CAHIERS DE
TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
CATÉGORIQUES

MICHEL SIMONNET

Calcul différentiel dans les espaces non normables

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 14, n° 1 (1973), p. 3-40

<http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1973__14_1_3_0>

CAHIERS DE TOPOLOGIE *Vol. XIV-1*
ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE

CALCUL DIFFERENTIEL DANS LES ESPACES NON NORMABLES

par Michel SIMONNET

SOMMAIRE.

Généralités 4
1. Applications B-différentiables 10
2. Applications différentiables en un point 14
3. Applications C^n 19
4. Théorème de corrélation 20
5. Différentiabilité de la composition 28
6. Théorème de Frobenius 38
7. Espaces pseudo-topologiques 44
8. Sur le théorème des fonctions implicites 48
Bibliographie 64

La première partie de cet article (sections 1, 2, 3 et 4) a paru dans le Volume XIII-4, pages 411 à 437.

5. DIFFERENTIABILITE DE LA COMPOSITION

Soient E, F, G trois espaces admissibles. Le but de ce chapitre est de montrer que, si F est équable, l'application composition c de l'espace $C^{k+p}(G,F)\times C^{k}(F,E)$ vers $C^{k}(G,E)$ est C^{p}, pour tous entiers k et p même nuls. Le résultat analogue de [2] semble inexact, reposant sur 11-2-8. La démonstration nécessite les mêmes lemmes que dans l'article [2]. On les établit parfois d'une manière très différente.

Signalons d'abord les résultats suivants dont nous aurons souvent besoin:

a) Soient F un espace vectoriel quasi-topologique (en abrégé un evqt) et $E_1,\dots,E_n$ des evqt équables. L'application d'évaluation de $L(F;E_1,\dots,E_n)\times E_1\times\dots\times E_n$ vers F est équable.

b) Soient G un evqt, F un evqt équable, et $E_1,\dots,E_n$ des evqt. L'application composition de $L(G,F)\times L(F;E_1,\dots,E_n)$ vers l'espace $L(G;E_1,\dots,E_n)$ (notations de [2]) est bilinéaire équable.

PROPOSITION 11. *Soient E_1, E_2, E_3 trois espaces vectoriels admissibles et u un élément de $L(E_3;E_2,E_1)$. Désignons par $\tilde{u}$ l'application de l'espace $C^{k}(E_2,E)\times C^{k}(E_1,E)$ vers l'espace $C^{k}(E_3,E)$ définie par $(g,f)\longrightarrow u.[g,f]$, où E est un eqlc. Alors $\tilde{u}$ est bilinéaire équable.*

Δ.a) Rappelons d'abord que, si (x_1,x_2) est un point de $E_1\times E_2$ et (h_1,h_2) un vecteur de $E_1\times E_2$ (respectivement $((h'_1,h'_2),(h''_1,h''_2))$ un couple de vecteurs de $E_1\times E_2$), alors:

$$D\,u(x_1,x_2).(h_1,h_2)=u(x_1,h_2)+u(h_1,x_2)$$

et

$$D^{2}u(x_1,x_2).((h'_1,h'_2),(h''_1,h''_2))=u(h'_1,h''_2)+u(h''_1,h'_2).$$

Pour tout $n\geqslant 3$, $D^{n}u$ est l'application constante sur l'origine de l'espace $L^{n}(E_3;E_1\times E_2)$.

b) Soient $\mathfrak{W}\mathcal{G} \downarrow C^k(E_1, E)$ et $\mathcal{F} \downarrow C^k(E_2, E)$. Prouvons alors que $\tilde{u}(\mathcal{G}, \mathcal{F}) \downarrow C^k(E_3, E)$. En d'autres termes, prouvons que le filtre $D^n\, [\tilde{u}(\mathcal{G}, \mathcal{F})]$ converge vers 0 dans $\mathcal{C}_\lambda(L^n(E_3, \vec{E}), E)$ pour tout $n \leqslant k$, ou encore prouvons que $D^n\, [\tilde{u}(\mathcal{G}, \mathcal{F})]\,.\,\mathfrak{X}$ converge vers 0 dans $L^n(E_3, \vec{E})$, lorsque $\mathfrak{X}$ est un filtre convergeant dans E. Compte tenu de la partie a, cela résulte immédiatement de l'expression donnée au cours de la démonstration de la proposition 6, pour tout point x de E, de $D^n(u.\,[g, f]\,)(x)$.

c) Soient $\mathcal{G} \downarrow C^k(E_1, E)$ et $\mathfrak{W}\mathcal{F} \downarrow C^k(E_2, E)$. De même $\tilde{u}(\mathcal{G}, \mathcal{F})$ converge vers 0 dans $C^k(E_3, E)$. ∇

THEOREME 4. *Soient E, F, G trois eqlc. L'application de composition de $C^k(G, F) \times C^k(F, E)$ vers $C^k(G, E)$ est C^0 (c'est-à-dire continue).*

Δ. Compte tenu de la formule de Ver Eecke qui donne les k premières différentielles de $g.f$ en fonction des k premières différentielles de g et f (voir proposition 6), la proposition est évidente. ∇

Désormais E, F, G sont des eqlc. On supposera toujours F équable. Convenons aussi de désigner par e l'application d'évaluation de $L(\vec{G}, \vec{F}) \times \vec{F}$ vers $\vec{G}$, par e' l'application d'évaluation de $L(L(\vec{G}, \vec{F}), \vec{F}) \times \vec{F}$ vers $L(\vec{G}, \vec{F})$, et enfin par b l'application de composition de $L(\vec{G}, \vec{F}) \times L(\vec{F}, \vec{E})$ vers $L(\vec{G}, \vec{E})$. Alors, convenons que $\tilde{e}, \tilde{e}'$, et $\tilde{b}$ seront les applications associées à e, e' et b de la même manière que dans la proposition 11 on associe $\tilde{u}$ à u. Notons enfin que c désignera toujours l'application de composition de $C^k(G, F) \times C^k(F, E)$ ou de $C^{k+p}(G, F) \times C^k(F, E)$ vers $C^k(G, E)$, tandis que c' sera l'application de composition de $C^k(L(\vec{G}, \vec{F}), F) \times C^k(F, E)$ vers $C^k(L(\vec{G}, \vec{F}), E)$.

PROPOSITION 12. *Soit g un élément de $C^{k+1}(G, F)$. Désignons par g_* l'application de $C^k(F, E)$ vers $C^k(G, E)$ définie par $f \mapsto g.f$. C'est une application différentiable en tout point de $C^k(F, E)$ telle que l'on ait $D(g_*)(f).\phi = \tilde{e}(Dg.f, \phi)$ pour tout point f de $C^k(F, E)$ et tout vecteur ϕ de $C^k(\vec{F}, E)$.*

Δ. Soit f un point de $C^k(F,E)$. Notons r l'application $Rg_*(f)$ de $C^k(\vec{F},E)$ vers $C^k(\vec{G},E)$ définie par:

$$\phi \longrightarrow g.(f+\phi)-g.f-e.\,[Dg.f,\phi]\ ,$$

et prouvons par récurrence sur k que c'est une application tangente à 0 en 0 pour tout f.

a) Supposons que $k=0$. Soient $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{X}$ des filtres convergeant respectivement dans $C^0(\vec{F},E)$ et E. Prouvons que $\theta r(\mathfrak{V},\mathfrak{F}).\mathfrak{X}$ converge vers 0 dans $\vec{G}$. Or, pour tout nombre réel t, pour tout ϕ appartenant à $C^0(\vec{F},E)$ et tout point x de E, $\theta r(t,\phi).x=\theta Rg(f(x))(t,\phi(x))$, en sorte que $\theta r(\mathfrak{V},\mathfrak{F}).\mathfrak{X}$ contient $\theta\,[Rg(f(\mathfrak{X}))]\,.(\mathfrak{V},\mathfrak{F}(\mathfrak{X}))$. D'après la section 5-3-5 de [2], et compte tenu du fait que pour tout point x de E et tout vecteur h de $\vec{E}$,

$$D\,[Rg(f(x))]\,.h=Dg(f(x+h))-Dg(f(x)),$$

le filtre $\theta\,[Rg(f(\mathfrak{X}))]\,.(\mathfrak{V},\mathfrak{F}(\mathfrak{X}))$ contient le filtre convergeant vers 0 dans $\vec{G}$ suivant:

$$[Dg(f(\mathfrak{X})+\mathfrak{V}\mathfrak{F}(\mathfrak{X}))-Dg(f(\mathfrak{X}))]\,.\mathfrak{F}(\mathfrak{X})^{\circ-}.$$

$\theta r(\mathfrak{V},\mathfrak{F}).\mathfrak{X}$ contenant un filtre convergeant vers 0 dans $\vec{G}$ converge lui-même vers 0 dans $\vec{G}$.

b) Supposons l'assertion du début vraie à l'ordre k et prouvons-la à l'ordre $k+1$. Par hypothèse g appartient à $C^{k+2}(G,F)$. Soit $\mathfrak{F}$ un filtre convergeant dans $C^{k+1}(\vec{F},E)$, et prouvons que $\theta r(\mathfrak{V},\mathfrak{F})$ converge vers 0 dans $C^{k+1}(\vec{G},E)$. Compte tenu de la partie a, il nous suffit de montrer que $D(\theta r(\mathfrak{V},\mathfrak{F}))$ converge vers 0 dans $C^k(L(\vec{G},\vec{E}),E)$. Rappelons d'abord la définition de l'opérateur Δ dont nous aurons très souvent besoin par la suite. Si f est une application d'un eqlc E_1 vers un eqlc E_2, on désigne par Δf l'application de $E_1\times\vec{E}_1$ vers $\vec{E}_2$ définie par: $(x,h)\longrightarrow f(x+h)-f(x)$. Ceci dit, étant donnés un nombre réel t et un élément ϕ de $C^{k+1}(\vec{F},E)$, calculons la différentielle de $\theta r(t,\phi)$ en tout point x de E. C'est l'application linéaire continue de $\vec{E}$ vers $\vec{G}$ définie par (si $t\neq 0$):

$$h \longrightarrow (1/t)(\,[Dg.(f+t\phi)(x)-Dg.f(x)\,].Df(x)h)$$
$$+[Dg.(f+t\phi)(x)].[D\phi(x)h]$$
$$-Dg(f(x)).[D\phi(x)h]$$
$$-D^2g(f(x)).(Df(x)h,\phi(x)).$$

Somme toute

$$D\,\theta r(t,\phi)(x)=$$
$$=(1/t)(\,[Dg.(f+t\phi)-Dg.f-\tilde{e}'(D^{(2)}g.f,t\phi)](x).Df(x))$$
$$+[Dg.(f+t\phi)-Dg.f](x).D\phi(x).$$

On en déduit que:

$$D\,[\theta r(t,\phi)]=\tilde{b}(\theta r'(t,\phi),Df)+\tilde{b}(\Delta((Dg)_*).(f,t\phi),D\phi),$$

r' désignant l'application associée comme au départ à Dg et f, autrement dit l'application de $C^k(\vec{F},E)$ vers $C^k(L(\vec{G},\vec{F}),E)$ définie par:

$$\hat{\phi} \longrightarrow Dg.(f+\hat{\phi})-Dg.f-\tilde{e}'(D^{(2)}g.f,\hat{\phi}).$$

Il est alors évident que le filtre $D\,[\theta r(\mathfrak{W},\mathfrak{F})]$ contient le filtre

$$\tilde{b}(\theta r'(\mathfrak{W},\mathfrak{F}),Df)+\tilde{b}(\Delta((Dg)_*).(f,\mathfrak{W}\mathfrak{F}),D\mathfrak{F}).$$

Vu l'hypothèse de récurrence, l'application $(Dg)_*$ de $C^k(F,E)$ vers $C^k(L(\vec{G},\vec{F}),E)$ définie par $\hat{f} \longrightarrow Dg.\hat{f}$ est différentiable en tout point de $C^k(F,E)$. Comme elle est en particulier différentiable en f, le filtre $\theta r'(\mathfrak{W},\mathfrak{F})$ converge vers 0 dans $C^k(L(\vec{G},\vec{F}),E)$. De plus la différentielle de $(Dg)_*$ est continue de $C^k(F,E)$ vers $L(C^k(L(\vec{G},\vec{F}),E),C^k(\vec{F},E))$ comme on le prouve facilement. On en déduit que $(Dg)_*$ est une application C^0. Il est alors immédiat que $\Delta((Dg)_*).(f,\mathfrak{W}\mathfrak{F})$ converge vers 0 dans l'espace $C^k(L(\vec{G},\vec{F}),E)$. Comme $\tilde{b}$ est continue,

$$\tilde{b}(\theta r'(\mathfrak{W},\mathfrak{F}),Df)+\tilde{b}(\Delta((Dg)_*).(f,\mathfrak{W}\mathfrak{F}),D\mathfrak{F})$$

converge vers 0 dans $C^k(L(\vec{G},\vec{E}),E)$ ainsi que $D\,[\theta r(\mathfrak{W},\mathfrak{F})]$. ∇

On voit facilement que g_* est une application C^1 de $C^k(F,E)$ vers $C^k(G,E)$.

COROLLAIRE. *Si g appartient à $C^{k+p}(G,F)$, alors g_* est C^p.*

Δ. On vient de montrer la proposition lorsque $p=1$. Admettant maintenant la proposition à l'ordre p, on la démontre facilement à l'ordre $p+1$. En effet, on prouve que $D(g_*)$ est C^p. ∇

Admettons que l'assertion indiquée au début du chapitre sur la différentiabilité de la composition soit vraie lorsque G est un espace vectoriel admissible. Il résulte immédiatement du corollaire précédent qu'elle est encore vraie lorsque G est un espace affine admissible. Ceci explique que désormais G sera toujours supposé espace vectoriel admissible.

Convenons de désigner par c_2 l'application de $C^k(F,E)$ vers l'espace $L(C^k(G,E), C^{k+1}(G,F))$ (ou vers $L(C^k(G,E), C^{k+p}(G,F))$ si $p>0$) définie par $c_2(f)=f^*$, où f^* est donné par $f^*(g)=g.f$ pour tout élément g de $C^{k+1}(G,F)$.

THEOREME 5. *L'application de composition de* $C^{k+1}(G,F)\times C^k(F,E)$ *vers* $C^k(G,E)$, c, *est différentiable en tout point de l'espace produit* $C^{k+1}(G,F)\times C^k(F,E)$, *et sa différentielle en* (g,f) *est telle que* $Dc(g,f).(\psi,\phi)=\tilde{e}(Dg.f,\phi)+\psi.f$ *pour tout couple* (ψ,ϕ) *de vecteurs de* $C^{k+1}(G,F)\times C^k(\vec{F},E)$.

Δ. c est partiellement continûment-dérivable en tout point (g,f) de $C^{k+1}(G,F)\times C^k(F,E)$. En effet, l'application f^* est linéaire continue de $C^{k+1}(G,F)$ vers $C^k(G,E)$, donc est continûment-dérivable en tout point de $C^{k+1}(G,F)$. Quant à l'application g_* de $C^k(F,E)$ vers $C^k(G,E)$, on a démontré dans la proposition 12 qu'elle était différentiable en tout point de $C^k(F,E)$. Comme les différentielles partielles D_1c et D_2c sont continues de $C^{k+1}(G,F)\times C^k(F,E)$ vers $L_\lambda(C^k(G,E), C^{k+1}(G,F))$ et $L_\lambda(C^k(G,E), C^k(F,E))$ respectivement, d'après les propositions 8 et 2, c est B-différentiable. ∇

Nous allons maintenant prouver que c_2 est continue de $C^k(F,E)$ vers $L(C^k(G,E), C^{k+1}(G,F))$.

LEMME 1. *Soient* $\mathcal{G}$ *un filtre quasi-borné de* $C^{k+1}(G,F)$, $\mathcal{F}$ *un filtre convergeant vers 0 dans* $C^k(\vec{F},E)$ *et* f *un élément de* $C^k(F,E)$. *Alors le filtre* $R(\mathcal{G}_*)(f).\mathcal{F}$ *converge vers 0 dans* $C^k(G,E)$.

Δ. Le filtre $[R(\mathcal{G}_*)(f)].\mathcal{F}^o$ contient $(D[R(\mathcal{G}_*)(f)]\mathcal{F}^o.\mathcal{F}^o)^{o-}$. Ceci dit,

$$D[R(g_*)(f)](\phi)=D(g_*)(f+\phi)-D(g_*)(f)$$

pour tout g appartenant à $C^{k+1}(G,F)$ et tout élément ϕ de $C^k(\vec{F},E)$. Pour tout élément $\hat{\phi}$ de $C^k(\vec{F},E)$,

$$\begin{aligned} D[R(g_*)(f)](\phi).\hat{\phi} &= \tilde{e}(Dg.(f+\phi),\hat{\phi})-\tilde{e}(Dg.f,\hat{\phi}) \\ &= \tilde{e}(Dg.(f+\phi)-Dg.f,\hat{\phi}). \end{aligned}$$

On en déduit que $(D[R(\mathcal{G}_*)(f)]\mathcal{F}^o.\mathcal{F}^o)^{o-}$ contient le filtre suivant:

$$\tilde{e}(D\mathcal{G}.(f+\mathcal{F}^o)-D\mathcal{G}.f,\mathcal{F}^o)^{o-}$$

Il converge donc vers 0 dans $C^k(G,E)$. Il est alors immédiat que les filtres $[R(\mathcal{G}_*)(f)].\mathcal{F}^o$ et $[R(\mathcal{G}_*)(f)].\mathcal{F}$ convergent vers 0 dans $C^k(G,E)$. ∇

PROPOSITION 13. c_2 *est continue de* $C^k(F,E)$ *vers* $L(C^k(G,E), C^{k+1}(G,F))$.

Δ. Soient $\mathcal{G}$ un filtre quasi-borné de $C^{k+1}(G,F)$, $\mathcal{F}$ un filtre convergeant vers 0 dans $C^k(\vec{F},E)$ et f un élément de $C^k(F,E)$. Prouvons que le filtre $\Delta c_2(f,\mathcal{F}).\mathcal{G}$ converge vers 0 dans $C^k(G,E)$. Comme, pour tous ψ et ϕ éléments de $C^{k+1}(G,F)$ et $C^k(\vec{F},E)$,

$$\Delta c_2(f,\phi).\psi = \psi.(f+\phi)-\psi.f=\tilde{e}(D\psi.f,\phi)+R(\psi_*)(f).\phi,$$

le filtre $\Delta c_2(f,\mathcal{F}).\mathcal{G}$ contient $\tilde{e}(D\mathcal{G}.f,\mathcal{F})+R(\mathcal{G}_*)(f).\mathcal{F}$. Compte tenu du lemme précédent, on en déduit que le filtre $\Delta c_2(f,\mathcal{F}).\mathcal{G}$ converge vers 0 dans $C^k(G,E)$. ∇

THEOREME 6. c *est une application* C^1 *de* $C^{k+1}(G,F)\times C^k(F,E)$ *vers* $C^k(G,E)$.

Δ. C'est une conséquence immédiate des théorème 5 et proposition 13. ∇

Nous allons maintenant démontrer que c_2 est une application C^p (où $p \geqslant 0$) de $C^k(F,E)$ vers $L(C^k(G,E), C^{k+p+1}(G,F))$.

LEMME 1. *Soit f un point de $C^k(F,E)$. Pour tout vecteur ϕ de $C^k(\vec{F},E)$, convenons de désigner par $\hat{r}(\phi)$ l'application de $C^{k+2}(G,F)$ vers $C^k(G,E)$ donnée par*

$$\hat{r}(\phi).\psi = R(\psi_*)(f).\phi = \psi.(f+\phi) - \psi.f - \tilde{e}(D\psi.f,\phi)$$

pour tout élément ψ de $C^{k+2}(G,F)$. Si $\mathcal{G}$ est un filtre quasi-borné de $C^{k+2}(G,F)$ et $\mathfrak{F}$ un filtre convergent de $C^k(\vec{F},E)$, alors le filtre $\theta\hat{r}(\mathfrak{W},\mathfrak{F}).\mathcal{G}$ converge vers 0 dans $C^k(G,E)$.

Δ. Soit $\hat{c}_2$ l'application de $C^k(F,E)$ vers $L(C^k(L(\vec{G},\vec{F}),E), C^{k+1}(L(\vec{G},\vec{F}),F))$ donnée par $\hat{c}_2(\hat{f}).g' = g'.\hat{f}$ pour tout $\hat{f}$ appartenant à $C^k(F,E)$ et tout élément g' de $C^{k+1}(L(\vec{G},\vec{F}),F)$. C'est une application continue (voir proposition 13). D'après la section 5-3-5 de [2], le filtre $\theta\hat{r}(\mathfrak{W},\mathfrak{F}).\mathcal{G}$ contenant le filtre $\theta R(\mathcal{G}_*)(f).(\mathfrak{W},\mathfrak{F})$ contient aussi $[D[R(\mathcal{G}_*)(f)](\mathfrak{W}\mathfrak{F}).\mathfrak{F}]^{\circ-}$

Remarquons que

$$\begin{aligned} D[R(\psi_*)(f)](\phi_1).\phi_2 &= \Delta D(\psi_*)(f,\phi_1).\phi_2 \\ &= \tilde{e}(\Delta((D\psi)_*)(f,\phi_1),\phi_2) \end{aligned}$$

pour tout élément ψ de $C^{k+2}(G,F)$ et tous ϕ_1, ϕ_2 appartenant à $C^k(\vec{F},E)$. Or $\Delta((D\psi)_*)(f,\phi_1) = \Delta\hat{c}_2(f,\phi_1).D\psi$, en sorte que $D[R(\psi_*)(f)](\phi_1).\phi_2$ est l'élément de $C^k(G,E)$ suivant:

$$\tilde{e}(\Delta\hat{c}_2(f,\phi_1).D\psi,\phi_2).$$

D'après ce qui précède le filtre $[D[R(\mathcal{G}_*)(f)](\mathfrak{W}\mathfrak{F}).\mathfrak{F}]^{\circ-}$ contient le filtre $\tilde{e}(\Delta\hat{c}_2(f,\mathfrak{W}\mathfrak{F}).D\mathcal{G},\mathfrak{F})^{\circ-}$. Il converge donc vers 0 dans $C^k(G,E)$, ainsi que le filtre $\theta\hat{r}(\mathfrak{W},\mathfrak{F}).\mathcal{G}$. ∇

LEMME 2. *c_2 est une application C^1 de $C^k(F,E)$ vers $L(C^k(G,E), C^{k+2}(G,F))$.*

Δ.a) Commençons par démontrer que c_2 est différentiable en tout point de $C^k(F,E)$. Soit f un élément arbitraire de $C^k(F,E)$, et prouvons que c_2 est différentiable en f. Compte tenu de

$$(c_2(f+\phi) - c_2(f)).\psi = \tilde{e}(D\psi.f,\phi) + R(\psi_*)(f).\phi$$

pour tout ψ appartenant à $C^{k+2}(G,F)$ et tout vecteur ϕ de $C^k(\vec{F},E)$, il nous suffit de prouver que l'application $Dc_2(f)$ de $C^k(\vec{F},E)$ vers $L(C^k(G,E),C^{k+2}(G,F))$ donnée par $Dc_2(f)(\phi).\psi=\tilde{e}(D\psi.f,\phi)$ pour tout vecteur ϕ de $C^k(\vec{F},E)$ et tout point ψ de $C^{k+2}(G,F)$ est continue, l'application $Rc_2(f)$ de $C^k(\vec{F},E)$ vers $L(C^k(G,E),$ $C^{k+2}(G,F))$ donnée par $Rc_2(f)(\phi).\psi=R(\psi_*)(f).\phi$ pour tout point ψ de $C^{k+2}(G,F)$ et tout vecteur ϕ de $C^k(\vec{F},E)$ étant tangente à 0 en 0 d'après le lemme 1. Or il est immédiat que $Dc_2(f)$ est continue.

b) Nous allons maintenant démontrer que la différentielle Dc_2 de c_2 est une application continue de $C^k(F,E)$ vers l'espace suivant:

$$L(L(C^k(G,E),C^{k+2}(G,F)),C^k(\vec{F},E)).$$

Soient $\mathfrak{G}$ un filtre quasi-borné de $C^{k+2}(G,F)$, $\mathfrak{B}$ un filtre quasi-borné de $C^k(\vec{F},E)$, $\mathfrak{F}$ un filtre convergeant vers 0 dans $C^k(\vec{F},E)$, et f un élément de $C^k(F,E)$. Prouvons que $[Dc_2(f+\mathfrak{F})-Dc_2(f)](\mathfrak{B}).\mathfrak{G}$ converge vers 0 dans $C^k(G,E)$. Pour tout point ψ de $C^{k+2}(G,F)$ et tous vecteurs ϕ et $\hat{\phi}$ de $C^k(\vec{F},E)$,

$$[Dc_2(f+\phi)-Dc_2(f)](\hat{\phi}).\psi=\tilde{e}(D\psi.(f+\phi)-D\psi.f,\hat{\phi}).$$

Or

$$D\psi.(f+\phi)-D\psi.f=\tilde{e}'(D^{(2)}\psi.f,\phi)+R((D\psi)_*)(f).\phi$$

d'après la proposition 12. On en déduit

$$[Dc_2(f+\phi)-Dc_2(f)](\hat{\phi}).\psi=$$
$$=\tilde{e}(\tilde{e}'(D^{(2)}\psi.f,\phi)+R((D\psi)_*)(f).\phi,\hat{\phi}).$$

Ce qui précède montre que le filtre $[Dc_2(f+\mathfrak{F})-Dc_2(f)](\mathfrak{B}).\mathfrak{G}$ contient $\tilde{e}(\tilde{e}'(D^{(2)}\mathfrak{G}.f,\mathfrak{F})+R((D\mathfrak{G})_*)(f).\mathfrak{F},\mathfrak{B})$. Or ce dernier filtre converge vers 0 d'après le lemme 1. ∇

PROPOSITION 14. *c_2 est une application C^p de $C^k(F,E)$ vers l'espace $L(C^k(G,E),C^{k+p+1}(G,F))$.*

Δ. Nous avons déjà démontré la proposition lorsque $p=0$. Supposons-la vraie à l'ordre p et prouvons-la à l'ordre $p+1$. Pour simplifier nous poserons

$$E_1 = C^k(F,E),\ E_2 = C^{k+p+2}(G,F),\ E_3 = C^k(G,E),$$
$$E_4 = C^{k+p+1}(L(G,\vec{F}),F) \quad \text{et} \quad E_5 = C^k(L(G,\vec{F}),E).$$

En vertu du lemme 2, c_2 est une application C^1 de E_1 vers $L(E_3, E_2)$. Prouvons que Dc_2 est une application C^p de E_1 vers $L(L(E_3,E_2),\vec{E}_1)$, ou mieux, que l'application $\bar{c}_2$ de E_1 vers $L(E_3; E_2, \vec{E}_1)$: $f \longrightarrow \bar{c}_2(f)$ définie par

$$(\psi, \phi) \longrightarrow (Dc_2(f).\phi).\psi = \tilde{e}(D\psi.f, \phi)$$

est C^p. Soient π_1 et π_2 les projections de $E_2 \times \vec{E}_1$ sur $\vec{E}_1$ et E_2 respectivement. Convenons de désigner par $\hat{e}$ l'application de l'espace produit $L(E_5,E_2) \times L(\vec{E}_1,\vec{E}_1)$ vers $L(E_3; E_2, \vec{E}_1)$ définie par:

$$(\rho', \rho) \longrightarrow \tilde{e}.\,[\rho'.\pi_2, \rho.\pi_1].$$

C'est une application bilinéaire équable. Soit c_2' l'application de E_1 vers $L(E_5, E_4)$ donnée par $c_2'(f).g' = g'.f$. C'est une fonction C^p, la proposition ayant été supposée vraie à l'ordre p. Soit par ailleurs D l'application linéaire continue $g \longrightarrow Dg$ de E_2 dans E_4. L'application D^* de $L(E_5, E_4)$ vers $L(E_5, E_2)$ définie par $l \longrightarrow l.D$ est aussi linéaire continue donc C^∞. Ceci dit, notons que $\bar{c}_2(f) = \tilde{e}.\,[c_2'(f).D.\pi_2, \pi_1]$ pour tout élément f de E_1, en sorte que $\bar{c}_2 = \hat{e}.\,[\tau_2, \tau_1]$, si τ_1 est l'application de E_1 vers $L(\vec{E}_1, \vec{E}_1)$ constante sur l'identité de $\vec{E}_1$ et si $\tau_2 = D^*.c_2'$. On en déduit que $\bar{c}_2$ est C^p. ∇

THEOREME 7. *L'application composition c de $C^{k+p}(G,F) \times C^k(F,E)$ vers l'espace $C^k(G,E)$ est C^p.*

Δ. Nous avons déjà démontré le théorème lorsque $p = 0$ (voir théorème 4). Supposons le théorème vrai à l'ordre p et prouvons-le à l'ordre $p+1$. Posons pour simplifier

$$E_1 = C^k(F,E),\ E_2 = C^{k+p+1}(G,F),\ E_3 = C^k(G,E),$$
$$E_4 = C^{k+p}(L(G,\vec{F}),F) \quad \text{et} \quad E_5 = C^k(L(G,\vec{F}),E).$$

On sait (voir théorème 6) que l'application composition c de $E_2 \times E_1$

vers E_3 est C^1. Prouvons que sa différentielle Dc est une application C^p de $E_2 \times E_1$ vers $L(E_3, E_2 \times \vec{E}_1)$. Convenons de désigner par π_2 et π_1 les projections de $E_2 \times \vec{E}_1$ sur E_2 et $\vec{E}_1$ respectivement. Soient $\overset{*}{\pi}_2$ et $\overset{*}{\pi}_1$ les applications de $L(E_3, E_2)$ et $L(E_3, \vec{E}_1)$ vers l'espace $L(E_3, E_2 \times \vec{E}_1)$ définies par $l_2 \longrightarrow l_2 . \pi_2$ et par $l_1 \longrightarrow l_1 . \pi_1$. Ce sont des applications linéaires continues. $\tilde{e}$ appartient à l'espace $L(E_3 ; E_5, E_2)$. Nous désignerons par $\bar{e}$ l'élément de l'espace $L(L(E_3, E_2), E_5)$ qui lui est associé.

L'application composition de $E_4 \times E_1$ vers E_5, que nous écrirons c', est C^p, le théorème ayant été supposé vrai à l'ordre p. On sait que

$$D c(g, f).(\psi, \phi) = \tilde{e}(D g . f, \phi) + \psi . f$$

pour tous points g et f de E_2 et E_1 ainsi que pour tous vecteurs ψ et ϕ de E_2 et $\vec{E}_1$. On en déduit

$$D c = \overset{*}{\pi}_1 . \bar{e} . c' . (D \times j) + \overset{*}{\pi}_2 . c_2 . \pi_1 ,$$

où j désigne l'identité de E_1, D l'application canonique de E_2 vers E_4 qui à une fonction associe sa différentielle. Ce qui précède montre que Dc est une application C^p, puisque c_2 est une application C^p en vertu de la proposition 14. ∇

On a ainsi démontré que l'application composition de l'espace $C^{k+p}(G, F) \times C^k(F, E)$ vers $C^k(G, E)$ est C^p si E, F, G sont des espaces affines admissibles et si F est équable.

Désormais E, F, G désigneront des espaces affines admissibles et X un ouvert de E. On supposera toujours F équable.

On aurait pu en fait prouver que l'application composition de $C^{k+p}(G, F) \times C^k(F, X)$ vers $C^k(G, X)$ est C^p, et même, si $\vec{E}$ est de dimension finie, que l'application composition de l'espace produit $C^{k+p}(G, Y) \times C^k(Y, X)$ vers $C^k(G, X)$ est C^p, où $C^k(Y, X)$ désigne l'ouvert de $C^k(F, X)$ formé des fonctions à valeurs dans Y, si Y est un ouvert de F.

Ceci dit, on prouve sensiblement comme dans [2] les résultats suivants:

a) L'application d'évaluation de $C^k(G,Y)\times Y$ dans G est C^k.

b) L'application composition de $C^\infty(G,F)\times C^\infty(F,X)$ vers $C^\infty(G,X)$ est C^∞.

c) θ est un isomorphisme linéaire continu de $C^\infty(G,X\times Y)$ sur $C^\infty(C^\infty(G,Y),X)$ pourvu que E comme F soit équable, θ désignant l'application de $C^\infty(G,X\times Y)$ vers $C^\infty(C^\infty(G,Y),X)$ donnée par $\theta f(x).y=f(x,y)$. On suppose ici E, F, G espaces vectoriels admissibles.

On démontre facilement à l'aide des lemmes qui précèdent le théorème de corrélation que, si f est une application C^∞ de l'eqlc E_1 vers l'eqlc E_2, alors f est une application C^∞ de E_1^* vers E_2^* (où E_1 et E_2 sont des eqlc admissibles arbitraires). On en déduit que l'application composition de $C^{\infty *}(G,F)\times C^{\infty *}(F,E)$ vers $C^{\infty *}(G,E)$ est C^∞ et que $C^{\infty *}(G,E\times F)$ et $C^{\infty *}(C^{\infty *}(G,F),E)$ sont isomorphes, si E, F, G sont des espaces vectoriels admissibles équables. Il en découle immédiatement la proposition suivante.

PROPOSITION 15. *Soit $\overline{C}^\infty$ la catégorie des applications C^∞ entre espaces vectoriels admissibles équables, et soit D le foncteur de $\overline{C}^\infty\times(\overline{C}^\infty)^*$ vers $\overline{C}^\infty$ surjacent au foncteur homomorphismes tel que $D(F,E)=C^{\infty *}(F,E)$ pour tout couple d'objets de $\overline{C}^\infty$. Alors $(\overline{C}^\infty, D)$ est une catégorie tensoriellement dominée et $\overline{C}^\infty$ est une catégorie cartésienne fermée (voir [6]).*

6. THEOREME DE FROBENIUS

Suivant une méthode indiquée par J. A. Leslie (voir [7]), nous allons généraliser le théorème de Frobenius.

LEMME 1. *Soit F un espace de Banach. Soient $S_1=[0,a_1]$, où $a_1>0$, un segment de $\mathbf{R}$ et V une boule ouverte de F de centre 0 de rayon r, et soit $\widetilde{T}$ une application lipschitzienne et C^n de $S_1\times V$ vers $L(F,\mathbf{R})$.*

Désignons par T *l'application de* $S_1 \times V \times \mathbf{R}$ *dans* F *définie par* $(x, y, b) \longrightarrow \tilde{T}(x, y).b$. *Supposons* $T(S_1 \times V \times S_1)$ *borné dans* F. *Alors il existe une unique application* C^{n+1}, *disons* f, *de* $S_0 = [0, a_0]$, *où* $a_0 = Sup\{d \leqslant a_1 \mid T(S_1 \times V \times [0, d])$ *inclus dans* $V/2\}$, *dans* V *telle que* $f(0)=0$ *et que* $Df(x) = \tilde{T}(x, f(x))$ *pour tout élément* x *de* S_0.

Δ. Posons

$$L = Sup\{\|\tilde{T}(x, y)\| \mid (x, y) \in S_0 \times V\}.$$

On a $a_0 . L \leqslant r/2$. En effet

$$a_0 . L = Sup\{\|T(x, y, a_0)\| \mid (x, y) \in S_0 \times V\}$$

et $T(x, y, a_0)$ appartient à l'adhérence de $V/2$ pour tout élément (x, y) de $S_0 \times V$, puisque $T(x, y, d)$ appartient à $V/2$ quel que soit $0 < d < a_0$.

Comme $a_0 . L < r$, d'après le théorème de Cauchy (voir [8]), il existe une unique application C^1 de S_0 dans V telle que $f(0) = 0$ et que $Df(x) = \tilde{T}(x, f(x))$ pour tout élément x de S_0. On prouve par récurrence que f est une application C^{n+1}. ∇

LEMME 2. *Soient* F *un espace de Banach et* S *l'espace de Banach qui a* $\mathbf{R}^2$ *pour ensemble sous-jacent et dont la norme est définie par* $\|(x, y)\| = |x| + |y|$ *quel que soit* (x, y) *élément de* $\mathbf{R}^2$. *Posons* $S_1 = [0, a] \times [0, b]$ *(où* $a>0$ *et* $b>0$*); soit* V *une boule ouverte de* F *de centre* 0 *de rayon* β, *et soit* $\tilde{T}$ *une application lipschitzienne et* C^n *de* $S_1 \times V$ *dans* $L(F, S)$. *Désignons par* T *l'application de* $S_1 \times V \times S$ *dans* F *définie par* $((x, y), z, b) \longrightarrow \tilde{T}((x, y), z).b$. *Supposons que* $T(S_1 \times V \times S_1)$ *soit borné dans* F. *Enfin supposons que l'expression*

$$(\partial \tilde{T} / \partial S\,[(x, y), z].k).b$$
$$+ (\partial \tilde{T} / \partial F\,[(x, y), z].\tilde{T}[(x, y), z].k).b$$

soit symétrique en b *et* k *pour tout élément* $((x, y), z)$ *de* $S_1 \times V$. *Alors il existe une unique application* C^{n+1}, *disons* f, *de l'espace* $S_0 = [0, a_0] \times [0, a_0]$ *dans* V *telle que* $f(0)=0$ *et que pour tout*

élément (x,y) *de* S_0, $Df(x,y)=\widetilde{T}((x,y),f(x,y))$ (*avec*
$a_0=Sup\{Inf\{1/2.d,a,b\}\mid T(S_1\times V\times[0,d]^2\subset V/4\})$.

Δ. Pour tout élément (x,y) de S_0, nous désignerons par $\widetilde{T}(x,y)$ l'application lipschitzienne et C^1 de $I\times V$, où $I=[0,1]$, dans $L(F,\mathbf{R})$ donnée par

$$\widetilde{T}(x,y)(\xi,z).1=T(\xi(x,y),z,(x,y))$$

pour tout point (ξ,z) de $I\times V$, et par $T(x,y)$ l'application de $I\times V\times\mathbf{R}$ dans F canoniquement associée à $\widetilde{T}(x,y)$.

Remarquons que, si f est une application C^1 de S_0 dans V telle que $f(0)=0$ et que $Df(h)=\widetilde{T}(h,f(h))$ pour tout élément h de S_0, alors l'application $g(x,y)$ de I dans V définie par $\xi\longrightarrow f(\xi(x,y))$ est la solution de l'équation différentielle $Dz=\widetilde{T}(x,y)(\xi,z)$ qui s'annule en 0. On en déduit que $f(x,y)=g(x,y)1$ est parfaitement déterminé. Donc s'il existe une application C^1, disons f, de S_0 dans V telle que $f(0)=0$ et que $Df(h)=\widetilde{T}(h,f(h))$ pour tout élément h de S_0, alors cette application est unique.

L'application $\widetilde{T}(x,y)$ de $I\times V$ dans $L(F,\mathbf{R})$ est lipschitzienne et C^1. De plus $T(x,y)(I\times V\times I)$ est borné dans F. Enfin $T(x,y)(I\times V\times I)$, qui est inclus dans $T(S_1\times V\times S_0)$, est inclus dans l'adhérence de $V/4$ donc dans $V/2$. D'après le lemme 1, il existe une unique application $g(x,y)$ de I dans V telle que

$$g(x,y)0=0 \text{ et que } Dg(x,y)(\xi).1=T(\xi(x,y),g(x,y)\xi,(x,y))$$

pour tout élément ξ de I.

Posons

$$L=Sup\{\|\widetilde{T}((x,y),z)\|\mid((x,y),z)\in S_0\times V\},$$

et prouvons que $a_0.2L<\beta$. Si d est un nombre réel positif non nul tel que $T(S_1\times V\times[0,d]^2)=dT(S_1\times V\times I^2)$ soit inclus dans $V/4$, alors $T(S_1\times V\times I^2)$ est inclus dans $V/4d$. On en déduit immédiatement que, si B désigne la boule unité de centre 0 dans S, alors $\widetilde{T}(S_1\times V).B$, donc $\widetilde{T}(S_0\times V).B$, est inclus dans $V/2d$, en sorte que $L\leqslant\beta/2d$. Ainsi $2dL$ est inférieur ou égal à β pour tout $d<2a_0$; comme $4a_0L\leqslant\beta$, on a $2a_0L<\beta$.

On prouve alors (grâce au même raisonnement que celui utilisé dans [9] pour démontrer le théorème de Frobenius) que l'application f de S_0 dans V, définie par $(x, y) \longrightarrow g(x, y)1$, est une application C^1 telle que $f(0)=0$ et que $Df(x, y)=\tilde{T}((x, y), f(x, y))$ pour tout point (x, y) de S_0. ∇

THEOREME DE FROBENIUS. *Si G est un espace localement-convexe et z un point de G, convenons d'appeler disque en z tout translaté en z d'un voisinage convexe équilibré de 0 dans G.*

Soient F un espace de Banach et E un espace localement-convexe séparé. Soient $\tilde{U}$ et $\tilde{V}$ des disques ouverts de E et F respectivement en x_0 et y_0, et $\tilde{T}$ une application C^n, où $n \geqslant 1$, de $\tilde{U} \times \tilde{V}$ dans $L(F, E)$. Supposons que l'expression

$$[\partial \tilde{T} / \partial E(x, y). k].h + [\partial \tilde{T} / \partial F(x, y) . \tilde{T}(x, y). k].h$$

soit symétrique relativement à h et k pour tout point (x, y) de $\tilde{U} \times \tilde{V}$. Alors il existe une unique application C^{n+1}, disons f, d'un disque ouvert U_0 de E en x_0, inclus dans $\tilde{U}$, vers $\tilde{V}$ telle que $f(x_0)=y_0$ et que $Df(x)=\tilde{T}(x, f(x))$ pour tout point x de U_0.

Δ. Nous supposerons pour simplifier que $x_0=0$ et que $y_0=0$. Désignons par T l'application de $\tilde{U} \times \tilde{V} \times E$ dans F canoniquement associée à $\tilde{T}$.

Par hypothèse $\partial \tilde{T} / \partial F$ est une application C^0 de $\tilde{U} \times \tilde{V}$ vers l'espace $L(L(F, E), F)$. On en déduit qu'il existe des disques ouverts $\hat{U}$ et V de E et F, inclus dans $\tilde{U}$ et $\tilde{V}$, tels que $[\partial \tilde{T} / \partial F(\hat{U} \times V). B_1].\hat{U}$ soit inclus dans une boule fermée B_k (de rayon k), où B_1 désigne la boule fermée de F de centre 0 et de rayon 1. On supposera que V est une boule ouverte, pour simplifier. Comme T est une application continue de $\hat{U} \times V \times E$ dans F, on peut supposer que $T(\hat{U} \times V \times \hat{U})$ est borné dans F. Soit alors r un réel positif non nul tel que $rT(\hat{U} \times V \times \hat{U})$ soit inclus dans $V/8$. Nous désignerons par U l'ensemble $\hat{U} \cap r\hat{U}$ et par U_0 l'ensemble $U/4$.

Pour tout élément x de U, notons $\tilde{T}_x$ l'application de $I \times V$ dans l'espace $L(F, \mathbf{R})$ donnée par $\tilde{T}_x(\tau, \alpha).1=T(\tau x, \alpha, x)$ quel que soit l'élément (τ, α) de $I \times V$. C'est une application lipschitzienne et C^n de $I \times V$ dans $L(F, \mathbf{R})$ telle que $T_x(I \times V \times I)$ soit inclus dans $T(\hat{U} \times V \times U)$ donc dans $rT(\hat{U} \times V \times \hat{U})$ et dans $V/2$, si T_x désigne l'application de $I \times V \times \mathbf{R}$ dans F canoniquement associée à $\tilde{T}_x$. D'après le lemme 1, il existe une unique fonction C^{n+1}, disons g_x, de I vers V telle que $g_x(0)=0$ et que $Dg_x(\tau)=\tilde{T}_x(\tau, g_x(\tau))$ pour tout élément τ de I. Il est évident que $g_x(t)=\int_0^t T_x(\tau, g_x(\tau), 1)d\tau$ pour tout t appartenant à I. On en déduit

$$g_x(at)=\int_0^{at} T_x(\tau, g_x(\tau), 1)d\tau=\int_0^t aT_x(a\tau, g_x(a\tau), 1)d\tau,$$

donc

$g_x(at)=\int_0^t T_{ax}(\tau, g_x(a\tau), 1)d\tau$ pour tous éléments a et t de I.
Mais alors, si h est l'application de I dans V définie par $t \longrightarrow g_x(at)$, h est une application C^{n+1} telle que $h(0)=0$ et que, pour tout t appartenant à I, $Dh(t)=\tilde{T}_{ax}(t, h(t))$. On en déduit $h=g_{ax}$. En conséquence $g_x(at)=g_{ax}(t)$ pour tout point x de U et tous éléments a et t de I. Désignons par f l'application de U dans V définie par $x \longrightarrow g_x(1)$. On a

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^1 T_x(\tau, g_x(\tau), 1)d\tau = \int_0^1 T_x(\tau, g_{\tau x}(1), 1)d\tau \\ &= \int_0^1 T_x(\tau, f(\tau x), 1)d\tau. \end{aligned}$$

Imaginons qu'il existe une fonction C^{n+1}, disons f', de U_0 dans $\tilde{V}$ telle que $f'(0)=0$ et que $Df'(x)=\tilde{T}(x, f'(x))$ pour tout élément x de U_0. Pour tout élément x de U_0, désignons par g'_x l'application de I dans $\tilde{V}$ définie par $t \longrightarrow f'(tx)$. C'est une application C^{n+1} telle que $g'_x(0)=0$ et que $Dg'_x(\tau)=\tilde{T}_x(\tau, g'_x(\tau))$ pour tout τ de I. On en déduit $g'_x=g_x$, en sorte que $f'(x)=f(x)$.
En conclusion, si f est une application C^{n+1} de U_0 dans $\tilde{V}$ telle que $f(0)=0$ et que $Df(x)=\tilde{T}(x, f(x))$ pour tout élément x de U_0, alors c'est l'unique telle application.
Prouvons maintenant que f est une application C^1 de U_0 dans V telle que $f(0)=0$ et que $Df(x)=\tilde{T}(x, f(x))$ pour tout élément x de U_0. Par récurrence on pourrait alors facilement prouver que c'est une fonc-

tion C^{n+1}. Soient x_1 et x_2 deux éléments arbitraires de $U/2$. Désignons par A l'application de $I^2 \times V \times \mathbf{R}^2$ dans F :

$$((s,t),z,(u,v)) \longrightarrow T(sx_1+tx_2, z, ux_1+vx_2),$$

et par $\widetilde{A}$ l'application de $I^2 \times V$ dans $L(F,\mathbf{R}^2)$ canoniquement associée. $\widetilde{A}$ est une application lipschitzienne et C^n de $I^2 \times V$ vers $L(F,\mathbf{R}^2)$ isomorphe à F^2. De plus $A(I^2 \times V \times [0,2]^2)$ est inclus dans l'ensemble $2A(I^2 \times V \times I^2)$, donc $2T(U \times V \times U)$ et dans $2rT(U \times V \times \hat{U})$. On en déduit que $A(I^2 \times V \times [0,2]^2)$ est inclus dans $2rT(\hat{U} \times V \times \hat{U})$, donc dans $2V/8$, c'est-à-dire dans $V/4$. D'après le lemme 2, il existe une unique fonction C^{n+1}, disons g, de I^2 dans V telle que

$$g(0,0)=0 \text{ et que } Dg(s,t)=\widetilde{A}((s,t),g(s,t))$$

pour tout élément (s,t) de I^2. Pour tout élément (s,t) de I^2, désignons par $g'_{sx_1+tx_2}$ l'application de I dans V définie par $\tau \longrightarrow g(\tau s,\tau t)$. C'est une application C^{n+1} telle que

$$g'_{sx_1+tx_2}(0)=0 \text{ et que } Dg'_{sx_1+tx_2}(\tau)=\widetilde{T}_{sx_1+tx_2}(\tau, g'_{sx_1+tx_2}(\tau))$$

pour tout élément τ de I. Ceci montre que $g'_{sx_1+tx_2}=g_{sx_1+tx_2}$, en sorte que $g(s,t)$ est égal à $f(sx_1+sx_2)$ pour tout élément (s,t) de I^2. En résumé, l'application g de I^2 dans V définie par

$$(s,t) \longrightarrow f(sx_1+tx_2)$$

est une application C^{n+1} telle que

$$g(0,0)=0 \text{ et que } Dg(s,t)=\widetilde{A}((s,t),g(s,t))$$

pour tout élément (s,t) de I^2. Il est d'ailleurs évident que:

$$g(s,t)=\int_0^1 A((\tau s,\tau t),g(\tau s,\tau t),(s,t))d\tau .$$

Ceci dit, si y_1 et y_2 sont des points de U_0, alors

$$x_1=y_1 \qquad \text{et} \qquad x_2=(y_2-y_1)$$

sont des éléments de $U/2$. De plus $f(y_2)-f(y_1)=g(1,1)-g(1,0)$ est égal à

$$\int_0^1 Dg(1,\sigma).(0,1)d\sigma=\int_0^1 \widetilde{A}((1,\sigma),g(1,\sigma)).(0,1)d\sigma ,$$

donc à

$$\int_0^1 T(x_1+\sigma x_2, f(x_1+\sigma x_2), x_2)\,d\sigma =$$
$$= \int_0^1 T(y_1+\sigma(y_2-y_1), f(y_1+\sigma(y_2-y_1)), y_2-y_1)\,d\sigma \,.$$

On déduit immédiatement de ce qui précède que f est continue de U_0 dans V, car, $\tilde{T}(\hat{U}\times V).\hat{U}$ étant borné dans F et $\hat{U}$ ouvert dans E, $\tilde{T}(\hat{U}\times V)$ est équicontinu. Soient maintenant x un point de U_0, h un vecteur de E, et t un nombre réel tel que $x+th$ appartienne à U_0. D'après ce qui précède, et si $t\neq 0$,

$$(f(x+th)-f(x))/t - T(x,f(x),h) =$$
$$= \int_0^1 [T(x+\sigma th, f(x+\sigma th), h) - T(x,f(x),h)]\,d\sigma \,.$$

Ceci montre que

$$\lim_{t\to 0} (f(x+th)-f(x))/t = T(x,f(x),h) = \tilde{T}(x,f(x)).h \,.$$

f est une application B-différentiable sur U_0 telle que $Df(x)=\tilde{T}(x,f(x))$ pour tout point x de U_0. C'est donc une application C^1. ∇

7. ESPACES PSEUDO-TOPOLOGIQUES

Nous dirons qu'un espace quasi-topologique X est *pseudo-topologique* ssi un filtre $\mathfrak{A}$ sur X converge vers un élément x de X lorsque tout ultrafiltre contenant $\mathfrak{A}$ converge vers x. Les pseudo-topologies ont été introduites par Gustave CHOQUET [11] , qui a énoncé le théorème suivant pour les espaces topologiques. La démonstration qui va suivre est due à Armando MACHADO (elle figure dans un texte de cet auteur non encore publié).

THEOREME 8. *Soient Y un espace pseudo-topologique et X un espace quasi-topologique. Alors $\mathcal{C}_\lambda(Y,X)$ est un espace pseudo-topologique.*

Δ. Soit f un élément de $\mathcal{C}(Y,X)$. Soit $\mathcal{F}$ un filtre sur $\mathcal{C}(Y,X)$ ne convergeant pas vers f dans $\mathcal{C}_\lambda(Y,X)$. Nous allons prouver l'existence

d'un ultrafiltre $\mathcal{G}$ contenant $\mathcal{F}$ et ne convergeant pas vers f.
Soit donc $\mathfrak{X}$ un filtre convergeant vers un point x dans X, tel que $\mathcal{F}\mathfrak{X}$ ne converge pas vers $f(x)$ dans Y. Alors il existe un ultrafiltre $\mathcal{Y}$ contenant $\mathcal{F}\mathfrak{X}$ tel que $\mathcal{Y}$ ne converge pas vers $f(x)$. Quels que soient ϕ appartenant à $\mathcal{F}$, A appartenant à $\mathfrak{X}$ et B appartenant à $\mathcal{Y}$, posons

$$\phi(B,A)=\{f'\in\phi \mid B\cap f'(A)\neq\emptyset\}.$$

On voit que $\phi(B,A)$ est non vide, puisque $B\cap\phi(A)$, qui appartient à $\mathcal{Y}$, est non vide. Désignons par $\mathcal{F}'$ le filtre ayant pour base l'ensemble des $\phi(B,A)$. Soit $\mathcal{G}$ un ultrafiltre quelconque contenant $\mathcal{F}'$ donc $\mathcal{F}$. Raisonnons par l'absurde. Supposons que $\mathcal{G}$ converge vers f dans l'espace $\mathcal{C}_\lambda(Y,X)$. Comme $\mathcal{G}\mathfrak{X}$ converge vers $f(x)$ dans Y, le filtre $\mathcal{Y}$ ne contient pas $\mathcal{G}\mathfrak{X}$. Il existe donc des éléments $\hat{\phi}$ de $\mathcal{G}$ et A de $\mathfrak{X}$ tels que $\hat{\phi}(A)$ n'appartienne pas à $\mathcal{Y}$. Comme $\mathcal{Y}$ est un ultrafiltre, on voit que $Y-\hat{\phi}(A)$ appartient à $\mathcal{Y}$. Soit ϕ un élément quelconque de $\mathcal{F}$. Les ensembles $\hat{\phi}$ et $\phi(Y-\hat{\phi}(A),A)$ sont tous deux des éléments de $\mathcal{G}$. Si l'on tient compte de $\hat{\phi}\cap\phi(Y-\hat{\phi}(A),A)=\emptyset$, on voit que $\emptyset$ appartient à $\mathcal{G}$, ce qui est une absurdité. ∇

THEOREME 9. *Soient F un espace vectoriel pseudo-topologique et E un espace vectoriel quasi-topologique. Alors $L(F,E)$ est un espace vectoriel pseudo-topologique.*

Δ. La démonstration est analogue à celle donnée ci-dessus (où l'on prend $f=0$). ∇

Reprenons les hypothèses du théorème 9. Il est immédiat que $L^{(n)}(F,E)$ et $L^n(F,E)$ sont des espaces vectoriels pseudo-topologiques pour tout entier n.

DEFINITION 7. Nous dirons qu'un espace quasi-topologique X est *compact* si tout ultrafiltre sur X converge dans X. Lorsque X est pseudo-topologique, on retrouve la notion d'espace compact donnée dans [1].

Soit désormais E un espace vectoriel quasi-localement-convexe.

Nous désignerons par τ la topologie localement-convexe sous-jacente à E et par $\mathfrak{U}$ le filtre des voisinages de 0 dans τ. Si ϕ est une partie de E, nous désignerons par $\widetilde{\phi}$ son enveloppe convexe équilibrée. Si $\mathfrak{A}$ est un filtre sur E, nous désignerons par $\widetilde{\mathfrak{A}}$ le filtre engendré par les enveloppes convexes équilibrées des éléments de $\mathfrak{A}$.

PROPOSITION 16. *Soit B une partie de E et soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille finie d'éléments de B. Posons $H = \{a_i \mid i \in I\}$. Alors, quel que soit ϕ appartenant à $\mathfrak{W}\widetilde{B}$, il existe une famille finie $(x_j)_{j\in J}$ d'éléments de $\widetilde{H}$ telle que $\widetilde{H}$ soit inclus dans $\bigcup_{j\in J} x_j + \phi$.*

Δ. Soit F le sous-espace vectoriel de E engendré par B. Pour tout réel δ, $\delta\widetilde{B}$ est une partie convexe symétrique absorbante de F. On en déduit que $\mathfrak{W}\widetilde{B}/F$ est inclus dans le filtre des voisinages de 0 pour la topologie fine de F. Ceci montre que, si G est le sous-espace vectoriel de F engendré par H, alors $\mathfrak{W}\widetilde{B}/G$ est inclus dans le filtre $\mathfrak{U}/G$ des voisinages de 0 pour la topologie canonique de G. Comme $\widetilde{H}$ est précompact dans τ, quel que soit V élément de $\mathfrak{U}/G$, il existe une famille finie $(x_j)_{j\in J}$ d'éléments de $\widetilde{H}$ telle que $\widetilde{H}$ soit inclus dans $\bigcup_{j\in J} x_j + \phi$. On en déduit immédiatement la proposition cherchée. ∇

DEFINITION 8. Nous dirons qu'une partie A de E est *précompacte dans* E ssi on peut trouver un filtre $\mathfrak{A}$ convergeant vers 0 dans E (appelé *filtre de A-précompacité*) possédant la propriété suivante: quel que soit ϕ appartenant à $\mathfrak{A}$, il existe une famille finie $(a_i)_{i\in I}$ d'éléments de A telle que A soit inclus dans $\bigcup_{i\in I} a_i + \phi$.

PROPOSITION 17. *Supposons que E soit un espace vectoriel admissible. Soit K un ensemble précompact et borné. Alors $\widetilde{K}$ est précompact.*

Δ. Soit $\mathfrak{A}$ un filtre de K-précompacité. Soit θ un élément de $\mathfrak{W}\widetilde{K} + \widetilde{\mathfrak{A}}$. Il existe ϕ appartenant à $\widetilde{\mathfrak{A}}$, convexe équilibré, et $\delta\widetilde{K}$ appartenant à $\mathfrak{W}\widetilde{K}$ tels que $\delta\widetilde{K} + \phi$ soit inclus dans θ. Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille finie d'éléments de K telle que K soit inclus dans $\bigcup_{i\in I} a_i + \phi$. Posons $H = \{a_i \mid i \in I\}$. On voit que $\widetilde{K}$ est inclus dans $\widetilde{H} + \phi$. Or, d'après la proposition 16, il existe une famille finie $(x_j)_{j\in J}$ d'éléments de $\widetilde{K}$ telle que $\widetilde{H}$ soit inclus dans $\bigcup_{j\in J} x_j + \delta\widetilde{K}$. Il est alors évident que $\widetilde{K}$ est inclus dans $\bigcup_{j\in J} x_j + (\delta\widetilde{K}+\phi)$, donc dans $\bigcup_{j\in J} x_j + \theta$. Comme $\mathfrak{W}\widetilde{K}+\widetilde{\mathfrak{A}} = \widetilde{\mathfrak{W}K+\mathfrak{A}}$ converge vers 0 dans E, ceci montre que $\widetilde{K}$ est précompact. ∇

PROPOSITION 18. *Supposons toujours E admissible. Alors l'adhérence dans τ de tout précompact de E est précompacte dans E.*

PROPOSITION 19. *Toute partie précompacte A de l'eqlc vectoriel E qui est complète (au sens de [1]) est compacte.*

Δ. Soit $\mathfrak{A}$ un filtre de A-précompacité. Soit $\mathfrak{X}$ un ultrafiltre sur A. Soit ϕ un élément de $\mathfrak{A}$ et $(a_i)_{i\in I}$ une famille finie d'éléments de A telle que A soit inclus dans $\bigcup_{i\in I} a_i + \phi$. Puisque $\mathfrak{X}$ est un ultrafiltre, l'un au moins des ensembles $a_i+\phi$ appartient à $\mathfrak{X}$. On en déduit que $\phi-\phi$ appartient à $\mathfrak{X}-\mathfrak{X}$. Ceci montre que $\mathfrak{X}-\mathfrak{X}$ contient $\mathfrak{A}-\mathfrak{A}$, donc converge vers 0 dans E. Ainsi le filtre $\mathfrak{X}$ converge dans A. ∇

Notons maintenant que, si E est pseudo-topologique et si K est un compact de E, alors τ et la quasi-topologie de E induisent sur K la même quasi-topologie.

PROPOSITION 20. *Supposons E pseudo-topologique. Alors tout compact de E est précompact dans E.*

Δ. Puisque K est τ-précompact, quel que soit ϕ appartenant à $\mathfrak{U}$, il existe une famille finie $(a_i)_{i\in I}$ d'éléments de K telle que K soit inclus dans $\bigcup_{i\in I} a_i+\phi$, donc dans $\bigcup_{i\in I} a_i+\phi\cap(K-K)$. On en déduit alors que $\mathfrak{U}/(K-K)$ est un filtre de K-précompacité. ∇

PROPOSITION 21. *Supposons toujours que E soit pseudo-topologique. Tout compact K de E est borné dans E.*

Δ. Il suffit de montrer que toute partie équilibrée compacte de E est bornée dans E. Or une telle partie K, qui est τ-compacte, est aussi τ-bornée. Quel que soit U appartenant à $\mathfrak{U}$, il existe donc $0<\delta\leqslant 1$ tel que δK soit inclus dans U et par suite dans $U\cap K$. On en déduit que le filtre $\mathfrak{U}/K$ est inclus dans $\mathfrak{W}K$, ce qui prouve que $\mathfrak{W}K$ converge vers 0 dans E. ∇

THEOREME 10. *Supposons que E soit un espace vectoriel pseudo-topologique admissible complet. Alors l'enveloppe convexe équilibrée fermée dans τ de tout compact de E est compacte dans E.*

Δ. Ce théorème résulte des propositions précédentes. ∇

8. SUR LE THEOREME DES FONCTIONS IMPLICITES

Soient G et F deux espaces localement-convexes séparés complets. Soit E un espace localement-convexe séparé. Supposons que le sous-espace de G (resp. F) engendré par tout compact de G (resp. F) soit normable.

Soit f une application C^r ($r \geqslant 1$, r fini ou infini) d'un ouvert $\mathcal{O}$ de $E \times F$ vers G.

THEOREME DES FONCTIONS IMPLICITES. *Soit U un ouvert de E. Soit ϕ une application continue de U dans F telle que $(x, \phi(x))$ appartienne à $\mathcal{O}$ et que $f(x, \phi(x))=0$ pour tout x de U. Supposons que, quel que soit x appartenant à U, $D_2 f(x, \phi(x))$ induise un isomorphisme de tout sous-espace F' de F engendré par un compact de F sur l'espace image $D_2 f(x, \phi(x)) F'$. Alors*

a) ϕ est dérivable en tout point de U et dans toute direction. Si $D\phi(x)$ est sa dérivée en x, on a

$$D_2 f(x, \phi(x)) . D\phi(x) + D_1 f(x, \phi(x)) = 0 .$$

b) Si E est métrisable, ϕ est une application C^r.

c) Supposons toujours E métrisable. Posons $f^1 = f$. Quel que soit $2 \leqslant k \leqslant r$, désignons par f^k l'application de $U \times L^{(k-1)}(F, E)$ dans $L^{(k-1)}(G, E)$ définie par:

$$(x, \theta) \longrightarrow D_2 f^{k-1}(x, D^{(k-2)}\phi(x)) \cdot \theta + D_1 f^{k-1}(x, D^{(k-2)}\phi(x)).$$

Alors $f^k(x, D^{(k)}\phi(x)) = 0$ pour tout x de U.

Δ. Avant de commencer la démonstration, expliquons quelles notations nous utiliserons.

Soit x un point de U et x' un élément de E. Posons $P = \{ \delta > 0 \mid [x, x+\delta x'] \subset U \}$. Soit $\tilde{\phi}$ l'application de P dans F définie par

$$\delta \longrightarrow \phi(x+\delta x') - \phi(x).$$

Soit alors D l'ensemble

$$\{ \delta > 0 \mid \delta \in P, \quad [x, x+\delta x'] \times (\phi(x) + [0,1]\tilde{\phi}[0,\delta]) \subset \mathcal{O} \}.$$

Nous désignerons par $\tilde{f}$ l'application de D dans G définie par:

$$\delta \longrightarrow f(x+\delta x', \phi(x)+\tilde{\phi}(\delta)) - f(x+\delta x', \phi(x)).$$

De toute évidence on a

$$(\lim_{\delta \to 0} \tilde{f}(\delta)/\delta) + D_1 f(x, \phi(x))x' = 0,$$

puisque

$$f(x+\delta x', \phi(x)+\tilde{\phi}(\delta)) - f(x, \phi(x)) = 0$$

quel que soit δ appartenant à D. L'ensemble

$$K(\delta_0) = D_2 f[x, x+\delta_0 x'] \times (\phi(x) + [0,1]\tilde{\phi}[0,\delta_0])$$

est compact dans $L(G,F)$ pour tout δ_0 de D. D'après le théorème 10, son enveloppe convexe fermée $L(\delta_0)$ dans la topologie localement-convexe sous-jacente à $L(G,F)$ est donc compacte dans $L(G,F)$. Quel que soit δ_0 appartenant à D et quel que soit $0 < \delta \leqslant \delta_0$, l'ensemble $L(\delta_0).\tilde{\phi}(\delta)/\delta$ est donc convexe compact dans G. Compte tenu de l'expression de $\tilde{f}(\delta)$, on voit que $\tilde{f}(\delta)/\delta$ appartient à $L(\delta_0).\tilde{\phi}(\delta)/\delta$.

Nous abordons maintenant la démonstration proprement dite qui comprend de nombreuses parties.

a) Soient G' et F' deux espaces normés. Soit i une application linéaire continue de F' dans G' telle que i soit un isomorphisme de F' sur $i(F')$. Désignons par $\mathcal{F}$ le filtre des voisinages de i dans l'espace $L(G',F')$ et par $\mathcal{V}(G')$ le filtre des voisinages de 0 dans G'. Soit $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{V}(G')$ le filtre engendré par les ensembles de la forme suivante:

$$\theta^{-1} V = \bigcup_{u \in \theta} u^{-1}(V), \text{ où } \theta \text{ appartient à } \mathfrak{F} \text{ et } V \text{ à } \mathfrak{V}(G').$$

Prouvons que $\mathfrak{F}^{-1}\mathfrak{V}(G')$ converge vers 0 dans F'.

Soit $0 < \varepsilon < 1$. Si θ désigne l'ensemble

$$\{ i+u \mid u \in L(G', F'),\ \|u\| < \varepsilon \},$$

prouvons que $\theta^{-1}(B_1(G'))$ est inclus dans $B_{1/1-\varepsilon}(F')$, étant entendu que $B_1(G')$ et $B_{1/1-\varepsilon}(F')$ désignent les boules fermées de centre 0 dans G' et F' de rayon 1 et $1/(1-\varepsilon)$ respectivement. Soit y un quelconque élément de F' tel que $\|y\| > 1/(1-\varepsilon)$. Alors quel que soit $i+u$ appartenant à θ, supposant que la norme de F' est image réciproque par i de la norme sur $i(F')$ induite par la norme de G', on a

$$\|(i+u)y\| \geqslant \|i(y)\| - \|u(y)\| \geqslant \|y\|(1 - \|u(y)\| / \|y\|) \geqslant \|y\|(1-\varepsilon),$$

donc

$$\|(i+u)y\| > 1 .$$

On en déduit que l'intersection de $\theta^{-1}(B_1(G'))$ et du complémentaire par rapport à F' de $B_{1/1-\varepsilon}(F')$ est vide, c'est-à-dire que l'ensemble $\theta^{-1}(B_1(G'))$ est inclus dans $B_{1/1-\varepsilon}(F')$. Mais alors il est immédiat que $\theta^{-1}(B_{k(1-\varepsilon)}(G'))$ est inclus dans $B_k(F')$ pour tout réel positif k, ce qui prouve que $\mathfrak{F}^{-1}\mathfrak{V}(G')$ converge vers 0 dans F'. Si maintenant $\mathfrak{F}$ est un filtre quelconque convergeant vers i dans l'espace $L(G', F')$ et $\mathfrak{V}(G')$ un filtre quelconque convergeant vers 0 dans G', alors $\mathfrak{F}^{-1}(\mathfrak{V}(G'))$ converge vers 0 dans F'.

b) Désignons par $\mathfrak{A}'$ et $\mathfrak{A}$ les filtres sur G et F engendrés respectivement par les ensembles

$$A'(\delta_0) = \{ f(\delta)/\delta \mid 0 < \delta \leqslant \delta_0,\ \delta_0 \in D \}$$

et

$$A(\delta_0) = \{ \phi(\delta)/\delta \mid 0 < \delta \leqslant \delta_0,\ \delta_0 \in D \}.$$

Prouvons que $\mathfrak{A}$ est un filtre quasi-borné de F.

Soit η un réel arbitraire de D. Désignons par F' le sous-espace de F engendré par $\widetilde{\Phi}[0, \eta]$, et par G' le sous-espace de G engendré par $L(\eta).\widetilde{\Phi}[0, \eta]$. Si i est la restriction de $D_2 f(x, \phi(x))$ à (G', F'), c'est par hypothèse un isomorphisme de F' sur $i(F')$. Soit $\mathfrak{F}$ le filtre engendré par les ensembles $L(\delta_0)/(G', F')$, où $0 < \delta_0 \leqslant \eta$. Il converge vers i dans $L(G', F')$. D'après la partie a, le filtre $\mathfrak{F}^{-1}(\mathfrak{W}\mathfrak{A}')$ converge vers 0 dans F'. Puisque $\widetilde{f}(\delta)/\delta$ appartient à $L(\delta_0).\widetilde{\phi}(\delta)/\delta$ quel que soit δ_0 appartenant à D, $\delta_0 \leqslant \eta$, et quel que soit $0 < \delta \leqslant \delta_0$, on voit que $\mathfrak{W}\mathfrak{A}$ contient $\mathfrak{F}^{-1}(\mathfrak{W}\mathfrak{A}')$; il en résulte que $\mathfrak{W}\mathfrak{A}$ converge vers 0 dans F'.

c) Nous allons maintenant prouver que $\mathfrak{A}$ est un filtre de Cauchy sur l'espace F.

Soient δ' et δ deux éléments de D. Soient v et u des points de $L(\delta')$ et $L(\delta)$ tels que

$$\widetilde{f}(\delta')/\delta' = v\,[\widetilde{\phi}(\delta')/\delta'] \quad \text{et} \quad \widetilde{f}(\delta)/\delta = u\,[\widetilde{\phi}(\delta)/\delta]\,.$$

On voit que:

$$u(\widetilde{\phi}(\delta')/\delta' - \widetilde{\phi}(\delta)/\delta) = (u-v)\widetilde{\phi}(\delta')/\delta' + (\widetilde{f}(\delta')/\delta' - \widetilde{f}(\delta)/\delta).$$

Il s'ensuit que $\widetilde{\phi}(\delta')/\delta' - \widetilde{\phi}(\delta)/\delta$ appartient à

$$u^{-1}\,[(u-v)\widetilde{\phi}(\delta')/\delta' + (\widetilde{f}(\delta')/\delta' - \widetilde{f}(\delta)/\delta)]\,.$$

Ceci montre que $A(\delta_0) - A(\delta_0)$ est inclus dans

$$L(\delta_0)^{-1}.\,[(L(\delta_0) - L(\delta_0))A(\delta_0) + (A'(\delta_0) - A'(\delta_0))]$$

quel que soit δ_0 appartenant à D, $0 < \delta_0 \leqslant \eta$. Compte tenu de la partie b, on en déduit immédiatement (grâce à a) que $\mathfrak{A} - \mathfrak{A}$ converge vers 0 dans F.

d) Puisque F est complet, $\mathfrak{A}$ converge dans F vers un élément $D\phi(x)x'$. Soit $D\phi(x)$ l'application de E dans F définie par $x' \longrightarrow D\phi(x)x'$. Le filtre $\mathfrak{A}'$, qui contient $\mathfrak{F}\mathfrak{A}$, converge vers

$$D_2 f(x, \phi(x)).\,D\phi(x)x'.$$

Ceci montre que

$$D_2 f(x, \phi(x)).\,D\phi(x)x' + D_1 f(x, \phi(x))x' = 0\,.$$

On voit donc que

$$D_2 f(x, \phi(x)).\,D\phi(x) + D_1 f(x, \phi(x)) = 0\,.$$

e) Supposons désormais E métrisable. Quel que soit n appartenant à $\mathbf{N}$, nous désignerons par U_n la boule de E de centre 0 et de rayon $1/n$. Nous supposerons dans ce qui suit $x+U_1$ inclus dans U, pour simplifier.

Appelons $D\phi$ l'application de U dans l'ensemble $\mathfrak{L}(F,E)$ des applications linéaires de E dans F définie par $x \longrightarrow D\phi(x)$. Pour que $D\phi$ soit continue vers $L(F,E)$ en un point x de U, il faut et il suffit que l'assertion suivante soit exacte:

Etant donnée une suite (x_n) de points de U convergeant vers x et une suite bornée (a_n) de points de E, le filtre

$$< [D\phi(x_n)-D\phi(x)]\, a_n >$$

converge vers 0 dans F.

En effet, supposons l'assertion ci-dessus vérifiée. Nous allons prouver que, quel que soit le filtre quasi-borné $\hat{\mathfrak{X}}$ de E, le filtre

$$[D\phi(x+\mathfrak{U})-D\phi(x)]\,\hat{\mathfrak{X}}$$

converge vers 0 dans F, où $\mathfrak{U}$ désigne le filtre des voisinages de 0 dans E, ce qui montrera que $D\phi$ est continue en x vers $L(F,E)$.

Quel que soit n appartenant à $\mathbf{N}$, il existe $\varepsilon_n > 0$ et X_n appartenant à $\hat{\mathfrak{X}}$ tels que $[-\varepsilon_n, +\varepsilon_n]\, X_n$ soit inclus dans U_n. Supposons X_{n+1} inclus dans X_n quel que soit n appartenant à $\mathbf{N}$. Désignons par $\mathfrak{X}$ le filtre engendré par les X_n. C'est un filtre quasi-borné de E. De plus $\mathfrak{X}$ est inclus dans $\hat{\mathfrak{X}}$. Nous allons prouver que $[D\phi(x+\mathfrak{U})-D\phi(x)]\,\mathfrak{X}$ est un filtre convergeant vers 0 dans F.

Raisonnons par l'absurde. Supposons que $[D\phi(x+\mathfrak{U})-D\phi(x)]\,\mathfrak{X}$ ne converge pas vers 0 dans F. Puisque ce filtre admet une base dénombrable, il est l'intersection des filtres élémentaires qui le contiennent. Il existe donc une suite (y_n) d'éléments de F ne convergeant pas vers 0 dans F telle que $<y_n>$ contienne $[D\phi(x+\mathfrak{U})-D\phi(x)]\,\mathfrak{X}$. Il existe un voisinage V de 0 dans F tel que, quel que soit n appartenant à $\mathbf{N}$, il existe un entier $r_n \geqslant n$ pour lequel y_{r_n} n'appartient pas à V. D'ailleurs on peut choisir r_n supérieur à tout entier donné à l'avance. Or

$$H_n = [D\phi(x+U_n) - D\phi(x)]\, X_n$$

appartient à $<y_n>$ quel que soit n appartenant à $\mathbf{N}$. Il existe donc q_n appartenant à $\mathbf{N}$ tel que $\{y_q \mid q \geqslant q_n\}$ soit inclus dans H_n. Choisissons r_n supérieur ou égal à q_n. Alors on peut trouver x_n dans $x+U_n$ et a_n dans X_n tels que $y_{r_n} = [D\phi(x_n) - D\phi(x)]\, a_n$. Comme la suite (x_n) converge vers x dans U, et comme la suite (a_n) est bornée dans E (puisque $<a_n>$ contient $\mathfrak{X}$), le filtre

$$<y_{r_n}> = <[D\phi(x_n) - D\phi(x)]\, a_n>$$

converge vers 0 dans F, ce qui est absurde.

f) Démontrons effectivement que, étant données une suite (x_n) de points de U convergeant vers x et une suite bornée (a_n) dans E, le filtre $<[D\phi(x_n) - D\phi(x)]\, a_n>$ converge vers 0 dans F.
Soit (λ_n) une suite de réels positifs convergeant vers 0 et ne contenant pas 0. On sait que $(\lambda_n a_n)$ converge vers 0 dans E. Soit ε un réel positif tel que

$$Q = (\{x_n \mid n \in \mathbf{N}\} \cup \{x\}) + [0, \varepsilon]\, \{\lambda_n a_n \mid n \in \mathbf{N}\}$$

soit inclus dans U. Comme Q est compact dans U, son image K par ϕ est compacte dans F.
Désignons par F' le sous-espace de F engendré par K. Compte tenu de:

$$D\phi(x_n)\, a_n = \lim_{\delta > 0,\ \delta \to 0} [\phi(x_n + \delta a_n) - \phi(x_n)] / \delta \quad \forall n \in \mathbf{N}$$

et de

$$D\phi(x)\, a_n = \lim_{\delta > 0,\ \delta \to 0} [\phi(x + \delta a_n) - \phi(x)] / \delta \qquad \forall n \in \mathbf{N},$$

on voit que $D\phi(x_n)\, a_n$ et $D\phi(x)\, a_n$ appartiennent à F' pour tout $n \in \mathbf{N}$, en sorte que $[D\phi(x_n) - D\phi(x)]\, a_n$ appartient à F'. Soit G' le sous-espace de G engendré par

$$(\{D_2 f(x_n, \phi(x_n)) \mid n \in \mathbf{N}\} \cup \{D_2 f(x, \phi(x))\})K.$$

Par hypothèse la restriction i de $D_2 f(x, \phi(x))$ à (G', F') est un isomorphisme de F' sur $i(F')$. Soit

$$\mathcal{G}' = <D_2 f(x_n, \phi(x_n)).([D\phi(x_n) - D\phi(x)]\, a_n)>.$$

Compte tenu de la partie d , on voit que $\mathcal{G}'$ converge vers 0 dans G. Le filtre $< [D\phi(x_n)-D\phi(x)]\, a_n >$, qui contient le filtre

$$<D_2 f(x_n, \phi(x_n))>^{-1} . \mathcal{G}',$$

converge vers 0 dans F d'après la partie a.

g) Nous avons montré que ϕ est C^1 et que

$$D_2 f(x, \phi(x)) . D\phi(x) + D_1 f(x, \phi(x)) = 0$$

quel que soit x appartenant à U. Nous allons maintenant prouver par récurrence que ϕ est C^r. On suppose bien entendu $r > 1$.
Soit k un entier, $1 \leqslant k < r$. Supposons déjà démontré que ϕ est C^k. Posons $f^1 = f$, et, si $2 \leqslant i < k$, désignons par f^i l'application de l'espace $U \times L^{(i-1)}(F, E)$ dans $L^{(i-1)}(G, E)$ définie par:

$$(x, \theta) \longrightarrow D_2 f^{i-1}(x, D^{(i-2)}\phi(x)) . \theta + D_1 f^{i-1}(x, D^{(i-2)}\phi(x)).$$

Supposons que $f^i(x, D^{(i)}\phi(x)) = 0$ pour tout entier i, $1 \leqslant i \leqslant k$, et quel que soit x appartenant à U. Désignons alors par f^{k+1} l'application de $U \times L^{(k)}(F, E)$ dans $L^{(k)}(G, E)$ définie par:

$$(x, \theta) \longrightarrow D_2 f^k(x, D^{(k-1)}\phi(x)) . \theta + D_1 f^k(x, D^{(k-1)}\phi(x)).$$

Nous nous proposons de démontrer que ϕ est C^{k+1} et que, quel que soit x appartenant à U, $f^{k+1}(x, D^{(k+1)}\phi(x)) = 0$.

h) Soit x un point de U et x' un point de E. Nous désignerons par $\overset{\frown}{D^k\phi}$ l'application de P dans $L^{(k)}(F, E)$ définie par:

$$\delta \longrightarrow D^{(k)}\phi(x + \delta x') - D^{(k)}\phi(x).$$

Soit $\overset{\frown}{f^{k+1}}$ l'application de P dans $L^{(k)}(G, E)$ définie par:

$$\delta \longrightarrow f^{k+1}(x + \delta x', D^{(k)}\phi(x) + \overset{\frown}{D^k\phi}(\delta)) - f^{k+1}(x + \delta x', D^{(k)}\phi(x)).$$

Compte tenu de la définition de f^{k+1}, on voit que:

$$\overset{\frown}{f^{k+1}}(\delta) = D_2 f^k(x + \delta x', D^{(k-1)}\phi(x + \delta x')) . \overset{\frown}{D^k\phi}(\delta) \quad \forall\, \delta \in P.$$

Mais alors, compte tenu de

$$D_2 f^i(x, \theta)\theta' = D_2 f^{i-1}(x, D^{(i-2)}\phi(x)) . \theta'$$

pour $2 \leqslant i \leqslant k$ et pour θ, θ' de $L^{(i-2)}(F, E)$, on remarque que:

$$\overset{\frown}{f^{k+1}}(\delta) . a_1 . \ldots . a_k = D_2 f(x + \delta x', \phi(x) + \tilde{\phi}(\delta)) . [\overset{\frown}{D^k\phi}(\delta) . a_1 . \ldots . a_k],$$

ceci quel que soit δ appartenant à P et quels que soient $a_1, \dots, a_k$ appartenant à E. La relation ainsi obtenue est très importante; en effet, le reste de la démonstration est basé dessus.

i) Nous désignerons par $\mathfrak{A}$ le filtre sur $L^{(k)}(F, E)$ engendré par les ensembles

$$A^k(\delta_0) = \{[\overset{\frown}{D^k\phi}(\delta)/\delta] \mid 0 < \delta \leqslant \delta_0, \ \delta_0 \in P\}.$$

Prouvons que $\mathfrak{A}$ est un filtre quasi-borné de $L^{(k)}(F, E)$.

Supposons que, étant données k suites bornées arbitraires $(a_n^1) \dots (a_n^k)$ de E, le filtre $(\mathfrak{W}\mathfrak{A}) < a_n^1 > \dots < a_n^k >$ converge vers 0 dans F. Un raisonnement analogue à celui de la partie e prouve alors que $\mathfrak{W}\mathfrak{A}$ converge vers 0 dans $L^{(k)}(F, E)$. Nous devons donc montrer que le filtre $(\mathfrak{W}\mathfrak{A}) < a_n^1 > \dots < a_n^k >$ converge vers 0 dans F. Soit (λ_n) une suite de réels positifs convergeant vers 0 et ne contenant pas 0. On sait que $(\lambda_n a_n^i)$ converge vers 0 dans E, pour $1 \leqslant i \leqslant k$, en sorte que l'ensemble

$$S_i = \{\lambda_n a_n^i \mid n \in \mathbf{N}\} \cup \{0\}$$

est compact dans E. Soit F' le sous-espace vectoriel de F engendré par $\overset{\frown}{D^k}\phi[0, n] \,.\, S_1 \dots S_k$, et soit G' le sous-espace vectoriel de G engendré par

$$\{D_2 f(x + \delta x', \phi(x) + \tilde{\phi}(\delta)) \mid 0 < \delta \leqslant \eta\}(\overset{\frown}{D^k}\phi[0, \eta] \,.\, S_1 \dots S_k).$$

Par hypothèse la restriction de $D_2 f(x, \phi(x))$ à (G', F') est un isomorphisme de F' sur $i(F')$. Il résulte alors de la partie a que le filtre $(\mathfrak{W}\mathfrak{A}) < a_n^1 > \dots < a_n^k >$ converge vers 0 dans F.

j) Prouvons maintenant que $\mathfrak{A}$ est un filtre de Cauchy sur l'espace $L^{(k)}(F, E)$.

Un raisonnement analogue à celui que nous avons tenu dans la partie i prouve que $\mathfrak{A} - \mathfrak{A}$ converge vers 0 dans $L^{(k)}(F, E)$ ssi l'assertion suivante est exacte:

« Etant données k suites bornées arbitraires $(a_n^1) \dots (a_n^k)$ de E, le filtre $(\mathfrak{A} - \mathfrak{A}) < a_n^1 > \dots < a_n^k >$ converge vers 0 dans F ».

Démontrons effectivement l'assertion ci-dessus.

Soit δ_0 un élément quelconque de P, et soient $\nu_1, \dots, \nu_k$ des entiers arbitraires. Posons

$$H(\delta_0) = \{ D_2 f(x + \delta x', \phi(x) + \widetilde{\phi}(\delta)) \;/\; 0 < \delta \leqslant \delta_0 \}$$

et, pour $1 \leqslant i \leqslant k$, posons $H_i = \{ a_n^i \mid n \geqslant \nu_i \}$. Soient $0 < \delta$, $\delta' \leqslant \delta_0$, et soient $n_1, \dots, n_k$ des entiers tels que n_i soit supérieur à ν_i pour $1 \leqslant i \leqslant k$. On sait que

$$(\widetilde{f^{k+1}}(\delta')/\delta' - \widetilde{f^{k+1}}(\delta)/\delta).\, a_{n_1}^1 \dots a_{n_k}^k =$$
$$= v(\widetilde{D^k\phi}(\delta')/\delta'.\, a_{n_1}^1 \dots a_{n_k}^k) - u(\widetilde{D^k\phi}(\delta)/\delta.\, a_{n_1}^1 \dots a_{n_k}^k),$$

où nous posons

$$v = D_2 f(x + \delta' x', \phi(x) + \widetilde{\phi}(\delta')) \quad \text{et} \quad u = D_2 f(x + \delta x', \phi(x) + \widetilde{\phi}(\delta)).$$

Il s'ensuit:

$$u\,[(\widetilde{D^k\phi}(\delta')/\delta' - \widetilde{D^k\phi}(\delta)/\delta)\, a_{n_1}^1 \dots a_{n_k}^k] =$$
$$= (u - v)\,[\widetilde{D^k\phi}(\delta')/\delta'.\, a_{n_1}^1 \dots a_{n_k}^k]$$
$$+ [\widetilde{f^{k+1}}(\delta')/\delta' - \widetilde{f^{k+1}}(\delta)/\delta]\, a_{n_1}^1 \dots a_{n_k}^k,$$

en sorte que l'élément $(\widetilde{D^k\phi}(\delta')/\delta' - \widetilde{D^k\phi}(\delta)/\delta)\, a_{n_1}^1 \dots a_{n_k}^k$ de F appartient à

$$u^{-1}\,[(u - v)\,[\widetilde{D^k\phi}(\delta')/\delta'.\, a_{n_1}^1 \dots a_{n_k}^k]$$
$$+ [\widetilde{f^{k+1}}(\delta')/\delta' - \widetilde{f^{k+1}}(\delta)/\delta]\, a_{n_1}^1 \dots a_{n_k}^k].$$

Posant

$$A'^k(\delta_0) = \{ \widetilde{f^{k+1}}(\delta')/\delta' - \widetilde{f^{k+1}}(\delta)/\delta \mid 0 < \delta,\ \delta' \leqslant \delta_0 \},$$

ceci montre que $(A^k(\delta_0) - A^k(\delta_0))H_1 \dots H_k$ est inclus dans le sous-ensemble de F suivant:

$$H(\delta_0)^{-1}.\ [(H(\delta_0) - H(\delta_0)).\ [A^k(\delta_0) H_1 \dots H_k]$$
$$+ [A'^k(\delta_0) - A'^k(\delta_0)]\, H_1 \dots H_k].$$

On en déduit immédiatement, compte tenu de la partie i, que le filtre $(\mathfrak{A} - \mathfrak{A}) < a_n^1 > \dots < a_n^k >$ converge vers 0 dans F.

k) D'après la partie j, le filtre $\mathfrak{A}$ converge dans $L^{(k)}(F, E)$ vers un élément que nous noterons $D^{(k+1)}\phi(x)x'$. Compte tenu de l'égalité

$f^{k+1}(\hat{x}, D^{(k)}\phi(\hat{x}))=0$ pour tout $\hat{x}$ appartenant à U, on voit que:

$$[\lim_{\delta>0,\ \delta\to 0} \overset{\frown}{f^{k+1}}(\delta)/\delta] + D_1 f^{k+1}(x, D^{(k)}\phi(x))x' = 0 .$$

Puisque:

$$\overset{\frown}{f^{k+1}}(\delta)/\delta = D_2 f^k(x+\delta x', D^{(k-1)}\phi(x) + \overset{\frown}{D^{k-1}}\phi(\delta)) \cdot \overset{\frown}{D^k}\phi(\delta)/\delta$$

pour tout $\delta \in P$, on en déduit:

$$D_2 f^k(x, D^{(k-1)}\phi(x)) \cdot D^{(k+1)}\phi(x)x' + D_1 f^{k+1}(x, D^{(k)}\phi(x))x' = 0 .$$

Il en résulte·

$$D_2 f^{k+1}(x, D^{(k)}\phi(x)) \,.\, D^{(k+1)}\phi(x) \;+\; D_1 f^{k+1}(x, D^{(k)}\phi(x)) = 0 .$$

quel que soit x appartenant à U.

1) Un raisonnement analogue à celui des parties e et f prouve que l'application $D^{(k+1)}\phi$, de U dans l'espace $\mathcal{L}(L^{(k)}(F,E),E)$ des applications linéaires de E vers $L^{(k)}(F,E)$, est continue de U vers l'espace $L^{(k+1)}(F,E)$. ∇

Soit désormais E un espace localement-convexe séparé, et soit F un espace localement-convexe séparé complet tel que le sous-espace de F engendré par tout compact de F soit normable. Posons $I=[0,1]$. Nous désignerons par C l'ensemble des applications continues de I dans F, par C_0^1 l'ensemble des applications continûment-dérivables de I dans F s'annulant en 0, et par Δ l'application de dérivation de C_0^1 dans C qui à un élément β de C_0^1 fait correspondre sa dérivée $\dot{\beta}$. On munit C de la topologie de la convergence compacte et C_0^1 de la topologie image réciproque par Δ de la topologie de la convergence compacte sur C. Soit alors f une application C^r ($r \geqslant 1$, r fini ou infini) d'un ouvert $\mathcal{O}(f)$ de $E \times F$ vers $L(F,E)$. Désignons par g l'application de

$$\mathcal{O} = \{(x,y,\gamma) \in E \times F \times C_0^1 \mid (sx, y+\gamma s) \in \mathcal{O}(f),\ \forall s \in I\}$$

vers C donnée par:

$$g(x,y,\gamma)s = \dot{\gamma}(s) - f(sx, y+\gamma s)x \quad \text{pour tout } s \text{ de } I .$$

LEMME. *g est une application C^r de $\mathcal{O}$ dans C.*

Δ. Désignons par h l'application de $C(L(F,E),I)\times E$ dans $C(F,I)$ donnée par $[h(u,x)]\,s=u(s)x$. Désignons par f_* l'application de $C(\mathcal{O}(f),I)$ dans $C(L(F,E),I)$ définie par $\hat{e}\longrightarrow f.\hat{e}$. On sait (voir chapitre 5) que f_* est C^r. Enfin désignons par e l'application de $\mathcal{O}$ dans $C(\mathcal{O}(f),I)$ donnée par $[e(x,y,\gamma)]\,s=(sx,y+\gamma s)$. C'est aussi une application C^r. Comme $g=\Delta.p_3-h.[f_*.e,p_1]$, où p_1 et p_3 désignent les projections de $\mathcal{O}$ sur E et C_0^1 respectivement, on voit que g est C^r. ∇

THEOREME 11. *Soit W un ouvert de $E\times F$. Soit ϕ une application continue de W dans C_0^1 telle que $(z,\phi(z))$ appartienne à $\mathcal{O}$ et que l'on ait $g(z,\phi(z))=0$ pour tout z de W. Alors*

a) ϕ est dérivable en tout point de W et dans toute direction. Si $D\phi(z)$ est sa dérivée en un point z de W, on a:

$$D_3\,g(z,\phi(z)).D\phi(z)+D_1\,g(z,\phi(z)).p_E+D_2\,g(z,\phi(z)).p_F=0,$$

où p_E et p_F désignent les projections de $E\times F$ sur E et F respectivement.

b) Si E et F sont métrisables (F est alors normé), ϕ est une application C^r.

Δ.a) Prouvons que $D_3\,g(x,y,\gamma)$ est une injection de C_0^1 dans C quel que soit (x,y,γ) appartenant à $\mathcal{O}$. Soit β un point de C_0^1 tel que l'on ait $D_3\,g(x,y,\gamma).\beta=0$. Nous allons montrer que $\beta=0$.

Soit ψ l'application de I dans $L(F,F)$ donnée par

$$\psi(s)v=D_2\,f(sx,y+\gamma s).v.x$$

quel que soit s appartenant à I et pour tout v de F. C'est une application continue de I dans $L(F,F)$. Soient F_1 et F_2 les sous-espaces banachisables de F engendrés respectivement par $\beta(I)$ et par $\psi(I).\beta(I)$. Comme $\dot{\beta}(s)=\psi(s).\beta(s)$ quel que soit s appartenant à I, on voit que $\dot{\beta}(I)$ (donc $\beta(I)$) est inclus dans F_2. Ceci montre que F_1 est inclus dans F_2. Introduisons une norme sur F_2. Quel que soit s appartenant à I, nous désignerons par $\|\psi(s)\|$ la norme de la restriction de $\psi(s)$ à (F_2,F_1) dans l'espace normé canonique $L(F_2,F_1)$. Comme

$$\beta(s)=\int_0^s \psi(s')/(F_2,F_1).\beta(s')\,ds'$$

quel que soit s appartenant à I, on a:

$$\|\beta(s)\| \leqslant (\mathrm{Sup}_{\xi \in I} \|\psi(\xi)\|) . \int_0^s \|\beta(s')\| ds' .$$

On en déduit $\beta = 0$ (d'après le lemme de Gronwall).

b) Soit (x, y, γ) un point de $\mathcal{O}$. Soit K un sous-ensemble compact de C_0^1. Prouvons que $D_3 g(x, y, \gamma)$ induit un isomorphisme i du sous-espace G_1 de C_0^1 engendré par K sur $G_2 = D_3 g(x, y, \gamma) G_1$. Montrons simplement que i^{-1} est continue en 0 de G_2 vers G_1. Autrement dit prouvons que, si (β_n) est une suite d'éléments de G_1, si (h_n) est une suite d'éléments de G_2, telles que

$$\dot{\beta}_n(s) = D_2 f(sx, y + \gamma s) . \beta_n(s) . x + h_n(s)$$

quel que soit l'entier positif n et pour tout s de I, si (h_n) converge vers 0 dans C, alors (β_n) converge vers 0 dans C_0^1.

Désignons par F_1 et F_2 les sous-espaces banachisables de F engendrés respectivement par $K.I$ et par $\psi(I)(K.I) \cup (K.I)$. Alors G_1 est inclus dans $C_0^1(F_1, I)$ et G_2 dans $C(F_2, I)$. De plus F_1 est inclus dans F_2 et, quel que soit s appartenant à I, $\psi(s)$ envoie F_1 dans F_2. Introduisons une norme sur F_2 et, quel que soit s appartenant à I, désignons par $\|\psi(s)\|$ la norme de $\psi(s)/(F_2, F_1)$ dans l'espace normé $L(F_2, F_1)$. De

$$\beta_n(s) = \int_0^s \psi(s') . \beta_n(s') ds' + \int_0^s h_n(s') ds'$$

quel que soit n appartenant à $\mathbf{N}$ et pour tout s de I, découle:

$$\|\beta_n(s)\| \leqslant \mathrm{Sup} . \int_0^s \|\beta_n(s')\| ds' + \varepsilon_n ,$$

où l'on pose:

$$\mathrm{Sup} = \mathrm{Sup}_{\xi \in I} \|\psi(\xi)\| \quad \text{et} \quad \varepsilon_n = \int_0^1 \|h_n(s')\| ds' .$$

Il en résulte $\|\beta_n(s)\| \leqslant \varepsilon_n . [\exp(\mathrm{Sup} . s)]$ d'après le lemme de Gronwall. On voit donc que (β_n) converge vers 0 dans $C(F_2, I)$ et par suite dans C. Puisque l'application ρ de $\mathcal{C}(L(F, F), I) \times \mathcal{C}^2(F, I)$ dans l'espace $\mathcal{C}(F, I)$ donnée par $\rho(\psi', h', h) . s = \psi'(s) h'(s) + h(s)$ est continue, on en déduit que $(\dot{\beta}_n)$ converge vers 0 dans C. Nous avons ainsi démontré que (β_n) converge vers 0 dans C_0^1.

c) Le théorème résulte alors du théorème des fonctions implicites. ∇

Supposons désormais que E est métrisable et F normé.

THEOREME 12 *(théorème de Frobenius). Reprenons les hypothèses et les notations du théorème 11. Supposons de plus que, pour tous* (x,y) *de* W, s *de* I *et* (a_1, a_2) *de* $E\times E$, *l'égalité suivante ait lieu:*

$$D_1 f(z)a_1 a_2 + [D_2 f(z).(f(z)a_1)]\, a_2 =$$
$$= D_1 f(z)a_2 a_1 + [D_2 f(z).(f(z)a_2)]\, a_1$$

où $z=(sx, y+\phi(x,y)s)$. *Alors l'application* α *de* W *dans* F *définie par* $(x,y) \longrightarrow y+\phi(x,y)1$ *est une application* C^r *telle que, pour tout* (x,y) *de* W, $D_1\alpha(x,y)=f(x,\alpha(x,y))$.

Δ. Soit (x,y) un point de W, et soit a un élément quelconque de E. Nous nous proposons de montrer $D_1\alpha(x,y)a=f(x,\alpha(x,y))a$.
Soient h_1 et h_2 les éléments de C_0^1 définis respectivement par:

$$s \longrightarrow (D_1\phi(x,y)a)s \quad \text{et} \quad s \longrightarrow f(sx, y+\phi(x,y)s).sa.$$

Nous allons prouver que

$$[D_3 g(x,y,\phi(x,y)).h_1]\, s = [D_3 g(x,y,\phi(x,y)).h_2]\, s$$

pour tout s de I. Compte tenu du fait que $D_3 g(x,y,\phi(x,y))$ est une injection, on en déduira $h_1=h_2$. De $h_1(1)=h_2(1)$ résultera l'égalité cherchée.
Par définition de h_1, on a, quel que soit s appartenant à I:

$$[D_3 g(x,y,\phi(x,y)).h_1]\, s = ([D_3 g(x,y,\phi(x,y)) \cdot D_1\phi(x,y)]\, a)s$$
$$= -[D_1 g(x,y,\phi(x,y))a]\, s,$$

d'où

$$[D_3 g(x,y,\phi(x,y)).h_1]\, s = -f(sx, y+\phi(x,y)s)a$$
$$-D_1 f(sx, y+\phi(x,y)s).sa.x.$$

Par définition de $D_3 g(x,y,\phi(x,y))$, on a:

$$[D_3 g(x,y,\phi(x,y)).h_2]\, s = \dot{h}_2(s) - D_2 f(sx, y+\phi(x,y)s).h_2(s).x$$

pour tout s de I. A l'aide de l'égalité indiquée dans l'énoncé, on en déduit:

$$[D_3 g(x,y,\phi(x,y)).h_2]\, s = -f(sx, y+\phi(x,y)s)a -$$
$$-D_1 f(sx, y+\phi(x,y)s).sa.x. \,\nabla$$

La démonstration du théorème 12 est celle du théorème 1 de [10] .

PROPOSITION 22. *Reprenons les hypothèses du théorème 11, et supposons que* r *soit strictement supérieur à 1. Supposons de plus que, pour tous* (x,y) *de* W *et* s *de* I, (sx,y) *appartienne à* W *et que l'on ait l'égalité* $\phi(x,y)s = \phi(sx,y)1$. *Alors*

$$([D_1(D_2\phi)(sx,y).x]\, y')1 =$$
$$= D_2 f(sx, y+\phi(x,y)s).\,[y' + (D_2\phi(x,y)y')s]\,.x$$

pour tous (x,y) *de* W, y' *de* F, *et* s *de* I.

Δ. Soit (x,y) un point de W, et soit y' un point de F. On prouve facilement que $[D_2\phi(x,y)y']\, s = [D_2\phi(sx,y)y']\, 1$ quel que soit s appartenant à I. On en déduit

$$[\dot{\widehat{D_2\phi(x,y)y'}}]\, s = ([D_1(D_2\phi)(sx,y).x].y')1 .$$

La relation

$$D_3 g(x,y,\phi(x,y)).D_2\phi(x,y) = -D_2 g(x,y,\phi(x,y))$$

entraîne

$$[D_3 g(x,y,\phi(x,y)).(D_2\phi(x,y)y')]\, s = -[D_2 g(x,y,\phi(x,y))y']\, s$$

pour tout s de I, c'est-à-dire

$$[\dot{\widehat{D_2\phi(x,y)y'}}]\, s - D_2 f(sx, y+\phi(x,y)s).[D_2\phi(x,y)y')s]\,.x =$$
$$= -[D_2 g(x,y,\phi(x,y))y']\, s .$$

On voit donc que

$$[\dot{\widehat{D_2\phi(x,y)y'}}]\, s = D_2 f(sx, y+\phi(x,y)s).\,[y' + (D_2\phi(x,y)y')s]\,.x$$

pour tout x de I, d'où l'on tire l'égalité cherchée. ∇

Supposons que $\phi(0,y)$ soit égal à 0 pour tout point (x,y) de W. Si $E = \mathbf{R}$, examinant successivement les cas où $s=1$, $x \neq 0$, et $s=0$, $x \neq 0$, on déduit de la proposition précédente l'égalité

$$D_1(D_2\alpha)(x,y).1=D_2f(x,\alpha(x,y))\cdot D_2\alpha(x,y)$$

pour tout (x,y) de W.

Reprenons les notations antérieures au théorème 11. On exige simplement F espace localement-convexe séparé complet et E espace localement-convexe séparé. Soit W un ouvert de $E\times F$. Supposons que les assertions suivantes soient exactes:

a) Quel que soit (x,y) appartenant à W, il existe une suite $(z_n(x,y))$ d'éléments de C_0^1 telle que $(x,y,z_n(x,y))$ appartienne à $\mathcal{O}$ pour tout n, que $z_0(x,y)=0$ et que

$$z_n(x,y)=z_{n-1}(x,y)-\Delta^{-1}\,[g(x,y,z_{n-1}(x,y))]$$

pour tout n supérieur ou égal à 1.

b) La suite des applications z_n définies par $(x,y)\longrightarrow z_n(x,y)$ est une suite de Cauchy dans $\mathcal{C}_\lambda(C_0^1,W)$.

c) Si ϕ est sa limite, $(x,y,\phi(x,y))$ appartient à $\mathcal{O}$ pour tout (x,y) de W.

Alors ϕ est une application continue de W dans C_0^1 telle que $\phi(0,y)=0$ et que $g(x,y,\phi(x,y))=0$ pour tout (x,y) de W.

PROPOSITION 23. *Supposons que l'assertion* a *ci-dessus soit exacte ainsi que les suivantes:*

b') La suite des applications z_n *est une suite de Cauchy dans* $\mathcal{C}_\lambda(C,W)$.

c') Si ϕ *est sa limite,* $(sx,y+\phi(x,y)s)$ *appartient à* $\mathcal{O}(f)$ *quel que soit* (x,y) *dans* W *et pour tout* s *de* I.

Alors les assertions b *et* c *ci-dessus sont exactes.*

Δ. Comme

$$z_n(x,y)s=\int_0^s f(\sigma x,y+z_{n-1}(x,y)\sigma).x\,d\sigma$$

pour tous (x,y) de W, $n\geqslant 1$ et s de I, on voit que $\dot z_n=\Delta\,.\,z_n$ s'exprime en fonction de z_{n-1}. Il est alors immédiat que $(\dot z_n)$ converge dans $\mathcal{C}_\lambda(C,W)$. ∇

REMARQUE. Si F est banachisable, si E est normable, et si $(0,y_0)$

est un point de $\mathcal{O}(f)$, on sait qu'il existe un voisinage ouvert W de $(0, y_0)$ dans $\mathcal{O}(f)$ tel que les assertions a, b' et c' ci-dessus soient satisfaites.

Appendice.

Soient E et F deux espaces normés. Notons que la quasi-topologie équable λ^* associée à la quasi-topologie λ de la convergence locale sur l'espace $L(F, E)$ est égale à la topologie de la convergence bornée. On voit donc qu'en général $\tau(\lambda^*)$ est différent de $\tau(\lambda)$. C'est pourquoi nous pensons que le lemme 11-2-8 de [2] est inexact.

Note ajoutée à la correction des épreuves.

1) Soit (E, π) un espace vectoriel quasi-topologique et soit $\mathfrak{A}$ un filtre sur E. Nous avons désigné (voir les Généralités) par $\overline{\mathfrak{A}^{\circ}}$ le filtre engendré par les enveloppes convexes fermées dans $\tau(\pi)$ des éléments de $\mathfrak{A}$. En fait, comme dans [2], $\overline{\mathfrak{A}^{\circ}}$ ne peut être que le filtre engendré par les enveloppes convexes fermées dans $\tau(\pi)$ des éléments de $\mathfrak{A} \cap 0$. Sinon les importants théorèmes 5-3-4 et 5-3-5 de [2] ne seraient pas vrais.

2) Enfin signalons qu'on trouvera dans la thèse de 3$^{\text{ème}}$ cycle de F. Berquier d'intéressantes propositions qui complètent certains résultats exposés ici dans les chapitres 1 à 4. Mentionnons en particulier le théorème suivant:

THEOREME. *Soit (E', π') un espace admissible, (E, π) un espace admissible et X un ouvert de E. Soit f une application continûment-dérivable de X dans E' telle que Df soit continue de X vers $L(\vec{E'}, \vec{E})$. Alors soit x_0 un point de X. Soit r l'application de $X - x_0$ dans $\vec{E'}$ définie par $h \longrightarrow f(x_0 + h) - f(x_0) - Df(x_0)h$. Pour tout filtre quasi-borné $\mathfrak{A}$ de E, le filtre $\theta r(\mathfrak{V}, \mathfrak{A})$ converge vers 0 dans E'.*

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. BASTIANI, Applications différentiables et variétés différentiables de dimension infinie, *Jour. d'Analyse math.*, Jérusalem, 13 (1964), p. 1-114.

[2] A. FROLICHER - W. BUCHER, Calculus in vector spaces without norm, *Lecture Notes in Math.* 30, 1966.

[3] C. H. COOK - H. R. FISCHER, On equicontinuity and continuous convergence, *Math. Ann.* 159 (1965), p. 94-104.

[4] M. SIMONNET, *Exposé de Géométrie différentielle,* Théorie et Applications des Catégories, Paris, 1971.

[5] P. VER EECKE, Connexions d'ordre infini, *Cahiers Topo. et Géo. diff.* 11-3 (1970), p. 1-39.

[6] A. BASTIANI, *Espaces fonctionnels*, Cours multigraphié, Amiens, 1969.

[7] J. A. LESLIE, Some Frobenius theorems in Global Analysis, *Jour. of diff. Geo.* 2 (1968), p. 279-297.

[8] N. BOURBAKI, *Equations différentielles,* Paris, Hermann, 1961.

[9] J. DIEUDONNE, *Fondements de l'Analyse moderne,* livre I, Paris, Gauthier-Villars, 1969.

[10] J. P. PENON, Sur le théorème de Frobenius, *Bull. Soc. Math. France* 98(1970) p. 48-59.

[11] G. CHOQUET, Convergences, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble 23 (1947), p. 57.

[12] A. MACHADO, *Espaces d'Antoine et pseudo-topologies* (à paraître).

20 rue Michelet
60100 CREIL