CAHIERS DE
TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
CATÉGORIQUES

FRANÇOISE BERQUIER

Sur la notion d'application différentiable

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 14, n° 3 (1973), p. 329-338

<http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1973__14_3_329_0>

CAHIERS DE TOPOLOGIE Vol. XIV-3
ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE

SUR LA NOTION D'APPLICATION DIFFERENTIABLE

par Françoise BERQUIER

Différentes notions de différentiabilité en un point ont été examinées dans les espaces vectoriels topologiques [1,2,3,4]. Elles sont ici généralisées au cas quasi-topologique et regroupées selon deux schémas; on étudie ensuite le lien qui existe entre ces diverses notions. Enfin, certains résultats de [3] sur la stricte différentiabilité sont étendus aux espaces quasi-topologiques. La terminologie et les notations sont celles de [6].

1. Définitions.

Soient E et E' des espaces vectoriels, et r une application de E dans E'. Pour tout réel t, nous désignerons par r_t l'application de E dans E' telle que

$$r_t(h)=r(th)/t \quad \text{si} \quad t\neq 0, \quad r_0(h)=0.$$

Etant donnée une quasi-topologie τ sur l'ensemble $\mathfrak{F}(E',E)$ de toutes les applications de E dans E', nous dirons que r est *τ-petite au sens de Lamadrid* (en abrégé (L,τ)-petite) si l'application r_t tend vers 0 dans $(\mathfrak{F}(E',E),\tau)$ lorsque t tend vers 0.

Etant données des quasi-topologies ρ sur E et τ sur l'ensemble $\mathcal{H}(E',E)$ des applications homogènes de E dans E', nous dirons que r est *(ρ,τ)-petite au sens de Michal* (en abrégé (M,ρ,τ)-petite) s'il existe une application μ de E dans $\mathcal{H}(E',E)$, quasi-continue à l'origine, de ρ vers τ et telle que

1° $\mu(0)=0$,

2° $\mu(h).h=r(h)$ pour tout $h\in E$.

Soit maintenant $\mathcal{S}$ un ensemble de filtres sur E et (E', ρ') un espace vectoriel quasi-topologique. L'ensemble $\mathcal{F}(E', E)$ sera successivement muni des quasi-topologies $\tau(\rho', \mathcal{S})$, $\tau^{\#}(\rho', \mathcal{S})$, $\tau^{K}(\rho', \mathcal{S})$, $\hat{\tau}(\rho', \mathcal{S})$ définies par

$$\phi\ \tau(\rho', \mathcal{S})\ 0 \iff \forall F \in \mathcal{S}, \quad \phi(F)\ \rho'\ 0\ ,$$
$$\phi\ \tau^{\#}(\rho', \mathcal{S})\ 0 \iff \exists \psi\ \tau(\rho', \mathcal{S})\ 0 \mid \phi \supset \psi = \mathbf{V}\psi\ ,$$
$$\phi\ \tau^{K}(\rho', \mathcal{S})\ 0 \iff \forall F \in \mathcal{S}, \quad \exists \xi \in F \mid \phi(\xi)\ \rho'\ 0\ ,$$
$$\phi\ \hat{\tau}(\rho', \mathcal{S})\ 0 \iff \exists \psi\ \rho'\ 0 \mid \forall F \in \mathcal{S}, \quad \phi(F) \supset \psi\ ,$$

où $\mathbf{V}$ désigne le filtre des voisinages de 0 dans la droite réelle $\mathbf{R}$.

Il est clair que $\tau^{\#}(\rho', \mathcal{S})$, $\tau^{K}(\rho', \mathcal{S})$ et $\hat{\tau}(\rho', \mathcal{S})$ sont plus fines que $\tau(\rho', \mathcal{S})$. L'ensemble $\mathcal{H}(E', E)$ sera muni de la quasi-topologie induite par celle de $\mathcal{F}(E', E)$, qui sera notée par le même symbole.

(E, π) et (E', π') désignent toujours des espaces vectoriels quasi-topologiques et I une quasi-bornologie [6] sur E compatible avec π (i.e. un idéal de filtres bornés pour π) telle que (E, I) soit un espace vectoriel quasi-bornologique. $\pi^{\#}$ est la quasi-topologie équable associée à π et π_I la quasi-topologie la plus fine compatible avec I (voir [6]).

DEFINITION 1. Une application f de E dans E' sera dite *X-différentiable* (resp. *X'-différentiable*) en un point x_0 de E s'il existe une application linéaire continue $f'(x_0)$ de (E, π) dans (E', π') telle que l'application r de E dans E' définie par

$$r(h) = f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0).h$$

soit (L, τ)-petite (resp. $(M, \pi^{\#}, \tau)$-petite). Le lien entre X et τ est indiqué dans le tableau 1 (pour X' on ajoute un «prime» à côté des symboles).

Dans ce tableau, $\check{\mathcal{S}}(\pi)$ est la quasi-bornologie des filtres bornés pour π, tandis que $q(\pi)$, $\check{\mathcal{B}}(\pi)$ et $\check{\mathcal{C}}(\pi)$ sont les quasi-bornologies engendrées respectivement par les filtres quasi-convergents, strictement bornés et compacts pour π; enfin, π'^{b} sera la quasi-topologie d'espace quasi-normé sur E', associée à $\check{\mathcal{B}}(\pi)$.

Tableau 1 (*)

τ	$\tau(\pi', \check{\mathfrak{S}}(\pi))$	$\tau(\pi', q(\pi))$	$\tau(\pi', \check{\mathfrak{B}}(\pi))$
X	FB	MB	$\mathfrak{B}$
τ	$\tau(\pi'^b, \check{\mathfrak{S}}(\pi^b))$	$\tau^{\#}(\pi', \check{\mathfrak{S}}(\pi))$	$\tau^K(\pi', \check{\mathfrak{S}}(\pi))$
X	$S_{\mathfrak{B}\mathfrak{B}}$	HL	KE
τ	$\tau^K(\pi'^b, \check{\mathfrak{S}}(\pi))$	$\hat{\tau}(\pi'^b, \check{\mathfrak{S}}(\pi))$	$\hat{\tau}(\pi'^b, \check{\mathfrak{B}}(\pi))$
X	$C_{\mathfrak{B}}$	$FB_{\mathfrak{B}}$	$C_{\mathfrak{B}\mathfrak{B}}$
τ	$\hat{\tau}(\pi'^b, q(\pi))$	$\hat{\tau}(\pi'^b, \check{\mathfrak{B}}(\pi)+q(\pi))$	
X	$MB_{\mathfrak{B}}$	$\mathfrak{D}_{\mathfrak{B}\mathfrak{B}}$	

2. Lien avec les définitions classiques.

Le théorème suivant montre que, dans le cas où (E, π) et (E', π') sont des espaces vectoriels topologiques, une application est X-différentiable (resp. X'-différentiable) en $x_0 \in E$ si et seulement si elle est X-différentiable (resp. X'-différentiable) au sens de la théorie classique, développée dans [1,2,3,4,5,6].

Nous prendrons (E, π), (E', π') et I comme précédemment, et r sera une application de E dans E' telle que $r(0)=0$.

THEOREME 1. *1° r est $(M, \pi^{\#}, \tau^K(\pi', \check{\mathfrak{S}}(\pi)))$-petite si et seulement si*

$$(\forall \mathfrak{X}\, \pi^{\#} 0)(\exists U \in \mathfrak{X})(\exists \psi\, \pi' 0)(\forall \eta \in \psi)(\exists U' \in \mathfrak{X})$$

$$\Big| \quad (h \in U,\ \ t \neq 0,\ \ th \in U') \Longrightarrow r_t(h) \in \eta .$$

2° r est $(L, \tau^K(\pi', \check{\mathfrak{S}}(\pi)))$-petite si et seulement si

$$(\forall \mathfrak{X}\, \pi 0)(\exists U \in \mathfrak{X})(\exists \psi\, \pi' 0)(\forall \eta \in \psi)(\exists \delta > 0)$$

$$\Big| \quad (0 < |t| \leqslant \delta,\ \ h \in U) \Longrightarrow r_t(h) \in \eta .$$

Si de plus (E', π') est équilibré, alors:

3° r est $(M, \pi^{\#}, \tau(\pi', I))$-petite si et seulement si

$$(\forall \mathfrak{X} \pi^{\#} 0)(\forall F \in I)(\exists \psi \pi' 0(\forall \eta \in \psi)(\exists U \in \mathfrak{X})(\exists \xi \in F)$$

$$\mid \quad (h \in \xi, \; t \neq 0, \; th \in U) \Rightarrow r_t(h) \in \eta .$$

4° *r est* $(M, \pi^{\#}, \tau^{\#}(\pi', \check{\mathfrak{S}}(\pi)))$*-petite si et seulement si*

$$(\forall \mathfrak{X} \pi^{\#} 0)(\exists \psi \pi' 0)(\forall \eta \in \psi)(\exists U \in \mathfrak{X})(\forall \varepsilon > 0)(\exists U' \in \mathfrak{X})$$

$$\mid \quad (h \in U, \; t \neq 0, \; th \in U') \Rightarrow r_t(h) \in \varepsilon \eta .$$

5° *r est* $(M, \pi^{\#}, \hat{\tau}(\pi', I))$*-petite si et seulement si*

$$(\forall \mathfrak{X} \pi^{\#} 0)(\exists \psi \pi' 0)(\forall F \in I)(\forall \eta \in \psi)(\exists \xi \in F)(\exists U \in \mathfrak{X})$$

$$\mid \quad (h \in \xi, \; t \neq 0, \; th \in U) \Rightarrow r_t(h) \in \eta .$$

6° *r est* $(L, \tau^{\#}(\pi', \check{\mathfrak{S}}(\pi)))$*-petite si et seulement si*

$$(\forall \mathfrak{X} \pi 0)(\exists \psi \pi' 0)(\forall \eta \in \psi)(\exists U \in \mathfrak{X})(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)$$

$$\mid \quad (|t| \leqslant \delta, \; h \in U) \Rightarrow r_t(h) \in \varepsilon \eta .$$

3. Relations entre les diverses notions de différentiabilité.

Nous noterons $X \to Y$ pour signifier que toute application X-différentiable est Y-différentiable, et l'écriture $X \underset{(C)}{\dashrightarrow} Y$ signifiera que la condition (C) est suffisante pour que $X \to Y$.

Reprenons les hypothèses du paragraphe 2.

THEOREME 2. *a) Si r est* $(M, \pi_I, \tau(\pi', I))$*-petite, alors r est* $(L, \tau(\pi', I))$*-petite.*

b) Si (E', π') *est équilibré, et si r est* $(L, \tau(\pi', I))$*-petite, alors r est* $(M, \pi_I, \tau(\pi', I))$*-petite.*

COROLLAIRE.

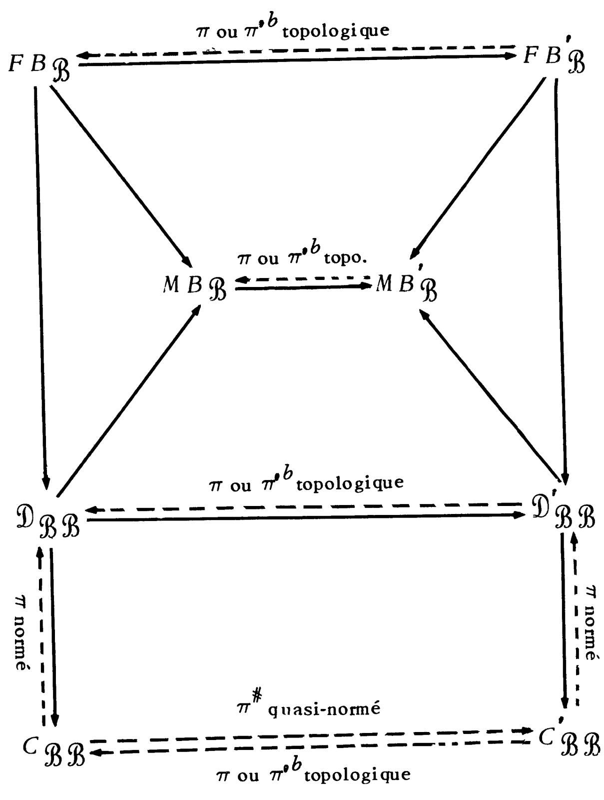
$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
{}^{S}\mathfrak{B}\mathfrak{B} \arrow[r] \arrow[d, dashed, shift left, "\pi^{\#} \text{ quasi-normé}"] & \mathfrak{B} \arrow[r, dashed, shift left, "\pi \text{ normé}"] \arrow[d, dashed, shift left, "\pi' \text{ équilibré } \pi^{\#} \text{ quasi-normé et}"] & FB \arrow[l, shift left] \arrow[r] \arrow[d, dashed, shift left, "\pi' \text{ équilibré}"] & MB \arrow[d, dashed, shift left, "\pi' \text{ équilibré}"] \\
{}^{S}\mathfrak{B}\mathfrak{B}' \arrow[r] \arrow[u, shift left] & \mathfrak{B}' \arrow[r, dashed, shift right, "\pi \text{ normé}"'] \arrow[u, shift left] & FB' \arrow[l, shift right] \arrow[r] \arrow[u, shift left] & MB' \arrow[u, shift left]
\end{tikzcd}$$

THEOREME 3. *a) Si* (E', π') *est équilibré, et si* r *est* $(L, \hat{\tau}(\pi', I))$*-petite, alors* r *est* $(M, \pi_I, \hat{\tau}(\pi', I))$*-petite.*

b) Si (E, π) *est topologique, et si* r *est* $(M, \pi^{\#}, \hat{\tau}(\pi', I))$*-petite, alors* r *est* $(L, \hat{\tau}(\pi', I))$*-petite.*

c) Si (E', π') *est topologique, et si* r *est* $(M, \pi_I, \hat{\tau}(\pi', I))$*-petite, alors* r *est* $(L, \hat{\tau}(\pi', I))$*-petite.*

COROLLAIRE.



Nous obtenons enfin les trois théorèmes suivants et leur corollaire:

THEOREME 4. *a) Si* (E', π') *est équilibré, et si* r *est* $(L, \tau^{K}(\pi', I))$*-petite, alors* r *est* $(M, \pi_I, \tau^{K}(\pi', I))$*-petite.*

b) Si (E, π) *est normé et si* r *est* $(M, \pi^{\#}, \tau^{K}(\pi', \check{\mathfrak{S}}(\pi)))$*-petite, alors* r *est* $(L, \tau^{K}(\pi', \check{\mathfrak{S}}(\pi)))$*-petite.*

COROLLAIRE.

$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
C_{\mathfrak{B}} \arrow[r, shift right] \arrow[d, shift left] & C'_{\mathfrak{B}} \arrow[l, dashed, shift right, "\pi \text{ normé}"'] \arrow[d, shift right] \\
KE \arrow[u, dashed, shift left, "\pi' \text{ quasi-normé}"] \arrow[r, dashed, shift left, "\pi' \text{ équilibré}"] & KE' \arrow[u, dashed, shift right, "\pi' \text{ quasi-normé}"'] \arrow[l, dashed, shift left, "\pi \text{ normé}"]
\end{tikzcd}
$$

THEOREME 5. *a) Si* (E',π') *est équilibré, et si* r *est* $(L,\tau^{\#}(\pi',I))$*-petite, alors* r *est* $(M,\pi_I,\tau^{\#}(\pi',I))$*-petite.*

b) Si (E,π) *est normé et si* r *est* $(M,\pi^{\#},\tau^{\#}(\pi',\check{\mathfrak{S}}(\pi)))$*-petite, alors* r *est* $(L,\tau^{\#}(\pi',\check{\mathfrak{S}}(\pi)))$*-petite.*

COROLLAIRE. $HL \underset{\pi \text{ normé}}{\overset{\pi' \text{ équilibré}}{\rightleftarrows}} HL'$.

Quelques autres implications:

THEOREME 6. *a) On a* $C_{\mathfrak{B}\mathfrak{B}} \to S_{\mathfrak{B}\mathfrak{B}}$ *et* $C'_{\mathfrak{B}\mathfrak{B}} \to S'_{\mathfrak{B}\mathfrak{B}}$.

b) Si (E',π') *est équable, alors* $KE \to HL$ *et* $KE' \to HL'$.

c) Si (E,π) *est topologique, alors* $C'_{\mathfrak{B}} \to FB'_{\mathfrak{B}}$ *et* $C_{\mathfrak{B}} \to FB_{\mathfrak{B}}$.

REMARQUES.

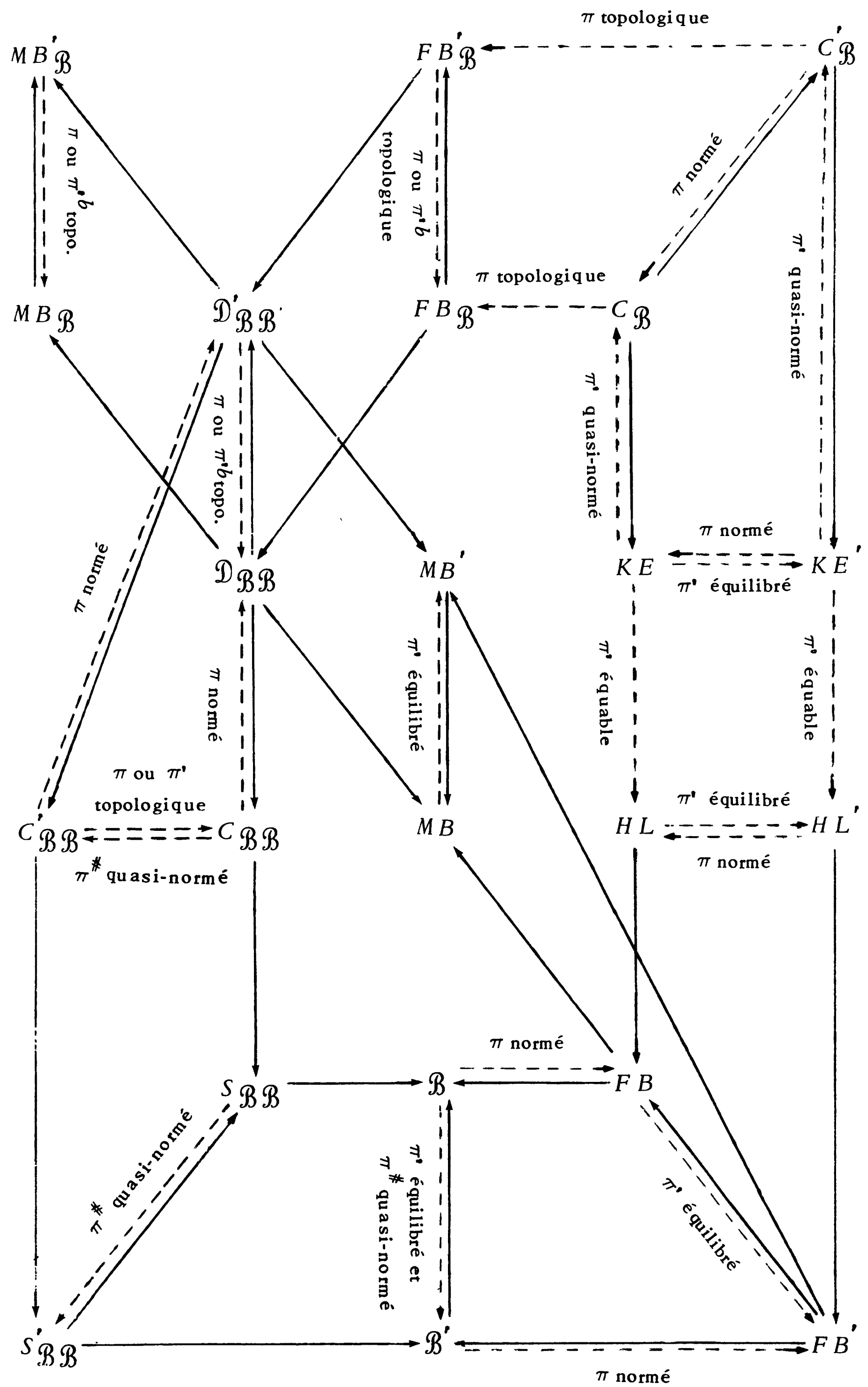
1° D'autres implications résultent immédiatement des définitions:

$$\mathfrak{D}_{\mathfrak{B}\mathfrak{B}} \to MB \quad \text{et} \quad \mathfrak{D}'_{\mathfrak{B}\mathfrak{B}} \to MB',$$

$$HL \to FB \quad \text{et} \quad HL' \to FB'.$$

2° Si (E',π') est pseudo-topologique, la MB-différentiabilité peut être obtenue indifféremment par le schéma de Lamadrid ou de Michal, pour la quasi-topologie $\tau(\pi',\check{\mathfrak{C}}(\pi))$ sur $\mathfrak{F}(E',E)$.

Nous avons réuni toutes ces implications dans le tableau 2 suivant:


π topologique
MB'𝔅
FB'𝔅
C'𝔅
π ou π'b topo.
π ou π'b
topologique
π normé
π' quasi-normé
π topologique
MB𝔅
𝔇'𝔅𝔅'
FB𝔅
C𝔅
π ou π'b topo.
π' quasi-normé
π normé
𝔇𝔅𝔅
MB'
KE
KE'
π' équilibré
π normé
π' équilibré
π' équable
π' équable
π ou π'
topologique
C'𝔅𝔅
C𝔅𝔅
π# quasi-normé
MB
π' équilibré
HL
HL'
π normé
π normé
S𝔅𝔅
𝔅
FB
π# quasi-normé
π' équilibré et
π# quasi-normé
π' équilibré
S'𝔅𝔅
𝔅'
FB'
π normé

4. Applications strictement différentiables.

Nous conserverons les notations du n° 1 et de [6], et supposerons de plus (E', π') séparé. L'espace de toutes les applications linéaires quasi-continues de (E, π) vers (E', π') sera noté $\mathfrak{L}(E', E)$.

DEFINITION 2. L'application f sera dite *strictement différentiable en* x_0 si, dans un voisinage de x_0 pour la topologie τ_π associée à π, on peut mettre f sous la forme

$$f(x+h) = f(x) + f'(x_0).h + R(x, h),$$

où $f'(x_0) \in \mathfrak{L}(E', E)$, et où R vérifie la condition:

Si $\tilde{R}$ désigne l'application de $\mathbf{R} \times E$ dans $\mathfrak{F}(E', E)$ qui, au couple (t, x), fait correspondre l'application $\tilde{R}(t, x)$ de E dans E' définie par

$$\tilde{R}(t, x).h = R(x, th)/t \quad \text{si} \quad t \neq 0, \quad \tilde{R}(0, x) = 0,$$

alors $\tilde{R}$ est quasi-continue au point $(0, x_0)$ de $\pi_{\mathbf{R}} \times \pi$ vers $\tau(\pi', I)$.

Il est clair que, si f est strictement différentiable en x_0, alors f est différentiable en x_0 au sens de [6].

Rappelons [6] qu'une application f est dite *faiblement différentiable en* x_0 si l'on a

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0).h + r(h),$$

où $f'(x_0) \in \mathfrak{L}(E', E)$ et où r_t tend vers 0, lorsque t tend vers 0, pour la topologie de la convergence simple sur $\mathfrak{F}(E', E)$.

Elle est dite *B-différentiable en* x_0 si elle est différentiable sur un voisinage W de x_0 pour τ_π et si l'application Df de W dans $\mathfrak{L}(E', E)$, qui à x associe $f'(x)$, est quasi-continue en x_0, de π vers $\tau(\pi', I)$.

THEOREME 7. *Supposons (E', π') régulier. Si f est strictement différentiable en x_0 et faiblement différentiable sur un voisinage de x_0 dans τ_π, alors Df est quasi-continue en x_0, de π vers $\tau(\pi', I)$.*

REMARQUE. Si en particulier (E', π') est admissible, les hypothèses du théorème 7 permettent de conclure que f est B-différentiable en x_0.

THEOREME 8. *Supposons (E', π') admissible. Si f est faiblement différentiable au voisinage de x_0 et si Df est quasi-continue en x_0, alors f est strictement différentiable en x_0.*

REMARQUE. Si f est B-différentiable en x_0, elle est faiblement différentiable au voisinage de x_0 et Df est quasi-continue en x_0 ; donc dans le cas où (E', π') est admissible, toute application B-différentiable en x_0 est strictement différentiable en x_0.

Ainsi, lorsque (E', π') est admissible, une application est B-différentiable en x_0 si et seulement si elle est faiblement différentiable au voisinage de x_0 et strictement différentiable en x_0.

(*) Les notions de différentiabilité indiquées dans le tableau 1 ont été considérées par les auteurs suivants:

Lamadrid 1955 Silva 1956	$\mathfrak{B}$
Michal 1938 Bastiani 1962	MB
Fischer 1957 Lang 1962 Binz 1966	HL
Keller 1964 Ver Eecke 1967	KE
Silva 1956	$S\mathfrak{B}\mathfrak{B}$

Soukhinine 1969	$C\mathfrak{B}$ $C\mathfrak{B}\mathfrak{B}$
Soukhinine 1971	$\mathfrak{D}\mathfrak{B}\mathfrak{B}$
Soukhinine 1973	$FB\mathfrak{B}$ $MB\mathfrak{B}$

Bibliographie.

1. V.I. AVERBOUCH. O.G. SMOLIANOV, Compléments au livre de Frölicher-Bucher, *M. «Mir»* 1970.

2. V.I. AVERBOUCH. O.G. SMOLIANOV, The various definitions of the derivative in linear topological spaces, *Russian Math. Surveys* 23 (1968) n° 4, 67 - 113.

3. H.H. KELLER, *Differential Calculus in locally convex spaces* (multigraphié) Zürich, 1973.

4. M.F. SOUKHININE, Quelques théorèmes de fonctions implicites dans les espaces vectoriels topologiques, *Ouspekhi Mat. Naouk,* Tome XXVIII-1 (169), 1973.

5. V.I. AVERBOUCH. O.G. SMOLIANOV, Différentiation et quasi-topologie, *Viestnik Mosk. Oun. Mat. Mekh.*, 1972, n° 1.

6. F. BERQUIER, Calcul différentiel dans les espaces quasi-bornologiques, *Esquisses Math. 20,* Paris, 1973 (Thèse Paris 1973).

Faculté des Sciences
33 rue Saint-Leu
80039 AMIENS Cedex.