JEAN-PIERRE BARTHÉLÉMY

Sur la réfutabilité

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 15, n° 1 (1974), p. 21-46

<http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1974__15_1_21_0>

CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE

Vol. XV-1

SUR LA REFUTABILITE

par Jean-Pierre BARTHELEMY

INTRODUCTION

Les catégories cartésiennes fermées apparaissent, ainsi que l'a remarqué Lambek ([13] , [14]), comme des systèmes déductifs (intuitionnistes positifs) assujettis à vérifier certaines équations. Il est donc naturel d'étudier, dans ce cadre, certaines notions de logique. Le problème examiné ici est celui de la réfutabilité .

Etant donnée une catégorie cartésienne fermée $\overline{C}$ (on désigne par $\Longleftarrow$ son foncteur exponentiel) et un objet x de C, le foncteur $\neg = x \Longleftarrow -$ définit une «négation» (voir Curry [2] et P. Destouches-Février [3], [4]). Un premier paragraphe est consacré à l'étude de ce foncteur. Il permet d'établir quelques liens entre les algèbres de Boole et les catégories cartésiennes fermées.

Le second paragraphe est consacré à la démonstration du résultat suivant:

Etant donnés une catégorie cartésienne fermée $\overline{C}$ et un ensemble F d'objets de C, il existe une catégorie cartésienne fermée $C < F >$, un objet x de $\overline{C} < F >$ et un foncteur cartésien fermé Φ, injectif sur les objets, de $\overline{C}$ vers $\overline{C} < F >$ tels que :

1° Pour tout $e \in F$, il existe une flèche f^e de $\overline{C} < F >$ et une seule de $\Phi(e)$ vers x.

2° Pour tout objet e de C et pour tout morphisme f de $\overline{C} < F >$ de $\Phi(e)$ vers x, il existe $e' \in F$ et un morphisme g de C de e vers e' tel que le triangle :

$$\begin{tikzcd}
x & & \Phi(e) \arrow[ll, "f"'] \arrow[dl, "\Phi(g)"] \\
& \Phi(e') \arrow[ul, "f^{e'}"] &
\end{tikzcd}$$

soit commutatif.

On peut interpréter ce résultat en assimilant F à une collection de propositions fausses déclaratives. Il montre qu'on peut, sans perturber le calcul de la réfutation, passer de plusieurs propositions déclarées fausses à une seule proposition déclarée fausse. En fait ce «passage» ne perturbe pas, non plus, le calcul de l'assertion.

Nous nous sommes placés dans le cadre de la théorie des ensembles de Zermelo-Fraenkel, avec l'axiome des univers. Toutefois, les résultats énoncés restent vrais si l'on «choisit CAT comme univers de discours».

D'une manière générale, les notations utilisées sont celles de [5]. En particulier, si C est une catégorie, C_0 désigne l'ensemble de ses unités et C^* sa duale. Une transformation naturelle η d'un foncteur F vers un foncteur G est représentée par un triplet (G, τ_η, F).

SOMMAIRE

1. LES FONCTEURS DE NEGATION

1.1. Rappels sur les catégories cartésiennes fermées.

Les quelques rappels que nous allons faire ont pour but d'introduire, dans les catégories cartésiennes fermées, le «point de vue du logicien». Ce point de vue est développé essentiellement dans [13] et [14].

Une *catégorie cartésienne fermée* (stricte) (en abrégé une C.C.F.) est un quadruplet

$$\bar{C}=(C,1,(\Lambda,\Pi),((\cdot\Longleftarrow e),\,\varepsilon(\cdot,e))_{e\in C_0})$$

tel que :

C.C.F 1 : C est une catégorie et 1 est un objet final de C.

C.C.F 2 : $(\cdot\Lambda\cdot)$ est un foncteur $C\times C\to C$ coadjoint, naturalisé par Π, au foncteur diagonal $\Delta(C):C\to C\times C$.

C.C.F 3 : Pour chaque unité e de C, $(\cdot\Longleftarrow e)$ est une application de C_0 dans C_0 et $\varepsilon(\cdot,e)$ une application de C_0 dans C telles que, pour toute unité e' de C, $(\varepsilon(e',e),e'\Longleftarrow e)$ soit un $\cdot\Lambda e\cdot$-éjecteur (au sens de [5]).

Nous conserverons tout au long de ce texte les notations suivantes :

1° Pour chaque unité e de C, $O(e)$ désigne l'unique morphisme de e vers $\dot{1}$.

2° Pour chaque couple (e',e) d'unités de C, on désigne par $p(e',e)$: $e'\Lambda e\to e'$ et $q(e',e):e'\Lambda e\to e$ les projections canoniques faisant de $\Pi(e',e)$ un produit naturalisé.

3° Si e,e' et e'' sont trois unités de C, pour chaque morphisme f de $e''\Lambda e$ vers e', il existe un morphisme et un seul $f_e:e''\to(e'\Longleftarrow e)$ tel que $\varepsilon(e',e).(f_e\Lambda e)=f$.

En particulier, l'application qui, au morphisme g, associe le morphisme $(g.\,\varepsilon(\alpha(g),e))_e$ définit un foncteur $C\to C$, dénoté encore $(\cdot\Longleftarrow e)$, coadjoint au foncteur $\cdot\Lambda e$.

4° Ce foncteur se prolonge en un foncteur $(\cdot\Longleftarrow\cdot):C\times C^*\to C$ défini par :

(a) $(g \Longleftarrow f) = (g \Longleftarrow \alpha(f)).(\alpha(g) \Longleftarrow f)$,

(b) pour toute unité e de C,

$$(e \Longleftarrow f) = (\varepsilon(e, \beta(f)).((e \Longleftarrow \beta(f) \Lambda f))_{\alpha(f)}.$$

5° Nous dirons qu'une unité e de C est *démontrable* s'il existe un morphisme $f : 1 \to e$.

A $\overline{C}$ est attachée une famille cohérente de transformations naturelles dont nous citons les principales (sans rappeler leur définition cf. [6]).

- *Equivalences naturelles.*

(a) $\check{1}$ de C vers $(\cdot \Longleftarrow 1)$;

(b) γ de $(1 \Lambda \cdot)$ vers C, γ' de $(\cdot \Lambda 1)$ vers C.

(c) λ de $\Longleftarrow (C \times \Lambda^*)$ vers $\Longleftarrow .(\Longleftarrow \times C^*). Z(C)$, où $Z(C)$ désigne l'isomorphisme canonique $C \times (C^* \times C^*) \to (C \times C^*) \times C^*$.

(d) λ' de $\Longleftarrow (\Longleftarrow \times C^*)$ vers $\Longleftarrow .(\Longleftarrow \times C^*). Y(C)$, où $Y(C)$ désigne l'isomorphisme canonique

$$((x, y), z) \mapsto ((x, z), y) \text{ de } (C \times C^*) \times C^* \text{ vers } (C \times C^*) \times C^*.$$

(e) $c : \Lambda(C \times C) \to \Lambda(C \times C).\Gamma(C)$, où

$$\Gamma(C) : C \times C \to C \times C : (x, y) \mapsto (y, x).$$

Lambek a donné de la définition d'une C.C.F la « version équationnelle » suivante ([14]):

- *Axiomes :* $O(e) : e \to 1$, $p(e', e) : e' \Lambda e \to e'$, $q(e', e) : e' \Lambda e \to e$, $\varepsilon(e', e) : (e' \Longleftarrow e) \Lambda e \to e'$.

- *Règles d'inférence :*

$$\frac{f : e'' \to e', \quad g : e'' \to e,}{[f, g] : e'' \to e' \Lambda e} \qquad \frac{h : e' \Lambda e \to e''}{h_e : e' \to e'' \Longleftarrow e}$$

- *Equations :* $d = O(e)$, pour $d : e \to 1$.

$p(e', e).[f, g] = f$, $\quad q(e', e).[f, g] = g$, pour $f : e'' \to e'$, $g : e'' \to e$.

$$[p(e', e).h, q(e', e).h] = h, \text{ pour } h : e'' \to e' \Lambda e.$$

$\varepsilon(e', e).[h_e . p(e'', e), q(e'', e)] = h$, pour $h : e'' \Lambda e \to (e' \Longleftarrow e) \Lambda e$.

$$(\varepsilon(e', e).[h.p(e'', e), q(e'', e)])_e = h, \text{ pour } h : e'' \to e' \Longleftarrow e.$$

Soit $\bar{C}$ et $\bar{C}'$ deux catégories cartésiennes fermées. On définit un *foncteur cartésien fermé de* $\bar{C}$ *vers* $\bar{C}'$ comme étant un triplet $(\bar{C}', \Phi, \bar{C})$ où $\Phi : C \to C'$ est un foncteur qui commute strictement avec toutes les données de $\bar{C}$ et $\bar{C}'$. Si l'on désigne par $\bar{\bar{\mathfrak{F}}}$ (resp. par $\mathfrak{F}$) la catégorie des foncteurs cartésiens fermés (resp. des foncteurs) relatifs à un univers $\mathfrak{U}$, on dira que $\bar{\bar{\mathfrak{F}}}$ est « équationnelle sur $\mathfrak{F}$ ».

1.2. Le triple de la double négation dans une catégorie cartésienne fermée pointée.

Une *catégorie cartésienne fermée pointée* (en abrégé C.C.F.P.) est un couple $(\bar{C}, x)$, où $\bar{C}$ est une C.C.F et où x est une unité de C. On note $\urcorner$ le foncteur $x \Longleftarrow - : C^* \to C$.

LEMME 1.1. *Les foncteurs* $(\urcorner - \Longleftarrow -)$ *et* $(\urcorner - \Longleftarrow -)\Gamma(C^*)$ *de* $C^* \times C^*$ *vers* C *sont naturellement équivalents.*

PREUVE. L'application associant $\tau_n(e', e) = \tau_{\lambda'}(x, e', e)$ au couple (e', e) d'unités de C définit une équivalence naturelle n de $(\urcorner - \Longleftarrow -)$ vers $(\urcorner - \Longleftarrow -)\Gamma(C^*)$ ■

PROPOSITION 1.2. $\urcorner\urcorner^*$ *est l'endofoncteur d'un triple* $\bar{N}$ *fort et commutatif sur* $\bar{C}$ (voir [11, 12]).

PREUVE. $\urcorner\urcorner^*$ est l'endofoncteur d'un triple N dont l'unité η est définie par :

$$\tau_\eta(e) = (\varepsilon(x, e) . \tau_c(e, x))_{x \Leftarrow e},$$

et la multiplication μ par :

$$\tau_\mu(e) = x \Longleftarrow \tau_\eta(x \Longleftarrow e).$$

Les égalités :

$$\mu \,\square\square\, (\eta \urcorner\urcorner^*) = \mu \,\square\square\, (\urcorner\urcorner^* \eta) = \urcorner\urcorner^*,$$

$$\mu \,\square\square\, (\mu \urcorner\urcorner^*) = \mu \,\square\square\, (\urcorner\urcorner^* \mu),$$

proviennent de la cohérence.

Pour tout couple (e', e) d'unités de C, posons

$$\tau_n(\urcorner\urcorner e, \urcorner e').(\tau_\eta(\urcorner e) \Longleftarrow \urcorner e').\tau_n(\urcorner e', e).(\tau_\eta(e') \Longleftarrow e)$$
$$= \tau_{st}(e', e).$$

$$\begin{tikzcd}
& \neg\neg e' \Leftarrow \neg\neg e & e' \Leftarrow e \arrow[l, "\tau_{st}(e',e)"'] \arrow[dr, "\tau_\eta(e')\Leftarrow e"] & \\
\neg\neg\neg e \Leftarrow e' \arrow[ur, "\tau_n(\neg\neg e,\, \neg e')"] & & & \neg\neg e' \Leftarrow e \arrow[dll, "\tau_n(\neg e',\, e)"] \\
& \neg e \Leftarrow \neg e' \arrow[ul, "\tau_\eta(\neg e)\Leftarrow \neg e'"] & &
\end{tikzcd}$$

τ_{st} définit une transformation naturelle de $-\Leftarrow-$ vers $\neg\neg^*-\Leftarrow\neg\neg^*-$ et, par cohérence, le couple $(\neg\neg^*, st)$ définit un $\bar{C}$-endofoncteur de la $\bar{C}$-catégorie $\bar{C}$.

Toujours en vertu de la cohérence, η et μ sont des $\bar{C}$-transformations naturelles; par suite $((\neg\neg^*, st), \eta, \mu)$ définit un triple fort $\bar{N}$ (strong monad cf. [10]) sur $\bar{C}$.

A st est associée la transformation naturelle t'' de $-\wedge\neg\neg^*-$ vers $\neg\neg^*(-\wedge-)$ définie par: $\tau_{t''}(e',e)=$

$$\varepsilon(\neg\neg(e'\wedge e), \neg\neg e).(\tau_{st}(e'\wedge e, e)\wedge\neg\neg e).((e'\wedge e)_e\wedge\neg\neg e).$$

$$\begin{tikzcd}
\neg\neg(e'\wedge e) & e'\wedge\neg\neg e \arrow[l, "\tau_{t''}(e',e)"'] \arrow[d, "(e'\wedge e)_e\wedge\neg\neg e"] \\
(\neg\neg(e'\wedge e)\Leftarrow\neg\neg e)\wedge\neg\neg e \arrow[u, "\varepsilon(\neg\neg(e'\wedge e),\, \neg\neg e)"] & ((e'\wedge e)\Leftarrow e)\wedge\neg\neg e \arrow[l, "\tau_{st}(e'\wedge e,\, e)\wedge\neg\neg e"]
\end{tikzcd}$$

On pose alors :

$$t' = (\neg\neg^* c)\,\square\, t''\,\square\, c(C\times\neg\neg^*).$$

t' et t'' permettent d'obtenir deux structures monoïdales Ψ et $\tilde{\Psi}$ sur N:

$$\Psi = (\mu\wedge)\,\square\,(\neg\neg^* t'')\,\square\, t'(\neg\neg^*\times\neg\neg^*),$$
$$\tilde{\Psi} = (\neg\neg^* c)\,\square\,(\Psi\Gamma(C))\,\square\,(c\neg\neg^*).$$

Et, par cohérence : $\Psi = \tilde{\Psi}$ ■

En utilisant les résultats de [12] , on obtient alors:

COROLLAIRE 1.3. *Si C est à noyaux, la catégorie d'Eilenberg-Moore C^N du triple N peut être munie d'une structure de catégorie fermée.*

1.3. Exemples et applications.

1° Soit $\overline{\mathfrak{M}}$ la structure cartésienne fermée canonique sur la catégorie $\mathfrak{M}$ des applications relatives à $\mathfrak{U}$. On se place dans le cas où $\overline{C} = \overline{\mathfrak{M}}$ et où $x = 2$. Dans ce cas $\mathfrak{M}^N$ est, comme l'a montré Guitart dans [9], isomorphe à la catégorie $\widetilde{\mathfrak{B}}$ des homomorphismes d'algèbres de Boole atomiques complètes: $\widetilde{\mathfrak{B}}$ est une catégorie fermée.

2° En général, le triple N n'est pas cartésien fermé [11] ainsi que le montre dans $(\overline{\mathfrak{M}}, 2)$ le contre-exemple: $2^{2^1} \times 2^{2^1} \neq 2^{2^{1\times 1}}$. On obtient toutefois des résultats dans cette direction lorsque $\overline{C}$ est équivalente à une algèbre de Heyting (une logique Brouwerienne selon la terminologie de [6], en convenant qu'une «algèbre de Heyting» est un ensemble ordonné cartésien fermé). En effet, sur une algèbre de Heyting, tout triple fort est cartésien fermé. Cela permet de conclure que C^N est aussi une logique Brouwerienne. On a en fait un résultat beaucoup plus fort:

PROPOSITION 1.4. *Soit* $(\overline{C}, x)$ *une* C.C.F.P. *Si* $\overline{C}$ *est une logique Brouwerienne,* C^N *est une logique classique (i.e. une catégorie équivalente à une algèbre de Boole).*

PREUVE. On se ramène au cas où $\overline{C}$ est une algèbre de Heyting. C^N est le sous-ensemble ordonné de C formé des unités e telles que $\urcorner\urcorner e = e$. Il est clair qu'alors $\urcorner$ induit une complémentation sur C^N ∎

3° On appelle *foncteur de négation* sur une C.C.F. $\overline{C}$ tout foncteur $\urcorner : C^* \to C$ tel qu'il existe une équivalence naturelle de $(\urcorner - \Longleftarrow -)$ vers $(\urcorner - \Longleftarrow -)\Gamma(C^*)$. Toute unité x de C définit le foncteur de négation $x \Longleftarrow -$. Réciproquement, tout foncteur de négation $\urcorner$ de C définit l'unité $\urcorner 1$.

Considérons les catégories $\overline{\mathfrak{F}}^p$ et $\overline{\mathfrak{F}}^m$ définies comme suit:

- Les objets de $\overline{\mathfrak{F}}^p$ sont les C.C.F.P. $(\overline{C}, x)$ relatives à $\mathfrak{U}$; les morphismes de $\overline{\mathfrak{F}}^p$ sont les triplets $((\overline{C}', x'), \Phi, (\overline{C}, x))$, où $(\overline{C}', \Phi, \overline{C})$ est un foncteur cartésien fermé tel que x' et $\Phi(x)$ sont isomorphes.
- Les objets de $\overline{\mathfrak{F}}^m$ sont les couples $(\overline{C}, \urcorner)$, où $\overline{C}$ est une C.C.F. relative à $\mathfrak{U}$ et où $\urcorner$ est un foncteur de négation sur $\overline{C}$. Les morphismes

sont les triplets $((\overline{C'}, \neg'), \Phi, (\overline{C}, \neg))$, où $(\overline{C'}, \Phi, \overline{C})$ est un foncteur cartésien fermé tel que $\Phi . \neg$ et $\neg' . \Phi^*$ sont naturellement équivalents.

PROPOSITION 1.5. *Les catégories $\overline{\mathfrak{F}}^m$ et $\overline{\mathfrak{F}}^p$ sont naturellement équivalentes.*

PREUVE. Considérons les foncteurs :

$$U : \overline{\mathfrak{F}}^m \to \overline{\mathfrak{F}}^p : ((\overline{C'}, \neg'), \Phi, (\overline{C}, \neg)) \to ((\overline{C'}, \neg' 1), \Phi, (\overline{C}, \neg 1)),$$

$$F : \overline{\mathfrak{F}}^p \to \overline{\mathfrak{F}}^m : ((\overline{C'}, x'), \Phi, (\overline{C}, x)) \to ((\overline{C'}, x' \Leftarrow' -), \Phi, (\overline{C}, x \Leftarrow - 1)),$$

$$U . F(\overline{C}, x) = (\overline{C}, x \Leftarrow 1) \quad \text{et} \quad F . U(\overline{C}, \neg) = (\overline{C}, \neg 1 \Leftarrow -);$$

x et $x \Leftarrow 1$ sont isomorphes. D'autre part, $\neg 1 \Leftarrow -$ et $\neg - \Leftarrow 1$ sont naturellement équivalents, donc $\neg 1 \Leftarrow -$ est naturellement équivalent à $\neg$. Il est clair, en outre, que ces isomorphismes induisent des équivalences naturelles : $U . F \to \overline{\mathfrak{F}}^p$, $F . U \to \overline{\mathfrak{F}}^m$ ∎

On peut donc, paradoxalement, définir les C.C.F.P. de manière «non ponctuelle». Malheureusement $\overline{\mathfrak{F}}^m$ et $\overline{\mathfrak{F}}^p$ ne sont pas équationnelles sur $\overline{\mathfrak{F}}$.

1.4. Négations intuitionnistes.

Nous dirons que la négation $\neg = x \Leftarrow -$ sur la C.C.F.P. $\overline{C}$ est *intuitionniste* lorsque x est un objet initial de $\overline{C}$, noté alors 0. (Les règles de calcul que l'on obtient se rapprochent de celles indiquées dans [3], [4] et [2], ce qui justifie la définition).

Soit $\overline{\mathfrak{F}}_p$ la sous-catégorie de $\overline{\mathfrak{F}}^p$ dont les morphismes sont les triplets $((\overline{C'}, x'), \Phi, (\overline{C}, x))$ tels que : $\Phi(x) = x'$. La catégorie $\overline{\mathfrak{F}}_p$ est équationnelle sur $\overline{\mathfrak{F}}$.

Soit $\overline{\mathfrak{F}}_i$ la sous-catégorie pleine de $\overline{\mathfrak{F}}_p$ dont les objets sont les couples $(\overline{C}, 0)$, où 0 est un objet initial de C. Considérons un objet $(\overline{C}, 0)$ de $\overline{\mathfrak{F}}_i$ fixé une fois pour toutes et désignons toujours par $N = (\neg\neg^*, \eta, \mu)$ le triple de la double négation relatif à la C.C.F.P. $(\overline{C}, 0)$. Supposons que $(\overline{C}, x)$ est une C.C.F.P. intuitionniste.

LEMME 1.6. *Pour tout couple (e', e) d'unités de C, l'ensemble $Hom(\neg e', e)$ possède au plus un élément.*

PREUVE. $Hom(\neg e', e) = Hom(0 \Leftarrow e', e)$ et $Hom(0, e' \wedge e)$ sont équipotents. Or, vu [7], dans une C.C.F. avec un objet initial 0, $Hom(0,u)$ est vide, sauf si u est isomorphe à 0, auquel cas $Hom(0,u)$ est réduit à un élément ■

PROPOSITION 1.7 (M. Szabo). *Si* $\neg$ *est une équivalence de catégories, C est une logique classique.*

PREUVE. Ceci découle immédiatement du lemme ci-dessus ■

Cette proposition montre que les catégories de Boole de [1] ne sont que les logiques classiques et rend trivial le « théorème de complétude » énoncé dans cet article.

PROPOSITION 1.8. *Le triple N est cartésien fermé et dégénéré.*

PREUVE. Soient e' et e deux unités de C et soit k un endomorphisme de $\neg\neg e \wedge \neg\neg e'$. En vertu du lemme 6, on a nécessairement:

$$p(\neg\neg e, \neg\neg e').k = p(\neg\neg e, \neg\neg e')$$

et

$$q(\neg\neg e, \neg\neg e').k = q(\neg\neg e, \neg\neg e'),$$

donc $k = \neg\neg e \wedge \neg\neg e'$. Comme N est un triple fort, on a un morphisme

$$f: \neg\neg e \wedge \neg\neg e' \to \neg\neg(e \wedge e').$$

Par ailleurs il existe un morphisme

$$g: \neg\neg(e \wedge e') \to \neg\neg e \wedge \neg\neg e'.$$

En appliquant la remarque précédente et le lemme 6, on trouve

$$f.g = \neg\neg(e \wedge e'), \quad g.f = \neg\neg e \wedge \neg\neg e'.$$

Ainsi N est cartésien fermé. En outre, toujours en appliquant le lemme 6, on voit que $\tau_\mu(e)$ est inversible pour tout e. D'où N dégénéré ■

PROPOSITION 1.9. *(i)* C^N *est isomorphe à la sous-catégorie pleine de C dont les objets sont les unités e telles que* $\tau_\eta(e)$ *est inversible.*

(ii) C^N *est équivalente à la catégorie de Kleisli* C_N *de N.*

(iii) C^N *est une logique classique.*

PREUVE. (i) et (ii) sont des conséquences immédiates du fait que N est dégénéré.

(iii) Soit $\tau_\eta^{-1}(e): \neg\neg e \to e$ et $\tau_\eta^{-1}(e'): \neg\neg e' \to e'$ deux N-algèbres et soient f et g deux morphismes de $\tau_\eta^{-1}(e)$ vers $\tau_\eta^{-1}(e')$. En vertu du lemme 6, $\tau_\eta(e').f = \tau_\eta(e).g$, donc $f=g$ et C^N est équivalente à un ensemble ordonné.

Considérons toujours deux N-algèbres $\tau^{-1}(e)$ et $\tau^{-1}(e')$. $((\neg\neg(p(e,e')), \neg\neg(q(e,e'))), \neg\neg(e\wedge e'))$ est un produit, dans C, de $(\neg\neg e, \neg\neg e')$, car $\neg\neg(e\wedge e')$ est isomorphe à $\neg\neg e \wedge \neg\neg e'$ et $\neg\neg p(e,e')$ et $\neg\neg q(e,e')$ sont les seuls morphismes de $\neg\neg(e\wedge e')$ vers $\neg\neg e$ et $\neg\neg e'$. Par suite, il existe $g: e\wedge e' \to \neg\neg(e\wedge e')$ tel que :

$$\neg\neg p(e,e').g = \tau_\eta(e).p(e,e')$$

et

$$\neg\neg q(e,e').g = \tau_\eta(e').q(e,e'),$$

et nécessairement $g = \tau_\eta(e\wedge e')$. Posons

$$f = [\tau_\eta^{-1}(e).\neg\neg p(e,e'), \tau_\eta^{-1}(e').\neg\neg q(e,e')],$$

En vertu du lemme 6 : $g.f = \neg\neg(e\wedge e')$. Par ailleurs :

$$\begin{aligned} p(e,e').f.g &= \tau_\eta^{-1}(e).\neg\neg p(e,e') \\ &= \tau_\eta^{-1}(e).\tau_\eta(e).p(e,e') = p(e,e') \end{aligned}$$

et de même $q(e,e').f.g = q(e,e')$. Donc $f.g = e\wedge e'$ et $f = \tau_\eta^{-1}(e\wedge e')$. Ainsi $e\wedge e'$ définit une N-algèbre. Il est clair en outre que $p(e',e)$ et $q(e',e)$ naturalisent $\tau_\eta^{-1}(e\wedge e')$ comme produit dans C^N.
Par ailleurs 0 définit une N-algèbre $\tau_\eta^{-1}(0)$ et on voit facilement que $\tau_\eta^{-1}(0)$ est un objet initial de C^N. De plus si à $\tau_\eta^{-1}(e): \neg\neg e \to e$, on associe la N-algèbre $\sim(\tau_\eta^{-1}(e)): \neg\neg\neg e \to \neg e$, définie par :

$$\sim(\tau_\eta^{-1}(e)) = \neg(\tau_\eta(e)),$$

on obtient une équivalence de catégories $C^{N^*} \to C^N$ et par suite C^N est à sommes finies. L'ensemble ordonné associé à C^N est un treillis complémenté.

Il reste à montrer que ce treillis est distributif. On remarque que $\neg\neg(e \Longleftarrow e') \wedge \neg\neg e'$ est isomorphe à $\neg\neg((e \Longleftarrow e') \wedge e')$. Par suite, il existe un morphisme

$$h : \neg\neg(e \Longleftarrow e') \to \neg\neg e \Longleftarrow \neg\neg e'.$$

De plus si e et e' définissent des N-algèbres,

$$k = \tau_\eta(e \Longleftarrow e').(\tau_\eta^{-1}(e) \Longleftarrow \tau_\eta(e'))$$

est un morphisme de $\neg\neg e \Longleftarrow \neg\neg e'$ vers $\neg\neg(e \Longleftarrow e')$. Toujours en vertu du lemme 6 :

$$\varepsilon(\neg\neg e \wedge \neg\neg e').((h.k) \wedge \neg\neg e') = \varepsilon(\neg\neg e \wedge \neg\neg e'),$$

d'où $h.k = \neg\neg e \Longleftarrow \neg\neg e'$. Donc $\neg\neg e \Longleftarrow \neg\neg e'$ et $\neg\neg(e \Longleftarrow e')$ sont isomorphes.

Cette remarque permet de définir une exponentiation, notée $\subset$, sur C^N (car $\tau_\eta(e \Longleftarrow e')$ est alors inversible). Par ailleurs, $\tau_\eta(0 \Longleftarrow e) = (0 \Longleftarrow \tau_\eta(e))$ et l'on a dans C^N

$$\sim(\tau_\eta^{-1}(e)) = \tau_\eta^{-1}(0) \subset \tau^{-1}(e).$$

En outre, le foncteur produit partiel sur C^N admettant un co-adjoint, il est compatible avec les limites inductives : l'ensemble ordonné relatif à C^N est un treillis distributif ∎

En particulier, si, dans C, toute unité non isomorphe à 0 est démontrable et si 0 n'est pas démontrable, C^N (et C_N) est équivalente au treillis de Boole à deux éléments. Ceci s'applique au cas où $\bar{C}$ est la C.C.F. sous-jacente à un topos bien pointé [7].

1.5. Négation intuitionniste et négation classique.

La catégorie $\bar{\mathfrak{F}}_i$ est équationnelle sur $\bar{\mathfrak{F}}_p$. On obtient en effet un objet de $\bar{\mathfrak{F}}_i$ en adjoignant à une C.C.F.P. $(\bar{C}, 0)$:

- les axiomes $i(e) : 0 \to e$,
- les équations $f = i(e)$, pour $f : 0 \to e$.

Soit $\bar{\mathfrak{F}}_\ell$ la sous-catégorie pleine de $\bar{\mathfrak{F}}_i$ dont les objets sont les couples $(\bar{C}, 0)$, où $\bar{C}$ est une logique classique. Un tel objet est obtenu en ajoutant à $(\bar{C}, 0) \in (\bar{\mathfrak{F}}_i)_0$:

- les axiomes $b(e): \neg\neg e \to e$;
- les équations $b(e).\tau_\eta(e) = e$.

Il s'ensuit que les foncteurs d'inclusion entre les catégories $\overline{\mathfrak{F}}_p$, $\overline{\mathfrak{F}}_i$ et $\overline{\mathfrak{F}}_\ell$ admettent des adjoints.

Désignons par $\mathfrak{B}$ la catégorie des homomorphismes entre algèbres de Boole relatives à $\mathfrak{U}$ et par B le foncteur canonique $\mathfrak{B} \to \overline{\mathfrak{F}}_i$. Il est clair que le foncteur canonique $\mathfrak{B} \to \overline{\mathfrak{F}}_\ell$ admet un adjoint. Par suite, B admet un adjoint.

Soit $(\bar{C}, 0) \in (\overline{\mathfrak{F}}_i)_0$. Notons $b(\bar{C})$ une algèbre de Boole équivalente à C_N (et à C^N).

PROPOSITION 1.10. *$b(\bar{C})$ est une B-structure libre au-dessus de $(\bar{C}, 0)$.*

PREUVE. Au cours de la démonstration de la proposition 1.9, nous avons construit un objet $(\bar{C}^N, 0)$ de $\overline{\mathfrak{F}}_i$, porté par C^N. Il résulte immédiatement de cette construction que les foncteurs F^N et U^N, qui factorisent le triple N à travers C^N, définissent des foncteurs cartésiens fermés. Donc si $\hat{0}$ désigne l'objet initial de $b(\bar{C})$, F^N définit un morphisme

$$\Phi : (\bar{C}, 0) \to (b(\bar{C}), \hat{0}) \text{ de } \overline{\mathfrak{F}}_i.$$

Soit A' une algèbre de Boole d'élément initial $0'$ et soit Φ' un morphisme de $\overline{\mathfrak{F}}_i$ de $(\bar{C}, 0)$ vers $(A', 0')$.

L'application qui, au morphisme $(\tau_\eta^{-1}(e'), f, \tau_\eta^{-1}(e))$ entre N-algèbres, associe $\Phi'(f)$ définit un homomorphisme entre algèbres de Boole ψ de $b(\bar{C})$ vers A' tel que $B(\psi).\Phi = \Phi'$. On vérifie facilement que ψ est l'unique homomorphisme vérifiant cette relation ■

Cette proposition traduit, en fait, le théorème de Glivenko qui affirme que P est démontrable en logique classique si et seulement si $\neg\neg P$ est démontrable en logique intuitionniste [8, 2].

2. THEORIE DE LA REFUTABILITE

2.1. Objets polynômiaux d'une catégorie cartésienne fermée.

Soit $\bar{C}$ une C.C.F. et soit x une «indéterminée» $(x \notin C)$. Introduisons deux nouveaux symboles $\bar{\Lambda}$ et $\overline{\Longleftarrow}$ et considérons la suite $(\mathbf{P}_n)$ définie par :

$$\mathbf{P}_0 = C_o \cup \{x\}.$$

$$\mathbf{P}_n = \mathbf{P}_{n-1} \cup \{(A \bar{\Lambda} B) \mid A \in \mathbf{P}_{n-1}, B \in \mathbf{P}_{n-1}\} \cup$$
$$\cup \{(A \overline{\Longleftarrow} B) \mid A \in \mathbf{P}_{n-1}, B \in \mathbf{P}_{n-1}\}.$$

On pose $\mathbf{P} = \bigcup \mathbf{P}_n$. Un élément de $\mathbf{P}$ est appelé un *objet polynômial de* C. Le nombre d'occurrences de x dans l'objet polynômial A est appelé le *degré* de A. On dit que A est *constant* s'il est de degré 0.

Sur chaque ensemble $\mathbf{P}_n$, on définit une relation d'équivalence $\mathbf{R}_n$ en posant :

$\mathbf{R}_0$ est l'égalité,

$\mathbf{R}_1$ est engendrée par

$$\mathbf{S}_1 = \{((e' \Lambda e), (e' \bar{\Lambda} e)) \mid (e', e) \in C_o \times C_o\} \cup$$
$$\{((e' \Longleftarrow e), (e' \overline{\Longleftarrow} e)) \mid (e', e) \in C_o \times C_o\}.$$

$\mathbf{R}_n$ est engendrée par

$$\mathbf{S}_n = \mathbf{R}_{n-1} \cup \{((A \bar{\Lambda} B), (A' \bar{\Lambda} B')) \mid (A, A') \in \mathbf{R}_{n-1}, (B, B') \in \mathbf{R}_{n-1}\}$$
$$\cup \{((A \overline{\Longleftarrow} B), (A' \overline{\Longleftarrow} B')) \mid (A, A') \in \mathbf{R}_{n-1}, (B, B') \in \mathbf{R}_{n-1}\}.$$

$\mathbf{R} = \bigcup \mathbf{R}_n$ est une relation d'équivalence sur $\mathbf{P}$. On désigne par $\bar{\mathbf{P}}$ le quotient $\mathbf{P}/\mathbf{R}$.

LEMME 2.1. *Soient A et B deux objets polynômiaux de $\bar{C}$ qui vérifient A et $B \in \mathbf{P}_{n-1}$, et $(A, B) \in \mathbf{R}_n$. Alors $(A, B) \in \mathbf{R}_{n-1}$.*

PREUVE. Effectuons une récurrence sur l'entier n.

1° $n = 1$. La relation $\mathbf{R}_1$ est facile à décrire. Elle identifie (à la symétrie et à l'égalité près) les éléments suivants :

$$e' \Lambda e \quad \text{et} \quad e' \bar{\Lambda} e,$$

$$e' \Longleftarrow e \text{ et } e' \overline{\Longleftarrow} e,$$

$$e' \overline{\Lambda} e \text{ et } e''' \overline{\Lambda} e'' \text{ si } e' \Lambda e = e''' \Lambda e'',$$

$$' \overline{\Longleftarrow} e \text{ et } e''' \overline{\Longleftarrow} e'' \text{ si } e' \Longleftarrow e = e''' \Longleftarrow e'',$$

$$e' \overline{\Lambda} e \text{ et } e''' \overline{\Longleftarrow} e'' \text{ si } e' \Lambda e = e''' \Longleftarrow e''$$

pour $(e, e', e'', e''') \in C_0 \times C_0 \times C_0 \times C_0$.

Il s'ensuit que deux éléments de $C_0 \cup \{x\}$ sont identifiés par par $\mathbf{R}_1$ si et seulement s'ils sont égaux, c'est-à-dire identifiés par $\mathbf{R}_0$.

2° $n > 1$. Supposons d'abord que $(A, B) \in \mathbf{S}_n$. On est alors dans l'un des cas suivants :

- $(A, B) \in \mathbf{R}_{n-1}$.
- $A = (A' \overline{\Lambda} A'')$, $B = (B' \overline{\Lambda} B'')$ avec A', A'', B', B'' dans $\mathbf{P}_{n-2}$, (A', B') et (A'', B'') dans $\mathbf{R}_{n-1}$: le résultat découle immédiatement de l'hypothèse de récurrence.
- $A = (A' \overline{\Longleftarrow} A'')$, $B = (B' \overline{\Longleftarrow} B'')$. Ce cas se traite comme le précédent.

Dans le cas général, $(A, B) \in \mathbf{R}_n$ si et seulement s'il existe une suite finie $(H_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ telle que :

$$H_i \in \mathbf{P}_{n-1},\ H_1 = A,\ H_p = B,\ H_i = H_{i+1} \text{ ou } (H_i, H_{i+1}) \in \mathbf{S}_n$$
$$\text{ou } (H_{i+1}, H_i) \in \mathbf{S}_n.$$

Montrons le lemme pour l'entier n en effectuant une récurrence sur la longueur p de la suite.

- Pour $p = 2$, on est dans le cas $(A, B) \in \mathbf{S}_n$ traité ci-dessus.
- Pour $p > 2$ on est dans l'un des cas suivants :

(a) Il existe i tel que $H_i \in \mathbf{P}_{n-1}$. En appliquant l'hypothèse de récurrence sur p, on trouve

$$(A, H_i) \in \mathbf{R}_{n-1},\ (H_i, B) \in \mathbf{R}_{n-1}.$$

Donc $(A, B) \in \mathbf{R}_{n-1}$.

(b) Pour chaque i, $H_i \notin \mathbf{P}_{n-1}$. Supposons que A est de la forme $A = (A' \overline{\Lambda} A'')$ avec $A' \in \mathbf{P}_{n-2}$, $A'' \in \mathbf{P}_{n-2}$. Puisque $H_2 \notin \mathbf{P}_{n-1}$ et (A, H_2) appartient à $\mathbf{S}_n$, on a $H_2 = (H'_2 \overline{\Lambda} H''_2)$ avec

$$H'_2 \in \mathbf{P}_{n-1},\ H''_2 \in \mathbf{P}_{n-1}, (A', H'_2) \in \mathbf{R}_{n-1},\ (A'', H''_2) \in \mathbf{R}_{n-1}.$$

En raisonnant ainsi, de proche en proche, on obtient deux suites $(H'_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ et $(H''_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ telles que :

$H'_i \in \mathbf{P}_{n-1}$, $H'_1 = A'$, $H'_p = B'$, $(H'_i, H'_{i+1}) \in \mathbf{R}_{n-1}$, $H''_i \in \mathbf{P}_{n-1}$, $H''_1 = A''$, $H''_p = B''$, $(H''_i, H''_{i+1}) \in \mathbf{R}_{n-1}$ et $B = (B' \bar{\Lambda} B'')$.

A', B', A'', B'' sont donc tels que A', B', A'' et B'' appartiennent à $\mathbf{P}_{n-2}$ et (A', B') et (A'', B'') à $\mathbf{R}_{n-1}$. Par hypothèse de récurrence (sur n), $(A', B') \in \mathbf{R}_{n-2}$, $(A'', B'') \in \mathbf{R}_{n-2}$ et, par construction, (A, B) appartient à $\mathbf{R}_{n-1}$.

Si A est de la forme $(A' \overline{\Longleftarrow} A'')$, on raisonne de la même manière en remplaçant le symbole $\bar{\Lambda}$ par $\overline{\Longleftarrow}$ ■

LEMME 2.2. *Soient A et B deux objets polynômiaux de $\bar{C}$ tels que $(A, B) \in \mathbf{R}$, $A \in \mathbf{P}_n$, $B \in \mathbf{P}_n$. Alors $(A, B) \in \mathbf{R}_n$.*

PREUVE. Soit p le plus petit entier tel que $(A, B) \in \mathbf{R}_p$. Si $p \leqslant n$, le résultat s'ensuit immédiatement. Sinon, on effectue une récurrence sur $q = p - n$:

- Si $q = 1$, on est dans les conditions du lemme 2.1.
- Si $(A, B) \in \mathbf{R}_{n+q}$, $q > 1$, de toute façon A et B appartiennent à $\mathbf{P}_{n+q-1}$ donc, toujours en vertu du lemme 2.1, $(A, B) \in \mathbf{R}_{n+q-1}$ et, par hypothèse de récurrence, $(A, B) \in \mathbf{R}_n$ ■

LEMME 2.3. *La restriction à $C_0 \cup \{x\}$ de la surjection canonique $\mathbf{P} \to \bar{\mathbf{P}}$ est injective* ■

LEMME 2.4. *Si A est un objet polynômial constant, il existe $e \in C_0$ tel que $(e, A) \in \mathbf{R}$.*

PREUVE. On effectue une récurrence sur le plus petit entier n tel que $A \in \mathbf{P}_n$.

- Si $n = 0$, nécessairement $A \in C_0$, puisque A est constant.
- Si $n > 0$, on est dans l'un des cas suivants :

(a) $A = (A' \bar{\Lambda} A'')$, ou

(b) $A = (A' \overline{\Longleftarrow} A'')$

avec $A' \in \mathbf{P}_{n-1}$ et $A'' \in \mathbf{P}_{n-1}$.

Nécessairement, A' et A'' sont constants et, par hypothèse de récurrence il existe deux unités e' et e'' de C telles que

$$(e', A') \in \mathbf{R}, \quad (e'', A'') \in \mathbf{R}.$$

Donc

$$(a) \quad ((e' \overline{\Lambda} e''), A) \in \mathbf{R}, \quad \text{ou} \quad (b) \quad ((e' \overline{\Longleftarrow} e''), A) \in \mathbf{R}.$$

Mais $((e' \overline{\Lambda} e''), (e' \Lambda e'')) \in \mathbf{R}_1$ et $((e' \overline{\Longleftarrow} e''), (e \Longleftarrow e'')) \in \mathbf{R}_1$.

Donc:

$$(a) \quad (e' \Lambda e'', A) \in \mathbf{R}, \quad \text{ou} \quad (b) \quad (e' \Longleftarrow e'', A) \in \mathbf{R} \ \blacksquare$$

LEMME 2.5. **R** *n'identifie jamais un objet polynômial constant et un objet polynômial non constant.*

PREUVE. En vertu du lemme 2.4, il suffit de démontrer que, pour chaque $(e, A) \in C_o$, si $(e, A) \in \mathbf{R}$, A est un polynôme constant, ce qu'on obtient très facilement en effectuant une récurrence sur le plus petit entier n tel que $A \in \mathbf{P}_n$ ■

LEMME 2.6. *Pour tout objet polynômial* A, *les conditions ci-dessous sont équivalentes :*

(i) $(x, A) \in \mathbf{R}$,

(ii) $A = x$.

PREUVE. Soit n le plus petit entier tel que $A \in \mathbf{P}_n$. On a alors $n > 0$ et, en vertu du lemme 2.2, $(x, A) \in \mathbf{R}_n$.

- Si $n = 1$, le résultat est évident.

- Dans le cas général, si $(x, A) \in \mathbf{S}_n$, on ne peut avoir $(x, A) \in \mathbf{R}_{n-1}$ (car $A \notin \mathbf{P}_{n-1}$) et

$$(x, A) \in \{((B' \overline{\Lambda} B''), (A' \overline{\Lambda} A''))\} \cup \{((B' \overline{\Longleftarrow} B''), (A' \overline{\Longleftarrow} A''))\}$$

est également impossible, puisque x est «atomique». D'où $(x, A) \notin \mathbf{S}_n$.

Il existe donc une suite $(H_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ telle que :

$$H_1 = x, \quad H_p = A, \quad H_i = H_{i+1} \quad \text{ou} \quad (H_i, H_{i+1}) \in \mathbf{S}_n \quad \text{ou} \quad (H_{i+1}, H_i) \in \mathbf{S}_n.$$

Le cas que nous venons d'examiner écarte $H_2 \in \mathbf{P}_{n-1}$ et, de proche en proche, on obtient $x = H_1 = H_2 = \ldots = H_p = A$ ■

LEMME 2.7. *Soient* A, B, D, E *quatre objets polynômiaux dont l'un est* *non constant.* $\mathbf{R}$ *n'identifie pas* $(A\bar{\Lambda}B)$ *et* $(D\Longleftarrow E)$.

PREUVE. Nous allons montrer que, pour tout n, $((A\bar{\Lambda}B),(D\Longleftarrow E))$ n'appartient pas à $\mathbf{R}_n$, en effectuant une récurrence sur n.

- Pour $n=1$, il suffit de se reporter à la forme explicite de $\mathbf{R}_1$ (cf. preuve du lemme 2.1).

- Supposons $n>1$. Si $((A\bar{\Lambda}B),(D\Longleftarrow E))\in\mathbf{R}_n$, d'après l'hypothèse de récurrence et la construction explicite de $\mathbf{S}_n$, le cas

$$((A\bar{\Lambda}B),(D\Longleftarrow E))\in\mathbf{S}_n$$

est à exclure. En outre, par hypothèse, l'un des objets polynômiaux A ou B est non constant. Supposons que c'est A.

Il existe une suite $(H_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ telle que :

$$H_1=A\bar{\Lambda}B,\ H_p=D\Longleftarrow E,\ H_i=H_{i+1}\ \text{ou}\ (H_i,H_{i+1})\in\mathbf{S}_n$$
$$\text{ou}\ (H_{i+1},H_i)\in\mathbf{S}_n.$$

On déduit de ce qui précède que H_2 est nécessairement de la forme $H_2'\bar{\Lambda}H_2''$ (remarquer la nécessité de l'hypothèse A non constant) et, de proche en proche, $H_i'\bar{\Lambda}H_i''=H_i$. On trouve finalement

$$((H_{p-1}'\bar{\Lambda}H_{p-1}''),(D\Longleftarrow E))\in\mathbf{S}_n \quad\text{ou}\quad ((D\Longleftarrow E),(H_{p-1}'\bar{\Lambda}H_{p-1}''))\in\mathbf{S}_n,$$

ce qui est impossible ■

On remarque que $\mathbf{R}$ est compatible avec les opérations $\bar{\Lambda}$ et $\Longleftarrow$. Si l'on note $\bar{A}$ la classe modulo $\mathbf{R}$ de $A\in\mathbf{P}$, on pourra poser:

$$(\bar{A}\bar{\Lambda}\bar{B})=\overline{(A\bar{\Lambda}B)}\ \text{et}\ (\bar{A}\Longleftarrow\bar{B})=\overline{(A\Longleftarrow B)}.$$

En outre, on pourra noter A la classe d'un élément $A\in C_0\cup\{x\}$ (lemme 2-3, 2-6).

2.2. Modèles de réfutabilité.

Une *catégorie signée* est un couple $(\bar{C},F)$ formé d'une C.C.F. $\bar{C}$ et d'une partie F de C_0. On appelle *foncteur signé* un triplet Φ_σ de la forme $((\bar{C}',F'),\Phi,(\bar{C},F))$, où Φ est un foncteur cartésien fermé de $\bar{C}$ vers $\bar{C}'$, où $(\bar{C},F)$ et $(\bar{C}',F')$ sont des catégories signées et $\Phi(F)\subset F'$.

Désignons par $\mathcal{F}_\sigma$ la catégorie des foncteurs signés relatifs à l'univers $\mathfrak{U}$. $\mathfrak{F}_\sigma$ est équationnelle sur $\overline{\mathfrak{F}}$.

Une *théorie de la réfutabilité* est un quadruplet $C_p = (\bar{C}, F, x, \check{F})$ tel que :

(TR_1) $(\bar{C}, F)$ est une catégorie signée, $(\bar{C}, x)$ est une C.C.F.P.

(TR_2) $\check{F}$ est une famille de flèches de but x de source dans F, telle que, pour tout $e \in F$, il existe un élément $\check{f}^e$ de $\check{F}$ et un seul de e vers x dans C.

(TR_3) Si $f: e \to x$ est un morphisme de C et si $e \in F$, $f = \check{f}^e$.

C_p est équationnelle sur $(\bar{C}, F)$. On l'obtient en adjoignant à $(\bar{C}, F)$:

- l'objet distingué x,
- les axiomes $\check{f}^e : e \to x$, si $e \in F$,
- les équations $f = \check{f}^e$, pour $f: e \to x$, $e \in F$.

Un *foncteur de réfutabilité* est un triplet $\Phi_p = (C'_p, \Phi_\sigma, C_p)$, où Φ_σ est un foncteur signé de $(\bar{C}, F)$ vers $(\bar{C}', F')$ tel que $\Phi(x) = x'$ et que, pour tout $e \in F$, $\Phi(\check{f}^e) = \check{f}'^{\Phi(e)}$. La catégorie $\mathfrak{F}_p$ des foncteurs de réfutabilité relative à $\mathfrak{U}$ est équationnelle sur $\mathfrak{F}_\sigma$. Le foncteur canonique $\Sigma: \mathfrak{F}_p \to \mathfrak{F}_\sigma$ admet donc un adjoint.

Si $(\bar{C}, F)$ est une catégorie signée, *un modèle de réfutabilité de* $(\bar{C}, F)$ est un couple (C'_p, Φ_σ), où $C'_p \in (\mathfrak{F}_p)_0$ et où Φ_σ est un foncteur signé de $(\bar{C}, F)$ vers $\Sigma(C'_p)$.

2.3. Le langage $\mathfrak{R}(\bar{C}, F)$.

A une catégorie signée $(\bar{C}, F)$, nous allons associer un *langage* $\mathfrak{R}(\bar{C}, F)$ (noté plus brièvement $\mathfrak{R}$, quand il n'y a pas de risque de confusion).

- Les *symboles primitifs de* $\mathfrak{R}$ sont

$$\bar{[} \;\; \bar{]}, \; : \; \bullet \; \to \bar{\Lambda} \; \overline{\Longleftarrow} \; (\;\;) \; \bar{O} \; \bar{I} \; \check{f} \; \bar{P} \; \bar{Q} \; \bar{\varepsilon} \; \sim \; x.$$

- Les *termes de* $\mathfrak{R}$ sont les éléments de $\bar{\mathbf{P}}$ (cf. 2.1).
- Les *preuves* de $\mathfrak{R}$ sont définies inductivement comme suit:

(a) Preuves de longueur *1*:

$$\bar{O}(\bar{A}): \bar{A} \to 1, \;\; \bar{I}(\bar{A}): \bar{A} \to \bar{A},$$

$\check{f}(e): e \to x$, si $e \in F$,
$f: e \to e'$, si f est un morphisme de C de e vers e',
$\bar{P}(\bar{A}, \bar{B}):(\bar{A} \bar{\wedge} \bar{B}) \to \bar{A}$, $\bar{Q}(\bar{A}, \bar{B}):(\bar{A} \bar{\wedge} \bar{B}) \to \bar{B}$,
$\bar{\varepsilon}(\bar{A}, \bar{B}):((\bar{B} \overline{\Longleftarrow} \bar{A}) \bar{\wedge} \bar{A}) \to \bar{B}$.

(b) Preuves de longueur > 1:

Si $R: \bar{A} \to \bar{B}$ et $S: \bar{B} \to \bar{C}$ sont des preuves, $(S \bullet R): \bar{A} \to \bar{C}$ est une preuve.

Si $R: \bar{C} \to \bar{A}$ et $S: \bar{C} \to \bar{B}$ sont des preuves, $\overline{[R, S]}: \bar{C} \to (\bar{A} \bar{\wedge} \bar{B})$ est une preuve.

Si $R:(\bar{C} \bar{\wedge} \bar{B}) \to \bar{A}$ est une preuve, $\tilde{R}: \bar{C} \to (\bar{A} \overline{\Longleftarrow} \bar{B})$ est une preuve.

A partir de $\mathfrak{R}$, on sait construire une Σ-structure libre au-dessus de $(\bar{C}, F)$ (cf. [13] , [14]). Il suffit pour cela de considérer la plus petite relation d'équivalence r sur l'ensemble $\mathcal{P}$ des preuves de $\mathfrak{R}$ telle que :

- r identifie les deux membres des équations d'une catégorie [14].
- r identifie les deux membres des équations supplémentaires d'une C.C.F. ([14] et 0.4).
- r identifie les deux membres des équations supplémentaires d'une théorie de la réfutabilité (2.2).
- La surjection canonique $C \to \mathcal{P}/r$ induit un foncteur signé χ_σ.

Cette Σ-structure libre sera notée $(\bar{C}<F>, F, \check{x}, \check{F})$, où $\check{F} = \{ |\check{f}(e)|, e \in F \}$ ($|P|$ désignant la classe modulo r de la preuve P).

On remarque que $(\bar{C}<\emptyset>, x>$ est une Π-structure libre au-dessus de $\bar{C}$, où Π désigne le foncteur canonique $\bar{\mathfrak{F}}^{\mathfrak{p}} \to \bar{\mathfrak{F}}$.

On dira qu'une preuve P est *indécomposable* s'il n'existe pas de preuves R et S telles que $P = R \bullet S$. Chaque preuve P admet une unique décomposition en preuves indécomposables.

LEMME 2.8. *Si $P: e \to e'$ est une preuve de $\mathfrak{R}$, il existe un morphisme $f: e \to e'$ de C tel que $(P, f) \in r$.*

PREUVE. Nous allons effectuer une récurrence sur la longueur de P.

- Si $long(P) = 1$, le résultat est trivial.
- Si $long(P) > 1$:

(a) $P=\bar{[}R,S\bar{]}$, on a alors $e'=e_1\wedge e_2$, $R:e\to e_1$, $S:e\to e_2$. Par hypothèse de récurrence, il existe k et k' dans C tels que: $(R,k)\in r$, $(S,k')\in r$. Donc $(\bar{[}R,S\bar{]},\bar{[}k,k'\bar{]})\in r$. Le résultat se déduit du fait que $(\bar{[}k,k'\bar{]},[k,k'])\in r$ ($C\to\mathcal{P}/r$ définit un foncteur cartésien fermé).

(b) $P=\tilde{R}$, alors $e'=e_1\Leftarrow e_2$, $R:e\wedge e_2\to e_1$. Par hypothèse de récurrence il existe $k\in C$ tel que $k:e\wedge e_1\to e_1$ et $(\tilde{k},P)\in r$. Or $(k_{e_2},\tilde{k})\in r$, donc $(k_{e_2},P)\in r$.

(c) $P=S\bullet R$, on peut toujours supposer que $S:\bar{A}\to e'$ est indécomposable.

Si $long(S)=1$, en vertu du lemme 2.5, $\bar{A}\in C_o$, il suffit alors d'appliquer l'hypothèse de récurrence à R et à S.

Si $long(S)>1$:

- $S=\bar{[}U,V\bar{]}$, alors $e'=e_1\wedge e_2$; $U:\bar{A}\to e_1$, $V:\bar{A}\to e_2$. Il suffit d'appliquer l'hypothèse de récurrence à $(U\bullet R)$ et $(V\bullet R)$.
- $S=\tilde{U}$, $e'=e_1\Leftarrow e_2$, $U:\bar{A}\bar{\wedge}e_2\to e_1$. Si $long(U)=1$, on trouve $\bar{A}\in C_o$ et il suffit d'appliquer l'hypothèse de récurrence à R et S. Sinon, on raisonne sur $W=U\bullet\bar{[}R\bullet\bar{P}(e,e_2),\bar{Q}(e,e_2)\bar{]}=W_1\bullet W_2$, ce qui permet de se ramener au cas d'une preuve: $W_1\bullet W_2:e\wedge e_2\to e_1$ où W_1 est indécomposable et telle que $long(W_1)\leqslant long(\tilde{U})-1$.

D'une manière précise, $long(W)=long(P)$ et $(\tilde{W},P)\in r$. Si W_1 est de la forme $\bar{[}U',V'\bar{]}$, on raisonne comme précédemment et on trouve le résultat. Si W_1 est de la forme $\tilde{U}'$, on construit $W'=(W_1'\bullet W_2')$ tel que $(\tilde{W}',W)\in r$, $long(W_1')<long(W_1)$.

En opérant ainsi, de proche en proche, on exhibe une suite

$$W^{(n)}=W_1^{(n)}\bullet W_2^{(n)},\dots,W=W_1\bullet W_2$$

telle que

$$long\ W^{(i)}=long\,W^{(i+1)},\quad long\,W_1^{(i+1)}<long\,W_1^{(i)},\quad(\tilde{W}^{(i+1)},W^{(i)})\in r$$

et $(W_1^{(n)},f)\in r$ où $f\in C$.

En appliquant l'hypothèse de récurrence à $W^{(n)}$, on voit qu'il existe $g\in C$ tel que $(W^{(n)},g)\in r$. Le résultat s'ensuit immédiatement ■

Une conséquence de ce lemme est que $e \in C_0$ est démontrable dans $\bar{C}$ si et seulement si e est démontrable dans $\bar{C}<F>$. Autrement dit, le calcul de l'assertion n'est pas perturbé par le passage de $\bar{C}$ à $\bar{C}<F>$.

2.4. Réfutabilité minimale

PROPOSITION 2.9. *Soit* $(\bar{C}, F)$ *une catégorie signée, soit* $e \in C_0$ *et soit* $P: e \to x$ *une preuve de* $\mathfrak{R}(\bar{C}, F)$. *Il existe alors une unité* $e' \in F$ *et un morphisme* $g: e \to e'$ *tel que le triangle* (T) *soit commutatif modulo* r.

$$\begin{tikzcd} x & \\ & e \arrow[ul, "P"'] \arrow[dl, "g"] \\ e' \arrow[uu, "\check{f}(e')"] & \end{tikzcd} \qquad (T)$$

PREUVE. Si P est de longueur 1, le lemme 2.5 écarte les cas suivants: $P = \bar{0}(\bar{A})$, $P = \bar{1}(\bar{A})$, $P \in C$, $P = \bar{P}(\bar{A}, \bar{B})$, $P = Q(\bar{A}, \bar{B})$, $P = \bar{\varepsilon}(\bar{A}, \bar{B})$. Il reste donc $e \in F$ et $P = \check{f}(e)$. On pose alors $e' = g = e$.

Si $long(P) > 1$, le lemme 2.6 écarte les cas $P = \overline{[R, S]}$ et $P = \tilde{R}$. Il reste donc $P = (..(R_1 \bullet \ldots \bullet R_n) \ldots)$, $R_i : \bar{A}_{i+1} \to \bar{A}_i$ avec $\bar{A}_1 = x$, $\bar{A}_{n+1} = e$, chaque R_i étant indécomposable.

Supposons que l'un des R_i est de la forme $\bar{\varepsilon}(\bar{A}, \bar{B})$, pour $i < n$. Le diagramme ci-dessous est alors commutatif modulo r:

$$\begin{tikzcd} & \bar{A}_{i+2} \Lambda \bar{B} \arrow[dl, "\bar{Q}(\bar{A}_{i+2} . \bar{B})"'] & \\ \bar{B} & (\bar{B} \Leftarrow \bar{A}) \bar{\Lambda} \bar{A} \arrow[l, "\bar{\varepsilon}(\bar{A}, \bar{B})"] & \bar{A}_{i+2} \arrow[ul, "\overline{[\bar{A}_{i+2}, \bar{\varepsilon}(\bar{A}, \bar{B}) \bullet R_{i+1}]}"'] \arrow[l, "R_{i+1}"] \end{tikzcd}$$

$\overline{[\bar{A}_{i+1}, \bar{\varepsilon}(\bar{A}, \bar{B}) \bullet R_{i+1}]}$ étant indécomposable on peut se restreindre à ne considérer que les preuves P telles que

$$(*) \begin{cases} \text{Dans la décomposition de } P \text{ en preuves indécomposables} \\ (R_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \text{, aucune preuve } R_i \text{, pour } i < n \text{, n'est de la forme} \\ \bar{\varepsilon}(\bar{A}, \bar{B}). \end{cases}$$

Nous démontrons alors la proposition en effectuant une récurrence sur la longueur d'une preuve P vérifiant $(*)$.

Le cas $long(P)=1$ ayant déjà été examiné, supposons que $long(P)>1$.

Si l'un des $\bar{A}_i$ pour $i<n+1$ appartient à C_o, il suffit d'appliquer le lemme 2.8 à $(\ldots(R_i\bullet\ldots\bullet R_n)\ldots)$ et l'hypothèse de récurrence à $(..(R_1\bullet\ldots\bullet R_{i-1})..)$. S'il existe i tel que $\bar{A}_i=x$ $(1<i\leqslant n)$, on est dans le cas où $(P,R\bullet S)\in r$ avec $S:e\to x$, $R:x\to x$ et $long(R\bullet S)=long(P)$. L'hypothèse de récurrence indique qu'il existe $y\in C$ et $e'\in F$ tels que $(S,\check{f}(e')\bullet g)\in r$. En outre, par construction de r:

$$(R\bullet\check{f}(e'),\check{f}(e'))\in r.$$

Donc $(P,\check{f}(e')\bullet g)\in r$.

On peut donc supposer que pour tout i tel que $1<i<n+1$, on a $\bar{A}_i\notin C_o\cup\{x\}$.

Moyennant cette remarque et en utilisant les lemmes 2.5 et 2.6, on trouve que R_1 est nécessairement de longueur 1 et de la forme $\bar{P}(x,\bar{A})$ ou $\bar{Q}(\bar{A},x)$. De même R_n est nécessairement de longueur >1 (le cas $R_n=\bar{\varepsilon}(\bar{A},\bar{B}),\bar{P}(\bar{A},\bar{B})$ ou $\bar{Q}(\bar{A},\bar{B})$ est donc exclu). Par suite, il existe un indice $i<n$ tel que $R_i=\bar{P}(\bar{A},\bar{B})$ ou $\bar{Q}(\bar{A},\bar{B})$ et pour tout k, $1\leqslant k\leqslant n-i$, R_{i+k} n'est ni de la forme $\bar{P}(\bar{A},\bar{B})$, ni de la forme $\bar{Q}(\bar{A},\bar{B})$.

Supposons $R_i=\bar{P}(\bar{A},\bar{B})$ (le cas $R_i=\bar{Q}(\bar{A},\bar{B})$ se traitera de manière analogue). R_{i+1} est alors nécessairement de la forme $\overline{[U,V]}$ ou $\tilde{U}$.

Si $R_{i+1}=\tilde{U}$, il existe quatre objets polynômiaux A,B,C,D tels que $(A\bar{\Lambda}B,C\Longleftarrow D)\in\mathbf{R}$, l'un de ces quatre objets étant non constant. Le lemme 2.7 indique que c'est impossible; il reste donc $R_{i+1}=\overline{[U,V]}$ avec $long(U)<long(R_{i+1})$. Or $(R_i\bullet R_{i+1},U)\in r$. On obtient ainsi une preuve P' telle que $long(P')<long(P)$ et $(P',P)\in r$. Il suffit d'appliquer à P' l'hypothèse de récurrence ■

Désignons par $|P|$ la classe modulo r d'une preuve $P\in\mathfrak{R}(\bar{C},F)$.

COROLLAIRE 2.10. *Soit* $(\bar{C},F)$ *une catégorie signée, soit* $f(x)$ *un mor-*

phisme de $C<F>$ *de* e *vers* x, *où* $e \in C_0$. *Il existe alors* $e' \in F$ *et un morphisme* g *de* e *vers* e' *tel que le triangle* (T') *soit commutatif*

$$\begin{tikzcd} x & & e \arrow[ll] \arrow[dl, "|g|"] \\ & e' \arrow[ul, "|\check{f}(e')|"] & \end{tikzcd}$$

■

Nous dirons qu'une unité e de C est *F-réfutable* s'il existe une flèche de C de source e, de but dans F.

COROLLAIRE 2.11. *Soit* $(\overline{C}, F)$ *une catégorie signée et soit* $e \in C_0$. *Les conditions ci-dessous sont équivalentes :*

(i) e *est F-réfutable dans* $\overline{C}$.

(ii) e *est* $\{x\}$*-réfutable dans* $\overline{C}<F>$.

(iii) $e \Longleftarrow e$ *est démontrable dans* $\overline{C}<F>$.

(iv) Pour tout modèle de réfutabilité (C'_p, Φ_σ) *de* $(\overline{C}, F)$, $\Phi(e)$ *est* $\{x\}$*-réfutable dans* $\overline{C'}$ *et* $x' \overset{\prime}{\Longleftarrow} \Phi(e)$ *est démontrable dans* $\overline{C'}$. ■

2.5. La réfutabilité intuitionniste.

Nous nous posons le problème suivant: «quand peut-on dire qu'il n'existe pas d'objets de C à la fois démontrable et F-réfutable?». La réponse à cette question est donnée par la proposition ci-dessous.

PROPOSITION 2.12. *Soit* $(\overline{C}, F)$ *une catégorie signée. Les conditions ci-dessous sont équivalentes :*

(i) Il n'existe pas d'unité démontrable et F-réfutable dans $\overline{C}$.

(ii) 1 *n'est pas F-réfutable dans* $\overline{C}$.

(iii) x *n'est pas démontrable dans* $\overline{C}<F>$.

(iv) Il n'existe pas d'unité démontrable et $\{x\}$*-réfutable dans* $\overline{C}<F>$.

(v) $(\overline{C}, F)$ *admet un modèle de réfutabilité* $((\overline{C'}, F', x', \check{F}'), \Phi_\sigma)$ *où* x' *est un objet initial non nul.*

PREUVE. (i) entraîne (ii): c'est clair.
(ii) entraîne (iii): c'est une conséquence immédiate du corollaire 2.11.
(iii) entraîne (iv): c'est clair.
(iv) entraîne (i); c'est une conséquence immédiate du corollaire 2.11.

Les quatre premières conditions sont donc équivalentes. Montrons que (v) entraîne (ii). Soit $((\overline{C}', F', x', \check{F}'), \Phi_\sigma)$ un modèle de réfutabilité de $(\overline{C}, F)$, où x' est un objet initial non nul de C'. $1'$ n'est alors pas $\{x'\}$-réfutable dans C'. Par ailleurs, il existe un foncteur de réfutation Ψ_p de $(\overline{C}<F>, F, x, \check{F})$ vers $(\overline{C}', F', x', \check{F}')$ tel que:

$$\Sigma(\Psi_p).\chi_\sigma = \Phi_\sigma.$$

Par suite 1 n'est pas $\{x\}$-réfutable dans $\overline{C}<F>$, donc (corollaire 2.11) 1 n'est pas F-réfutable dans C.

(ii) entraîne (v). Nous avons vu (1-5) que $\overline{\overline{\mathfrak{F}}}_{\mathfrak{p}}$ est à $\overline{\overline{\mathfrak{F}}}_i$-projections. Si l'on construit explicitement une $\overline{\mathfrak{F}}_i$-projection de $(\overline{C}, x) \in \overline{\overline{\mathfrak{F}}}_{\mathfrak{p}}$, on conserve les objets de C et on identifie les morphismes de la forme $x \to e$. Par suite, si $((\overline{C}', 0), \lambda)$ est un $(\overline{\mathfrak{F}}_i, \overline{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{p}})$-projecteur pour $(\overline{C}<F>, x)$, la restriction de λ aux unités de C induit une bijection λ_0 de C_0 vers C'_0.

On peut alors construire le modèle de réfutabilité

$$(\overline{C}', \lambda_0(F), 0, \{\lambda(|\check{f}(e)|), e \in F\}), \lambda_\sigma . \chi_\sigma)$$

de $(\overline{C}, F)$ (λ_σ étant défini de façon évidente) et si 1 n'est pas $\{x\}$-réfutable dans $\overline{C}<F>$, 0 n'est pas démontrable dans $\overline{C}'$, donc n'est pas un objet nul de C' ∎

Un modèle de réfutabilité $C'_e = ((\overline{C}', F', x', \check{F}'), \Phi_\sigma)$ de $(\overline{C}, F)$ où x' est un objet initial de C' sera dit *intuitionniste*. Si, de plus, x' n'est pas un objet nul, on dira que C_p est non dégénéré. On dira que $(\overline{C}, F)$ est de type intuitionniste si l'une des conditions de la proposition 2.2 est vérifiée. Ainsi, $(\overline{C}, F)$ n'est pas de type intuitionniste si, et seulement si, tous ses modèles intuitionnistes sont dégénérés (ces notions justifient la définition donnée en 1-4 d'une négation intuitionniste).

Désignons par $\mathfrak{F}_\iota$ la sous-catégorie pleine de $\mathfrak{F}_{\mathfrak{p}}$ dont les objets sont les modèles intuitionnistes et par I' le foncteur d'inclusion $\mathfrak{F}_\iota \to \mathfrak{F}_{\mathfrak{p}}$. Posons $I = \Sigma . I'$. $\mathfrak{F}_\iota$ étant équationnelle au-dessus de $\mathfrak{F}_{\mathfrak{p}}$, les foncteurs I, I' et Σ admettent des adjoints.

Nous désignons par $((\overline{C}_i, F, 0, F_i), \Phi_i)$ une I-structure libre au-dessus de $(\overline{C}, F)$ telle que $(C_i)_0 = C_0$ (le lecteur remarquera que le «F» est licite!). On obtient alors l'analogue du corollaire 2-11, pour les modèles intuitionnistes de catégories signées de type intuitionniste.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J.P. BARTHELEMY, Théorème de Complétude dans les catégories de Boole, Résumés du Colloque d'Amiens, *Cahiers Topo. et Géom. dif.* XIV - 2 (1973).

[2] H.B. CURRY, *Leçons de logique algébrique*, Gauthiers-Villars et Nauwelaerts, Paris et Louvain, 1952.

[3] P. DESTOUCHES-FEVRIER, *C.R.A.S.* 225 (1947), p.1241.

[4] P. DESTOUCHES-FEVRIER, *C.R.A.S.* 226 (1948), p.38.

[5] C. EHRESMANN, *Algèbre*, C.D.U., Paris, 1968.

[6] S. EILENBERG et G.M. KELLY, Closed categories, *Proc. Conf. Cat. Algebra of La Jolla*, Springer, Berlin, 1966.

[7] P. FREYD, Aspects of Topoi, *Bull. Austr. Math. Soc.* (1972), p.1-76.

[8] V. GLIVENKO, Sur quelques points de la logique de M. Brouwer, *Acad. Belg. Bull. des Sci.* 5s, 15 (1929) p.183-188.

[9] R. GUITART, *Monades involutives complémentées* (§ 8), à paraître dans Cahiers Topo. et Géom. dif.

[10] A. KOCK, Monads on symmetric monoidal closed categories, *Arch. der Math.* 2.1 (1970), p. 1-10.

[11] A. KOCK, Bilinearity and cartesian closed monads, *Math. Scand.* (1971), p. 161-174.

[12] A. KOCK, Closed categories generated by commutative monads, *J. Austr. Math. Soc.* 12 (1971), p.405-424.

[13] J. LAMBEK, Deductive systems and Categories III, *Lecture notes* 274, Springer (1972).

[14] J. LAMBEK, *Functional completeness of cartesian categories*, à paraître (1973).

E. N. S. C. M. B.
25030 BESANCON CEDEX