CAHIERS DE
TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
CATÉGORIQUES

Colloque sur l'algèbre des catégories. Amiens-1973. Résumés des conférences

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 14, nº 2 (1973), p. 153-223

<http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1973__14_2_153_0>

CAHIERS DE TOPOLOGIE
ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE

Vol. XIV-2

COLLOQUE SUR L'ALGEBRE DES CATEGORIES

AMIENS - 1973

RESUMES DES CONFERENCES

INTRODUCTION

Ce Colloque, organisé par l'équipe de recherche «Théorie et Applications des Catégories» (T. A. C.), s'est déroulé à la Faculté des Sciences d'Amiens, du 9 au 13 Juillet 1973. Il a réuni une cinquantaine de participants, venus des pays les plus divers: Australie, Canada, Etats-Unis, Europe.

En 5 jours, 28 conférences ont eu lieu; comme elles ont souvent duré plus que le temps prévu (une demi-heure à une heure), 5 chercheurs de l'équipe T. A. C., dont les conférences étaient inscrites au programme initial, ont renoncé à parler. Enfin, deux conférenciers attendus, M. Kock et Mme Preller, n'ont pu venir à Amiens par suite d'empêchements de dernière heure.

On trouvera dans les pages suivantes les résumés de ces conférences, et deux fascicules ultérieurs des «Cahiers» seront consacrés à la publication de textes développés (y compris les articles promis par MM. Joyal, Kock et Ulmer, dont les résumés ne sont pas parvenus à temps).

Le dynamisme actuel de la Théorie des Catégories s'est manifesté par la variété des sujets abordés. Bien qu'une telle classification soit très contestable, nous essayons de regrouper ci-dessous les conférences d'après leurs thèmes principaux.

Topoï:

- Topoï élémentaires: Joyal, Wraith, Mikkelsen, Tierney, Osius.
- Généralisations: Barthélémy, Penon.

Catégories enrichies.

- Catégories internes: Joyal, Wraith, Bastiani, Tierney.
- Catégories monoïdales: Voréadou, Kelly, Chartrelle, Variot.
- **V**-catégories: Borceux, Lindner, Lavendhomme.
- 2-catégories: Kelly, Bourn, Gray, A. Burroni, Kock, Variot.
- Catégories additives: Baumgartner, Dartois.

Structures algébriques.

- Esquisses: Bastiani, Lair.
- Structures 2-algébriques: Kelly, Gray, A. Burroni.
- Autres notions: E. Burroni, Guitart, Coppey, Wischnewsky.

Catégories et notions topologiques.

- Objets connexes: Hoffmann, Tanré.
- Faisceaux: Ulmer.
- Catégories topologiques: Lengagne, Ehresmann.

Applications des Catégories

- à la Logique: Joyal, Barthélémy, Osius.
- aux Automates: E. Burroni, Guitart.
- à l'Algèbre homologique: Kleisli, Hilton.
- à la Théorie de la mesure: Riguet, Lengagne.
- à la Géométrie différentielle: Ehresmann.

Avant de terminer cette introduction, nous tenons à remercier:

- Les participants, qui ont accepté de venir, bien que nous n'ayions pu envoyer les invitations que très tardivement.

- Tous ceux qui nous ont aidés à recevoir les invités: M^{mes} Bednarz et Leblond, MM. Cordier et Largillier, et plus particulièrement, MM. Chartrelle, Boidin et Tanré (qui ont été tous les trois sans cesse sur la brèche avant, pendant et après le Colloque, pour toutes sortes de tâches), M. Lair (qui a organisé un pique-nique à Faucoucourt le 14 Juillet) et aussi M^{elle} Normand et M. Schimel (deux jeunes étudiants qui, avec beaucoup de gentillesse, nous ont rendu d'innombrables services pendant toute la durée du Colloque).

- L'Université de Picardie, qui a entièrement et généreusement financé ce Colloque, en particulier M. le Président D. Taddéi ainsi que M. A. Chevalier, Directeur du Département de Mathématiques, qui a offert de compléter les crédits de recherche de l'équipe T. A. C. pour faciliter l'organisation de ce Colloque.

- Enfin, M. Bonvalet, Recteur de l'Académie d'Amiens, qui nous a encouragés et qui a accueilli lui-même les participants à la réception qu'il a offerte au Rectorat.

A. Bastiani et C. Ehresmann

THEOREME DE COMPLETUDE DANS LES CATEGORIES DE BOOLE

par Jean-Pierre BARTHELEMY

Une catégorie de Boole est un quadruplet

$$\mathbf{C} = (C, T, (\wedge, \pi), (\ulcorner, \varepsilon)),$$

où C est une catégorie, T un objet final de C,

$\wedge$ un foncteur de $C \times C$ vers C, coadjoint (naturalisé par π) du foncteur diagonal $C \to C \times C$,

$\ulcorner$ un foncteur de la duale C^* dans C et ε une application de $C_0 \times C_0$ dans $\underline{C}$ telle que $(\varepsilon(e', e), \ulcorner . \wedge(\ulcorner(e'), e))$ soit un $\wedge(\cdot, e)$-éjecteur pour tout couple (e', e) d'unités de C.

On montre facilement que, sous ces hypothèses, $\ulcorner$ est une équivalence de catégories de C^* vers C. Par suite, C est à sommes finies et C possède un objet initial.

La catégorie $\mathbf{b} = (1 \longleftarrow 0)$ est munie canoniquement d'une (unique) structure de catégorie de Boole (les foncteurs $\wedge$ et $\ulcorner$ sont donnés par les tables de vérité usuelles).

Un *foncteur de Boole* de $\mathbf{C}$ vers une catégorie de Boole $\mathbf{C}'$ est un triplet $(\mathbf{C}', \phi, \mathbf{C})$, où ϕ est un foncteur de C vers C' qui commute (strictement) avec toutes les «données» de $\mathbf{C}$ et de $\mathbf{C}'$. On désigne par $\mathcal{F}_B$ la catégorie des foncteurs de Boole, et on définit dans $\mathcal{F}_B$ les notions de sous-catégorie de Boole et de sous-catégorie de Boole engendrée. L'étude de cette dernière notion montre, par application du théorème d'existence de structures libres (Ehresmann), que le foncteur canonique de $\mathcal{F}_B$ vers la catégorie $\mathcal{F}$ des foncteurs admet un adjoint. Cet adjoint peut se construire explicitement en adaptant, au cas booléen, une idée de Lambek (Deductive Systems and Categories III, *Lecture Notes* 274, 1972, pp. 60-65).

Etant données une catégorie de Boole $\mathbf{C}$ et une sous-catégorie C' de C, la catégorie des *C'-déductions de* $\mathbf{C}$ est la sous-catégorie de Boole $D(\mathbf{C}, C')$ de $\mathbf{C}$ engendrée par $\underline{C}' \cup C_0$.

Un *C'-test sur* $\mathbf{C}$ est un foncteur de $D(\mathbf{C}, C')$ vers $\mathbf{b}$ qui définit un foncteur de Boole. Une unité e de C est une *C'-tautologie* (resp. est *C'-démontrable)* si, pour tout C'-test ϕ sur $\mathbf{C}$, on a $\phi(e) = 1$ (resp. s'il existe une C'-déduction de T vers e). On obtient ainsi deux sous-ensembles $Taut(\mathbf{C}, C')$ et $Dem(\mathbf{C}, C')$ de C_0 et on montre que

$$Taut(\mathbf{C}, C') = Dem(\mathbf{C}, C').$$

Cette égalité se prolonge en une égalité entre foncteurs et elle admet pour corollaire immédiat qu'*il n'existe pas d'unité e de C telle que e et $\neg(e)$ soient C'-démontrables.*

SKETCHED STRUCTURES AND COMPLETIONS

by Andrée BASTIANI

Sketched structures were introduced by Ehresmann [8a] in 1966 as an «algebraic» way to define most usual mathematical structures. I shall sum up the results obtained in this direction by T. A. C. members.

1. A *cone-bearing category* σ is a category Σ equipped with a set Γ of cones. If the cones $\gamma \in \Gamma$ are limit-cones, σ is a *limit-bearing category*; it is a *prototype* if, moreover, there is at most one cone with a given basis (i. e. if Σ is equipped with a partial choice of cones).

A *morphism* from σ to the cone-bearing category $\sigma' = (\Sigma', \Gamma')$ is defined by a functor $\phi : \Sigma \to \Sigma'$ such that $\phi\gamma \in \Gamma'$ for each $\gamma \in \Gamma$.

The morphisms between cone- (resp. limit-) bearing categories form the category of one-cells of a representable 2-category [2]. This category admits limits [8c, 2]. The category of morphisms between prototypes admits a monoidal closed structure (Lair [12d]).

2. If Ω is a category, a *σ-structure in* Ω is a functor $\phi : \Sigma \to \Omega$, such that $\phi\gamma$ is a limit-cone in Ω for each $\gamma \in \Gamma$. The category of natural transformations between σ-structures in Ω is denoted by Ω^{σ}.

As examples of σ-structures in the category of sets and maps, we have:

1° Algebraic structures in the sense of Lawvere, Bénabou,...

2° Categories, neocategories, groupoids [8a]. Categories with choices of limits (A. Burroni [3], Lair [12a]). Categories with an ideal,... (Barthélémy [1]).

3° Adjoint functors (Lair [12a]). Presheaves and fibered categories (Horrent [11]).

4° Monoidal and monoidal closed categories (Variot [15]). Topoi (Conduché [6]). Some enriched categories (E. Burroni [4]).

5° Topological spaces, whose «sketch» σ is got by the powerful method of «typifications» (A. Burroni [3]).

6° Algebras on a monad (also using typifications).

3. The category Ω^σ and its forgetful functors are studied in [8b, 8c, 12c, 2]. In [12c], Lair has given criteria to recognize such categories of morphisms between σ-structures.

Different theorems of existence of an adjoint for the insertion functor $\Omega^\sigma \to \Omega^\Sigma$ («associated sheaf theorem») were found, for example by A. Burroni [3] and by Foltz (in a more precise setting [9a]).

Let Ω be equipped with a monoidal closed structure. If σ is «cartesian», Ω^σ is also monoidal closed (e.g., the category of internal functors in Ω is monoidal closed) [2]. Whatever be σ, standard methods to construct monoidal closed structures on Ω^σ are devised by Foltz-Lair [10].

4. Saying σ and σ' are equivalent iff $\Omega^\sigma \cong \Omega^{\sigma'}$ for any category Ω, we may ask: are there «extremal» equivalents to σ?

Minimal ones (called «ideas») were considered by Lair [12b].

For «maximal» ones, using explicite transfinite constructions, we have proved in [2] the following results, where $\mathcal{I}$ and $\mathcal{J}$ are given sets of categories:

- σ may be «universally» immersed into a limit-bearing category $\bar{\sigma}$ and into a prototype $\hat{\sigma}$. If the immersion $\sigma \to \hat{\sigma}$ is injective, σ is called a *sketch*; in this case, $\bar{\sigma}$ and $\hat{\sigma}$ are isomorphic.
- σ may be «universally» immersed into a *loose* $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$*-type* λ (i.e. λ is a limit-bearing category in which each functor indexed by a category of $\mathcal{I}$ (resp. $\mathcal{J}$) is the basis of at least one distinguished projective (resp. inductive) limit-cone), and into a $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$*-type* τ (i.e. a loose $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$-type which is a prototype). While τ is unique up to an isomorphism, λ is unique only up to an equivalence. If σ is a sketch, λ and τ are equivalent.

5. As an application, a category Σ may be «universally» and injectively immersed into a category $\bar{\Sigma}$ admitting (resp. $\hat{\Sigma}$ with a total choice of) $\mathcal{I}$-projective and $\mathcal{J}$-inductive limits, the immersion preserving some (resp. a partial choice of) $\mathcal{I}$-projective and $\mathcal{J}$-inductive limits; $\bar{\Sigma}$ (resp. $\hat{\Sigma}$) is unique up to an equivalence (resp. an isomorphism, and equivalent to $\bar{\Sigma}$). This result greatly improves the completion theorems of [8d], where only $\hat{\Sigma}$ could be obtained (by an «existence» proof, not valid for $\bar{\Sigma}$).

REMARKS. Other completion theorems may be found: in Coppey [7] and Prochasson [14]; in Foltz [9 b] and Chartrelle [5] for some enriched categories; in Ehresmann [8 e] for functors; in Leblond [13] for structured functors; in [8 d] for structured (or internal) categories.

1. J.-P. BARTHELEMY, *E. M. 11* (1971).
2. BASTIANI-EHRESMANN, *C. T. G. D. XIII-2* (1972) et *XI-3* (1969).
3. A. BURRONI, *E. M. 5* (1970).
4. E. BURRONI, *E. M. 4* (1970).
5. M. CHARTRELLE, *C. R. A. S.* Paris 274 (1972), pp. 388 et 710 (et Thèse, 1971).
6. F. CONDUCHE, Conférence Paris 1973 (non publié).
7. L. COPPEY, *C. T. G. D. XIII-1* (1972), pp. 3 et 265.
8. C. EHRESMANN, a) *Technical Report 10*, Un. of Kansas, Lawrence (1966).
b) *C. R. A. S.* Paris 264 (1967).
c) *Bule. Inst. Polit. Iaşi XIV* (1968).
d) *C. T. G. D. IX-1-2* (1967), p. 33.
e) *Dissertationes Math. LXIV*, Varsovie (1969).
9. F. FOLTZ, a) *C. T. G. D. XI-2* (1969), p. 101.
b) *C. T. G. D. XIV-1* (1973), p. 41.
10. FOLTZ-LAIR, *C. T. G. D. XIII-3* (1972), p. 275.
11. J.-J. HORRENT, *E. M. 15* (1972).
12. C. LAIR, a) *E. M. 2* (1970).
b) *C. T. G. D. XII-1* (1971), p. 29.
c) *C. T. G. D. XII-2* (1971), p. 147.
d) Texte à paraître dans *C. T. G. D.*
13. M.-C. LEBLOND, *C. T. G. D XIII-4* (1972), p. 377 (et *E. M. 15*).
14. D. PROCHASSON, *E. M. 11* (1971).
15. P. VARIOT, *E. M. 19* (1973), et Thèse 3^e cycle, Paris (1972).

E. M. = *Esquisses Mathématiques*, Paris.
C. T. G. D. = *Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle*, Paris.

STRUCTURE OF ADDITIVE CATEGORIES

by Karlheinz BAUMGARTNER

Defining the centralizer $C(\mathfrak{U})$ and the bicentralizer $C(C(\mathfrak{U}))$ of a set $\mathfrak{U}$ of parallel (additive) functors $U: \mathfrak{B} \to \mathfrak{C}$, one gets a canonical functor

$$E : \mathfrak{B} \to dom\, C(C(\mathfrak{U})) \quad \text{(domain category of } C(C(\mathfrak{U}))\text{)}.$$

The set $\mathfrak{U}$ is said to have the *bicentralizer property* iff E is an isomorphism. The study of the bicentralizer property of a free functor

$$U = \coprod H^B : \mathfrak{B} \to Ab \quad (\mathfrak{B} \text{ small})$$

and an irreducible functor

$$Q: \mathfrak{B} \to Ab \quad (\mathfrak{B} \text{ not necessarily small})$$

is fundamental.

The first problem implies MITCHELL's embedding theorem and, by the second problem, one characterizes *primitive categories* $\mathfrak{B}$ (i.e., there is a faithfull irreducible functor $Q: \mathfrak{B} \to Ab$) as dense additive subcategories of vector-space categories ${}_K Vec$.

Introducing the finite topology in $Hom_K(X, Y)$, a subcategory $\mathfrak{B}$ of ${}_K Vec$ is called *dense* iff always $Hom_{\mathfrak{B}}(X, Y)$ is dense in $Hom_K(X,Y)$. An ideal I of an additive category $\mathfrak{B}$ is *primitive* iff $\mathfrak{B}/I$ is primitive. Then we introduce the *radical*

$$rad\, \mathfrak{B} = \bigcap_{prim} I ,$$

that is just KELLY's radical. Finally, very briefly *semi-simple categories* $\mathfrak{B}$ (i.e. $rad\,\mathfrak{B} = 0$) are considered.

In all cases, more effective results can be obtained treating ARTIN-categories.

UNE NOTION DE V-LIMITE

par Francis BORCEUX

Soit $F: \mathbf{A} \to Ens$ un foncteur. Notons $\mathbf{R}_F$ la catégorie des foncteurs représentables au-dessus de F et $\phi_F: \mathbf{R}_F \to \mathbf{A}$ le foncteur d'oubli évident. Si $G: \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ est un autre foncteur, un objet L de $\mathbf{B}$ est la limite à gauche de $G \circ \phi_F$ si, et seulement si, il est le reflet de F par le foncteur composé:

$$\mathbf{B}^* \xrightarrow{\ Y\ } Nat(\mathbf{B}, Ens) \xrightarrow{\ [G, 1]\ } Nat(\mathbf{A}, Ens)$$

où Y est le plongement de Yoneda.

Si $\mathbf{V}$ est une catégorie fermée monoïdale symétrique et

$$F: \mathbf{A} \to \mathbf{V}, \quad G: \mathbf{A} \to \mathbf{B}$$

deux $\mathbf{V}$-foncteurs, la remarque précédente suggère une façon de définir la limite du couple (F, G):

Un objet L de $\mathbf{B}$ est appelé $\mathbf{V}$*-limite à gauche du couple* (F, G) si l'objet $\mathbf{N}(F, \mathbf{B}(B, G-))$ des $\mathbf{V}$-transformations naturelles de F vers $\mathbf{B}(B, G-)$ existe pour tout objet B de $\mathbf{B}$ et s'il est $\mathbf{V}$-naturellement isomorphe à $\mathbf{B}(B, L)$.

Cette $\mathbf{V}$-limite généralise à la fois les limites au sens habituel, les « ends » et les cotenseurs.

Ces $\mathbf{V}$-limites jouissent des bonnes propriétés usuelles des limites. En particulier, les critères formels de représentabilité, d'existence de foncteur adjoint ou d'extension de Kan se généralisent sans difficultés. En outre tout $\mathbf{V}$-foncteur à valeurs dans $\mathbf{V}$ est une $\mathbf{V}$-colimite de $\mathbf{V}$-foncteurs $\mathbf{V}$-représentables.

Les diverses propriétés évoquées au paragraphe précédent permettent d'établir le résultat suivant:

Si $\mathbf{V}$ *est complète à gauche et possède des coproduits, toute catégorie de foncteurs à valeurs dans* $\mathbf{V}$ *et définis sur une petite catégorie est elle-même fermée.*

NATURAL ANADESES AND CATADESES

by Dominique BOURN

At first, we wished to find simple conditions on a 2-category to make possible the Kleisli and the Eilenberg-Moore constructions associated to a triple, as in the case of the 2-category $\mathcal{N}$ of natural transformations. But it appeared that the preliminary study of two new kinds of morphisms between 2-functors allowed an easier access to this question: the *catadeses* (actually already defined by Gray [1]) and the *anadeses* (a dual possibility of generalization).

If C and C' are two 2-categories, we denote by $\overleftarrow{\mathcal{N}}(C', C)$ the 2-category of catadeses between 2-functors from C to C' (Gray's *Fun* (C, C')) and by $\overrightarrow{\mathcal{N}}(C', C)$ the 2-category of anadeses between the same 2-functors. Then we get some general results about commutations and compatibilities with 2-functors for the new kinds of limits associated to anadeses (*analimits* and *coanalimits*) and to catadeses (*catalimits* and *cocatalimits*).

There are many examples of these kinds of limits: the product of two categories, $A \times B$, is the cocatalimit of the 2-functor from A to $\mathcal{N}$, constant on B. More generally, the tensor of an object e of a 2-category C with the category A is the cocatalimit of the 2-functor from A to C, constant on e; the cotensor being a catalimit of this same 2-functor. This leads to applications in the theory of representable and corepresentable 2-categories (theory also due to Gray).

On the other hand, the 2-category of morphisms between triples (or monads) being $\overleftarrow{\mathcal{N}}(\mathcal{N}, S)$ (where S is the simplicial 2-category) and the 2-category of comorphisms between triples being $\overrightarrow{\mathcal{N}}(\mathcal{N}, S)$, the Eilenberg-Moore category is a catalimit and the Kleisli category a coanalimit.

Then we give a criterium for the existence of catalimits, analimits, cocatalimits and coanalimits in a 2-category, and therefore we solve our first problem.

(The preceding results are developed in our Thesis [2].)

After the question of limits, it is natural to think about Kan extensions. We prove that, *if* C *has catalimits and if* F *is a 2-functor from* C' *to* C'', *the 2-functor* $\overleftarrow{\mathfrak{N}}(C, F)$ *has not always a right 2-adjoint, but*

$$C^{C''} \longrightarrow \overleftarrow{\mathfrak{N}}(C, C'') \xrightarrow{\overleftarrow{\mathfrak{N}}(C, F)} \mathfrak{N}(C, C')$$

has a right 2-adjoint. The constructions of R. Street [3] are good examples of cata (ana)-Kan extensions of this kind.

Anadeses and catadeses are easily generalized for 3-categories (i.e. for $\mathfrak{N}$-categories). Adapting this idea, we construct a tensor product of two 2-categories relative to catadeses (foretold by Gray in [1]) and anadeses as a colimit analogous to that defining the product of two categories. The corresponding kinds of limits associated to a 2-triple give, in particular, the 2-algebras in the sense of A. Burroni.

1. J. W. GRAY, The Categorical Comprehension Scheme, *Lecture Notes in Math.* 99, Springer 1969.
2. D. BOURN, Objets de Kleisli et d'Eilenberg-Moore d'un triple dans une 2-catégorie, *Esquisses Mathématiques* 19 (1973); Thèse 3^{e} cycle, Paris, Mai 1973.
3. R. STREET, Two constructions on lax functors, *Cahiers Topo. et Géo. diff.* XIII-3 (1972), p. 217.

STRUCTURES 2-ALGEBRIQUES

par Albert BURRONI

Si $\mathbf{T} = (T, I, K)$ est un 2-triple sur une 2-catégorie $\underline{\underline{C}}$, une $\mathbf{T}$-2-*algèbre* est donnée par deux 2-morphismes

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "IA"] \arrow[dr, "id_A"'] & TA \arrow[d, "b"] \arrow[dl, phantom, "\iota"] \\ & A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} T^2A \arrow[r, "KA"] \arrow[d, "Tb"'] & TA \arrow[d, "b"] \\ TB \arrow[r, "b"'] \arrow[ur, phantom, "\kappa"] & A \end{tikzcd}$$

satisfaisant à trois axiomes de cohérence (ceux-ci sont donnés par les relations (1) et (2) dans la définition des «pseudo-algèbres» — voir mon article $\mathbf{T}$-*catégories*, Cahiers Topo. et Géo. diff. XII-3, 1971).

Les $\mathbf{T}$-2-algèbres forment les objets d'une 2-catégorie $2\text{-}\underline{\underline{Alg}}(\mathbf{T})$ munie d'un foncteur vers $\underline{\underline{C}}$ qui est 2-triplable; on dit ici qu'un couple de 2-foncteurs $\underline{\underline{D}} \underset{U}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \underline{\underline{C}}$ est 2-*triplable* si l'on a pour tout objet X de $\underline{\underline{C}}$ et tout objet Y de $\underline{\underline{D}}$ un couple de foncteurs adjoints (triplable)

$$\underline{\underline{C}}(X, U(Y)) \rightleftarrows \underline{\underline{D}}(F(X), Y).$$

Les exemples les plus simples sont les suivants (non compris la notion analogue sur les «pseudo-triples» qui redonne les $\mathbf{T}$-catégories):

1° La catégorie des monades de $\underline{\underline{C}}$ est égale à $2\text{-}\underline{\underline{Alg}}(\underline{\underline{C}})$, en notant $\underline{\underline{C}}$ le 2-triple trivial $\mathbf{T} = id_{\underline{\underline{C}}}$.

2° Si $\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{Cat}}$ et si $\mathbf{T}$ est défini pour toute petite catégorie $\underline{A}$ objet de $\underline{\underline{C}}$ par $T\underline{A}$ = coproduit de $\underline{A}$ avec la catégorie finale $\underline{1}$, alors les $\mathbf{T}$-2-algèbres sont les couples $((\underline{A}, \mathbf{t}), (a, \beta))$ formés d'un petit triple $\mathbf{t}$ et d'une $\mathbf{t}$-algèbre β sur $a \in Ob(\underline{A})$.

3° Soit $\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{Cat}}$ et supposons T défini sur les objets de la manière suivante: $Ob(T\underline{A})$ et $Fl(T\underline{A})$ sont respectivement les monoïdes libres engendrés par les ensembles $Ob(\underline{A})$ et $Fl(\underline{A})$; alors les $\mathbf{T}$-2-algèbres sont les pseudo-catégories de mon article déjà cité, ou plutôt une notion un peu plus complexe dans laquelle on a des produits n-aires et des 2-

morphismes d'associativité du genre suivant:

$$A \otimes (B \otimes C) \longrightarrow A \otimes B \otimes C \longleftarrow (A \otimes B) \otimes C$$

qui ne se réduisent pas à des 2-isomorphismes. Un bon exemple en est fourni par les **T**-spans, et surtout par les **D**-spans définis par E. Burroni [1].

4° Les clivages au-dessus d'une petite catégorie $\underline{C}$ sont les **T**-2-algèbres pour un 2-triple sur la 2-catégorie $\underline{\underline{Cat}}^{Ob(\underline{C})}$. Si $\phi : Ob(\underline{C}) \to \underline{\underline{Cat}}$, on a:

$$T\phi(x) = \{ (f, s) \mid f : x \to x', \quad s \in \phi(x') \}.$$

On peut démontrer sur ces notions l'analogue de nombreux résultats sur les triples; en particulier on peut adapter dans ce cadre le théorème de Linton. Nous en donnerons la preuve dans un prochain article.

Une première version de cet exposé a été donnée, en 1972, au Séminaire: Catégories, Topologie et Géométrie différentielle, à Paris.

1. E. BURRONI, *C.R.A.S. Paris*, 276 (1973), p. 669.

T-ALGEBRES NON DETERMINISTIQUES

par Elisabeth BURRONI

En s'inspirant de la notion d'«action non déterministique d'un monoïde sur un ensemble» utilisée dans la théorie des automates, on peut définir la notion d'*algèbre non déterministique*, lorsqu'on possède une loi distributive (BECK) entre le triple décrivant la structure et le triple des parties.

On peut plus généralement définir la notion d'algèbre «entre deux triples» **T** et **T'** sur une même catégorie $\mathcal{E}$, ces deux triples étant reliés par une loi distributive $D : \mathbf{T} \to \mathbf{T'}$; d'une manière précise, on appelle **D**-*algèbre* la donnée d'un morphisme

$$b : TA \to T'A \text{ de } \mathcal{E}, \text{ où } A \in |\mathcal{E}|,$$

tel que les diagrammes qui suivent commutent:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "IA"] \arrow[dr, "I'A"'] & TA \arrow[d, "b"] \\ & T'A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} TTA \arrow[r, "KA"] \arrow[d, "T'b \circ DA \circ Tb"'] & TA \arrow[d, "b"] \\ T'T'A \arrow[r, "K'A"'] & T'A \end{tikzcd}$$

(où $\mathbf{T} = (T, I, K)$ et $\mathbf{T'} = (T', I', K')$).

On retrouve les **T**-algèbres lorsque **T'** est le triple identité de $\mathcal{E}$.

Ensuite, on définit les **D**-*catégories*, qui permettent de considérer à la fois les **D**-algèbres et les **T**-catégories d'Albert BURRONI [2] (et donc les «relational algebras» de BARR et les catégories) comme des cas particuliers d'une même notion. Ces **D**-catégories ne sont autres que des monades dans la «pseudo-catégorie» des **D**-spans:

$$TA_1 \xleftarrow{a} \pi \xrightarrow{b} T'A_2 .$$

(Une pseudo-catégorie est une structure 2-algébrique, au sens de Albert BURRONI [3], notion qui est un peu plus générale que celle de bicatégorie au sens de BENABOU [1]: les **D**-spans donnent l'unique exemple, à ma connaissance, de «pseudo-catégorie» qui ne se réduise pas à une bicatégorie.)

Enfin, en s'inspirant du fait qu'une loi distributive est une monade dans une 2-catégorie de triples, on s'intéresse aux comonades dans de telles 2-catégories; c'est ce que l'on appelle les *lois distributives mixtes* (entre un triple et un cotriple). A toute loi distributive correspondent deux comonades de ce type; on est donc en mesure d'en fournir un certain nombre d'exemples.

Ces différentes notions sont étudiées dans trois Notes [4].

1. J. BENABOU, Introduction to Bicategories, *Lecture Notes in Mathematics* 47, Springer (1967).
2. A. BURRONI, **T**-catégories, *Cahiers Topo. et Géo. diff.* XII-3 (1971).
3. A. BURRONI, conférence faite à Paris en Avril 1972.
4. E. BURRONI, a) Algèbres relatives à une loi distributive;
b) Catégories relatives à une loi distributive;
c) Lois distributives mixtes;
C.R.A.S. Paris, 276 (1973), pp. 443, 669 et 897.

COMPLETION DES CATEGORIES ENRICHIES

par Mario CHARTRELLE

Dans différents domaines des Mathématiques (Algèbre homologique, Topologie algébrique, Géométrie différentielle,...), il est utile de considérer des catégories dont les *Hom* sont munis d'une structure supplémentaire. Par exemple, en Topologie algébrique et en Calcul différentiel, le fait qu'il n'y ait pas de «bonne» topologie sur l'espace des applications continues entre deux espaces topologiques quelconques a conduit à remplacer la catégorie des applications continues par sa sous-catégorie pleine ayant pour objets les espaces de Kelley [1,2] ou par sa sur-catégorie formée des applications quasi-continues entre quasi-topologies [3,4], ces deux catégories étant cartésiennes fermées [1,5].

Le problème se pose donc de plonger «universellement» une catégorie dans une catégorie «enrichie». De plus, on voudrait que les catégories obtenues aient «assez» de limites, ce qui pose le problème de la complétion d'une catégorie enrichie.

Ces problèmes, bien précisés, peuvent être résolus à l'aide du théorème général d'existence de structures libres de [6]. Le seul point délicat consiste à démontrer (par récurrence transfinie) que toute «petite» partie d'une catégorie enrichie (complète) engendre une «petite» sous-catégorie enrichie (complète). D'une manière précise, nous avons obtenu les résultats suivants (voir [5], chapitres III, IV et V).

1° Une *catégorie auto-dominée* est une catégorie H, munie d'un foncteur d'oubli q vers la catégorie $\mathfrak{M}$ des applications et d'un foncteur *Hom interne* D tel que $q \circ D$ soit le foncteur *Hom* sur H.

Nous montrons qu'une catégorie C, munie d'un foncteur p vers $\mathfrak{M}$, peut être universellement plongée:

- dans une catégorie auto-dominée (H, q, D), où q prolonge p,

- dans une catégorie auto-dominée (H, q, D) telle que q prolonge p et admette des structures initiales et finales de certains types.

On a des résultats analogues en remplaçant les catégories auto-dominées par des catégories fermées au sens de [7] (qui sont des catégories auto-dominées particulières).

2° Une *catégorie prémonoïdale fermée* est une catégorie H, munie d'un foncteur Hom interne D et d'un foncteur «*produit tensoriel*» X, de sorte que $X(\cdot, e)$ soit adjoint à $D(\cdot, e)$, pour toute unité e de H. Alors:

- Une catégorie C peut être universellement plongée dans une catégorie prémonoïdale fermée (resp. prémonoïdale fermée complète).

- Une catégorie prémonoïdale fermée H peut être universellement plongée dans une catégorie prémonoïdale fermée munie d'un choix de limites projectives et/ou inductives de certains types, le plongement conservant le foncteur Hom interne, le produit tensoriel, et une famille de limites données sur H.

Ces résultats sont encore valables si, au lieu de catégories prémonoïdales fermées, on considère des catégories monoïdales fermées (resp. des catégories monoïdales fermées symétriques, resp. des catégories cartésiennes fermées) au sens de [7].

1. GABRIEL - ZISMAN, *Calculus of fractions and Homotopy theory*, Springer, 1967.

2. U. SEIP, Kompakt erzeugte Vektorräume und Analysis, *Lecture Notes in Math.* 273, Springer (1972).

3. A. MACHADO, Quasi-topologie algébrique, *Esquisses Mathématiques* 10 (1971).

4. A. BASTIANI, Applications différentiables et variétés de dimension infinie, *Journal d'Analyse Math.* XIII, Jérusalem (1964).

5. M. CHARTRELLE, *Quasi-topologies. Enrichissement de catégories*, Thèse 3e cycle, Paris 1971 (multigraphié).

6. C. EHRESMANN, Construction de structures libres, *Lecture Notes* 92 (1968).

7. EILENBERG - KELLY, Closed categories, *Proc. Conf. on Categorical Algebra*, La Jolla (1965), Springer, 1966.

STRUCTURES ALGEBRIQUES DEFINIES PAR COUPLES DE CATEGORIES

par Laurent COPPEY

Etant donnée une catégorie $\mathcal{C}$, les types de structures algébriques au-dessus de $\mathcal{C}$ sont des classes d'équivalence de surgraphes multiplicatifs [1] de $\mathcal{C}$; un surgraphe $\mathcal{D}$ dans la classe τ déterminant le type τ en question, on emploie souvent l'expression «$\mathcal{D}$-algèbre» au lieu de «τ-algèbre» qui serait plus correcte. La catégorie des $\mathcal{D}$-algèbres au-dessus de $\mathcal{C}$ est définie à «isomorphisme au-dessus de $\mathcal{C}$» près.

Les $\mathcal{D}$-algèbres (resp. coalgèbres) sur un objet X de $\mathcal{C}$ sont définies comme étant des actions particulières à droite (resp. à gauche) de $\mathcal{D}$ sur la classe $\mathcal{C}_X$ (resp. $\mathcal{C}^X$) des flèches dans $\mathcal{C}$ de but (resp. source) X; une flèche f de $\mathcal{C}$ détermine un morphisme entre $\mathcal{D}$-algèbres si elle respecte les actions qui interviennent; d'où un foncteur d'oubli $U_{\mathcal{D}}$, fidèle, des $\mathcal{D}$-algèbres vers $\mathcal{C}$.

– Si un tel foncteur admet un adjoint à gauche, il est automatiquement triplable.

– Si l'inclusion ι de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{D}$ a un adjoint [2] à droite R, l'oubli des $\mathcal{D}$-algèbres vers $\mathcal{C}$ est triplable et si, de plus, $\mathcal{D}$ est une catégorie, on peut affirmer qu'elle est isomorphe à la catégorie de Kleisli du triple défini par (ι, R).

Pour un triple $\mathbf{T}$ donné dans $\mathcal{C}$, dont l'endofoncteur T est fidèle, on peut énoncer des sortes de réciproques aux deux assertions précédentes:

– La catégorie de Kleisli $K_{\mathbf{T}}$ est canoniquement isomorphe à une surcatégorie de $\mathcal{C}$.

– Les catégories des $K_{\mathbf{T}}$-algèbres (à notre sens) et des $\mathbf{T}$-algèbres (au sens des triples) sont canoniquement isomorphes. (Ce point a été remarqué, sous une forme un peu différente, par LINTON, dans le «vieux» volume n° 80 des Lectures Notes.)

– Les foncteurs d'oubli des $\mathcal{D}$-algèbres reflètent les limites projectives.

Etant donné un foncteur F, de $\mathcal{C}$ vers Σ, n'identifiant pas d'objets, on peut considérer des actions (à droite) de $\mathfrak{D}$, surgraphe donné de $\mathcal{C}$, sur la classe $\Sigma_Z^{\mathcal{C}}$ des flèches dans Σ de but Z et de source dans $F(\mathcal{C})$, analogues aux actions définissant les $\mathfrak{D}$-algèbres. Ceci ne généralise pas (au point de vue des définitions générales) la situation précédente: on prouve en effet qu'on obtient alors les $\mathfrak{D}_F$-algèbres au-dessus de Σ, où $\mathfrak{D}_F$ désigne le surgraphe multiplicatif de Σ, obtenu en faisant la somme amalgamée de F et de l'inclusion de $\mathcal{C}$ dans $\mathfrak{D}$: c'est l'énoncé précis de ce résultat qui oblige à considérer des surgraphes multiplicatifs et pas seulement des sur-catégories. Si de plus F a un adjoint à droite G, la catégorie des $\mathfrak{D}_F$-algèbres est un produit fibré de $U_{\mathfrak{D}}$ et de G.

En prenant pour Σ une catégorie $\mathcal{C}^{H^\cdot}$, où $H^\cdot$ est une petite catégorie devant $\mathcal{C}$, les considérations précédentes permettent de retrouver (par double récurrence) une $H^\cdot$-complétion projective de $\mathcal{C}$.

Enfin, notre point de vue, basé sur les actions de catégories, permet de développer une bonne partie de la théorie pour des «objets-catégories» dans une catégorie à produits fibrés finis, en particulier pour certaines catégories structurées. Il se laisse transposer, presque sans modification, au cas des 2-catégories.

1. Graphe multiplicatif ayant même classe d'objets que $\mathcal{C}$ et admettant $\mathcal{C}$ pour sous-catégorie.

2. Notion qui a un sens même si $\mathfrak{D}$ n'est pas une catégorie.

FONCTEURS ADDITIFS ET ALGEBRES

par Ghislain DARTOIS

En Algèbre commutative, si A est un anneau commutatif et si l'on considère deux algèbres $F: A \to B$ et $G: A \to C$, on sait mettre sur le produit tensoriel $B \otimes_A C$ une structure de A-algèbre. En supposant maintenant que les anneaux ne sont plus commutatifs, la formule

$$(y \otimes z)(y' \otimes z') = yy' \otimes zz'$$

ne définit plus une application de $(B \otimes_A C) \times (B \otimes_A C)$ dans $B \otimes_A C$, et l'on ne sait pas munir canoniquement $B \otimes_A C$ d'une structure d'anneau. C'est ce fait que nous allons essayer de pallier, non seulement pour les anneaux, mais plus généralement pour les petites catégories préadditives.

Si F est un foncteur d'une petite catégorie préadditive A vers une autre B, nous noterons $\mathbf{Tr}(F)$ l'ensemble des transformations naturelles de F vers lui-même, et

$$\mathbf{tr}(F) = \{ \theta(a) \mid \theta \in \mathbf{Tr}(F),\ a \in |A| \};$$

nous poserons de plus:

$$\mathbf{C}(B) = \mathbf{Tr}(id_B) \quad \text{et} \quad \mathbf{c}(B) = \mathbf{tr}(id_B).$$

Nous dirons que F est une A-*algèbre* ssi F est injectif sur les unités et si B est la catégorie préadditive engendrée par $F(A) \cup \mathbf{tr}(F)$. Nous dirons que F est une A-*algèbre commutative* ssi F est bijectif sur les unités et si B est la catégorie préadditive engendrée par $F(A) \cup \mathbf{c}(B)$.

La petite catégorie préadditive A étant fixée, nous définissons la catégorie $\mathbf{Alg}(A)$ des A-algèbres et la catégorie $\mathbf{Alg_c}(A)$ des A-algèbres commutatives. Par exemple, $\mathbf{Alg}(\mathbf{Z})$ s'identifie à la catégorie des anneaux et $\mathbf{Alg_c}(\mathbf{Z})$ à la catégorie des anneaux commutatifs. (Plus généralement, si A est un anneau commutatif, $\mathbf{Alg_c}(A)$ est la catégorie des A-algèbres utilisée en Algèbre commutative classique.)

Les catégories $\mathbf{Alg}(A)$ *et* $\mathbf{Alg_c}(A)$ *sont à limites et à colimites, et* $\mathbf{Alg_c}(A)$ *est une sous-catégorie coréflexive de* $\mathbf{Alg}(A)$. *Les foncteurs* $\mathbf{C}$ *et* $\mathbf{Tr}$ *possèdent des adjoints à gauche qui donnent les* A*-algèbres de* *polynômes à variables commutatives et non commutatives.*

Si nous considérons deux A-algèbres (resp. A-algèbres commutatives) $F: A \to B$ et $G: A \to C$, nous pouvons mettre sur $B \otimes_A C$ (produit tensoriel de bimodules) une structure de A-algèbre (resp. de A-algèbre commutative). Ce produit tensoriel est unitaire, associatif, commutatif et *il coïncide avec le coproduit dans le cas des A-algèbres commutatives.*

A l'aide de ce produit tensoriel, nous donnons une *caractérisation des A-épialgèbres* (i.e. des A-algèbres qui sont des épimorphismes de la catégorie des petites catégories préadditives) qui généralise les résultats d'Algèbre commutative classique: Les A-épialgèbres sont les A-algèbres caractérisées par plusieurs propriétés équivalentes, dont:

- $b \otimes y = y \otimes a$, si $y \in B(a, b)$,
- l'application $\mu : B \otimes_A B \to B$ telle que $\mu(y \otimes z) = yz$ définit un foncteur additif bijectif,
- la codiagonale $\Delta : B \coprod_A B \to B$ est un isomorphisme.

Il est suffisant de tester une A-algèbre (commutative) sur les morphismes de A-algèbres (commutatives) pour savoir si c'est un épimorphisme dans **Addcat**. Une *A-épialgèbre est toujours commutative*, et nous trouvons un majorant au cardinal du but d'une A-épialgèbre, ce qui prouve qu'il y a un ensemble (ordonné), noté **épi**(A), de A-épialgèbres à isomorphismes près.

En utilisant le fait que **Alg**(A) est à coproduits, nous montrons que **épi**(A) *est à bornes supérieures*, et nous en déduisons *l'existence* d'une *A-épialgèbre injective plate maximale.*

CATEGORIES IN DIFFERENTIAL GEOMETRY

by Charles EHRESMANN

The r-(differentiable) manifolds considered here may be supposed finite dimensional, or modelled on Banach spaces (or even on non-normed spaces, as shown in [1]). r and l are integers, and $0 \leqslant l \leqslant r \leqslant \infty$.

1. The basic categories in Differential Geometry are [2]:

- The category $\mathcal{C}^{l,r}$ of (resp. $\mathcal{C}^{l,r}_{\bullet}$ of pointed) l-differentiable maps between r-manifolds (associated to a universe $\mathfrak{U}$).

- The category $J^{l,r,\lambda}$ of *local jets*, which is the quotient category of $\mathcal{C}^{l,r}_{\bullet}$ by the equivalence: $(f,x) \sim (f',x')$ iff $x = x'$ and if there exist neighborhoods of x and $f(x)$ on which f and f' have the same restriction. The class of (f,x) is denoted by $j^{\lambda}_{x} f$.

- The category $J^{l,r}$ *of l-jets*, which is the quotient category of the category $J^{l,r,\lambda}$ by the equivalence: $j^{\lambda}_{x} f \sim j^{\lambda}_{x'} f'$ iff $x = x'$ and if there are admissible charts relative to which f and f' have the same m-th homogeneous differential at x, for each $m \leqslant l$. The class of $j^{\lambda}_{x} f$ is denoted by $j^{l}_{x} f$. The objects of $J^{l,r}$ are the germs of r-manifolds.

2. Let V and V' be two r-manifolds. The set of l-jets from germs of V' to germs of V is canonically equipped [3] with a structure of an $(r-l)$-manifold $J^{l}(V, V')$.

If V' is fixed, then we get a functor $J^{l}(\cdot, V')$ from $\mathcal{C}^{r}$ $(= \mathcal{C}^{r,r})$ to $\mathcal{C}^{r-l}$. This functor preserves submersions and pull-backs of pairs with one term a submersion.

In particular, the functor $J^{l}(\cdot, \mathbf{R})$ admits as a sub-functor the *l-th velocity functor* T^{l} (where $T^{l}(V)$ is formed by the jets $j^{l}_{0} f$), and T^{1} is the *tangent functor* T.

5. An *r-differentiable category* $\mathcal{K}$ is a category internal in $\mathcal{C}^{r}$ (i.e. a realization in $\mathcal{C}^{r}$ of the sketch of categories), whose map « source » is a submersion. It may be considered (initial definition [4]) as a pair (K, V), where K is a category and V an r-manifold on the set of morphisms of K, such that:

- the maps source and target of K define r-differentiable maps a and b from V onto a submanifold V_0 of V;
- a is a submersion (initially b was also one [4]);
- the law of composition of K defines an r-differentiable map from the pull-back of (a, b) to V.

If V' is an r-manifold, by applying the functor $J^l(-, V')$ we deduce from $\mathcal{K}$ an $(r-l)$-differentiable category $J^l(\mathcal{K}, V)$ on $J^l(V, V')$; we denote by $\odot$ its law of composition [2]. So, the functor $J^l(-, V')$ «extends» into a functor from the category $\mathcal{F}(\mathcal{C}^r)$ of r-differentiable functors to the category $\mathcal{F}(\mathcal{C}^{r-l})$.

In the same way we extend the functors T^l. The *tangent category* $T(\mathcal{K})$ admits the structure of an $(r-l)$-differentiable double category, the second law being the addition of vectors [2].

4. EXAMPLES.

1° An r-differentiable groupoid (K, V) is said *locally trivial* [4] if $[b, a]$ is a submersion from V to $V_0 \times V_0$. In fact, this notion is equivalent to that of a differentiable principal fibre-bundle.

2° By «gluing together» the $(r-l)$-manifolds $J^l(V, V')$, for all r-manifolds V and V' associated to the universe $\mathcal{U}$, we obtain a «big» $(r-l)$-manifold $V^{l,r}$. Then $(J^{l,r}, V^{l,r})$ is an $(r-l)$-differentiable category [2], denoted by $\mathcal{J}^{l,r}$. Its manifold of objects is the «universal» $(r-l)$-manifold of germs of r-manifolds.

$J^l(V, V)$ (resp. The invertible jets of $J^l(V, V)$) defines an $(r-l)$-differentiable subcategory $\mathcal{J}^l(V)$ (resp. locally trivial subgroupoid $G^l(V)$) of $\mathcal{J}^{l,r}$. The notions of a locally trivial subgroupoid of $G^l(V)$ and of a regular infinitesimal structure [3] on V are equivalent.

5. Let $\mathcal{K}$ be an r-differentiable category (K, V). The jets X of $J^l(V, V_0)$ such that $aX\ (= J^l(a, V_0)(X))$ is an identity form an $(r-l)$-submanifold V^l of $J^l(V, V_0)$ and there exists [2] an $(r-l)$-differentiable category $\mathcal{K}^l$ on V^l, called the *l-th prolongation of* $\mathcal{K}$, whose law is:

$$(X', X) \to (X'.\,bX) \odot X \quad \text{iff} \quad aX' = bX.$$

The *l-th non holonomic prolongation* $\widetilde{\mathcal{K}}^l$ *of* $\mathcal{K}$ is defined by iteration, putting $\tilde{\mathcal{K}}^0 = \mathcal{K}$ and $\tilde{\mathcal{K}}^{m+1} = (\tilde{\mathcal{K}}^m)^1$.

In particular, $\mathcal{J}^{l,r}$ and $G^l(V)$ give rise to the $(r-l)$-differentiable categories of non holonomic jets $\tilde{\mathcal{J}}^{l,r}$ and $\tilde{G}^l(V)$, which admit the $(r-l)$-differentiable subcategories $\bar{\mathcal{J}}^{l,r}$ and $\bar{G}^l(V)$ of *semi-holonomic l-jets.*

6. The next basic notion is that of an *r-differentiable species of structures* [4, 2, 6], or *generalized r-fibre-bundle* (or, in a more recent terminology, presheave internal in $\mathcal{C}^r$) over an r-differentiable category $\mathcal{K}$.

Usual r-differentiable fibre-bundles are obtained when $\mathcal{K}$ is a locally trivial r-differentiable groupoid.

If $\mathcal{K}$ is $G^l(V)$, $\tilde{G}^l(V)$ or $\bar{G}^l(V)$, we get respectively the *holonomic, non holonomic* or *semi-holonomic l-th prolongations of the r-manifold V*. Their sections are the *infinitesimal structures on V*.

One proves a theorem of *transitivity of prolongations* [2, 3].

A categorical study of these notions, of *differential covariants* or *invariants* and of *higher-order connections* [5] in (generalized) fibre-bundles may be found in [2, 6].

1. A. BASTIANI, *Journal d'Analyse Math. XIII*, Jérusalem (1964).
2. C. EHRESMANN, *Cahiers Topo. et Géo. diff. VI* (1964) et *IX* (1967).
3. C. EHRESMANN, *C. R. A. S.* Paris 233 (1951), 234 (1952), 239 (1954), 240 (1955).
4. C. EHRESMANN, *Coll. Géo. diff. globale*, Bruxelles (1958).
5. C. EHRESMANN, *Atti 5 Congresso Un. Mat. Italiana* (1956).
6. C. EHRESMANN, *Atti Conv. di Geo. Diff.*, Bologne (1967).

2-ALGEBRAIC THEORIES AND TRIPLES

by John W. GRAY

A *2-algebraic theory* is a 2-category $\mathfrak{A}$ with a functor from the category of finite sets, $A : Sets_0 \to \mathfrak{A}$, which is a bijection on objects and coproduct preserving. A *model* in a 2-category $\mathcal{C}$ is a finite product preserving functor $M : \mathfrak{A}^{op} \to \mathcal{C}$, and a *morphism* of models is a quasi-natural transformation [2]. In this report we are interested in the 2-theory of monoids, $\mathfrak{M}$, which has a presentation consisting of one-cells $e : 1 \to 0$, $m : 1 \to 2$, and 2-cells

$$\theta : (m+1)m \to (1+m)m, \quad \delta : 1 \to (1+e)m, \quad \gamma : 1 \to (e+1)m$$

satisfying the usual coherence relations, which can be formulated as asserting that certain three-dimensional cubes commute. The revelant theorems here are:

1) The category of 2-algebraic theories is tripleable over sequences of categories, so such presentations make sense.

2) If all three-dimensional cubes commute then all n-dimensional cubes commute, so all necessary relations above have been imposed.

Models of $\mathfrak{M}$ in *Cat* are multiplicative categories $(\underline{A}, \otimes_{\underline{A}}, I_{\underline{A}})$, in the sense of BENABOU [1], and morphisms are functors equipped with natural transformations

$$\phi : \otimes_{\underline{B}}(F \times F) \to F \otimes_{\underline{A}}, \quad \lambda : I_{\underline{B}} \to F I_{\underline{A}}$$

satisfying the usual requirements. Models of $\mathfrak{M}$ in $[1, Cat]$ (see [2]) are multiplicative categories $(\underline{A}, \otimes_{\underline{A}}, I_{\underline{A}})$ together with a monoid object (A, μ, η) in $\underline{A}$ and morphisms are functors as above together with a morphism $FA \to B$ satisfying the usual conditions. Here we have the following result:

3) Since $[1, Cat] \to Cat$ is a quasi-opfibration (see [2]), so is $[1, Cat]^{[\mathfrak{M}]} \to Cat^{[\mathfrak{M}]}$. This yields the usual change of rings formulae.

Now let $\mathfrak{M}\mathcal{O}$ be the two-sorted theory having $\mathfrak{M}$ in the first component, the trivial theory in the second component and a connection $n:(0,1)\to(1,1)$ together with 2-cells

$$\psi:(m,1)(n)\to[(1,0)+n](n) \quad\text{and}\quad \beta:(0,1)\to(e,1)n$$

such that all three-dimensional cubes commute.

Models of $\mathfrak{M}\mathcal{O}$ in Cat^2 are pairs $(\underline{A},\underline{M})$ where $\underline{A}$ is a multiplicative category operating on a category $\underline{M}$, satisfying the usual equations. Models in $[1, Cat]^2$ are of the form $((\underline{A},A),(\underline{M},M))$ where $\underline{A}$ operates on $\underline{M}$ and A operates on M. Morphisms are as expected. If $(\underline{A},A)$ is fixed, this gives rise to the category $(\underline{A},A)\text{-}Alg\,\underline{M}$ as a fibre in one of the many induced fibrations. One shows:

4) $(\underline{A},A)\text{-}Alg\,\underline{M}\to\underline{M}$ has a left adjoint.

Triples provide examples of these constructions, since, from [1], in Cat, $\underline{A}^{\underline{A}}$ is multiplicative via composition, and in $[1, Cat]$, $(\underline{A}^{\underline{A}}, T)$ is a model iff T is a triple on $\underline{A}$. Furthermore, $\underline{A}^{\underline{A}}$ operates on $\underline{A}$ via the evaluation map and $(\underline{A}^{\underline{A}}, T)\text{-}Alg\,\underline{A}$ is the category of T-algebras in $\underline{A}$. If $F\to U:\underline{B}\to\underline{A}$, then $U^F:\underline{B}^{\underline{B}}\to\underline{A}^{\underline{A}}$ is a strict morphism of multiplicative categories and

$$(U^F, U):(\underline{B}^{\underline{B}},\underline{B})\to(\underline{A}^{\underline{A}},\underline{A})$$

can be made into a morphism of categories with operations. In particular, I_B in $\underline{B}^{\underline{B}}$ is mapped to $U^F(I_B)=UF=T$ and this induces a functor

$$\Phi:(\underline{B}^{\underline{B}}, I)\text{-}Alg\,\underline{B}\to(\underline{A}^{\underline{A}}, T)\text{-}Alg\,\underline{A}$$

over $U:B\to\underline{A}$ which is the usual comparison functor.

This whole situation can be extended to $2\text{-}Cat_{\otimes}$-theories (see [2]) with models in $2\text{-}Cat_{\otimes}$ and related categories as above. In particular $\mathfrak{M}$ and $\mathfrak{M}\mathcal{O}$ can be regarded as such theories. This leads in a very simple way to a description of quasi-triples and quasi-algebras together with a conjecture about the comparison functor. Namely, for a 2-category $\mathfrak{A}$, $Fun(\mathfrak{A},\mathfrak{A})$ is multiplicative for $\otimes$ via composition. A monoid T in $Fun(\mathfrak{A},\mathfrak{A})$ is a (strict) 2-functor $T:\mathfrak{A}\to\mathfrak{A}$ together with quasi-natural transformations $\mu:TT\to T$ and $\eta:I\to T$ and modifications

$$\alpha:\mu(\mu T)\to\mu(T\mu),\quad \delta:T\to\mu(T\eta),\quad\text{and}\quad \gamma:T\to\mu(\eta T)$$

such that all three dimensional cubes commute. Furthermore there is an operation on $\mathfrak{A}$, $ev: Fun(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}) \otimes \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$, and $(Fun(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}), T)\text{-}Alg\, A$ consists of maps $\xi : TA \to A$ together with 2-cells,

$$\psi : \xi\mu \to \xi(T\xi) \quad \text{and} \quad \beta : \xi\eta \to A$$

such that all cubes commute. If $F \to U : \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}$ is a strict quasi-adjonction, then $(Fun(F, U), U)$ can be made into a morphism of 2-categories with operations and as before there is a comparison functor

$$\Phi : (Fun(\mathfrak{B}, \mathfrak{B}), I)\text{-}Alg\, \mathfrak{B} \to (Fun(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}), T)\text{-}Alg\, \mathfrak{A}$$

over U. We conjecture that this is the proper object of study. Note that $(Fun(\mathfrak{B}, \mathfrak{B}), I)\text{-}Alg\, \mathfrak{B}$ is not $\mathfrak{B}$, but rather is the 2-category of cotriple objects in $\mathfrak{B}$.

1. BENABOU J., Catégories avec multiplication, *C. R. Acad. Sci.* Paris 256 (1963), pp. 1887 - 1890.

2. GRAY J., Formal Category Theory. Adjointness for 2-categories, *Lecture Notes in Mathematics*, Springer, New-York (to appear, fall 1973).

SUR LE FONCTEUR DIAGRAMME

par René GUITART

1. Diagrammes et machines.

Soit $\mathfrak{U}$ et $\hat{\mathfrak{U}}$ deux univers tels que $\mathfrak{U}$ appartienne à $\hat{\mathfrak{U}}$ et soit contenu dans $\hat{\mathfrak{U}}$; on note Cat et $\widehat{Cat}$ les catégories correspondantes de foncteurs, et $\overline{Cat}$ la sous-catégorie pleine de $\widehat{Cat}$ ayant pour objets les catégories C telles que $Hom_C(c, c') \in \mathfrak{U}$, pour tout couple (c, c') d'objets de C. Pour tout objet A de $\overline{Cat}$, soit $\mathfrak{D}(A)$ la catégorie ayant pour objets les foncteurs p de X vers A, où $X \in |Cat|$, un morphisme de p vers p' étant déterminé par un couple (f, l), où f est un foncteur de X vers la source X' de p' et l une transformation naturelle de p vers $p'.f$.

Pour tout objet A de $\overline{Cat}$, notons d_A le foncteur canonique de $\mathfrak{D}(A)$ vers Cat qui associe f à (f, l). L'application associant d_A à A s'étend en un foncteur, noté d, de $\overline{Cat}$ vers la catégorie $\overline{Cat}/_{Cat}$ des objets au-dessus de $Cat \in |\overline{Cat}|$, que l'on appelle *foncteur diagramme*.

Pour tout foncteur p de $X \in |\overline{Cat}|$ vers Cat, soit $K(p)$ la catégorie produit croisé [1] de p. L'application associant $K(p)$ à chaque p s'étend en un foncteur K de $\overline{Cat}/_{Cat}$ vers $\overline{Cat}$.

PROPOSITION 1. *Le foncteur K est adjoint à gauche au foncteur d.*

PROPOSITION 2. *$\mathfrak{D}$ est l'endofoncteur d'un triple « à isomorphisme près » $(\mathfrak{D}, \varepsilon, \kappa)$ dans $\overline{Cat}$.* (Voir [1] et [2].)

En fait, $(\mathfrak{D}, \varepsilon, \kappa)$ est une doctrine dans $\overline{Cat}$, de sorte que la catégorie de Kleisli de ce triple est sous-jacente à une bicatégorie, notée $\mathbf{D}$.

PROPOSITION 3. *La bicatégorie $\mathbf{D}$ est isomorphe à la bicatégorie des machines avec sorties $Mac\,S$.*

(Une machine d'entrée X et sortie Y est la donnée d'une fibration de source A et but X et d'un foncteur S de A vers Y [4] .)

C'est au cours d'une discussion avec P. Leroux que j'ai réalisé ce phénomène. Là encore la proposition 1 donne facilement le résultat.

Pour d'autres développements et prolongements de ces questions, on pourra se reporter à [3], où l'on explique comment on peut faire dans ce cadre une théorie des structures algébriques. Un point essentiel à ce sujet est de savoir faire l'extension de Kan «avec paramètre».

2. Extension de Kan généralisée.

Rappelons [6] que, si H est une catégorie cartésienne fermée et complète, alors $\mathfrak{D}(H)$ est cartésienne fermée. En particulier $\mathfrak{D}(Cat)$ est cartésienne fermée, et nous avons un foncteur *hom*-interne

$$\mathcal{H} \text{ de } \mathfrak{D}(Cat)^* \times \mathfrak{D}(Cat) \text{ vers } \mathfrak{D}(Cat).$$

Soit p, $\bar{p}$ et $\hat{p}$ trois objets de $\mathfrak{D}(Cat)$ et η un morphisme (F', f') dans $\mathfrak{D}(Cat)$ de p vers $\bar{p}$. Soit U un foncteur de $\mathfrak{D}(Cat)$ vers Cat tel que $|\ |.U.\mathcal{H}$ soit égal à $Hom_{\mathfrak{D}(Cat)}$. Alors $U(\mathcal{H}(\eta, \hat{p}))$ est un foncteur

de source $U(\mathcal{H}(\bar{p}, \hat{p}))$ et de but $U(\mathcal{H}(p, \hat{p}))$.

Si un élément λ de $Hom_{\mathfrak{D}(Cat)}(p, \hat{p})$ admet une $U(\mathcal{H}(\eta, \hat{p}))$-structure libre ν, nous disons que ν est une *U-extension de Kan à gauche de λ le long de η.*

Soit H le foncteur de $\mathfrak{D}(Cat)$ vers Cat associant à un foncteur p de X vers Cat la catégorie $K(\iota.|\ |.p)$, où ι est l'inclusion de Ens vers Cat. Soit p_2 le foncteur de Cat vers Ens associant à une catégorie l'ensemble de ses morphismes.

THEOREME. *Si les extensions de Kan le long de F' existent et si le foncteur $p_2.\hat{p}$ est à quasi-quotients* [5], *alors le foncteur $H(\mathcal{H}(\eta, \hat{p}))$ admet un adjoint à gauche.*

1. C. EHRESMANN, *Catégories et Structures*, Dunod, Paris 1965, et cours polycopié sur les espèces de structures, Paris 1969.
2. D. PROCHASSON, Catégories complètes à gauche et Triples, *Esquisses Mathématiques* 12, Paris 1971. (On m'a signalé que A. Kock a fait des travaux proches de ces questions.)
3. R. GUITART, Structures algébriques et extension de Kan d'applications covariantes, *C. R. A. S.* 276, Paris (1973).
4. P. LEROUX, non publié. (La notion de machine utilisée ici est un cas particulier de celle de système guidable, introduite par A. Bastiani, dans des publications du Laboratoire d'Automatique théo. de Caen en 1963 et 1964.)
5. C. EHRESMANN, Structures quasi-quotients, *Math. Ann.* 171 (1967), p. 293.
6. F. FOLTZ, *C. R. A. S.* Paris, 271 (1970), p. 221.

THE CATEGORY OF NILPOTENT GROUPS AND LOCALIZATION

by Peter HILTON

Let $\mathfrak{N}$ be the category of nilpotent groups. We say that G in $\mathfrak{N}$ is *P-local*, where P is a family of primes, if the function $x \mapsto x^n$, n prime to P, $x \in G$, is a bijection. Our object is to construct the P-localization of an arbitrary group in $\mathfrak{N}$. Thus we seek to associate with G in $\mathfrak{N}$ a P-local group G_P in $\mathfrak{N}$ and a homomorphism $e: G \to G_P$, called the *localizing map*, such that

$$e^*: Hom(G_P, H) \simeq Hom(G, H)$$

for every P-local H in $\mathfrak{N}$. Such a construction has been carried out explicitly by MALCEV [3], LAZARD [4] and BAUMSLAG [1], and is described in WARFIELD [5]. However, we do not follow this direction, but use the homology theory of groups to prove the existence of a localization and thereby to establish its basic properties.

The category $\mathfrak{N}$ has a natural filtration of full subcategories

$$\cdots \subseteq \mathfrak{N}_{c-1} \subseteq \mathfrak{N}_c \subseteq \cdots,$$

where $\mathfrak{N}_c$ is the category of nilpotent groups of class $\leqslant c$. Thus $\mathfrak{N}_1$ is the category of commutative groups. Our main theorems are the following.

THEOREM 1. *There exists a functor $L_c: \mathfrak{N}_c \to \mathfrak{N}_c$ and a natural transformation $e_c: 1 \to L_c$ such that $e_c: G \to L_c(G)$ is the localizing map in $\mathfrak{N}_c$. Moreover, we may choose L_c, e_c so that*

$$L_c \mid \mathfrak{N}_{c-1} = L_{c-1}, \quad e_c \mid \mathfrak{N}_{c-1} = e_{c-1}.$$

A homomorphism $\phi: G \to H$ in $\mathfrak{N}$ is called *P-injective* if every element in $Ker\,\phi$ is a torsion element of order prime to P; it is called *P-surjective* if, to each $y \in H$, there exists n prime to P with $y^n \in Im\,\phi$.

THEOREM 2. *The homomorphism $\phi: G \to H$ in $\mathfrak{N}$ is the localizing map if H is P-local and ϕ is P-bijective.*

Our technique is to prove Theorems 1 and 2 simultaneously by induction on c. The case $c = 1$ is elementary and, in this case, $e: G \to G_P$

is the evident canonical map $G \to G \otimes \mathbf{Z}_P$, where $\mathbf{Z}_P$ is the ring of integers localized at P. The inductive step is then executed using the lower central series of G and cohomology theory. In particular, one proves the following propositions:

PROPOSITION 3. *Let N be a P-local abelian group. Then*

$$e^*: H^k(G_P, N) \simeq H^k(G, N).$$

PROPOSITION 4. *The functor L is exact; that is, L preserves injections, surjections, and short exact sequences of nilpotent groups.*

The details of the argument are given in [2].

We give two elementary examples of the applicabiiity of our results.

THEOREM 5. *Let G be a nilpotent group and let Π be a family of primes. Then the set of Π-torsion elements of G constitutes a normal subgroup of G.*

PROOF. Let P be the complement of Π, and P-localize. Then $\ker e: G \to G_P$ consists of Π-torsion elements, by Theorem 2. On the other hand, since G_P is P-local, every Π-torsion element of G is the kernel of e. Thus the set of Π-torsion elements of G constitutes the kernel of e.

THEOREM 6. *Let $G' \rightarrowtail G \twoheadrightarrow G''$ be a short exact sequence of nilpotent groups. If any two of these groups are P-local, so is the third.*

PROOF. We P-localize. By Proposition 4 we obtain a map of short exact sequences

$$\begin{tikzcd} G' \arrow[r, tail] \arrow[d, "e'"] & G \arrow[r, two heads] \arrow[d, "e"] & G'' \arrow[d, "e''"] \\ G'_P \arrow[r, tail] & G_P \arrow[r, two heads] & G''_P \end{tikzcd}$$

By hypothesis, two of e', e, e'' are isomorphisms; so therefore is the third.

Let $L: \mathfrak{N} \to \mathfrak{N}$ be the localizing functor given by Theorem 1, and let $\mathfrak{N}_P$ be the full subcategory of $\mathfrak{N}$ consisting of P-local groups. Then $\mathfrak{N}_P$ is a reflective subcategory of $\mathfrak{N}$ and it is natural to ask for the morphisms of $\mathfrak{N}$ rendered invertible by L. One proves [2]:

THEOREM 7. *Let $\phi: G \to H$ in $\mathfrak{N}$. Then ϕ_P is an isomorphism if and only* *if ϕ is P-bijective.*

Let S be the family of P-bijective morphisms of $\mathfrak{N}$.

COROLLARY 8. *The category of fractions $\mathfrak{N}[S^{-1}]$ is equivalent to $\mathfrak{N}_P$.*

COROLLARY 9. *The functor $\mathfrak{N}[S^{-1}](-,G): \mathfrak{N} \to \mathcal{E}ns$ is represented by G_P.*

This last corollary reveals the connection of this theory with the general completion problem. Given a saturated family S of morphisms of a category $\mathcal{C}$, we ask whether, to a given object Y in $\mathcal{C}$, there exists an object, Y_S, representing the (contravariant) functor $\mathcal{C}[S^{-1}](-,Y)$: $\mathcal{C} \to \mathcal{E}ns$. That is, we ask for a natural equivalence

$$\mathcal{C}[S^{-1}](-,Y) \simeq \mathcal{C}(-,Y_S).$$

ADAMS and DELEANU have shown that such a completion Y_S always exists if $\mathcal{C}$ is the homotopy category of CW-complexes and S is the family of morphisms of $\mathcal{C}$ rendered invertible by an additive homology theory. However, their argument does not adapt to yield a categorical argument for the existence of a localization in $\mathfrak{N}$.

It would be interesting to generalize localization to a broader category of groups, while retaining its valuable algebraic features. This should then lead to a corresponding broadening of the category of spaces - beyond nilpotent spaces - suitable for localization. It would also be interesting to analyse the situation leading to the compatibility of the localization functors L_c over the filtering subcategories $\mathfrak{N}_c$, according to Theorem 1.

1. BAUMSLAG G., Some remarks on nilpotent groups with roots, *Proc. Amer. Math. Soc.* 12 (1961), 262-267
2. HILTON J. P., Localization and cohomology of nilpotent groups, *Math. Zeit.* (1973).
3. KUROSH A. G., *The Theory of Groups.* Vol. 2, Chelsea Publishing Company (1960).
4. LAZARD M., Sur les groupes nilpotents et les anneaux de Lie, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* 71 (1954), 101-190.
5. WARFIELD R. B., Localization of nilpotent groups, University of Washington (1972) (mimeographed).

A CATEGORICAL CONCEPT OF CONNECTEDNESS

by Rudolf E. HOFFMANN

An object C of a category $\mathcal{C}$ is a *Z-object* iff $Hom(C,-)$ preserves coproducts; C is called *Z-generated* iff $C = \coprod_{i \in J} C_i$ for Z-objects C_i; the class of Z-objects is denoted by $B(\mathcal{C})$, the class of Z-generated objects by $Z(\mathcal{C})$ (for the corresponding subcategories the same symbols are used); $\mathcal{C}$ is called *based* iff $\mathcal{C}$ has coproducts and every object of $\mathcal{C}$ is Z-generated.

In *Top* (topological spaces and continuous maps) Z-objects are the non-void connected spaces (non-void, because an initial object in a category $\mathcal{C}$ is not a Z-object); analogously in *Cat* (small categories and functors) and *Graph* (directed graphs) the non-void connected categories, resp. graphs are the Z-objects. For a group G, $[G, Ens]$ will denote the category of G-sets: the transitive (or simple) G-sets are exactly the Z-objects. In the category ${}^qMet$ of the quasi-metric spaces (two different points may have infinite distance or null distance) and non-expansive maps Z-objects are those non-void spaces with finite distance only. *Cat*, *Graph*, $[G, Ens]$, ${}^qMet$, and specially *Ens*, are based categories (Z-objects in *Ens* are final objects), but *Top* is not. There are negative criteria (existence of a null object or a strictly final object) that exclude the existence of Z-objects in the categories of groups, etc., and of unital rings ($\{0\}$ is strictly final); especially if both $\mathcal{C}$ and $\mathcal{C}^{\circ}$ are based categories, then $\mathcal{C}$ is equivalent to the final category $\mathbf{1}$.

A based category $\mathcal{C}$ is exactly the universal completion of its bases $B(\mathcal{C})$ with respect to coproducts; the functor $B(\mathcal{C}) \to \mathbf{1}$ obviously induces a coproduct-preserving functor $S: \mathcal{C} \to Ens$ (since $B(Ens) \simeq \mathbf{1}$), and if, in addition, $\mathcal{C}$ has a final object t, one has the following adjunction $S \dashv L$, where L is a left adjoint to $Hom(t,-): \mathcal{C} \to Ens$.

A cone $\{f_i : A_i \to A\}_{i \in J}$ is called a *Z-system* iff every A_i is a Z-object and for every Z-object C, $\{Hom(C, f_i)\}_{i \in J}$ is a coproduct; Z-systems are uniquely determined (up to ...). In *Top* a Z-system is the family of connected components; in a based category it is the (unique!) representation of an object as a coproduct of Z-objects. If $\mathcal{C}$ has coproducts, $Z(\mathcal{C}) \to \mathcal{C}$ is coreflective iff $\mathcal{C}$ has Z-systems (for every object). If $\mathcal{C}$ has colimits, $Z(\mathcal{C}) \to \mathcal{C}$ is closed under colimits. This provides an idea for an existence criterion for Z-systems: if $\mathcal{C}$ has an $(\mathfrak{E}, \mathfrak{M}$-mono)-factorization (diagonal condition), if the class of Z-objects is closed under $\mathfrak{E}$-« quotients », if $\mathcal{C}$ is $\mathfrak{M}$-well-powered, and if $\mathcal{C}$ has colimits for connected diagrams $T: \Sigma \to \mathcal{C}$ with $\mathfrak{M}$-transition morphisms (i.e. $Tp \in \mathfrak{M}$ for $p \in \Sigma$), then every object $A \in \mathcal{C}$ has a Z-system $\{ f_i : A_i \to A \}_{i \in J}$ and every $f_i \in \mathfrak{M}$. -A category $\mathcal{C}$ with coproducts is based iff $\mathcal{C}$ has Z-systems and $B(\mathcal{C}) \to \mathcal{C}$ is dense.

If $(T, \eta, \mu) = \mathbf{T}$ is a monad in a based category $\mathcal{C}$ such that T preserves coproducts, then $\mathcal{C}^{\mathbf{T}}$ is based too (e.g. *Cat* over *Graph*, $[G, Ens]$ over *Ens*); since for a small category $\mathfrak{A}$,

$$[\mathfrak{A}, \mathcal{C}] \to [Ob\,\mathfrak{A}, \mathcal{C}] = \mathcal{C}^{Ob\,\mathfrak{A}}$$

is monadic, and a power of a based category is based too (its basis is a co-power of the original basis), $[\mathfrak{A}, \mathcal{C}]$ is based (because $\mathcal{C}$ is) (e.g. $Graph = [\cdot \rightrightarrows \cdot, Ens]$). In a power of *Ens* one has the following characterization of « coproduct-preserving » triples:

If $V : \mathcal{C} \to Ens^M$ (for a set M) is monadic and preserves coproducts, then there is exactly one (up to ...) category $\mathfrak{A}$ with $Ob\,\mathfrak{A} \cong M$ and an isomorphism $\mathcal{C} \cong [\mathfrak{A}, Ens]$ such that the following square commutes:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, "V"'] & {[\mathfrak{A}, Ens]} \arrow[d, "Evaluation"] \\
Ens^M \arrow[r, "\simeq"'] & {[Ob\,\mathfrak{A}, Ens]}
\end{tikzcd}$$

COHERENCE POUR LES CATEGORIES A DISTRIBUTIVITE

par G. Max KELLY

Il est bien connu qu'une monade *commutative* (= monade monoïdale) D sur $\mathcal{E}ns$ admet une structure de foncteur monoïdal symétrique. En conséquence, D préserve les monoïdes abéliens, d'où une loi de distibutivité $\lambda : MD \to DM$ au sens de BECK, M étant la monade dont les algèbres sont les monoïdes abéliens.

On appelle *doctrine* une 2-monade D sur $\mathcal{C}at$; pour une doctrine, on étend le concept de commutativité en remplaçant une égalité par un isomorphisme assujetti à deux axiomes de cohérence. Alors il y a une loi de distributivité $MD \to DM$, où M est désormais la doctrine pour les catégories monoïdales symétriques. Une DM-*algèbre* est une D-algèbre $\mathfrak{A}$ qui est aussi une catégorie monoïdale symétrique, telle que chaque $A \otimes -$ soit un D-foncteur strict.

(En général, si $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ sont des D-algèbres à actions

$$\theta : D\mathfrak{A} \to \mathfrak{A} \quad \text{et} \quad \theta' : D\mathfrak{B} \to \mathfrak{B},$$

un D-foncteur $\phi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ est un foncteur $\phi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ avec une transformation naturelle $\bar{\phi}$

$$\begin{tikzcd} D\mathfrak{A} \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "D\phi"'] \arrow[dr, phantom, "\bar{\phi}\,\Nearrow"] & \mathfrak{A} \arrow[d, "\phi"] \\ D\mathfrak{B} \arrow[r, "\theta'"'] & \mathfrak{B} \end{tikzcd}$$

satisfaisant à deux axiomes de cohérence; ϕ est strict si $\bar{\phi} = id$. Si l'algèbre $\mathfrak{A}$ est libre, à partir d'un D-foncteur $\phi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ on construit un D-foncteur strict $\psi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ et une transformation D-naturelle $\alpha : \psi \Rightarrow \phi$ qui jouit de la propriété universelle évidente.)

Soit maintenant K la doctrine pour laquelle une algèbre est une catégorie $\mathfrak{A}$ qui est à la fois une D-catégorie et une catégorie monoïdale symétrique, munie aussi de transformations naturelles qui font de chaque $A \otimes -$ un D-foncteur (non strict); on demande aussi que $A \otimes B \otimes -$

soit le composé, en tant que D-foncteurs, de $A\otimes -$ et $B\otimes -$, que $I\otimes -$ soit le D-foncteur identité, et que $A\otimes -$ et $-\otimes A$ soient reliés par la relation évidente, moyennant la commutativité de D.

Alors toute DM-algèbre est une K-algèbre, d'où un morphisme $\rho : K \to DM$ de monoïdes, qui est *a fortiori* un morphisme strict de K-objets dans la 2-catégorie d'endo-2-foncteurs de $\mathcal{C}at$. Pour une raison analogue on a un morphisme strict de M-objets $M \to K$, qui se prolonge en un morphisme strict de D-objets $\phi : DM \to K$, qui est en même temps un morphisme *non strict* de K-objets. On constate facilement que $\rho\phi = 1$; quant à $\phi\rho : K \to K$, sa coréflexion stricte comme ci-dessus est l'identité, d'où une transformation naturelle $1 \Rightarrow \phi\rho$. Donc DM est un « sous-objet réflectif » de K.

Dorénavant prenons $D = M$: il s'agit donc d'un $\mathcal{A}$ muni de deux structures $\otimes$ et $\oplus$ de catégories monoïdales symétriques, reliées par un morphisme

$$d : A\otimes(B\oplus C) \to (A\otimes B)\oplus(A\otimes C)$$

de distributivité, qui peut être ou non un isomorphisme. Le résultat ci-dessus implique immédiatement les résultats de cohérence de LAPLAZA sur la commutativité de certains diagrammes dans ce contexte.

L'HOMOLOGIE SINGULIERE ET L'HOMOLOGIE SIMPLICIALE INTERPRETEES COMME HOMOLOGIES ASSOCIEES A UN COTRIPLE. APPLICATIONS

par Heinrich KLEISLI

La plupart des théories d'homologies établies pour des objets algébriques peuvent être construites de la façon suivante:

On se donne un cotriple $\mathbf{G}=(G, \varepsilon, \delta)$ dans une catégorie C et un foncteur

$$F: C \to Ab \quad (\text{resp. } C^{op} \to Ab).$$

On construit à partir de $\mathbf{G}$ un objet simplicial (G, ε, δ) d'après la recette de GODEMENT, on abandonne les opérateurs de dégénérescence, on applique le foncteur F, et on considère le complexe de (co) chaînes $KF(G, \varepsilon)_0$. La (co) homologie $HKF(G, \varepsilon)_0$ est appelée la *(co) homologie associée au cotriple* $\mathbf{G}$ *à coefficient* F.

La question suivante s'impose:

Est-ce que l'on peut interpréter certaines homologies géométriques de cette façon ?

Une réponse affirmative est donnée pour l'homologie singulière d'un espace et pour la (co) homologie simpliciale du nerf d'un recouvrement ouvert. Comme applications immédiates de ces interprétations, on obtient des démonstrations «par modèles acycliques» des théorèmes du type de LERAY et de DE RHAM.

L'exemple suivant décrit de façon plus précise devrait éclaircir les idées. Soit C la catégorie dont les objets sont des couples $(X, \mathfrak{U})$, où X est l'espace sous-jacent d'une variété différentielle et $\mathfrak{U}$ le recouvrement donné par les cartes d'un atlas. Nous désignons par C_{-1} le foncteur qui associe à chaque objet $(X, \mathfrak{U})$ le groupe abélien libre engendré par l'ensemble des composantes connexes de X et nous posons

$$\Omega^{-1} = Hom_{\mathbf{R}}(C_{-1}-, \mathbf{R}).$$

Alors on peut construire un cotriple $\mathbf{G} = (G, \varepsilon, \delta)$ dans C tel que le complexe de cochaînes $K\Omega^{-1}(G, \varepsilon)_0(X, \mathfrak{U})$ a le même type d'homotopie que le complexe $C^0(\mathfrak{U}, \mathbf{R})$ des cochaînes à valeurs réelles du nerf du recouvrement $\mathfrak{U}$. Le complexe $\Omega^0(X, \mathfrak{U})$ des groupes de formes différentielles de la variété augmenté sur $\Omega^{-1}(X, \mathfrak{U})$ est fonctoriel en $(X, \mathfrak{U})$. On obtient donc un double complexe

$$\begin{array}{ccc} \Omega^{-1}(X, \mathfrak{U}) & \longrightarrow & \Omega^0(X, \mathfrak{U}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Omega^{-1}(G, \varepsilon)_0(X, \mathfrak{U}) & \longrightarrow & \Omega^0(G, \varepsilon)_0(X, \mathfrak{U}) \end{array}$$

qui dans le cas d'un recouvrement C^∞-simple est «acyclique», d'où il résulte l'existence d'un isomorphisme entre les groupes de cohomologie $H\Omega^0(X, \mathfrak{U})$ et $HC^0(\mathfrak{U}, \mathbf{R})$ (théorème de DE RHAM).

DUALITES POUR LES STRUCTURES ALGEBRIQUES ESQUISSEES

par Christian LAIR

La Théorie des Esquisses (ou catégories munies de cônes) (cf. [1], [2],...) permet l'étude de la notion de dualité pour les structures algébriques «à valeurs» dans une catégorie donnée.

A une catégorie munie de cônes σ on associe un groupe ∂_σ, produit des groupes d'automorphismes des catégories «bases» des cônes distingués de σ. A chaque $g \in \partial_\sigma$ est associée une catégorie munie de cônes σ_g. On désigne par G_σ le groupoïde des isomorphismes entre les catégories munies de cônes σ_g, lorsque g parcourt ∂_σ. Alors ∂_σ opère à droite (fonctoriellement) sur le groupoïde G_σ.

Notons E_σ l'ensemble des composantes connexes de G_σ et ∂'_σ le sous-groupe de ∂_σ, stabilisateur global de la composante connexe $\check{\sigma}$ de σ dans G_σ.

Toutes les composantes connexes de G_σ sont isomorphes.

L'ensemble E_σ est muni d'une structure d'espace homogène, à droite, sur le groupe ∂_σ, isomorphe à l'espace homogène des classes à droite $\partial_\sigma \backslash \partial'_\sigma$.

Si $\check{g} \in \partial_\sigma \backslash \partial'_\sigma$ est la classe des $g \in \partial_\sigma$, on choisit un et un seul $\sigma_{\check{g}}$, représentant de la composante connexe associée à g par l'isomorphisme $E_\sigma \sim \partial_\sigma \backslash \partial'_\sigma$. Si H est une catégorie, pour tout couple $(\check{g}, \check{g}')$ de deux éléments de $\partial_\sigma \backslash \partial'_\sigma$, les catégories de réalisations $H^{\sigma_{\check{g}}}$ et $H^{\sigma_{\check{g}'}}$ sont canoniquement isomorphes. L'isomorphisme ainsi obtenu est un isomorphisme *de dualité entre structures algébriques d'espèces duales.*

Par exemple, si σ est l'esquisse de magma unitaire à droite, ∂_σ est isomorphe à $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ et E_σ a deux éléments. On constate que $\sigma_0 = \sigma$ et que σ_1 est l'esquisse de magma unitaire à gauche. L'isomorphisme entre Ens^σ et Ens^{σ_1} qui en résulte associe à un magma unitaire à droite son magma unitaire à gauche dual.

Nous disons qu'une catégorie munie de cônes σ' est en *auto-dua-*

lité si $\sigma'_g = \sigma'$ pour tout $g \in \partial_{\sigma'}$.

Désignons par $\mathcal{O}$ la catégorie pleine d'homomorphismes entre catégories munies de cônes et par $\mathcal{C}$ la sous-catégorie pleine dont les objets sont en auto-dualité.

Le foncteur injection canonique de $\mathcal{C}$ *vers* $\mathcal{O}$ *admet un adjoint à gauche* Q.

En particulier, H est en auto-dualité; il en résulte un isomorphisme $H^{\sigma} \xrightarrow{\sim} H^{Q(\sigma)}$. On en déduit un homomorphisme de groupes

$$F_H : \partial_{\sigma} = Aut(Q(\sigma)) \longrightarrow Aut(H^{\sigma}).$$

Les automorphismes images par F_H d'un élément de $Aut(Q(\sigma))$ sont des *automorphismes de dualité pour les structures algébriques d'espèce* σ.

Par exemple, si σ est l'esquisse de catégorie, $\check{\sigma}$ a deux objets, et $Aut(Q(\sigma))$ est isomorphe à $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. On montre que $F_{Ens}(1)$, de Cat vers Cat, associe à une catégorie sa catégorie duale.

Soit Σ l'esquisse de catégorie munie d'un choix de limites [3]. Alors E_{Σ} a deux éléments; soit $\Sigma_0 = \Sigma$ et Σ_1 leurs représentants. L'isomorphisme de Ens^{Σ} sur Ens^{Σ_1} associe à une catégorie munie de limites σ une catégorie munie de limites σ^*.

Toute réalisation de σ vers une catégorie H est une *structure algébrique d'espèce* σ tandis que toute réalisation de σ^* vers H est une *co-structure algébrique d'espèce* σ.

Par exemple, si σ est l'esquisse de groupe, σ^* est l'esquisse de co-groupe.

Ces résultats ont été résumés dans [4] et développés dans un article, à paraître dans ces «Cahiers».

1. BASTIANI-EHRESMANN, *Cahiers Topo. et Géom. diff.* XIII-2 (1972).
2. C. EHRESMANN, Introduction to the theory of structured categories, *Technical Report* 10, University of Kansas, Lawrence 1966.
3. A. BURRONI, Esquisses des catégories à limites et des Quasi-topologies, *Esquisses Mathématiques 5*, Paris 1970.
4. C. LAIR, Note aux *C. R. A. S.* 276, Paris (1972), p. 1647.

VARIATIONS SUR UN THEME DE YONEDA

par René LAVENDHOMME

On se propose d'indiquer un «lemme de Yoneda relationnel».

La situation de départ est la suivante: soit $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux catégories monoïdales symétriques fermées; soit $\mathcal{X}$ une $\mathcal{C}$-catégorie et $F: \mathcal{X} \to \mathcal{C}$ un $\mathcal{C}$-foncteur. Donnons-nous un bifoncteur $R: \mathcal{C}^o \times \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, avec les compositions naturelles et relativement naturelles

$$R^{A'}_{A,B}: R(A,B) \to \mathcal{D}(R(A',A), R(A',B)),$$

$$R^{A,B}_{B'}: R(A,B) \to \mathcal{D}(R(B,B'), R(A,B')).$$

Intuitivement, $R(A,B)$ est à penser comme un «objet des relations» de A vers B. On suppose alors que «les morphismes sont des relations», c'est-à-dire que l'on a un bifoncteur $H': \mathcal{C}^o \times \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ et une transformation naturelle $m: H' \to R$ avec $H'(I, \mathcal{C}(A,B)) \simeq H'(A,B)$ et avec les deux conditions d'unitarité suivantes:

1° Le morphisme $\mu_{X,Y}: R(X,Y) \to \mathcal{D}(H'(I,X), R(I,Y))$ défini par $\mu_{X,Y} = \mathcal{D}(m_{I,X}, 1) \circ R^I_{X,Y}$ est un isomorphisme.

2° Le composé des morphismes suivants est l'identité sur $R(I,C)$:

$$R(I,C) \to \mathcal{D}(R(C,C), R(I,C)) \to \mathcal{D}(H'(I,I), R(I,C)) \to R(I,C).$$

Supposons enfin que $\mathcal{D}$ soit assez complète et $\mathcal{X}$ assez petite pour que l'on puisse définir

$$N_R(G,F) = \int_B R(GB, FB).$$

On a alors

$$N_R(\mathcal{X}(A,-), F) \simeq R(I, FA).$$

Voici un exemple d'une telle situation. Soit F et G deux 2-foncteurs d'une 2-catégorie $\mathcal{X}$ vers *Cat*. Un *distributeur naturel de G vers F* consiste en la donnée pour chaque A d'un distributeur $\phi_A: GA \to\!\!\!\circ\!\!\!\to FA$ rendant les carrés évidents commutatifs. On obtient en fait une catégorie $N_{Dis}(G,F)$. Le théorème indiqué nous donne alors l'isomorphisme

$$N_{Dis}(h^A, F) \simeq Dis(1, FA),$$

c'est-à-dire avec la catégorie des préfaisceaux d'ensembles sur FA.

MOYENNES INVARIANTES SUR LES CATEGORIES ET GROUPOIDES

par Guy LENGAGNE

Les mesures sur les groupoïdes ont été introduites avec des conditions fortes par J. J. Westman dans [1]. La méthode utilisée revient, plus ou moins, à dominer (au sens de [2]) le groupoïde considéré dans la catégorie des mesures.

La notion de catégorie structurée (ou de groupoïde structuré) dans la catégorie des mesures semble, quant à elle, être trop forte pour entraîner des résultats intéressants.

Par ailleurs, de nombreux travaux sur les mesures invariantes ou le plus souvent sur les moyennes invariantes dans un groupe ou un semi-groupe ont permis de relier des propriétés a priori très différentes. Il serait intéressant de disposer d'une notion similaire pour les catégories et groupoïdes. On est ainsi amené à poser les définitions suivantes:

Soit $C^{\cdot}$ une catégorie, α et β ses applications source et but. On appelle *morphisme de translation à gauche de* $C^{\cdot}$ une famille $s = (s_e)_{e \in C^{\cdot}_0}$ d'éléments s_e de C vérifiant les propriétés suivantes:

1° s_e a pour source e, pour toute unité e de $C^{\cdot}$,

2° si ϕ_s est l'application de $C^{\cdot}_0$ dans C associant s_e à e, alors $\beta \circ \phi_s$ est une bijection de $C^{\cdot}_0$ sur lui-même.

L'ensemble T_g *des morphismes de translation à gauche de* $C^{\cdot}$ *est un semi-groupe d'opérateurs sur* C, relativement aux lois:

$$(s', s) \to s' \odot s = (s'_{\beta(s_e)} \cdot s_e)_{e \in C^{\cdot}_0},$$

où $s = (s_e)_{e \in C^{\cdot}_0} \in T_g$ et $s' = (s'_e)_{e \in C^{\cdot}_0} \in T_g$,

$$(s, x) \to s \odot x = s_{\beta(x)} \cdot x \quad \text{pour } x \in C.$$

Soit A un sous-ensemble de T_g et F un sous-espace vectoriel de $Br(C)$ (espace vectoriel des fonctions numériques bornées sur C), contenant les fonctions constantes et tel que:

$$f \in F \text{ et } s \in A \text{ entraînent } s \odot f \in F, \text{ où } s \odot f(x) = f(s \odot x);$$

une moyenne M sur F est dite *invariante à gauche par* A si

$$M(f) = M(s \odot f) \quad \text{pour tout } f \in F \text{ et tout } s \in A .$$

On peut alors donner des conditions équivalentes pour l'existence d'une telle moyenne. Par exemple, $C^{\cdot}$ *admet une moyenne (sur* $Br(C)$*) invariante à gauche par* A *ssi elle admet une mesure* g*-invariante par* A.

On s'intéresse ensuite au cas où $(C^{\cdot}, T)$ est une catégorie topologique [3] et où $A = T_{gc}$, sous-semi-groupe de T_g formé des $s \in T_g$ tels que l'application $x \to s \odot x$ soit continue.

T_{gc} *est un semi-groupe quasi-topologique pour la quasi-topologie de la convergence locale* [4, 3]. Ainsi c'est un semi-groupe topologique si la topologie induite par T sur $C^{\cdot}_0$ est localement compacte.

On donne alors un théorème de Haar pour les groupoïdes topologiques compacts.

Pour les catégories topologiques compactes, on montre que l'existence d'une moyenne invariante à gauche entraîne l'existence dans la catégorie considérée d'un unique idéal à droite d'un certain type.

1. J. J. WESTMAN, Harmonic Analysis on groupoids, *Pacific Jour. of Math.* 27-3 (1968).
2. C. EHRESMANN, *Catégories et Structures*, Paris, Dunod, 1965.
3. C. EHRESMANN, Catégories topologiques, *Indigationes Math.* 28-1 (1966).
4. A. BASTIANI, Applications différentiables et variétés de dimension infinie, *Jour. d'Analyse Math.* XIII, Jérusalem (1964).

MORITA EQUIVALENCES OF ENRICHED CATEGORIES

by Harald LINDNER

The well known «Morita theorems» treat the question of equivalence of two categories of modules. They contain criteria for functors between two categories of modules to be adjoint, coadjoint, or an equivalence. These theorems are generalized as follows:

A ring $\underline{A}$ can be considered as a semiadditive category with one object. The category of $\underline{A}$-left modules can then be considered as the category of additive functors from $\underline{A}$ to $\underline{Ab}$, the category of abelian groups. In the generalization, $\underline{Ab}$ is replaced by any bicomplete closed category $\underline{V}$ (in the sense of DAY and KELLY). $\underline{A}$ is replaced by any small $\underline{V}$-category, and the $\underline{V}$-category $[\underline{A}, \underline{V}]$ of $\underline{V}$-functors from $\underline{A}$ to $\underline{V}$ plays the role of the category of $\underline{A}$-left modules.

Futhermore, for every small $\underline{V}$-category $\underline{A}$ we define a $\underline{V}$-category $P\underline{A}$ such that *$P\underline{A}$ and $P\underline{B}$ are $\underline{V}$-equivalent iff the $\underline{V}$-functor categories $[\underline{A}, \underline{D}]$ and $[\underline{B}, \underline{D}]$ are $\underline{V}$-equivalent for every $\underline{V}$-cocomplete $\underline{V}$-category $\underline{D}$*. The fact that $P\underline{A}$ need not have a small skeleton causes some trouble in the proof of this theorem. For this reason and for further applications we introduce the notion of a «small» $\underline{V}$-functor.

As particular examples one gets topological «Morita theorems» by considering $\underline{V} = \underline{CG}$, the category of compactly generated topological spaces, or $\underline{V} = \underline{Ke}$, the category of compactly generated topological Hausdorff spaces (=Kelley spaces), or $\underline{V} = \underline{Ab}(\underline{CG})$, $\underline{V} = \underline{Ab}(\underline{Ke})$, the categories of abelian group objects in $\underline{CG}$ or $\underline{Ke}$ We refer particularly to another example: In this case small $\underline{V}$-categories are semiquasimetric spaces (X, d). If in particular (X, d) happens to be a metric space, then $P(X, d)$ is shown to be closely related to the completion of the metric space (X, d).

THE ADJOINT FUNCTOR PRINCIPLE FOR ELEMENTARY TOPOI

by Ch. Juul MIKKELSEN

We consider the situation $\mathbf{C} \xrightarrow{U} \underline{E}$, where $\underline{E}$ is a fixed elementary topos, $\mathbf{C}$ is a category with equalizers and pull-back along monomorphisms and U is a functor preserving these inverse limits. Assume that U creates and reflects isomorphisms, and that $\mathbf{C}$-subobjects are representable by U in $\underline{E}$, and closed under internal intersections in $\underline{E}$; *then the functor U has a left adjoint provided there exists a functor $B: \underline{E} \to \mathbf{C}$ and a natural transformation* $\eta: 1_{\underline{E}} \Rightarrow BU$ satisfying the following solution condition:

$$\forall\ C \in |\mathbf{C}|, \quad \exists\ X \in |\mathbf{C}|, \quad \exists\ m: C \rightarrowtail X \text{ mono},$$
$$\exists\ h: (C)UB \to X \text{ such that}$$

$$\eta_{(C)U} \cdot (h)U = (m)U .$$

Let $\mathbf{C}$ be the category of complete Heyting algebras and *lwc*-morphisms,

$$(X)B = \Omega^{\Omega^X}, \quad (f)\,B = \Omega^{\Omega^f},$$
$$\eta_X = \{\ \}_X \cdot \uparrow seg_{\Omega^X} .$$

The free algebra on X is the smallest internal topology on Ω^X generated by the principal ultrafilters on X.

THE INTERNAL AND EXTERNAL ASPECT OF LOGIC AND SET THEORY IN ELEMENTARY TOPOI

by Gerhard OSIUS

Concerning the relationship between set theory and elementary topoi we consider two problems:

1. Find a general procedure of proving set-theoretical results internally in a topos (internal aspect).

2. Characterize certain topoi as «the category of sets» arising from certain types of models for set theory, thus generalizing the well-known results of COLE, W. MITCHELL, OSIUS (external aspect).

To attack both problems with a common method let us start off with an elementary topos $\mathbf{E}$ and recall W. MITCHELL's *language* $L(\mathbf{E})$. $L(\mathbf{E})$ is a many-sorted first-order language having the objects of $\mathbf{E}$ as «types». The *terms* of $L(\mathbf{E})$ are given by:

(a) variables of each type, (b) for any map $A \xrightarrow{f} B$ there is unary operator $f(-)$ from terms of type A to those of type B, (c) «ordered pairs» $<t_A, s_B>$ of type $A \times B$ for all terms t_A and s_B of type A and B. *Predicates* of $L(\mathbf{E})$: for any subobject $A \xrightarrow{M} \Omega$ of A we have a unary predicate $(-) \in M$ for terms of type A. The *formulas* of $L(\mathbf{E})$ are composed from the atomic ones using the connectives $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$ and quantifiers $\exists_A x_A$, $\forall_A x_A$ in the usual way.

In $L(\mathbf{E})$ equality, membership and evaluation are defined as follows

$$(o)\quad x_A = y_A :\Leftrightarrow\ <x_A, y_A> \in (A \times A \xrightarrow{\Delta} \Omega),$$

$$(i)\quad x_A \in Y_{PA} :\Leftrightarrow\ <Y_{PA}, x_A> \in (PA \times A \xrightarrow{ev} \Omega),$$

$$(ii)\quad F_{BA}(x_A) := (B^A \times A \xrightarrow{ev} B)(<F_{BA}, x_A>).$$

Using W. MITCHELL's *internal interpretation* of $L(\mathbf{E})$ in $\mathbf{E}$ (with slight modifications), which assigns to each formula ϕ of $L(\mathbf{E})$ with free variables of types $A_1, \ldots, A_n$ a subobject $A_1 \times \ldots \times A_n \xrightarrow{\|\phi\|} \Omega$, we define *internal validity*: ϕ is *internal valid* iff $\|\phi\|$ factors through $1 \xrightarrow{true} \Omega$.

THEOREM. *Internal valid are:*

a. the (properly stated) axioms and deductive rules of intuitionistic logic;

b. the axioms of equality and ordered pairs;

c. the following (properly stated) axioms of many-sorted set theory with respect to $=$ *and* $\in$ *of* (o, i)*: extensionality, empty set, singleton, binary and arbitrary union, powerset, separation-scheme.*

The importance of internal validity lies in the fact that the maps $A \xrightarrow{f} B$ in $\mathbf{E}$ are in a 1-1-correspondence to formulas $\phi(x_A, y_B)$ of $L(\mathbf{E})$ for which $\forall_A x_A \ \exists_B y_B \ \phi(x_A, y_B)$ is internal valid – via $graph(f) = \| \phi(x_A, y_B) \|$. This enables us to prove results in $\mathbf{E}$ (e.g. existence and equality of maps) by showing that some formula is internal valid. Thus the above theorem contributes to our problem 1.

As to the external aspect let us from now on suppose that $\mathbf{E}$ is *well-opened*, i.e. the subobjects of 1 (called *open* objects) generate. Then we can define an *external interpretation* of $L(\mathbf{E})$ in $\mathbf{E}$ as follows: Terms of type A range over partial maps from 1 to A (called A-elements) which can be considered as maps $1 \xrightarrow{a} \tilde{A}$ or $U \overset{u}{\rightarrowtail} A$ (U open) related by the pullback

$$\begin{array}{ccc} U & \overset{u}{\rightarrowtail} & A \\ \downarrow & & \downarrow \eta_A \\ 1 & \xrightarrow{a} & \tilde{A} \end{array}$$

The operations on terms are interpreted in the obvious way. For an A-element a, resp. u, we define its *support* $1 \xrightarrow{|a| = |u|} \Omega$ to be the character of $U \xrightarrow{u} 1$.– For a given formula $\phi(x_{A_1}, \ldots, x_{A_n})$ with free variables x_{A_i} of type A_i and given A_i-elements a_i we define the external value

$$1 \xrightarrow{\quad |\phi(a_1, \ldots, a_n)| \quad} \Omega$$

in the external HEYTING-algebra $\mathbf{E}(1, \Omega)$ by induction on the lenght of formulas: In the atomic case $| a \in_A M |$ is $1 \xrightarrow{a} \tilde{A} \xrightarrow{\tilde{M}} \Omega$ where $\tilde{M}$ is the existential image of $A \xrightarrow{M} \Omega$ under $A \rightarrowtail \tilde{A}$. In the non-atomic cases let us mention only two in detail:

$$|\neg\phi(a_1,\dots,a_n)| := \neg\,|\phi(a_1,\dots,a_n)| \cap |\langle a_1,\dots,a_n\rangle|$$

$$|\forall_A x_A\ \phi(x_A, a_1,\dots,a_n)| :=$$

$$\inf_{1\xrightarrow[a]{}\tilde{A}}(|a| \Rightarrow |\phi(a,a_1,\dots,a_n)|) \cap |\langle a_1,\dots,a_n\rangle|$$

and similar for $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\exists$.

NOTES. a) The restriction through the support $|\langle a_1,\dots,a_n\rangle| = |a_1| \cap \dots \cap |a_n|$ is essential, since we want $|\phi(a_1,\dots,a_n)| \subset |a_1| \cap \dots \cap |a_n|$ to hold. b) The infimum is an *external* one in $\mathbf{E}(1,\Omega)$ which will exist since $\mathbf{E}$ is well-opened.

We are now able to define external validity for formulas of $L(\mathbf{E})$:

$\phi(x_{A_1},\dots,x_{A_n})$ is *external valid* iff for all A_i-elements a_i $(i=1,\dots,n)$,

$$true = (|\langle a_1,\dots,a_n\rangle| \Longrightarrow |\phi(a_1,\dots,a_n)|).$$

Between the internal and external interpretation we have a useful connection:

THEOREM. *For any formula $\phi(x_{A_1},\dots,x_{A_n})$ of $L(\mathbf{E})$ and A_i-elements a_i $(i=1,\dots,n)$ we have:*

$$|\phi(a_1,\dots,a_n)| = |\langle a_1,\dots,a_n\rangle \in \|\phi(x_{A_1},\dots,x_{A_n})\||\ .$$

As a consequence we note that the notions of internal and external validity coincide, so that we can concentrate ourselves to the former which has already been studied.

Let us finally indicate how the external interpretation contributes to our problem 2. Using the method of «transitive set-objects» which we introduced earlier for well-pointed $\mathbf{E}$, we are able to identify certain A-elements with other B-elements (under some conditions), and thus obtain from the external interpretation an actual «HEYTING-valued model» for an appropriate subsystem of ZF set theory. Throwing in more axioms on the topos $\mathbf{E}$ (e.g. existence of a natural number object, axiom of choice) will give such characterizations as described in problem 2.

QUASI-TOPOS

par Jacques PENON

Cherchant des exemples de Topos en Topologie, on a été amené à généraliser cette notion: on dira qu'une catégorie H est un *quasi-topos* si elle vérifie les trois axiomes suivants:

1° H est à limites projectives et inductives finies.

2° H est cartésienne fermée.

3° Il existe une sous-catégorie M de H stable par changement de base telle que:

a) $Monoef(H) \subset M \subset Mono(H)$, où $Mono(H)$ désigne la classe des monomorphismes de H et $Monoef(H)$ celle des monomorphismes effectifs, ou noyaux.

b) Le foncteur insertion $J_M : H \to H_M$ admet un co-adjoint, où H_M désigne la catégorie «des morphismes partiels pour M» (un morphisme partiel pour M est un span $B \xleftarrow{i} A \xrightarrow{f} B'$, où i appartient à M).

Dans ces conditions on montre que $M = Monoef(H)$, ce qui entraîne que les monomorphismes effectifs de H sont composables.

La notion de Quasi-topos généralise bien celle de Topos: les topos étant exactement les quasi-topos pour lesquels tout monomorphisme est effectif. Elle n'en conserve pas moins la plupart des propriétés pourvu que l'on remplace monomorphisme par monomorphisme effectif chaque fois qu'il y a lieu. Plus précisément, soit H un quasi-topos:

– Pour tout morphisme f de H il existe un foncteur co-adjoint du foncteur «changement de base le long de f».

– Quelle que soit la somme fibrée:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & A' \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i'} \\ B & \xrightarrow{g} & B' \end{array}$$

si i est un monomorphisme effectif, il en est de même de i', et de plus le diagramme précédent est un produit fibré.

– Il existe un foncteur «partie» $\mathcal{P} : Re(H) \to H$ co-adjoint de l'insertion de H dans $Re(H)$, où $Re(H)$ désigne la catégorie ayant mêmes objets que H et dont les morphismes sont les relations de H (i.e. les spans $A \xleftarrow{f} B \xrightarrow{f'} A'$ pour lesquels $[f, f'] : B \to A \times A'$ est un monomorphisme effectif).

– Toute relation d'équivalence est effective.

– H admet un objet Ω classifiant les monomorphismes effectifs et, bien que Ω ne soit pas un objet de HEYTING en général, c'est toutefois un objet ordonné cartésien fermé.

– Soit $Gr(H)$ la sous-catégorie pleine de H ayant pour objets les *objets grossiers* (i.e. les objets A tels que le morphisme «singleton» de A vers Ω^A soit un monomorphisme effectif). Alors $Gr(H)$ est un topos et l'insertion de $Gr(H)$ dans H admet un adjoint.

Citons quelques exemples de quasi-topos autres que les topos:

1) La catégorie associée à l'ordre sur l'ensemble des parties d'un ensemble.

2) La catégorie ayant pour objets les espaces quasi-topologiques (ou Limesräume de KOWALSKY) dont l'ensemble sous-jacent appartient à un univers donné $\mathfrak{U}$ et pour morphismes les applications continues entre ces espaces. (On rappelle qu'un espace quasi-topologique est un ensemble E muni d'une application π associant à tout point x de E un idéal $\pi(x)$ de l'ensemble des filtres sur E, tel que le filtre des surensembles de x appartient à $\pi(x)$. Un filtre est dit *convergent vers* x s'il appartient à $\pi(x)$. De plus on dira qu'une application entre deux ensembles sous-jacents à des espaces quasi-topologiques est continue si l'image d'un filtre convergent vers un point converge vers l'image de ce point.)

3) La sous-catégorie pleine de la précédente ayant pour objets les espaces pseudo-topologiques de CHOQUET (i.e. les espaces quasi-topologiques pour lesquels un filtre converge vers un point si, et seulement si, il en est de même de tout ultrafiltre le contenant).

PROBABILITES ET THEORIE DE LA DECISION DU POINT DE VUE DE LA THEORIE DES CATEGORIES

par Jacques RIGUET

L'utilité de l'introduction du langage des catégories en Algèbre, en Topologie, en Géométrie Différentielle et en théorie des espaces vectoriels topologiques est aujourd'hui indiscutable. Cependant, l'approche catégorique du Calcul des probabilités et de la Statistique n'a pas fait l'objet d'un traitement systématique et les travaux de LINTON en théorie de la mesure et de ROMEI en Statistique sont restés jusqu'à maintenant des tentatives isolées. C'est peut-être que ces travaux se placent d'emblée à un niveau assez élevé et peu accessible aux utilisateurs (physiciens, biologistes, etc...).

Nous tentons de montrer dans cette communication qu'il y a intérêt à introduire le langage catégorique dès le début dans l'enseignement des Probabilités. De même que pour l'enseignement de la Topologie il convient d'en considérer d'abord l'aspect le plus élémentaire non trivial, c'est-à-dire de se baser au départ sur la catégorie des espaces métriques pour ensuite généraliser les énoncés obtenus au cas où cette catégorie est «élargie» à la catégorie des espaces topologiques ou des espaces uniformes, de même pour l'enseignement du Calcul des probabilités il convient d'en considérer d'abord l'aspect le plus élémentaire non trivial, c'est-à-dire de se baser au départ sur la catégorie des espaces probabilisés finiment discrets pour ensuite généraliser notions et énoncés en substituant à cette catégorie celle des espaces probabilisés généraux.

Soit $\underline{e}$ la catégorie des ensembles. Si F est un foncteur d'une catégorie $\mathcal{C}$ vers $\underline{e}$, on désigne par $*F$ la catégorie des objets F-pointés de $\mathcal{C}$.

On commence par définir le *foncteur simplexe* noté «$\frown$»: C'est le foncteur de $\underline{e}$ vers $\underline{e}$ qui à l'ensemble E fait correspondre l'ensemble

$$\widehat{E} = \{ p \in \underline{e}(E, \mathbf{R}) \ / \ supp\, p \text{ fini}, \ \forall x \in E \ \ p(x) \geqslant 0 \,, \ \sum_{x \in supp\, p} p(x) = 1 \}$$

et à l'application f de E vers E' l'application $\widehat{f}$ définie par

$$\forall x' \in E', \quad \forall p \in \widehat{E} \quad \widehat{f}(p)(x') = \sum_{x \in supp\, p \,\cap f^{-1}(x')} p(x).$$

On étudie en parallèle les foncteurs $\mathcal{P}$ et $\frown$: il y a une transformation naturelle «masse unité» du foncteur identique $I_{\underline{e}}$ vers $\frown$ et une transformation naturelle ν de $\widehat{\widehat{\ }}$ vers $\frown$ (définie par $\forall q \in \widehat{\widehat{E}},\ \nu_E(q) = \sum_{p \in \widehat{E}} q(p)p$) qui donne naissance à un triple $(\frown, \nu, \varepsilon)$ analogue au triple classique $(\mathcal{P}, \nu, \varepsilon)$ construit à partir du foncteur partie $\mathcal{P}$.

La catégorie $\underline{p}$ des espaces finiment probabilisés, c'est-à-dire la catégorie $^*\frown$, est alors étudiée «en parallèle» avec la catégorie $\underline{e}$. Il y a encore des foncteurs induction, etc... On définit ensuite le *foncteur stochastique* que l'on note «$\frown$». C'est le foncteur de $\underline{e}^o \times \underline{e}$ vers $\underline{e}$ qui à des ensembles E, F fait correspondre

$$\overset{\frown}{E,F} = \{ p \in \underline{e}(E \times F, \mathbf{R}) \mid \forall x \in E \ p(x,.) \in \widehat{F} \}$$

et aux applications f de E vers E' et g de F vers F' fait correspondre l'application $\overset{\frown}{f,g}$ définie par

$$\forall p \in \overset{\frown}{E,F}, \quad \forall x' \in E' \quad \overset{\frown}{f,g}(p)(x',.) = \widehat{g}(p(f(x'),.)).$$

On étudie ensuite la catégorie des «applications stochastiques» $\underline{s}$ dont les objets sont les ensembles et les flèches de E vers F les triplets (E,F,p) tels que $p \in \overset{\frown}{E,F}$, la composition des deux triplets (E,F,p) et (F,G,q) étant le triplet $(E,G,q \circ p)$ où $q \circ p \in \overset{\frown}{E,G}$ est définie par

$$\forall x \in E \quad \forall z \in G \quad (q \circ p)(x,z) = \sum_{y \in Y} q(y,z)p(x,y),$$

puis la catégorie $fl(\underline{s}, \underline{e})$ des «structures statistiques» constituée par les carrés commutatifs où les deux flèches horizontales sont dans $\underline{e}$ et les deux flèches verticales dans $\underline{s}$.

Si $\xi \in \widehat{E}$ et $p \in \overset{\frown}{E,F}$, on définit $\widetilde{\xi, p} \in \overset{\frown}{E,F}$ par:

$$\widetilde{\xi, p}(x,y) = \xi(x)p(x,y),$$

et $\int_\xi p$ par $\widehat{pr}_2(\widetilde{\xi\ p})$.

Si $\phi \in \underline{e}(E \times F, \mathbf{R})$, la formule de FUBINI généralisée s'écrit

$$\int_{\widetilde{\xi, p}} \phi = \int_\xi \left(\int_{p(x,.)} \phi(x,.) \right)_{x \in E}.$$

On dit que $p' \in \overset{\frown}{F, E}$ est une *probabilité* a posteriori lorsque $\widetilde{\xi, p} = \int_{\xi} \widetilde{p, p'}$. On développe à partir de là une partie «élémentaire» de la théorie de la décision en Statistique.

La seconde partie de l'exposé consiste à montrer comment parvenir à l'étude du Calcul des probabilités classique à partir de l'approche finie précédente: il faut d'abord remplacer la catégorie $\underline{e}$ par la catégorie $\overset{\bullet}{\underline{e}}$ des applications mesurables dont les objets sont les couples $(E, \mathfrak{X})$ constitués d'un ensemble E et d'une tribu $\mathfrak{X}$ de ses parties, et les morphismes de $(E, \mathfrak{X})$ vers $(E', \mathfrak{X}')$ les triplets $((E, \mathfrak{X}), (E', \mathfrak{X}'), f)$ tels que $f^{-1}(\mathfrak{X}') \subset \mathfrak{X}$.

On définit ensuite le foncteur $\wedge$ de $\underline{e}$ vers $\overset{\bullet}{\underline{e}}$ qui à l'objet $(E, \mathfrak{X})$ fait correspondre l'ensemble des applications de $\mathfrak{X}$ dans $\mathbf{R}$ satisfaisant aux axiomes de KOLMOGOROFF. D'où la catégorie $\overset{\bullet}{\underline{p}} = {}^{*}\wedge$ des espaces probabilisés que l'on étudie. On définit enfin le foncteur noyau markovien $\underline{\wedge}$ et la catégorie $\overset{\bullet}{\underline{s}}$ des «applications stochastiques».

A partir de là, le signe $\int$ ne peut être introduit directement comme dans le cas élémentaire et il est nécessaire de développer une théorie de l'Intégration.

CONNEXITE LOCALE

par Daniel TANRE

Soit $\mathcal{T}$ la catégorie des applications continues entre espaces topologiques, au-dessus d'un univers $\mathfrak{U}$. Après avoir vérifié, à l'aide du théorème général d'existence de structures libres, que le foncteur injection canonique de $\mathcal{T}^{lc}$ vers $\mathcal{T}$ admet un coadjoint, où $\mathcal{T}^{lc}$ est la sous-catégorie pleine de $\mathcal{T}$ ayant pour objets les topologies localement connexes, nous construisons explicitement un coadjoint λ par une récurrence transfinie, comme suit:

Soit (E, T) un espace topologique; pour tout voisinage U d'un élément x de E dans T, on note K_{xU} la composante connexe de x dans la topologie induite par T sur U; soit $V'(x)$ le filtre engendré par l'ensemble des K_{xU}, où U parcourt le filtre $V(x)$ des voisinages de x dans T. On définit une topologie T^+ sur E, ayant $V'(x)$ pour filtre des voisinages de x. Cette topologie est plus fine que T; elle est identique à T ssi T est localement connexe.

La récurrence transfinie s'établit alors de la façon suivante: On forme une suite transfinie $(T_\omega)_{\omega \leqslant \xi}$ de topologies sur E en posant:

- $T_0 = T$,
- $T_\omega = (T_{\omega'})^+$, si ω est un ordinal ayant un prédécesseur ω',
- T_ω est la borne supérieure des topologies T_ζ, où $\zeta < \omega$, si ω est un ordinal limite,
- ξ est le successeur du plus petit ordinal équipotent à $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(E))$.

Alors $\lambda(T)$ est par définition la topologie T_ξ.

Signalons quelques propriétés du foncteur λ : Il est compatible avec les sommes. A la réalisation d'une esquisse «algébrique» dans $\mathcal{T}$ est canoniquement associée une réalisation de cette esquisse dans $\mathcal{T}^{lc}$.

Bien que le couple $(T, \lambda(T))$ ne soit pas toujours un feuilletage topologique (au sens de [1]), la construction de $\lambda(T)$ permet de résoudre divers problèmes sur les feuilletages topologiques. Ainsi:

- La catégorie des feuilletages topologiques à feuilles propres est à produits.

- Le foncteur d'oubli de cette catégorie vers la catégorie des applications n'est pas à structures quasi-quotients et il n'est pas Γ-engendrant (avec les définitions de [2]).

Une topologie sur E est la donnée, dans le treillis des parties de E, d'un ensemble de parties stable par réunions quelconques et par intersections finies. Il vient naturellement l'idée de généraliser cette situation en remplaçant le treillis des parties par un treillis quelconque; on obtient ainsi la notion de paratopologie [3].

Nous montrons que, sous certaines conditions, la construction précédente s'applique aux paratopologies. Pour cela, nous définissons d'abord la catégorie $\mathcal{H}$ des applications continues entre paratopologies, en donnant différentes caractérisations de ses morphismes, semblables à celles utilisées en Topologie; nous montrons que le foncteur d'oubli de $\mathcal{H}$ vers la catégorie des treillis locaux complets est à structures finales.

Soit $\mathcal{H}^{\ell c}$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{H}$ ayant pour objets les paratopologies localement connexes (dont diverses définitions sont données). Si Ω est une paratopologie sur un treillis local complet $(E, \leqslant)$ et si la paratopologie discrète sur ce treillis est localement connexe (condition qui n'est pas toujours vérifiée, ainsi que le prouve un contr'exemple), nous construisons une paratopologie localement connexe colibre associée à Ω.

Ces résultats sont indiqués dans deux Notes [4].

1. C. EHRESMANN, Structures feuilletées, *Proc. 5^{th} Canadian Congress* (1961).

2. C. EHRESMANN, Structures quasi-quotients, *Math, Ann.* 171 (1965).

3. C. EHRESMANN, Gattungen von lokalen Strukturen, *Jahresb. Deutschen Math. Verinigung* 60 (1957).

4. D. TANRE, Notes aux *C.R.A.S.* Paris, t. 276 (1973) et 277 (1973).

DIACONESCU'S THESIS

by Myles TIERNEY

Today I would like to talk about some results of my student Radu DIACONESCU. Let $\underline{E}$ be a topos, $\underline{C} \in Cat(\underline{E})$ and write $\underline{E}(\underline{C})$ for the topos of internal, covariant $\underline{E}$-valued functors on $\underline{C}$. There is an adjoint pair

$$\underline{E} \underset{\Delta}{\overset{\varinjlim_{\underline{C}}(\ )}{\rightleftarrows}} \underline{E}(\underline{C}) \quad \text{with} \quad \varinjlim_{\underline{C}}(\ ) \dashv \Delta$$

such that for $F \in \underline{E}(\underline{C})$, $\varinjlim_{\underline{C}}(F)$ is the internal direct limit of F, and for $X \in \underline{E}$, $\Delta(X)$ is the constant internal functor at X.

THEOREM. *$\varinjlim_{\underline{C}}(\ )$ is left exact iff $\underline{C}$ is filtered.*

Here, «filtered» means in the strictly internal sense.

If $F \in \underline{E}(\underline{C})$, call F *flat* if the total space of the internal discrete fibration associated to F is filtered. From the previous theorem, this is the case iff in the adjoint pair

$$\underline{E} \underset{(\ )^F}{\overset{(\ )\otimes_{\underline{C}} F}{\rightleftarrows}} \underline{E}(\underline{C}^{op}),$$

$(\ )\otimes_{\underline{C}} F$ is left exact. Using the fact that all (geometric) morphisms

$$\underline{E} \xrightarrow{\phi} \underline{E}(\underline{C}^{op})$$

are uniquely of this form, we obtain:

THEOREM. *Let $\underline{S}$ be an arbitrary topos, $\underline{E} \xrightarrow{f} \underline{S}$, and $\underline{C} \in Cat(\underline{S})$. Then morphisms*

$$\begin{array}{ccc} \underline{E} & \xrightarrow{\phi} & \underline{S}(\underline{C}^{op}) \\ & {\scriptstyle f}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle \Gamma} & \\ & \underline{S} & \end{array}$$

are in 1-1 correspondence with flat $F \in \underline{E}(f^*\underline{C})$.

An immediate extension to morphisms yields an equivalence of categories:

$$Top_{\underline{E}}(\underline{E}, \underline{S}(\underline{C}^{op})) \simeq flat\,\underline{E}(f^*\underline{C}).$$

COROLLARY. *For arbitrary* $\underline{E} \xrightarrow{f} \underline{S}$,

$$\begin{tikzcd} \underline{E}(f^*\underline{C}^{op}) \arrow[r, "\overline{f}"] \arrow[d, "\Gamma"'] & \underline{S}(\underline{C}^{op}) \arrow[d, "\Gamma"] \\ \underline{E} \arrow[r, "f"] & \underline{S} \end{tikzcd}$$

is a pullback.

If $\underline{E}' \xrightarrow{f} \underline{E}$ and j is a topology in $\underline{E}$, let j' be the topology in $\underline{E}'$ induced by f – i.e. j' is the topology generated by k in

$$\begin{tikzcd} & & K \arrow[dr] & & \\ f^*(J) \arrow[urr] \arrow[r] & f^*(\Omega) \arrow[rr] & & \Omega' \arrow[r, "k"] & \Omega'. \end{tikzcd}$$

THEOREM.

$$\begin{tikzcd} j'\text{-}sheaves(\underline{E}') \arrow[r, "\overline{f}"] \arrow[d, tail] & j\text{-}sheaves(\underline{E}) \arrow[d, tail] \\ \underline{E}' \arrow[r, "f"] & \underline{E} \end{tikzcd}$$

is a pullback.

Thus, we can form the pullback of any morphism $\underline{E} \xrightarrow{f} \underline{S}$ that admits a factorization of the form

$$\begin{tikzcd} \underline{E} \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "f"'] & \underline{S}(\underline{C}^{op}) \arrow[d, "\Gamma"] \\ & \underline{S} \end{tikzcd}$$

with i full and faithful.

THEOREM. *f admits such a factorization iff there exists an object* $G \in \underline{E}$

such that for each $X \in \underline{E}$ *the canonical map*

$$f^* f_*(\widetilde{X}^G) \times G \longrightarrow \widetilde{X}$$

is epic.

Call such an object G a *generator for* $\underline{E}$ *over* $\underline{S}$.

The statement of this theorem first appeared with an incorrect proof in a handwritten manuscript of William MITCHELL.

The following trivial, but important, proposition shows that any morphism of GROTHENDIECK topos can be factored in the above manner.

PROPOSITION. *Given a diagram*

$$\begin{tikzcd} \underline{E} \arrow[rr, "q"] \arrow[dr, "f"'] & & \underline{E}_0 \arrow[dl, "f_0"] \\ & \underline{S} & \end{tikzcd}$$

if G *is a generator for* $\underline{E}$ *over* $\underline{S}$, *then* G *is also a generator for* $\underline{E}$ *over* $\underline{E}_0$.

2-CATEGORIES REPRESENTABLES ASSOCIEES A UNE CATEGORIE ENRICHIE

par Pierre VARIOT

Il arrive très souvent que la catégorie des morphismes d'une 2-catégorie représentable [1] soit une catégorie fermée (au sens de [2]). Comme exemple fondamental d'une telle situation, citons le cas de la 2-catégorie $\mathbf{N}$ des transformations naturelles dont la catégorie des morphismes (i.e. la catégorie des foncteurs) est cartésienne fermée; citons aussi le cas de la 2-catégorie des quasi-homotopies [3], dont la catégorie des morphismes (i.e. la catégorie des applications quasi-continues) est cartésienne fermée.

On étudie ici le problème inverse: Une catégorie fermée est-elle la catégorie des morphismes d'une 2-catégorie représentable ?

Désignons par $\mathsf{V} = (V^{\cdot}, \otimes, I, \mathfrak{a}, \gamma, \delta)$ une catégorie monoïdale diagonalisée par les transformations naturelles σ et d, où

$$\sigma_s : s \to I \quad \text{et} \quad d_s : s \to s \otimes s .$$

Pour chaque objet s de $V^{\cdot}$,

$$\Delta_s = (s \otimes -, \gamma \square (\sigma_s \otimes -), \mathfrak{a}_{s,s,-} \square (d_s \otimes -))$$

est un cotriple sur $V^{\cdot}$. Si, pour chaque objet e de $V^{\cdot}$, le foncteur $- \otimes e$ de $V^{\cdot}$ vers lui-même est compatible avec les sommes fibrées finies et si (s) est une cocatégorie dans $V^{\cdot}$ dont l'objet des objets est I et l'objet des morphismes s, on obtient une cocatégorie (Δ_s) dans la catégorie des morphismes de cotriples sur $V^{\cdot}$. On en déduit (à l'aide d'un théorème de Gray [1]) que $V^{\cdot}$ *est la catégorie des morphismes d'une 2-catégorie co-représentable* (ayant pour catégorie de ses hypermorphismes la catégorie de Kleisli associée au cotriple Δ_s).

Supposons de plus $V^{\cdot}$ fermée. En notant $D : V^{\cdot} \times V^* \to V^{\cdot}$ le foncteur *Hom*-interne, on définit de même, pour chaque objet s de $V^{\cdot}$, un triple Γ_s sur $V^{\cdot}$, dont l'endofoncteur est $D(-, s)$. Si, pour chaque objet e de $V^{\cdot}$, le foncteur $D(e, -)$ de V^* vers $V^{\cdot}$ est compatible avec les produits fibrés finis et si *(s)* est une cocatégorie dans $V^{\cdot}$ dont l'objet des objets est I et l'objet des morphismes s, on construit une catégorie (Γ_s) dans la catégorie des comorphismes de triples sur $V^{\cdot}$ Par suite, $V^{\cdot}$ est la catégorie des morphismes d'une 2-catégorie représentable.

En général, ces deux 2-catégories associées à V sont distinctes. Elles se confondent dans le cas où V est symétrique.

En particulier, *soit* V *une catégorie cartésienne fermée munie d'une cocatégorie dans* $V^{\cdot}$ *dont l'objet des objets soit* I. *Alors* $V^{\cdot}$ *est la catégorie des morphismes d'une 2-catégorie représentable et coreprésentable.*

EXEMPLES. La 2-catégorie N des transformations naturelles est ainsi obtenue à partir de la cocatégorie canonique sur la catégorie **2**; la 2-catégorie des quasi-homotopies est construite à partir de la cocatégorie canonique sur le segment $[0, 1]$.

1. J. W. GRAY, *Lecture Notes in Mathematics* 195, Springer (1971).
2. KELLY et MAC LANE, Coherence in closed categories, *Jour. of pure and ap. Algebra*, 1-1 (1971).
3. A. MACHADO, Quasi-topologie algébrique, *Esquisses Math.* 10, Paris (1971).

SOME REMARKS ON THE SUBJECT OF COHERENCE

by Rodiani VOREADOU

1. Using the terminology of the Kelly-MacLane papers on the coherence for closed categories (Journal Pure Appl. Algebra 1 (1971), pp. 97-140) and for closed naturalities (Springer Lecture Notes 281, pp. 1-29), a class $\mathfrak{M}$ (resp. $\mathfrak{M}_N$) of allowable graphs (resp. N-allowable N-graphs) is introduced and the following theorems are proved, extending the results of Kelly-Mac Lane:

(#1) *There is a finite test for deciding whether an allowable graph (resp. N-allowable N-graph) is in* $\mathfrak{M}$ *(resp. in* $\mathfrak{M}_N$ *).*

(#2) *If* $h, h': T \to S$ *are allowable natural transformations and* $\Gamma h = \Gamma h' \notin \mathfrak{M}$, *then* $h = h'$.

(#3) *If* W *is any naturality and* $f, f': |T|_W \to |S|_W$ *are N-allowable natural transformations with* $\Gamma_N f = \Gamma_N f' \notin \mathfrak{M}_N$, *then* $f = f'$.

2. Conjectures: Appropriate classes $\mathfrak{M}^*$ (analogous to $\mathfrak{M}$ of **1**) are proposed as giving coherence results, analogous to those in **1**, for the cases of a closed functor, a closed naturality with the **V**-categories being tensored and cotensored, and the case of biclosed categories.

3. Examples are given of situations where it may be useful to consider an extended notion of « graph » (of natural transformations), including linkages between constants and between names of functors.

4. In the case of closed categories, a class $\mathfrak{W}$ of pairs of allowable natural transformations is given, such that

$$(h, h') \in \mathfrak{W} \text{ implies } \Gamma h = \Gamma h' \in \mathfrak{M} \text{ and } h \neq h'$$

(with the $\mathfrak{M}$ of **1**). Therefore *(#2)* is the best coherence result for closed categories obtainable by using graphs only.

ASPECTS OF CATEGORICAL ALGEBRA IN INITIALSTRUCTURE CATEGORIES

by Manfred B. WISCHNEWSKY

Initialstructure functors $F: K \to L$, the categorical generalization of BOURBAKI's notion of an «initial object», equivalent to KENNISON-WYLER's top-functors by GROTHENDIECK's theory on split categories, reflect almost all categorical properties from the base category L to the initialstructure category K, briefly called INS-category. So for instance if L is complete, cocomplete, wellpowered, cowellpowered, if L has generators, cogenerators, projectives, injectives, or (cokernel, mono)-bicategory structures, then the same is valid for any INS-category over L. The most well known INS-categories (with obvious base categories) are the categories of topological, measurable, limit, locally convex, compactly generated, or zero dimensional spaces.

This survey article now deals with the following three types of algebraic categories over INS-categories, namely with algebraic categories of Σ-continuous functors in the sense of GABRIEL-ULMER, resp. FREYD-KELLY, monoidal algebraic categories over monoidal INS-categories and finally with algebraic categories in the sense of EILENBERG-MOORE.

It is shown that each of the above algebraic categories over an INS-category is again an INS-category. Hence the whole theory of INS-categories, developed by HOFFMANN-WISCHNEWSKY-WYLER and others, can again be applied to algebraic categories over INS-categories.

Moreover it is shown that the adjointness of all «canonically defined» functors between algebraic categories like the inclusion functors, evaluation functors, or algebraic functors, induced by morphisms of theories, is an INS-hereditary property, i.e. if the corresponding functors over the base category L are adjoint, then the same holds for the functors over K. Since furthermore with K also K^{op} is an INS-category (over L^{op}), and since the algebras in K^{op} are just the coalgebras in K, the theory is also valid for coalgebras in *INS*-categories.

Furthermore it will be shown that all basic results on algebraic categories even hold for coreflective or reflective subcategories of *INS*-categories, if they hold in the corresponding *INS*-category.

So for instance let $<C, \Sigma>$ be an equationally defined theory, a GROTHENDIECK-topology, or any other theory, which represents a locally presentable category, and consider one of the following categories U: the category of sets, of topological, of locally convex, of T_0-, T_1-, T_2-, T_3-spaces,... Then the algebraic categories (C, U) are complete, cocomplete, wellpowered, cowellpowered. The inclusion functors

$$\Sigma(C, U) \to [C, U]$$

as well as the algebraic functors are adjoint. If the theory $<C, \Sigma>$ is equationally defined, then the forgetful functors

$$V : \Sigma(C, U) \to U \quad \text{and} \quad W : \Sigma(C, U^{op}) \to U^{op}$$

are monadic. Analogous results hold for monoidal algebras in the sense of PFENDER over monoidal *INS*-categories.

TOPOS ELEMENTAIRES ET ARITHMETIQUE

par Gavin C. WRAITH

If E is an elementary topos, we may form the 2-category Top_E of E-toposes and geometric morphisms over E. There is a forgetful functor from Top_E to Cat which takes an E-topos to its underlying category, and a geometric morphism to its inverse image part.

The main result of the talk may be stated as follows: *If E has a natural number object, the above mentioned forgetful functor is representable.* The representing E-topos, which we will denote by $E[U]$, will be called an *object classifier for E-toposes.*

In this talk, Prof. M. TIERNEY described some of the work of Diaconescu concerning internal category objects. If A is an internal category in an elementary topos E, we may form the category $A^o E$ of internal E-valued presheaves on A. This is an E-topos. There is a full subcategory, $Sex(A^o, E)$, given by the flat presheaves. Diaconescu's theorem states that, if F is an E-topos, with structural geometric morphism

$$F \xrightarrow{p} E,$$

then there is a natural equivalence of categories:

$$Top_E(F, A^o E) \simeq Sex(p^*(A), F).$$

Prof. J. BENABOU has described how, given a map f in an elementary topos E, one may construct the internal full subcategory $Cat(f)$ generated by the fibres of f. In particular, if E has a natural number object N, we may apply this to the map

$$N \times N \xrightarrow{+} N \xrightarrow{\sigma} N,$$

where σ denotes «successor» and $+$ denotes addition of natural numbers. The resulting internal category may be denoted by E_{fin}. If E is the category of sets, E_{fin} is equivalent to the category of finite sets.
One may prove the following results:

i) *If $F \xrightarrow{p} E$ is a geometric morphism, then $p^*(E_{fin}) = F_{fin}$.*

ii) $Sex(E^o_{fin}, E) \simeq E$.

Putting these results together with Diaconescu's theorem gives that $E_{fin}E$ is an object classifier for E-toposes. If U denotes the internal inclusion functor $E_{fin} \longrightarrow E$, and if we denote $E_{fin}E$ by $E[U]$, then U is a universal object in the sense that for any E-topos F and object X of F, there is a unique geometric morphism

$$F \xrightarrow{x} E[U] \text{ over } E \text{ such that } X = x^*(U).$$

We refer to x as the *classifying morphism of* X.

Prof. F. W. LAWVERE has pointed out that, if we regard toposes as generalized topological spaces, and geometric morphisms as generalized continuous maps, then in a precise sense, a sheaf on a space corresponds to a continuous map from the space to the space of all sets (i.e. the object classifying topos $S[U] = S_{fin}S$).

LISTE DES CONFERENCES

Lundi 9 Juillet (après-midi):

A. JOYAL, Théorème d'incomplétude de Gödel et Univers arithmétique.

J. RIGUET, Probabilités et Théorie de la Décision du point de vue de la Théorie des Catégories.

F. BORCEUX, Une notion de **V**-limite.

Mardi 10 Juillet (matin et après-midi):

G. C. WRAITH, Topos élémentaires libres et Arithmétique.

Ch. J. MIKKELSEN, The adjoint functor principle for elementary topoi.

E. BURRONI, **T**-algèbres déterministiques.

H. KLEISLI, L'homologie singulière et l'homologie simpliciale interprétées comme homologies associées à un cotriple.

R. GUITART, Sur le foncteur «diagramme».

R. E. HOFFMANN, A categorical concept of connectedness.

H. LINDNER, Morita equivalence of enriched categories.

Mercredi 11 Juillet (matin et après-midi):

P. HILTON, The category of nilpotent groups and Localization.

K. BAUMGARTNER, Structure of additive categories.

R. LAVENDHOMME, Variations sur un thème de Yoneda.

A. BASTIANI, Sketched structures and Completions.

C. LAIR, Dualités pour les structures algébriques esquissées.

L. COPPEY, Structures algébriques définies par couples de catégories.

J.-P. BARTHELEMY, Théorème de complétude dans certaines catégories cartésiennes fermées.

Jeudi 12 Juillet (matin):

R. VOREADOU, Some remarks on the subject of coherence.

G. M. KELLY, Cohérence dans les catégories à distributivité.

F. ULMER, Existence et exactitude du foncteur faisceau associé.

(Après-midi: Excursion à la baie de la Somme.)

Vendredi 12 Juillet (matin et après-midi):

D. BOURN, Anadèses et catadèses naturelles.

M. TIERNEY, Sur la thèse de Diaconescu.

J. W. GRAY, 2-algebraic theories and triples.

M. B. WISCHNEWSKY, Aspects of categorical Algebra in Initialstructure categories.

G. OSIUS, Internal and external aspect of Logic and Set Theory in elementary topoi.

J. PENON, Quasi-topos.

A. BURRONI, Structures 2-algébriques.

C. EHRESMANN, The categories in Differential Geometry.

Liste complémentaire:

1° Les conférences suivantes, inscrites au programme initial, n'ont pu avoir lieu, faute de temps:

M. CHARTRELLE, Complétion des catégories enrichies.

G. DARTOIS, Foncteurs additifs et Algèbres.

G. LENGAGNE, Moyennes invariantes sur les catégories et groupoïdes.

D. TANRE, Connexité locale.

P. VARIOT, 2-catégories représentables associées à une catégorie enrichie.

2° Deux conférenciers prévus ont été empêchés au dernier moment de venir à Amiens:

A. KOCK, Monads of free completion type.

A. PRELLER, Category Theory in *BG* Set Theory.

ADRESSES DES CONFERENCIERS

ABREVIATIONS UTILISEES:

AMIENS = Département de Mathématiques, Faculté des Sciences,
33 rue Saint-Leu, 80039 AMIENS CEDEX.

PARIS 7 = U. E. R. de Mathématiques, Tours 45 - 55, Université Paris 7,
2 Place Jussieu, 75221 PARIS CEDEX 05.

Jean-Pierre BARTHELEMY, Dépt. de Math., E. N. S. C. M.,
Route de Gray, 25000 BESANÇON.

Andrée BASTIANI, AMIENS.

Karlheinz BAUMGARTNER, Abteilung für Math., Ruhr Univ.,
BOCHUM, R. F. A.

Francis BORCEUX, Institut de Math., Univ. de Louvain, 2 Chemin du Cyclotron,
1348 LOUVAIN LA NEUVE, BELGIQUE.

Dominique BOURN, AMIENS.

Albert BURRONI, PARIS 7.

Elisabeth BURRONI, PARIS 7.

Mario CHARTRELLE, AMIENS.

Laurent COPPEY, PARIS 7.

Ghislain DARTOIS, Dépt. de Math., Univ. Paris XIII,
Place du 8 Mai 1945, 93 - SAINT-DENIS.

Charles EHRESMANN, PARIS 7.

John W. GRAY, Dept. of Math., Univ. of Illinois,
URBANA, Illinois 61801, U. S. A.

René GUITART, PARIS 7 et AMIENS.

Peter HILTON, - Dept. of Math., Case Western Univ., CLEVELAND, Ohio 44106,
- Battelle Research Center, SEATTLE, U. S. A.,
- Forschungsinstitut für Math., E. T. H., ZURICH, SUISSE.

Rudolf E. HOFFMANN, Math. Institut, Univ. Düsseldorf,
DUSSELDORF, R. F. A.

André JOYAL, Dépt. de Math., Univ. du Québec à Montréal,
Case postale 8888, MONTREAL 101, CANADA.

G. Max KELLY, Math. Dept., Univ. of Sydney,
SYDNEY, N.S.W. 2006, AUSTRALIE.

Heinrich KLEISLI, Institut de Math., Univ. de Fribourg,
Pérolles, 1700 FRIBOURG, SUISSE.

Anders KOCK, Matematisk Institut, Aarhus Univ.,
8000 AARHUS C., DANEMARK.

Christian LAIR, PARIS 7.

René LAVENDHOMME, Institut de Math., Univ. de Louvain, 2 Chemin du Cyclotron,
1348 LOUVAIN LA NEUVE, BELGIQUE.

Guy LENGAGNE, AMIENS.

Harald LINDNER, Math. Inst. II, Univ. Düsseldorf,
Moorenstrasse 5, D 4000 DUSSELDORF, R. F. A.

Ch. Juul MIKKELSEN, Matematisk Institut, Aarhus Univ,
8000 AARHUS C., DANEMARK.

Gerhard OSIUS, Fachsektion Math., Univ. Bremen,
Achtenstrasse, D 28 BREMEN, R. F. A.

Jacques PENON, PARIS 7.

Jacques RIGUET, U. E. R. de Math., Logique et Informatique, Univ. Paris 5,
12 rue Cujas, 75005 PARIS.

Daniel TANRE, AMIENS.

Myles TIERNEY, Dept. of Math., Rutgers Univ.,
NEW BRUNSWICK, N. J. 08903, U. S. A.

Fritz ULMER, Dépt. de Math., Univ. de Zürich,
Freiestrasse 36, 8032 ZURICH, SUISSE.

Pierre VARIOT, Dépt. de Math., Univ. du Tchad,
B. P. 623, N'DJAMENA, TCHAD.

Rodiani VOREADOU, P.O. Box 1335, Omonia, ATHENES, GRECE.

Manfred B. WISCHNEWSKY, Math. Dept., Univ. Munich,
Therensienstrasse 39, 8 MUNICH 2, R. F. A.

Gavin C. WRAITH, Dept. of Math., Univ. of Sussex,
Falmer, BRIGHTON, Sussex, GRANDE BRETAGNE.

TABLE DES MATIERES