcal{A}}} r_\alpha = \theta_{\mathcal{B}} \tau_\alpha$  (où  $r_\alpha: \mathcal{A}_\alpha \rightarrow \bar{\mathcal{A}}$  est l'injection canonique).



Vue la définition de  $\mathcal{A}_\alpha$ , si  $\alpha'$  est un ordinal limite, il suffit même de définir  $\tau_\alpha$  pour un ordinal  $\alpha$  ayant un prédécesseur, le cas des ordinaux limites s'en déduisant par limite filtrante. Soit donc  $x \in \mathcal{A}_\alpha - \mathcal{A}_{\alpha-1}$  un générateur de  $\mathcal{A}_\alpha$ ; il existe  $(\Gamma, \gamma, A) \in \mathcal{K}$  tel que

$$x\gamma(i) = \rho(i), \quad i \in I_0 \quad (I \text{ source de } \Gamma),$$

où  $\rho$  est une transformation naturelle de source  $\phi_{\alpha-1}\Gamma$  dans  $\mathcal{A}_{\alpha-1}$ . On note alors  $\tau_\alpha(x)$  l'unique morphisme de  $\mathcal{B}$  tel que

$$\tau_\alpha(x)\psi(\gamma(i)) = \tau_{\alpha-1}(\rho(i)) \quad \text{pour tout } i \in I_0.$$

On définit ainsi un foncteur  $\tau_\alpha$  vérifiant les relations (1) et (2),  $\theta_{\mathcal{B}}$  étant un foncteur injectif qui crée et reflète les limites considérées. ■

COROLLAIRE. Soit  $\mathcal{K}$  une famille de cônes (non nécessairement connexes) sur  $\mathcal{A}$ . Les conditions suivantes sont équivalentes:

- 1°  $\phi: \mathcal{A} \rightarrow \bar{\mathcal{A}}$  est une  $\mathcal{K}$ -complétion absolue universelle de  $\mathcal{A}$ .
- 2°  $R\phi: R\mathcal{A} \rightarrow R\bar{\mathcal{A}}$  est une  $(\theta_{\mathcal{A}}\mathcal{K} \cdot Ab)$ -complétion absolue universelle de  $R\mathcal{A}$ .

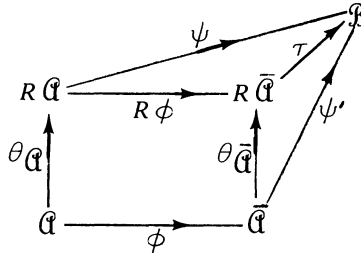
DEMONSTRATION.  $1 \Rightarrow 2$ : Les  $\phi\mathcal{K}$ -limites dans  $\bar{\mathcal{A}}$  étant absolues,  $\theta_{\bar{\mathcal{A}}}$  préserve ces limites et par suite  $R\phi$  transforme les cônes de  $\theta_{\mathcal{A}}\mathcal{K}$  en limites inductives. Pour établir l'universalité de  $R\phi$ , on considère un mor-



phisme de  $R$ -algèbres  $\psi: R\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  tel que  $\psi$  transforme les  $\theta_{\mathcal{A}}\mathcal{K}$ -cônes en limites inductives.  $\psi$  induit un unique  $\psi': \bar{\mathcal{A}} \rightarrow \mathcal{B}$  tel que  $\psi' \circ \phi = \psi \circ \theta_{\mathcal{A}}$  et par adjonction  $\psi'$  induit un unique  $\tau \in R\text{-Alg}$  tel que  $\tau \circ \theta_{\bar{\mathcal{A}}} = \psi'$ . Donc :

$$\tau R\phi \circ \theta_{\mathcal{A}} = \tau \theta_{\bar{\mathcal{A}}} \phi = \psi' \phi = \psi \theta_{\mathcal{A}}$$

et finalement, par adjonction,  $\tau R\phi = \psi$ . L'unicité de  $\tau$  résulte du fait que  $\phi$  est nécessairement un épimorphisme (par définition d'une  $\mathcal{K}$ -complétion absolue universelle), de même que  $R\phi$  (par adjonction).



2  $\Rightarrow$  1: Comme  $\theta_{\bar{\mathcal{A}}}$  reflète les limites inductives,  $\phi$  transforme les cônes de  $\mathcal{K}$  en limites inductives dans  $\bar{\mathcal{A}}$ . Pour établir que  $\phi$  est une  $\mathcal{K}$ -complétion universelle de  $\mathcal{A}$ , il suffit de remarquer que  $\bar{\mathcal{A}}$  est la plus petite sous-catégorie de  $R\bar{\mathcal{A}}$  contenant  $\phi(\mathcal{A})$  et dans laquelle les images des cônes de  $\mathcal{K}$  définissent des limites inductives, puis d'appliquer la démonstration de la proposition. Enfin, si  $F$  est un foncteur de  $\bar{\mathcal{A}}$  dans  $\mathcal{B}$ ,  $R F$  transforme les  $\theta_{\bar{\mathcal{A}}}\mathcal{K}$ -cônes en limites inductives dans  $R\mathcal{B}$  et  $\theta_{\mathcal{B}}$  reflète ces limites inductives; par suite  $F$  préserve les  $\phi\mathcal{K}$ -limites inductives. ■

La caractérisation des limites absolues et le corollaire précédent permettent d'établir:

PROPOSITION 6. Soit  $\mathcal{K}$  une famille de cônes (non nécessairement connexes) sur une petite catégorie  $\mathcal{A}$ . Les conditions suivantes sont équivalentes:

- 1°  $\mathcal{A}$  admet une  $\mathcal{K}$ -complétion absolue universelle.
- 2° Il existe une petite catégorie  $\bar{\mathcal{A}}$  et un foncteur épimorphique  $\phi$  de  $\mathcal{A}$  vers  $\bar{\mathcal{A}}$  tel que, pour tout  $F \in \text{Ens}_{\mathcal{O}}^{\mathcal{A}^*}$ , le  $\mathcal{K}$ -faisceau  $\tilde{F}$  associé à  $F$  soit isomorphe à la restriction par  $\phi$  de l'extension<sup>o</sup> de Kan  $\phi^*F$  de  $F$  le long de  $\phi$ .

DEMONSTRATION.  $1 \Rightarrow 2$ : Soit  $\phi: \mathcal{A} \rightarrow \bar{\mathcal{A}}$  une  $\mathcal{K}$ -complétion absolue universelle de  $\mathcal{A}$ ;  $\phi$  est un épimorphisme qui réalise  $Ens^{\bar{\mathcal{A}}^*}$  comme sous-catégorie pleine de la catégorie des  $\mathcal{K}$ -faisceaux sur  $\bar{\mathcal{A}}$ . L'argument de la proposition 1-4 montre qu'en fait ces catégories sont alors équivalentes ainsi que les foncteurs  $\phi_* \phi^*$  et  $\tilde{\cdot}$ .

$2 \Rightarrow 1$ : Soit  $G \in Ens^{\bar{\mathcal{A}}^*}$ ; comme  $\phi$  est épimorphique,  $\phi_* \phi^* G \simeq G$ . Ceci établit:

- a)  $\phi$  transforme les cônes de  $\mathcal{K}$  en limites dans  $\bar{\mathcal{A}}$ ,
- b) ces limites sont absolues.

Enfin, la propriété universelle résulte de celle des  $\mathcal{K}$ -faisceaux et de l'injectivité du foncteur restriction  $\phi_*$ . ■

REMARQUE. Dans cette situation la  $\mathcal{K}$ -complétée de  $\mathcal{A}$  s'obtient comme sous-catégorie pleine de la catégorie des  $\mathcal{A}$ -préfaisceaux, ce qui est inexact dans le cas général (cf. [3]).

L'étude du cas additif suggère une classe d'exemples de complétions absolues universelles: les épimorphismes « plats » de catégories :

PROPOSITION 7. Soit  $\phi: \mathcal{A} \rightarrow \bar{\mathcal{A}}$  un épimorphisme de petites catégories tel que l'extension de Kan  $\phi^*: Ens^{\bar{\mathcal{A}}^*} \rightarrow Ens^{\mathcal{A}^*}$  préserve les monomorphismes. Alors il existe une famille  $\mathcal{K}$  de cônes sur  $\mathcal{A}$  telle que  $\phi$  soit une  $\mathcal{K}$ -complétion absolue universelle de  $\mathcal{A}$ .

DEMONSTRATION. Soit  $R$  un corps. D'après la proposition 4,  $R\phi^*$  est un foncteur exact. Il s'ensuit que  $R\phi$  est un épimorphisme plat dans la catégorie des catégories préadditives. Par suite il existe une topologie  $\mathcal{F}$  sur  $R\mathcal{A}$  dont  $R\phi^*$  est le foncteur localisation associé. Si  $J \in \mathcal{F}$ ,  $J$  est un sous-foncteur d'un foncteur représentable et (lemme de la proposition 4) il existe un sous-foncteur  $I$  d'un foncteur représentable de  $Ens^{\bar{\mathcal{A}}^*}$  tel que:  $J = \theta^*(I)$ .  $I$  est lui-même limite inductive de foncteurs représentables, et en composant avec le morphisme d'inclusion  $I: \mathcal{A}(\cdot, A)$ , on obtient un cône  $(\Gamma, \gamma, A)$  sur  $\mathcal{A}$  tel que  $I = \varinjlim Y\Gamma$ . Si on effectue cette construction pour tout élément  $J$  de  $\mathcal{F}$ , on obtient une famille  $\mathcal{K}$  de cônes sur  $\mathcal{A}$  telle que  $R\phi$  soit une  $(\theta_{\mathcal{A}}\mathcal{K} \cdot Ab)$ -complétion absolue universelle de  $R\mathcal{A}$ . La proposition résulte alors du corollaire de la proposition 5. ■

**BIBLIOGRAPHIE**

1. N. BOURBAKI, *Algèbre commutative*, Hermann, Paris.
2. G. JACOB, *Catégories marquées et faisceaux* (Thèse 3<sup>e</sup> cycle), multigraphié, Paris, 1969.
3. C. EHRESMANN, Sur l'existence de structures libres et de foncteurs adjoints, *Cahiers Topo. et Géom. Diff.* IX-1 et IX-2, Paris (1967).
4. F. FOLTZ, Complétion des  $V$ -catégories, *Cahiers Topo. et Géom. Diff.*, XIV-1, Paris (1973).
5. B. MITCHELL, The dominion of Isbell, *Trans. A.M.S.* 167, Providence (1972) .
6. R. PARE, *Absoluteness properties in Category Theory* (Thesis), multigraphié, McGill University, Montreal, 1969.
7. B. MITCHELL, *Rings with several objects*, multigraphié, Dalhousie Univ., 1971.
8. M. WEIDENFELD, Idéaux d'une catégorie préadditive (Thèse 3<sup>e</sup> cycle), *Esquisses Math.* 3, Paris (1970).