

CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE CATÉGORIQUES

FRANÇOIS FOLTZ

CHRISTIAN LAIR

Fermeture standard des catégories algébriques

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome
13, n° 3 (1972), p. 275-307

http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1972__13_3_275_0

© Andrée C. Ehresmann et les auteurs, 1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

FERMETURE STANDARD DES CATEGORIES ALGEBRIQUES

par François FOLTZ et Christian LAIR

Ce travail a pour objet l'étude d'une méthode de construction standard (i.e. mécanique) d'un produit tensoriel et d'un foncteur Hom interne dans une catégorie de structures algébriques. Nous montrons que l'existence d'une telle structure monoïdale fermée est équivalente à l'existence d'un modèle (que nous appelons une costructure) dans la catégorie algébrique considérée. Les conditions d'obstruction à l'existence d'une telle structure que nous obtenons sont par exemple applicables à la catégorie des groupes.

Pour obtenir ce résultat nous avons, en premier lieu, étudié comment pouvaient être construites les structures monoïdales fermées symétriques usuelles sur la catégorie \mathbf{A} des groupes abéliens et \mathcal{F} des catégories. Il nous est apparu qu'elles provenaient de constructions analogues à partir d'un modèle donné, que l'on appelle soit un cogroupe abélien double soit une cocatégorie double. Ce processus peut donc être étendu à une catégorie de structures algébriques, pourvu qu'elle contienne une costructure double. Il généralise les résultats de Day [O.C.C.F] que nous reprenons en I.1, sous une forme qui nous est utile par la suite. Nous montrons inversement qu'une catégorie algébrique monoïdale fermée contient une costructure double. Ceci est l'objet des parties I et II, tandis que la partie III contient quelques exemples élémentaires.

Cette étude nécessite l'emploi d'une théorie qui décrive la notion intuitive de structure algébrique. Actuellement, deux théories le permettent: celle des Triples et celle des Esquisses. Nous avons choisi celle des Esquisses telle qu'elle est détaillée dans [F.M.C.E] et [C.O.S.S], en élargissant les notions de [E.T.S.A]. Ses éléments en sont rappelés brièvement en 0.

Dans cette théorie, une structure algébrique s'identifie à une réalisation d'une esquisse σ dans une catégorie donnée \mathbf{H} . Ces réalisations

sont appelées des **H**-structures algébriques d'espèce σ . Par exemple, un groupe est une réalisation de l'esquisse de groupes $\sigma^{\mathbf{G}}$ dans la catégorie des ensembles. Il est topologique si **H** est la catégorie des topologies. On obtient les **H**-costructures en réalisant l'esquisse σ dans la duale \mathbf{H}^* de **H**. Ainsi, un H' -espace est une réalisation de $\sigma^{\mathbf{G}}$ dans la duale de la catégorie homotopique. On sait définir, de plus, le produit tensoriel de deux esquisses. On obtient les **H**-structures (resp. costructures) doubles d'espèce σ en réalisant $\sigma \otimes \sigma$ dans **H** (resp. \mathbf{H}^*). Un groupe abélien est une réalisation de l'esquisse $\sigma^{\mathbf{G}} \otimes \sigma^{\mathbf{G}}$ dans la catégorie des ensembles. La sphère S^2 est munie d'une structure de co-groupe double dans la catégorie homotopique.

Comme en théorie des Triples, certains types de problèmes se posent en théorie des Esquisses :

- 1- Construire explicitement un triple ou une esquisse dont la catégorie des algèbres associée soit une catégorie donnée; voir Ehresmann [I.T.S.C], Manes [T.C.C.A], Lair [C.T.N.G], Burroni [E.C.Q.T]...
- 2- A quelles conditions une catégorie donnée est-elle une catégorie d'algèbres associée à un triple ou à une esquisse; voir le critère de tripléabilité de Beck [T.C.C.A], les travaux d'Ulmer (-Gabriel) [L.P.L.G], Lair [F.O.S.A]...
- 3- Etudier systématiquement les propriétés d'une catégorie d'algèbres associée à un triple ou à une esquisse; voir Dubuc [K.E.C.T], Foltz [S.C.F.D] et [R.E.D.O] ainsi que Lair [F.O.S.A], pour des théorèmes divers sur l'existence de limites et pour des propriétés d'adjonction.

Le problème qui nous occupe est du troisième type et peut se formuler désormais de la manière précise suivante :

- **H** étant munie d'une structure de catégorie monoïdale fermée symétrique, la catégorie **V** des **H**-structures algébriques d'espèce une esquisse donnée σ est-elle monoïdale fermée symétrique [C.L.C.A] ?

Dans certains cas particuliers ce problème a été résolu par A. Bastiani et C. Ehresmann dans [C.D.F.S] et [C.O.S.S] et par F. Foltz dans [D.O.C.A]. La solution apportée ici est située dans un cadre plus général et a un caractère global. Notre idée fondamentale est qu'il y a équi-

valence entre les deux assertions :

(i)- \mathbf{V} est munie d'une structure de catégorie monoïdale fermée symétrique « naturellement associée » (voir II.1) à la structure de catégorie monoïdale fermée symétrique de \mathbf{H} .

(ii)- Il existe dans \mathbf{V} une costructure double cohérente (voir I.3) d'espèce σ , c'est-à-dire une réalisation $C : \sigma \rightarrow \mathbf{V}^*$.

L'utilisation systématique que nous développons d'une costructure double afin d'obtenir des constructions standards (par exemple celle d'une structure monoïdale fermée symétrique) dans une catégorie nous semble donc à la fois naturelle et générale. De plus elle ouvre sur les problèmes suivants :

4- Comparaison des \mathbf{H} -structures et des \mathbf{H} -structures doubles d'espèce σ , inspirée par l'inclusion de la catégorie des groupes abéliens dans celle des groupes. Elle permet d'étudier les structures algébriques « abéliennes ». L'importance (et la nécessité) de cette comparaison apparaissent déjà en II.2 et II.3 .

5- Existence, dans une catégorie donnée \mathbf{V} , de \mathbf{V} -costructures simples, doubles ..., n -uples d'espèce σ ; ces existences admises, en déduire des constructions standards « homotopiques » dans \mathbf{V} , voir Lair [S.N.U.H] où cette idée est brièvement exposée.

6- En appliquant les résultats de ce travail et ceux ultérieurs d'une étude de 5 à la catégorie des esquisses, en déduire une théorie de l'homologie et de l'homotopie des esquisses, c'est-à-dire : étudier la forme d'une esquisse. Une première tentative a été effectuée sur ce sujet par Lair [I.M.S.A] et Foltz [R.E.D.O] .

Nous espérons développer ces questions dans un très prochain travail.

Enfin, nous tenons à exprimer notre profonde gratitude à M^{me} A. Bastiani et à M^f C. Ehresmann pour l'aide précieuse qu'ils nous ont généreusement accordée.

0. PRELIMINAIRES.

0.1. Notations générales.

Rappelons qu'un graphe multiplicatif est une structure plus faible que celle de catégorie, en ce sens que :

- la loi de composition n'est pas associative,
- si s et s' sont deux morphismes dont le composé $s'.s$ est défini, la source de s' est confondue avec le but de s , mais la réciproque est inexacte.

Un graphe multiplicatif, ou une catégorie, sont désignés en général par des lettres telles que \mathbf{S} , \mathbf{I} , \mathbf{H} , \mathbf{V} , ..., exceptions faites cependant des catégories classiques: \mathfrak{M} des ensembles, \mathcal{F} des catégories.

La duale de \mathbf{S} est notée \mathbf{S}^* . Si S et S' sont deux objets de \mathbf{S} , l'ensemble (ou la classe) des flèches de source S et de but S' est noté(e) $\mathbf{S}(S', S)$. Nous préférons cette notation plus conforme au sens d'écriture d'un composé de deux morphismes. Ainsi la restriction de la loi de composition, relative à trois objets de \mathbf{S} , s'écrit :

$$\mathbf{S}(S'', S') \times \mathbf{S}(S', S) \longrightarrow \mathbf{S}(S'', S).$$

A tout graphe multiplicatif \mathbf{S} est associée une catégorie \mathbf{S}^Δ , dite de subdivision, comme dans [A.D.J.F.]. Les compositions y sont triviales et l'ensemble de ses objets est l'ensemble (ou la classe) sous-jacent(e) à \mathbf{S} . A chaque flèche $s: S \rightarrow S'$ de \mathbf{S} , différente d'une unité, correspond le couple de flèches de \mathbf{S}^Δ :

$$\begin{array}{ccc}
 & & (S, S) \\
 & \nearrow & \leftarrow \\
 (\varepsilon, s) & & (s, S) \\
 & \searrow & \leftarrow \\
 & & (S', S') \\
 & & (S', s)
 \end{array}$$

Ce sont les seules flèches de \mathbf{S}^Δ , mises à part les flèches unités.

Si \mathbf{S} et \mathbf{S}' sont deux graphes multiplicatifs, on définit un foncteur $F: \mathbf{S} \rightarrow \mathbf{S}'$ de la même façon qu'un foncteur entre catégories. Il en est de même pour les transformations naturelles, avec une condition d'associativité. Nous ne l'explicitons pas, car nous n'aurons à utiliser que des transformations naturelles entre foncteurs d'un graphe multiplicatif \mathbf{S} vers

une catégorie \mathbf{H} . Elles sont les morphismes d'une catégorie que nous notons \mathbf{H}^S .

On dit que $\underline{\mathbf{H}} = (\mathbf{H}, \underline{\mathbf{H}}(-, -), \otimes)$ est tensoriellement auto-dominée si et seulement si :

$$\underline{\mathbf{H}}(-, -) : \mathbf{H} \times \mathbf{H}^* \rightarrow \mathbf{H} \quad \text{et} \quad \otimes : \mathbf{H} \times \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$$

sont deux foncteurs tels que, pour tous objets H, H' et H'' de \mathbf{H} , il y ait un isomorphisme naturel en toutes les variables :

$$\underline{\mathbf{H}}(\underline{\mathbf{H}}(H'', H'), H) \xrightarrow{\cong} \underline{\mathbf{H}}(H'', H' \otimes H).$$

En particulier, une catégorie monoïdale fermée $\underline{\mathbf{H}} = (\mathbf{H}, \underline{\mathbf{H}}(-, -), \otimes, J, \dots)$ (nous omettons d'écrire les équivalences naturelles habituelles) définit une catégorie tensoriellement auto-dominée $\underline{\mathbf{H}} = (\mathbf{H}, \otimes, \underline{\mathbf{H}}(-, -))$.

Si $\underline{\mathbf{H}}$ est monoïdale fermée, on dit que $\underline{\mathbf{K}} = (\mathbf{K}, \underline{\mathbf{K}}(-, -), \otimes)$ est une $\underline{\mathbf{H}}$ -catégorie tensoriellement auto-dominée si $\underline{\mathbf{K}}$ est une $\underline{\mathbf{H}}$ -catégorie sur \mathbf{K} et si les foncteurs $\underline{\mathbf{K}}(-, -) : \mathbf{K} \times \mathbf{K}^* \rightarrow \mathbf{K}$ et $\otimes : \mathbf{K} \times \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{K}$ sont tels que pour tous objets K, K' et K'' de \mathbf{K} ,

$$\underline{\mathbf{K}}(\underline{\mathbf{K}}(K'', K'), K) \xrightarrow{\cong} \underline{\mathbf{K}}(K'', K' \otimes K)$$

est un isomorphisme naturel en toutes les variables. Remarquons que sur \mathbf{K} nous avons trois foncteurs *Hom* :

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{K}}(-, -) : \mathbf{K} \times \mathbf{K}^* &\longrightarrow \mathbf{K}, \\ \underline{\mathbf{K}}(-, -) : \mathbf{K} \times \mathbf{K}^* &\longrightarrow \mathbf{H}, \\ \mathbf{K}(-, -) : \mathbf{K} \times \mathbf{K}^* &\longrightarrow \mathfrak{M}. \end{aligned}$$

Ainsi, une catégorie tensoriellement auto-dominée est une \mathfrak{M} -catégorie tensoriellement auto-dominée et une catégorie monoïdale fermée $\underline{\mathbf{H}} = (\mathbf{H}, \underline{\mathbf{H}}(-, -), \otimes, J)$ définit également une $\underline{\mathbf{H}}$ -catégorie tensoriellement auto-dominée $(\underline{\mathbf{H}}, \underline{\mathbf{H}}(-, -), \otimes)$. Dans ces conditions, nous poserons $\underline{\mathbf{H}} = \underline{\underline{\mathbf{H}}}$, pour simplifier l'écriture (ainsi tous les foncteurs *Hom* à valeurs dans \mathbf{H} seront soulignés une seule fois).

0.2. Théorie des Esquisses.

Pour toute catégorie \mathbf{I} , on désigne par \mathbf{I}_\perp la catégorie obtenue en adjoignant à \mathbf{I} un élément initial et par $d_1 : \mathbf{I} \rightarrow \mathbf{I}_\perp$ le foncteur injection.

Un foncteur $G: \mathbf{I}_- \rightarrow \mathbf{S}$ s'appelle un **I**-cône projectif de base $G.d_1$.

Soit \mathcal{J} un ensemble de petites catégories et $\mathcal{J}_-(\mathbf{S})$ la classe des **I**-cônes projectifs dans \mathbf{S} , où **I** appartient à \mathcal{J} . Une esquisse \mathcal{J} -projective (appelée aussi esquisse multiforme dans [C.D.S.T]) est un couple $\sigma = (\mathbf{S}, A)$, où A est une sous-classe de $\mathcal{J}_-(\mathbf{S})$. Si $F: \mathbf{S} \rightarrow \mathbf{S}'$ est un foncteur et si $\sigma' = (\mathbf{S}', A')$ est une autre esquisse, on dit que F est une réalisation de σ vers σ' si $F.G$ appartient à A' pour tout élément G de A . Ces définitions élargissent la terminologie habituelle de [E.T.S.A]

A toute catégorie \mathbf{H} est associée une esquisse \mathcal{J} -projective $\sigma_{\mathbf{H}} = (\mathbf{H}, A_{\mathbf{H}})$, où $A_{\mathbf{H}}$ est l'ensemble de tous les **I**-cônes projectifs de \mathbf{H} définissant des limites projectives dans \mathbf{H} , pour tout $\mathbf{I} \in \mathcal{J}$. On désigne alors par $\mathcal{V}(\mathbf{H}, \sigma)$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{H}^{\mathbf{S}}$ admettant pour objets les réalisations de σ vers $\sigma_{\mathbf{H}}$ (notées $V: \sigma \rightarrow \mathbf{H}$), que l'on appelle des **H**-structures algébriques d'espèce σ .

Considérons deux esquisses \mathcal{J} -projectives $\sigma = (\mathbf{S}, A)$ et $\sigma' = (\mathbf{S}', A')$. Pour tout objet S' de \mathbf{S}' et tout cône G de A , nous notons $G_{S'}: \mathbf{I}_- \rightarrow \mathbf{S} \times \mathbf{S}'$ le cône défini par $G_{S'}(i) = (G(i), S')$, pour tout morphisme i de \mathbf{I}_- . De même, nous avons un cône $G'_{S'}: \mathbf{I}_- \rightarrow \mathbf{S} \times \mathbf{S}'$, où $G'_{S'}(i) = (S, G'(i))$, si S est un objet de \mathbf{S} et si G' est un cône de A' . Notons \bar{A} (resp. \bar{A}') l'ensemble des cônes $G_{S'}$ (resp. $G'_{S'}$) lorsque S' (resp. S) parcourt \mathbf{S}' (resp. \mathbf{S}) et G (resp. G') parcourt A (resp. A'). On appelle produit tensoriel de σ et de σ' l'esquisse \mathcal{J} -projective:

$$\sigma \otimes \sigma' = (\mathbf{S} \times \mathbf{S}', \bar{A} \cup \bar{A}').$$

Alors, pour toute catégorie \mathbf{H} à limites projectives, il existe un isomorphisme naturel:

$$B: \mathcal{V}(\mathbf{H}, \sigma \otimes \sigma') \xrightarrow{\cong} \mathcal{V}(\mathcal{V}(\mathbf{H}, \sigma), \sigma').$$

On définit la puissance tensorielle $n^{\text{ième}}$ de σ par récurrence:

- $\otimes^1 \sigma = \sigma$,
- $\otimes^n \sigma = \sigma \otimes (\otimes^{n-1} \sigma)$, pour tout $n \geq 2$.

Une réalisation de $\otimes^n \sigma$ dans \mathbf{H} (resp. \mathbf{H}^*) est une **H**-structure (resp. costructure) algébrique n -uple d'espèce σ .

Par dualité, on définit les esquisses \mathcal{I} -inductives, puis les esquisses \mathcal{I} -projectives et \mathcal{I} -inductives. La notion de produit tensoriel s'étend aux esquisses de ce type. On montre également qu'à une esquisse \mathcal{I} -projective et \mathcal{I} -inductive est associée une esquisse «régularisée», c'est-à-dire une esquisse dans le sens de [E.T.S.A], où l'on suppose que deux cônes de même base sont nécessairement égaux; ceci est développé dans [F.M.C.E].

0.3. Hypothèses générales.

Dans toute la suite de ce travail nous supposons désormais que :

- a.- $\sigma = (\mathbf{S}, A)$ est une esquisse \mathcal{I} -projective, où \mathcal{I} est un ensemble de petites catégories et \mathbf{S} un petit graphe multiplicatif;
- b.- $\underline{\mathbf{H}} = (\mathbf{H}, \underline{\mathbf{H}}(-, -), \otimes, J)$ est une catégorie monoïdale fermée symétrique à petites limites projectives et inductives;
- c.- Il existe un petit ordinal régulier ν tel que les limites projectives de foncteurs $F: \mathbf{I} \rightarrow \mathbf{H}$ commutent avec les limites inductives de foncteurs $F': [\nu] \rightarrow \mathbf{H}$, lorsque \mathbf{I} appartient à \mathcal{I} et $[\nu]$ est la catégorie associée à l'ordinal ν .

On désigne alors par \mathbf{V} la catégorie $\mathcal{O}(\mathbf{H}, \sigma)$ des \mathbf{H} -structures algébriques d'espèce σ , par \mathbf{W} celle des \mathbf{V} -structures algébriques d'espèce σ (i.e. $\mathbf{W} = \mathcal{O}(\mathbf{V}, \sigma)$) et par \mathbf{W}' celle des \mathbf{H} -structures algébriques doubles d'espèce σ (i.e. $\mathbf{W}' = \mathcal{O}(\mathbf{H}, \sigma \otimes \sigma)$). On a donc l'isomorphisme $B: \mathbf{W}' \xrightarrow{\sim} \mathbf{W}$.

Remarquons que l'hypothèse faite en b peut être affaiblie en supposant que, localement, seules les limites nécessaires existent. De plus, dans de nombreux exemples \mathbf{H} est elle-même une catégorie de réalisations d'une esquisse projective σ' dans la catégorie des ensembles, si bien que \mathbf{V} s'identifie à la catégorie des \mathfrak{M} -structures algébriques d'espèce $\sigma \otimes \sigma'$.

I. FERMETURE STANDARD.

I.1. Etude de la catégorie des foncteurs $\mathbf{H}^{\mathbf{S}}$.

La catégorie subdivision \mathbf{S}^{Λ} de \mathbf{S} (voir 0.1) permet de définir

un bi-foncteur $\underline{\mathbf{H}}^{\mathbf{S}}: \mathbf{H}^{\mathbf{S}} \times (\mathbf{H}^{\mathbf{S}})^* \rightarrow \mathbf{H}$, qui est égal au foncteur *Hom* dans le cas où \mathbf{H} est la catégorie des ensembles. A tout couple d'objets (V', V) de $\mathbf{H}^{\mathbf{S}}$ on associe le foncteur $[V', V]: \mathbf{S}^{\Delta} \rightarrow \mathbf{H}$, défini par

$$[V', V](s, S) = \mathbf{H}(V'(s), V(S)) \text{ et } [V', V](S', s) = \mathbf{H}(V'(S'), V(s)).$$

Considérons un choix de limites projectives pour les foncteurs $\textcircled{\theta}: \mathbf{S}^{\Delta} \rightarrow \mathbf{H}$, et posons: $\underline{\mathbf{H}}^{\mathbf{S}}(V', V) = \varprojlim [V', V]$. (C'est donc la fin de $\mathbf{H}(V'(-), V(-))$). Cette surjection s'étend en un bifoncteur $\underline{\mathbf{H}}^{\mathbf{S}}(-, -)$; ainsi $\mathbf{H}^{\mathbf{S}}$ est munie d'une structure de $\underline{\mathbf{H}}$ -catégorie.

PROPOSITION 1.1. $\mathbf{H}^{\mathbf{S}}$ est à tenseurs [K.E.C.T].

PREUVE. Il suffit de prouver que, pour tout objet V de $\mathbf{H}^{\mathbf{S}}$, le $\underline{\mathbf{H}}$ -foncteur $\underline{\mathbf{H}}^{\mathbf{S}}(-, V): \mathbf{H}^{\mathbf{S}} \rightarrow \mathbf{H}$ admet un $\underline{\mathbf{H}}$ -adjoint $\bar{M}(-, V): \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}^{\mathbf{S}}$. Soit H un objet de \mathbf{H} . Montrons que le foncteur $(H \otimes -): V: \mathbf{S} \rightarrow \mathbf{H}$ est une $\underline{\mathbf{H}}^{\mathbf{S}}(-, V)$ -structure libre sur H pour la $\underline{\mathbf{H}}$ -adjonction. Il suffit de prouver l'existence d'un isomorphisme naturel et canonique:

$$\underline{\mathbf{H}}(\underline{\mathbf{H}}^{\mathbf{S}}(V', V), H) \xrightarrow{\cong} \underline{\mathbf{H}}^{\mathbf{S}}(V', (H \otimes -). V).$$

Or le foncteur $\underline{\mathbf{H}}(-, H)$ est compatible avec les limites projectives. C'est donc que le premier membre est limite projective du foncteur

$$\textcircled{\theta} = \underline{\mathbf{H}}(-, H). [V', V]: \mathbf{S}^{\Delta} \rightarrow \mathbf{H},$$

défini par

$$\textcircled{\theta}(s, S) = \underline{\mathbf{H}}(\underline{\mathbf{H}}(V'(s), V(S)), H) \text{ et } \textcircled{\theta}(S', s) = \underline{\mathbf{H}}(\underline{\mathbf{H}}(V'(S'), V(s)), H),$$

lorsque $s: S \rightarrow S'$ est une flèche de \mathbf{S} . De même, le second membre est une limite projective du foncteur $\textcircled{\theta}'$ tel que

$$\textcircled{\theta}'(s, S) = \underline{\mathbf{H}}(V'(s), H \otimes V(S)) \text{ et } \textcircled{\theta}'(S', s) = \underline{\mathbf{H}}(V'(S'), H \otimes V(s)).$$

Les foncteurs $\textcircled{\theta}$ et $\textcircled{\theta}'$ sont donc naturellement équivalents. L'isomorphisme canonique et naturel cherché s'en déduit.

COROLLAIRE. Pour tout objet V de $\mathbf{H}^{\mathbf{S}}$, le foncteur $\underline{\mathbf{H}}^{\mathbf{S}}(-, V)$ est compatible avec les $\underline{\mathbf{H}}$ -limites projectives (qui sont les limites projectives).

PROPOSITION 1.2. $\mathbf{H}^{\mathbf{S}}$ est à co-tenseurs.

COROLLAIRE. Pour tout objet V' de $\mathbf{H}^{\mathbf{S}}$, le foncteur $\underline{\mathbf{H}}^{\mathbf{S}}(V', -)$ est com-

patible avec les $\underline{\mathbf{H}}$ -limites projectives.

Bien entendu, dans ce qui précède on peut remplacer \mathbf{S} par $\mathbf{S} \times \mathbf{S}$. Il en résulte que la catégorie $\mathbf{H}^{\mathbf{S} \times \mathbf{S}}$ est munie d'une structure de $\underline{\mathbf{H}}$ -catégorie :

$$\underline{\mathbf{H}}^{\mathbf{S} \times \mathbf{S}}(-, -) : (\mathbf{H}^{\mathbf{S} \times \mathbf{S}})_{\times} (\mathbf{H}^{\mathbf{S} \times \mathbf{S}})^* \longrightarrow \mathbf{H}.$$

Cette $\underline{\mathbf{H}}$ -catégorie est à tenseurs et co-tenseurs.

Désormais, dans toute cette section nous supposons que l'on s'est donné un bifoncteur $C : \mathbf{S} \times \mathbf{S} \rightarrow (\mathbf{H}^{\mathbf{S}})^*$.

Le bifoncteur C détermine un $\underline{\mathbf{H}}$ -foncteur $\bar{P} : \mathbf{H}^{\mathbf{S}} \rightarrow \mathbf{H}^{\mathbf{S} \times \mathbf{S}}$, défini, sur les objets, par :

$$\bar{P}(V') = \underline{\mathbf{H}}^{\mathbf{S}}(V', -). \quad C : \mathbf{S} \times \mathbf{S} \rightarrow \mathbf{H}.$$

PROPOSITION 1.3. Le $\underline{\mathbf{H}}$ -foncteur \bar{P} admet un $\underline{\mathbf{H}}$ -adjoint \bar{Q} .

PREUVE. Considérons un foncteur $W : \mathbf{S} \times \mathbf{S} \rightarrow \mathbf{H}$ et désignons par $]C, W [: ((\mathbf{S} \times \mathbf{S})^{\Lambda})^* \rightarrow \mathbf{H}^{\mathbf{S}}$ le foncteur défini par les deux égalités :

$$]C, W [((s, s_1), (S, S_1)) = W(S, S_1) \otimes C(s, s_1)(-),$$

$$]C, W [((S', S'_1), (s, s_1)) = W(s, s_1) \otimes C(S', S'_1)(-),$$

lorsque $(s, s_1) : (S, S_1) \rightarrow (S', S'_1)$ est une flèche de $\mathbf{S} \times \mathbf{S}^{\Lambda}$. Supposons donné un choix de limites inductives pour les foncteurs tels que

$$\otimes : ((\mathbf{S} \times \mathbf{S})^{\Lambda})^* \longrightarrow \mathbf{H}^{\mathbf{S}}.$$

Alors : $\bar{Q}(W) = \underline{\text{Lim}}]C, W [\cdot$ (C'est donc une cofin.)

Considérons l'isomorphisme canonique $\bar{B} : \mathbf{H}^{\mathbf{S} \times \mathbf{S}} \xrightarrow{\cong} (\mathbf{H}^{\mathbf{S}})^{\mathbf{S}}$ qui à tout foncteur $W : \mathbf{S} \times \mathbf{S} \rightarrow \mathbf{H}$ associe le foncteur $\bar{B}(W) : \mathbf{S} \rightarrow \mathbf{H}^{\mathbf{S}}$, défini par $\bar{B}(W)(S)(S') = W(S, S')$ sur les objets. C'est un isomorphisme de $\underline{\mathbf{H}}$ -catégories; posons :

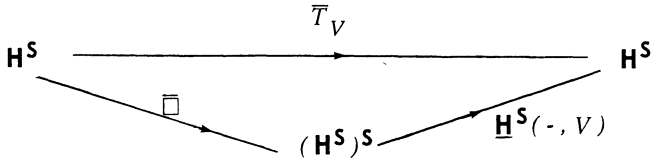
$$\bar{\square} = \bar{B} \cdot \bar{P} : \mathbf{H}^{\mathbf{S}} \longrightarrow (\mathbf{H}^{\mathbf{S}})^{\mathbf{S}}.$$

PROPOSITION 1.4. Le $\underline{\mathbf{H}}$ -foncteur $\bar{\square}$ admet $\bar{Q} \cdot \bar{B}$ pour $\underline{\mathbf{H}}$ -adjoint. Il est donc compatible avec les $\underline{\mathbf{H}}$ -limites projectives.

Soit V un objet de $\mathbf{H}^{\mathbf{S}}$. Pour tout autre objet V' posons

$$\underline{\mathbf{H}}^{\mathbf{S}}(V', V) = \bar{T}_V(V'),$$

où \bar{T}_V est défini par le diagramme commutatif :



Il en résulte que pour tout objet S de \mathbf{S} on a

$$\underline{\mathbf{H}}^{\mathbf{S}}(V', V)(S) = \underline{\mathbf{H}}^{\mathbf{S}}(\bar{\square} V'(S), V).$$

On voit que la surjection qui à (V', V) associe $\underline{\mathbf{H}}^{\mathbf{S}}(V', V)$ se prolonge en un foncteur : $\underline{\mathbf{H}}^{\mathbf{S}}(-, -) : \mathbf{H}^{\mathbf{S}} \times (\mathbf{H}^{\mathbf{S}})^* \rightarrow \mathbf{H}^{\mathbf{S}}$.

REMARQUE. On peut donner une expression plus calculatoire de $\underline{\mathbf{H}}^{\mathbf{S}}(V', V)$ en définissant le foncteur $/V', V/_{\mathbf{S}''} : (\mathbf{S} \times \mathbf{S})^{\Delta} \rightarrow \mathbf{H}$, pour tout objet S'' de \mathbf{S} , par :

$$\begin{aligned}
 ((x, x'), (y, y')) &\longmapsto \mathbf{H}(\mathbf{H}(V'(x), C(y, S'')(x')), V(y')), \\
 &\text{si } ((x, x'), (y, y')) \text{ est une flèche de } (\mathbf{S} \times \mathbf{S})^{\Delta}.
 \end{aligned}$$

Alors $\underline{\mathbf{H}}^{\mathbf{S}}(V', V)(S'')$ est une limite projective du foncteur $/V, V'/_{\mathbf{S}''}$ et $\underline{\mathbf{H}}^{\mathbf{S}}(V', V)(s'')$ est une limite projective de la transformation naturelle $/V', V/_{\mathbf{S}''} \Longrightarrow /V', V/_{\mathbf{S}''}$ associée à la flèche $s'' : S'' \rightarrow S''$ de \mathbf{S} .

Désignons par \bar{R}_V , pour tout objet V de $\mathbf{H}^{\mathbf{S}}$, le \mathbf{H} -foncteur composé $\bar{R}_V = \bar{Q} \cdot \bar{B}^{-1} \cdot (\bar{M}(-, V), -)$, et, pour tout objet V' de $\mathbf{H}^{\mathbf{S}}$, posons

$$V \bar{\otimes} V' = \bar{R}_V(V').$$

REMARQUE. $V \bar{\otimes} V'$ est alors une limite inductive du foncteur contravariant, de source $(\mathbf{S} \times \mathbf{S})^{\Delta}$ et de but $\mathbf{H}^{\mathbf{S}}$, défini par :

$$((x, y), (x', y')) \longmapsto C(x, y) \otimes V'(x') \otimes V(y').$$

La surjection qui au couple (V, V') associe $V \bar{\otimes} V'$ s'étend évidemment en un bifoncteur $\bar{\otimes} : \mathbf{H}^{\mathbf{S}} \times \mathbf{H}^{\mathbf{S}} \rightarrow \mathbf{H}^{\mathbf{S}}$.

PROPOSITION 1.5. Pour tout objet V de $\mathbf{H}^{\mathbf{S}}$, le \mathbf{H} -foncteur $\bar{T}_V = \underline{\mathbf{H}}^{\mathbf{S}}(-, V)$ admet pour \mathbf{H} -adjoint le foncteur $\bar{R}_V = V \bar{\otimes} -$.

COROLLAIRE. Pour tout objet V' de $\mathbf{H}^{\mathbf{S}}$, le \mathbf{H} -foncteur $\underline{\mathbf{H}}^{\mathbf{S}}(-, V)$ est compatible avec les \mathbf{H} -limites projectives.

On peut compléter ce corollaire par la proposition qui suit.

PROPOSITION 1.6. Pour tout objet V' de $\mathbf{H}^{\mathbf{S}}$, le \mathbf{H} -foncteur $\underline{\mathbf{H}}^{\mathbf{S}}(V', -)$

est compatible avec les $\underline{\mathbf{H}}$ -limites projectives.

PREUVE. Il en est ainsi de $\underline{\mathbf{H}}^{\mathbf{S}}(\overline{\square}V'(S), -)$, pour tout objet S de $\mathbf{H}^{\mathbf{S}}$.

PROPOSITION I.7. Si le bifoncteur C est symétrique, il existe un isomorphisme canonique et naturel $\overline{\square}\underline{\mathbf{H}}^{\mathbf{S}}(V, V') \xrightarrow{\cong} \underline{\mathbf{H}}^{\mathbf{S}}(-, V')$. $\overline{\square}V$, pour tous objets V et V' de $\mathbf{H}^{\mathbf{S}}$.

PREUVE. En effet, il suffit de constater que, pour tout couple d'objets (S, S') de \mathbf{S} , l'objet $\overline{\square}\underline{\mathbf{H}}^{\mathbf{S}}(V, V')(S)(S')$ est une limite projective du foncteur de source $\mathbf{S}^{\Delta} \times \mathbf{S}^{\Delta} \times \mathbf{S}^{\Delta}$ et de but \mathbf{H} , qui à $((x, x'), (y, y'), (z, z'))$ associe $\underline{\mathbf{H}}(\underline{\mathbf{H}}(\underline{\mathbf{H}}(V(z), C(x, y)(z')), V'(y')), C(S, S')(x'))$. De même, $\underline{\mathbf{H}}^{\mathbf{S}}(-, V')$. $\overline{\square}V(S)(S')$ est une limite projective d'un foncteur, de source $\mathbf{S}^{\Delta} \times \mathbf{S}^{\Delta} \times \mathbf{S}^{\Delta}$ et de but \mathbf{H} , qui à $((x, x'), (y, y'), (z, z'))$ associe : $\underline{\mathbf{H}}(\underline{\mathbf{H}}(\underline{\mathbf{H}}(V(z), C(y, x)(z')), V'(y')), C(S, S')(x'))$. Comme l'hypothèse assure l'existence d'un isomorphisme naturel

$$C(x, y) \xrightarrow{\cong} C(y, x),$$

on a l'isomorphisme voulu.

PROPOSITION I.8. Si le bifoncteur C est symétrique, il existe un isomorphisme canonique et naturel : $\underline{\mathbf{H}}^{\mathbf{S}}(\underline{\mathbf{H}}^{\mathbf{S}}(V'', V'), V) \xrightarrow{\cong} \underline{\mathbf{H}}^{\mathbf{S}}(V'', V' \overline{\otimes} V)$.

PREUVE. De la proposition I.7 et de la définition de $\underline{\mathbf{H}}^{\mathbf{S}}$ il résulte l'égalité :

$$\underline{\mathbf{H}}^{\mathbf{S}}(\underline{\mathbf{H}}^{\mathbf{S}}(V'', V'), V) = \underline{\mathbf{H}}^{\mathbf{S}}(-, V) \underline{\mathbf{H}}^{\mathbf{S}}(-, V') \cdot (\overline{\square}V'').$$

De même,

$$\underline{\mathbf{H}}^{\mathbf{S}}(V'', V' \overline{\otimes} V) = \underline{\mathbf{H}}^{\mathbf{S}}(-, V' \overline{\otimes} V) \cdot (\overline{\square}V'') \approx \underline{\mathbf{H}}^{\mathbf{S}}(\underline{\mathbf{H}}^{\mathbf{S}}(-, V), V') \cdot (\overline{\square}V'').$$

La proposition I.5 suffit pour conclure.

PROPOSITION I.9. Si le bifoncteur C est symétrique, le bifoncteur $\overline{\otimes}$ l'est aussi.

Il résulte des propositions I.5, I.8 et I.9 le théorème qui suit.

THEOREME I.1. [O.C.C.F]. A une catégorie monoïdale fermée symétrique $\underline{\mathbf{H}}$ vérifiant l'hypothèse 0.3.b et à un bifoncteur $C: \mathbf{S} \times \mathbf{S} \rightarrow (\mathbf{H}^{\mathbf{S}})^*$ est associée une $\underline{\mathbf{H}}$ -catégorie tensoriellement auto-dominée, dite standard,

$\underline{\underline{\mathbf{H}}^{\mathbf{S}}} = (\underline{\mathbf{H}}^{\mathbf{S}}, \underline{\underline{\mathbf{H}}^{\mathbf{S}}}(-, -), \bar{\mathbf{0}})$, \mathbf{S} étant un graphe multiplicatif petit. Si, de plus, le bifoncteur C est symétrique, $\underline{\underline{\mathbf{H}}^{\mathbf{S}}} = (\underline{\mathbf{H}}^{\mathbf{S}}, \underline{\underline{\mathbf{H}}^{\mathbf{S}}}(-, -), \bar{\mathbf{0}})$ est une catégorie tensoriellement auto-dominée.

Ce résultat est utilisé dans les sections I.2 et I.3. Les théorèmes que nous y démontrons s'appliquent, en particulier, à $\mathbf{H}^{\mathbf{S}}$ et complètent le théorème I.1.

I.2. Etude de la catégorie des structures algébriques.

Désignons par $\underline{\mathbf{V}} : \mathbf{V} \times \mathbf{V}^* \rightarrow \mathbf{H}$ la restriction du bifoncteur $\underline{\mathbf{H}}^{\mathbf{S}}(-, -)$ à la sous-catégorie \mathbf{V} de $\mathbf{H}^{\mathbf{S}}$ et par $U : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{H}^{\mathbf{S}}$ le foncteur inclusion correspondant. L'hypothèse 0.3.c assure que U admet un $\underline{\mathbf{H}}$ -adjoint (voir l'appendice). Notons $N : \mathbf{H}^{\mathbf{S}} \rightarrow \mathbf{V}$ le $\underline{\mathbf{H}}$ -foncteur $\underline{\mathbf{H}}$ -adjoint à U .

Cette adjonction entraîne les résultats qui suivent.

PROPOSITION I.10. *La $\underline{\mathbf{H}}$ -catégorie $\underline{\mathbf{V}}$ est à tenseurs et co-tenseurs.*

PREUVE. C'est une conséquence des propositions I.1 et I.2, les $\underline{\mathbf{H}}$ -foncteurs $\underline{\mathbf{V}}(-, V)$ et $\underline{\mathbf{V}}(V', -)$ admettant respectivement pour $\underline{\mathbf{H}}$ -adjoints les foncteurs $N \cdot \bar{M}(-, V) \cdot U = M(-, V) \cdot U$ et $N \cdot \bar{M}(V', -) \cdot U$.

COROLLAIRE. *Les $\underline{\mathbf{H}}$ -foncteurs $\underline{\mathbf{V}}(-, V)$ et $\underline{\mathbf{V}}(V', -)$ sont compatibles avec les $\underline{\mathbf{H}}$ -limites projectives, pour tous objets V et V' de \mathbf{V} .*

Bien entendu, en remplaçant σ par $\sigma \otimes \sigma$ dans ce qui précède et en désignant par $U' : \mathbf{W}' \rightarrow \mathbf{H}^{\mathbf{S} \times \mathbf{S}}$ le $\underline{\mathbf{H}}$ -foncteur injection canonique, on a des résultats analogues. En particulier U' admet un $\underline{\mathbf{H}}$ -adjoint

$$N' : \mathbf{H}^{\mathbf{S} \times \mathbf{S}} \rightarrow \mathbf{W}'$$

et la $\underline{\mathbf{H}}$ -catégorie \mathbf{W}' est à tenseurs et co-tenseurs. De plus, le $\underline{\mathbf{H}}$ -isomorphisme \bar{B} induit une structure de $\underline{\mathbf{H}}$ -catégorie sur \mathbf{W} , ainsi que l'isomorphisme B .

Nous supposons dans cette section que le bifoncteur $C : \mathbf{S} \times \mathbf{S} \rightarrow (\mathbf{H}^{\mathbf{S}})^*$ prend ses valeurs dans \mathbf{V} et qu'il est une réalisation de $\sigma \otimes \sigma$ dans \mathbf{V}^* , c'est-à-dire C est une \mathbf{V} -costructure double d'espèce σ .

Il en résulte que, pour tout objet V' de \mathbf{V} , le foncteur $\bar{P}(V') = \underline{\underline{\mathbf{H}}^{\mathbf{S}}}(V', -)$. C est une réalisation de $\sigma \otimes \sigma$ dans \mathbf{H} , puisque $\underline{\underline{\mathbf{H}}^{\mathbf{S}}}(V', -)$

est compatible avec les limites projectives. En conséquence, la restriction P de \bar{P} à \mathbf{V} est à valeurs dans \mathbf{W}' . On a donc

$$P(V') = \underline{\mathbf{V}}(V', -). C \text{ et } \bar{P}.U = U'.P.$$

PROPOSITION I.11. *Le $\underline{\mathbf{H}}$ -foncteur P admet pour $\underline{\mathbf{H}}$ -adjoint le $\underline{\mathbf{H}}$ -foncteur $Q = N. \bar{Q}. U' : \mathbf{W}' \rightarrow \mathbf{V}$.*

PREUVE. C'est une conséquence immédiate de la proposition I.3.

Le $\underline{\mathbf{H}}$ -foncteur \square admet également une restriction à \mathbf{V} :

$$\square = B. P : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}.$$

COROLLAIRE. *Le $\underline{\mathbf{H}}$ -foncteur \square admet $Q. B^{-1}$ pour $\underline{\mathbf{H}}$ -adjoint. Il est donc compatible avec les $\underline{\mathbf{H}}$ -limites projectives.*

Notons $T_V : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$, pour tout objet V de \mathbf{V} , la restriction du foncteur $\bar{T}_V : \underline{\mathbf{H}}^S \rightarrow \underline{\mathbf{H}}^S$. Ce foncteur est égal au foncteur composé $(\underline{\mathbf{V}}(-, V). -). \square$ et prend ses valeurs dans \mathbf{V} , car le foncteur $\underline{\mathbf{V}}(-, V)$ est compatible avec les limites projectives. Il en résulte un sous-foncteur $\underline{\underline{\mathbf{V}}} : \mathbf{V} \times (\mathbf{V})^* \rightarrow \mathbf{V}$, du foncteur $\underline{\underline{\mathbf{H}}}^S$. Il est défini par :

$$\underline{\underline{\mathbf{V}}}(V', V) = \underline{\underline{\mathbf{H}}}^S(V', V) = \bar{T}_V(V') = T_V(V'),$$

pour tout couple d'objets (V', V) de \mathbf{V} .

Posons donc : $\otimes = N. \bar{\otimes}. U \times U : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$.

PROPOSITION I.12. *Le $\underline{\mathbf{H}}$ -foncteur $\underline{\underline{\mathbf{V}}}(-, V) : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ admet $R_V = V \otimes$ - pour $\underline{\mathbf{H}}$ -foncteur $\underline{\mathbf{H}}$ -adjoint, quel que soit l'objet V de \mathbf{V} .*

PREUVE. Pour tous objets V, V' et V'' de \mathbf{V} , nous avons les isomorphismes naturels :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\mathbf{V}}}(\underline{\underline{\mathbf{V}}}(V'', V'), V) &\xrightarrow{\cong} \underline{\underline{\mathbf{H}}}^S(\underline{\underline{\mathbf{H}}}^S(V'', V'), V) \xrightarrow{\cong} \underline{\underline{\mathbf{H}}}^S(V'', V' \otimes V) \\ &\qquad\qquad\qquad \downarrow \cong \\ &\underline{\underline{\mathbf{V}}}(V'', N(V' \otimes V)) \end{aligned}$$

et l'égalité $\underline{\underline{\mathbf{V}}}(V'', N(V' \otimes V)) = \underline{\underline{\mathbf{V}}}(V'', V' \otimes V)$, car N est un $\underline{\mathbf{H}}$ -adjoint de U . Ceci suffit à achever la preuve.

PROPOSITION I.13. *Si la costructure double C est symétrique, il existe un isomorphisme naturel et canonique $\square \underline{\underline{\mathbf{V}}}(V, V') \xrightarrow{\cong} \underline{\underline{\mathbf{V}}}(-, V'). (\square V)$, pour tous objets V et V' de \mathbf{V} .*

PREUVE. C'est une conséquence de la proposition I.7.

PROPOSITION I.14. *Si la costructure double C est symétrique, il existe des isomorphismes naturels et canoniques :*

$$\underline{\underline{\mathbf{V}}}(\underline{\underline{\mathbf{V}}}(V'', V'), V) \xrightarrow{\cong} \underline{\underline{\mathbf{V}}}(V'', V' \otimes V) \text{ et } V \otimes V' \xrightarrow{\cong} V' \otimes V.$$

Il en résulte le théorème qui suit.

THEOREME I.2. *A une catégorie monoïdale fermée symétrique \mathbf{H} vérifiant les hypothèses 0.3.b et 0.3.c et à une \mathbf{V} -costructure double C d'espèce σ est associée une \mathbf{H} -catégorie tensoriellement auto-dominée $\underline{\underline{\mathbf{V}}} = (\underline{\underline{\mathbf{V}}}, \underline{\underline{\mathbf{V}}}(-, -), \otimes)$ sur la catégorie \mathbf{V} des \mathbf{H} -structures algébriques d'espèce σ , lorsque σ est une petite esquisse projective (vérifiant 0.3.a).*

Si, de plus, C est symétrique, \mathbf{V} est munie d'une structure de catégorie tensoriellement auto-dominée symétrique, dite standard, $\underline{\underline{\mathbf{V}}} = (\mathbf{V}, \underline{\underline{\mathbf{V}}}(-, -), \otimes)$.

I.3. Fermeture standard de \mathbf{V} .

Chaque unité S de \mathbf{S} définit un foncteur d'omission [F.O.S.A]: $F_S: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{H}$ déterminé par $F_S(V) = V(S)$. On désigne alors par $F_S(V'; V)$ une projection canonique de $\underline{\underline{\mathbf{V}}}(V', V)$ vers $\mathbf{H}(V'(S), V(S))$. De même, à toute flèche $s: S \rightarrow S'$ de \mathbf{S} est associée une \mathbf{H} -transformation naturelle $F_s: F_S \Rightarrow F_{S'}$, déterminée par la famille des $F_s(V) = V(s)$.

Comme \mathbf{H} est une catégorie monoïdale fermée à petites limites inductives, les petites extensions de Kan à valeurs dans \mathbf{H} existent [K.E.C.T]. L'hypothèse de commutation de limites sur \mathbf{H} assure (Appendice) l'existence d'un \mathbf{H} -adjoint G_S au \mathbf{H} -foncteur F_S . A chaque transformation naturelle F_s correspond une \mathbf{H} -transformation naturelle: $G_{S'}: G_S \Rightarrow G_{S'}$. De plus, on a l'égalité: $G_{S' \cdot s} = G_{S'} \cdot G_s$.

Considérant les catégories $\mathbf{V}^{\mathbf{H}}$ et $\mathbf{H}^{\mathbf{V}}$, nous obtenons des foncteurs :

$$F: \mathbf{S} \rightarrow \mathbf{H}^{\mathbf{V}} \text{ et } G: \mathbf{S} \rightarrow (\mathbf{V}^{\mathbf{H}})^*$$

où $F(s) = F_s$ et $G(s) = G_s$. Alors F est une $\mathbf{H}^{\mathbf{V}}$ -structure et G est une $\mathbf{V}^{\mathbf{H}}$ -costructure d'espèce σ .

Pour tout objet H de \mathbf{H} , nous avons donc une \mathbf{V} -costructure d'es-
pèce σ :

$$G_-(H) = E_H \cdot G, \text{ définie par } G_-(H)(s) = G_s(H),$$

où $E_H : \mathbf{V}^{\mathbf{H}} \rightarrow \mathbf{V}$ est le foncteur évaluation en H .

Nous considèrerons essentiellement $G_-(J)$, où J est l'unité de \mathbf{H} .

Dans cette section nous ferons les hypothèses suivantes :

- a. C est symétrique,
- b. Il existe une unité S_0 de S telle que $G_-(J)$ soit isomorphe à $C(S_0, -)$.

Une costructure vérifiant b sera dite *cohérente*. Alors $C(S, S_0)$ et $C(S_0, S)$, qui sont naturellement isomorphes dans \mathbf{V} , sont deux F_S -structures libres sur J .

PROPOSITION 1.15. *Le foncteur $\underline{\mathbf{V}}(-, C(S_0, S_0))$ est naturellement équivalent au foncteur identique sur \mathbf{V} .*

PREUVE. En effet, pour toute flèche s de \mathbf{S} , nous avons les isomorphismes naturels :

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{V}}(V, C(S_0, S_0))(s) &\xrightarrow{\cong} \underline{\mathbf{V}}(\square V(s), C(S_0, S_0)), \\ \underline{\mathbf{V}}(\square V(s), C(S_0, S_0)) &\xrightarrow{\cong} \underline{\mathbf{H}}(\square V(s)(S_0), J), \\ \underline{\mathbf{H}}(\square V(s)(S_0), J) &\xrightarrow{\cong} \square V(s)(S_0) \xrightarrow{\cong} \underline{\mathbf{V}}(V, C(s, S_0)) \end{aligned}$$

et

$$\underline{\mathbf{V}}(V, C(s, S_0)) \xrightarrow{\cong} \underline{\mathbf{H}}(V(s), J) \xrightarrow{\cong} V(s).$$

La naturalité de ces isomorphismes en toutes les variables achève la démonstration.

COROLLAIRE. *Le bifoncteur \otimes admet $C(S_0, S_0)$ pour unité.*

Il en résulte des équivalences naturelles :

$$\begin{aligned} - \otimes C(S_0, S_0) &\xrightarrow{\cong} Id_{\mathbf{V}}, \quad C(S_0, S_0) \otimes - \xrightarrow{\cong} Id_{\mathbf{V}}, \\ (- \otimes -) \otimes - &\xrightarrow{\cong} - \otimes (- \otimes -). \end{aligned}$$

Ces équivalences vérifient les axiomes de cohérence. Les calculs fastidieux qui l'établissent ne seront pas imposés au lecteur. On en déduit le théorème qui suit.

THEOREME I.3. *A une catégorie monoïdale fermée symétrique $\underline{\mathbf{H}}$ vérifiant les hypothèses 0.3.b et 0.3.c et à une \mathbf{V} -costructure double symétrique C cohérente est associée une catégorie monoïdale fermée symétrique, dite standard, $\underline{\mathbf{V}} = (\mathbf{V}, \underline{\mathbf{V}}(-, -), \otimes, C(S_o, S_o), \dots)$ sur la catégorie \mathbf{V} des $\underline{\mathbf{H}}$ -structures algébriques d'espèce σ , lorsque σ , est une petite esquisse projective (vérifiant 0.3.a).*

Un exemple simple est le cas où $\sigma = (\mathbf{S}, \phi)$. Alors $\mathbf{V} = \mathbf{H}^{\mathbf{S}}$ et le théorème I.3 complète le théorème I.1. (Les hypothèses a et b, dans le cas où \mathbf{S} est une catégorie, signifiant qu'elle est munie d'une structure prémonoïdale au sens de DAY, nous retrouvons donc les résultats de [O.C.C.F]). Ceci montre que ii implique i (voir l'introduction).

II. COSTRUCTURES STANDARDS ET CANONIQUES.

II.1. Costuctures standards.

Nous conservons les notations de I, en particulier pour F_S et $G_-(J)$.

Dans cette section nous supposons que \mathbf{V} est munie d'une structure de catégorie monoïdale fermée symétrique $\underline{\mathbf{V}}' = (\mathbf{V}, \mathbf{V}'(-, -), \otimes', \bar{V}, \dots)$ telle que les conditions suivantes soient vérifiées :

a. Les foncteurs $\underline{\mathbf{V}}'(-, V) : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ et $- \otimes' V : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$, sont sous-jacents à des $\underline{\mathbf{H}}$ -foncteurs et le second est $\underline{\mathbf{H}}$ -adjoint du premier, pour tout objet V de \mathbf{V} .

b. Il existe une unité S_o de \mathbf{S} telle que le foncteur F_{S_o} soit naturellement équivalent au $\underline{\mathbf{H}}$ -foncteur $\underline{\mathbf{V}}'(-, V)$.

Nous dirons, dans ces conditions, que $\underline{\mathbf{V}}'$ est *cohérente*. Lorsque la seule condition a est vérifiée on dit aussi que $\underline{\mathbf{V}}'$ est *adaptée* à $\underline{\mathbf{H}}$. Cette seule condition a assure l'existence d'un isomorphisme naturel en toutes les variables V'', V' et V , objets de \mathbf{V} :

$$\underline{\mathbf{V}}(\underline{\mathbf{V}}'(V'', V'), V) \quad \xrightarrow{\cong} \quad \underline{\mathbf{V}}(V'', V' \otimes' V).$$

Cet isomorphisme existe toujours dans le cas où $\underline{\mathbf{H}}$ est la catégorie des ensembles, la condition a est alors vérifiée. Autrement dit, une structure monoïdale fermée sur la catégorie $\mathcal{U}(\mathcal{M}, \sigma)$ est toujours adaptée à la

structure cartésienne fermée usuelle de \mathfrak{M} .

Pour tout couple de flèches (s, s') de $\mathbf{S} \times \mathbf{S}$, posons :

$$C(s, s') = G_s(J) \otimes^{\bullet} G_{s'}(J).$$

On définit ainsi un bifoncteur $C : \mathbf{S} \times \mathbf{S} \rightarrow \mathbf{V}^*$.

PROPOSITION II.1. *Le bifoncteur C est une \mathbf{V} -costructure double d'espèce σ , symétrique. Si $\underline{\mathbf{V}}'$ est cohérente, il en est de même de C (conditions I.3.b).*

THEOREME II.1. *A une structure de catégorie monoïdale fermée symétrique $\underline{\mathbf{V}}'$, adaptée à \mathbf{H} , sur la catégorie \mathbf{V} des \mathbf{H} -structures algébriques d'espèce σ , est associée une \mathbf{V} -costructure double d'espèce σ symétrique, dite standard $C : \sigma \otimes \sigma \rightarrow \mathbf{V}^*$. Le foncteur Hom interne standard $\underline{\mathbf{V}}(-, -)$ défini par C (voir I.2) est équivalent au foncteur $\underline{\mathbf{V}}'(-, -)$. Si, de plus, $\underline{\mathbf{V}}'$ est cohérente, comme il en est de même de C , la catégorie monoïdale fermée symétrique standard déduite de C (voir I.3) est isomorphe à $\underline{\mathbf{V}}'$.*

PREUVE. C est une \mathbf{V} -costructure double, car les foncteurs $\mathbf{V}' \otimes^{\bullet} -$ et $-\otimes^{\bullet} \mathbf{V}$ sont compatibles avec les limites inductives.

Montrons que les foncteurs $\underline{\mathbf{V}}(-, V)$ et $\underline{\mathbf{V}}'(-, V)$ sont naturellement équivalents. Il suffit de prouver l'existence d'un isomorphisme naturel $\underline{\mathbf{V}}(V', V) \xrightarrow{\cong} \underline{\mathbf{V}}'(V', V)$. Autrement dit nous devons comparer les valeurs de ces deux foncteurs. Nous le ferons pour un objet S de \mathbf{S} , le raisonnement sur une flèche étant analogue. En vertu des constructions standards de I.1 et I.2, nous avons :

$$\underline{\mathbf{V}}(V', V)(S) \xrightarrow{\cong} \underline{\mathbf{V}}(\square V'(S), V) \xrightarrow{\cong} \underline{\mathbf{V}}(\underline{\mathbf{V}}(V', C(\cdot, S)), V).$$

C'est donc une limite projective du foncteur $\Theta : \mathbf{S}^{\Delta} \rightarrow \mathbf{H}$, défini par

$$\begin{aligned} \Theta(x, x') &= \underline{\mathbf{H}}(\underline{\mathbf{V}}(V', C(x, S)), V(x')) \\ &= \underline{\mathbf{H}}(\underline{\mathbf{V}}(V', G_x(J) \otimes^{\bullet} G_S(J)), V(x')), \end{aligned}$$

pour toute flèche (x, x') de \mathbf{S}^{Δ} . Le $\underline{\mathbf{H}}$ -foncteur $-\otimes^{\bullet} G_S(J)$ est un $\underline{\mathbf{H}}$ -adjoint de $\underline{\mathbf{V}}'(-, G_S(J))$ et $G_S(J)$ est une F_S -structure libre sur J . On en déduit des isomorphismes naturels et canoniques :

$$\underline{\mathbf{V}}(V', G_x(J) \otimes^{\bullet} G_S(J)) \xrightarrow{\cong} \underline{\mathbf{V}}(\underline{\mathbf{V}}'(V', G_x(J)), G_S(J)),$$

$$\underline{\mathbf{V}}(\underline{\mathbf{V}}'(V', G_x(J)), G_S(J)) \xrightarrow{\cong} \underline{\mathbf{V}}'(V', G_x(J))(S).$$

En conséquence, $\textcircled{\theta}$ est naturellement équivalent au foncteur $\textcircled{\theta}'$, défini par

$$\textcircled{\theta}'(x, x') = \underline{\mathbf{H}}(\underline{\mathbf{V}}'(V', G_S(J))(x), V(x')),$$

qui admet pour limite projective dans \mathbf{H} l'objet $\underline{\mathbf{V}}(\underline{\mathbf{V}}'(V', G_S(J)), V)$. Le foncteur $\textcircled{\theta}'$ étant symétrique et $\underline{\mathbf{V}}'$ étant adaptée à $\underline{\mathbf{H}}$, on a les isomorphismes naturels :

$$\begin{array}{ccc} \underline{\mathbf{V}}(\underline{\mathbf{V}}'(V', G_S(J)), V) & \xrightarrow{\cong} & \underline{\mathbf{V}}(\underline{\mathbf{V}}'(V', V), G_S(J)) \\ & & \downarrow^R \\ & & \underline{\mathbf{V}}'(V', V)(S). \end{array}$$

Ainsi : $\underline{\mathbf{V}}(V', V)(S) \cong \underline{\mathbf{V}}'(V', V)(S)$.

De la naturalité de tous ces isomorphismes résulte l'équivalence $\underline{\mathbf{V}}(-, V) \xrightarrow{\cong} \underline{\mathbf{V}}'(-, V)$, naturelle en V . On montre que cette équivalence est compatible avec les axiomes de cohérence, d'où le théorème.

L'implication $i \Rightarrow ii$ est ainsi démontrée. Avec le théorème I.3 il résulte l'équivalence $i \Leftrightarrow ii$ (voir l'introduction).

II.2. Costructures canoniques.

Les objets de $\mathbf{S} \times \mathbf{S}$ déterminent aussi des $\underline{\mathbf{H}}$ -foncteurs d'omission $F_{(S, S')}: \mathbf{W}' \rightarrow \mathbf{H}$, définis par $F_{(S, S')}(W) = W(S, S')$. De même, chaque morphisme $(s, s'): (S, S') \rightarrow (S_1, S'_1)$ de $\mathbf{S} \times \mathbf{S}$ définit une $\underline{\mathbf{H}}$ -transformation naturelle $F_{(s, s')}: F_{(S, S')} \xrightarrow{\cong} F_{(S_1, S'_1)}$. Pour les mêmes raisons qu'à la section I.3, les $\underline{\mathbf{H}}$ -foncteurs $F_{(S, S')}$ admettent des $\underline{\mathbf{H}}$ -adjoints $G_{(S, S')}$. A une flèche (s, s') de $\mathbf{S} \times \mathbf{S}$ correspond ainsi la $\underline{\mathbf{H}}$ -transformation naturelle : $G_{(s, s')}: G_{(S_1, S'_1)} \xrightarrow{\cong} G_{(S, S')}$. Nous obtenons de cette façon une \mathbf{W}' -costructure $\bar{C}: \sigma \otimes \sigma \rightarrow \mathbf{W}'^*$, où $\bar{C}(s, s') = G_{(s, s')}(J)$. De plus, on peut également définir des foncteurs d'omission $D_S: \mathbf{W}' \rightarrow \mathbf{V}$ en posant $D_S(W) = W(-, S)$. Nous obtenons alors des $\underline{\mathbf{H}}$ -transformations naturelles $D_s: D_S \xrightarrow{\cong} D_{S'}$, pour tout morphisme $s: S \rightarrow S'$ de \mathbf{S} . L'hypothèse 0.3.c assure que D_S admet un $\underline{\mathbf{H}}$ -adjoint K_S . Alors à D_S correspond une $\underline{\mathbf{H}}$ -transformation naturelle $K_s: K_{S'} \xrightarrow{\cong} K_S$.

Symétriquement, on a les $\underline{\mathbf{H}}$ -foncteurs d'omission :

$$D'_S: \mathbf{W}' \rightarrow \mathbf{V} \text{ en posant } D'_S(W) = W(S, -).$$

Il en résulte les H-adjoints K'_S et les H-transformations naturelles D'_S et K'_S . Les équivalences :

$$F_S \cdot D_S \xrightarrow{\approx} F_{(S, S')} \xrightarrow{\approx} F_{S'} \cdot D'_S$$

entraînent les suivantes :

$$K_{S'} \cdot G_S \xrightarrow{\approx} G_{(S, S')} \xrightarrow{\approx} K'_S \cdot G_{S'}$$

De plus, comme $\sigma \otimes \sigma = (\mathbf{S} \times \mathbf{S}, A_{\mathbf{S} \times \mathbf{S}})$ est symétrique par construction, les H-foncteurs K_S et K'_S sont naturellement équivalents. On en déduit que $\bar{C}: \sigma \otimes \sigma \rightarrow \mathbf{W}'$ est une costructure symétrique.

Nous dirons qu'un foncteur $D: \mathbf{W}' \rightarrow \mathbf{V}$ est un *foncteur de comparaison de \mathbf{W}' à \mathbf{V}* s'il est compatible avec les limites inductives définies par l'ensemble des cônes $\bar{C}(A_{\mathbf{S} \times \mathbf{S}})$.

Nous dirons qu'un foncteur de comparaison D de \mathbf{W}' à \mathbf{V} est *cobérent* s'il existe un objet S_0 de \mathbf{S} tel que $D \cdot \bar{C}(-, S_0)$ et $D \cdot \bar{C}(S_0, -)$ soient équivalents à $G_-(J)$ (voir I.3).

THEOREME II.2. *A tout foncteur D de comparaison de \mathbf{W}' à \mathbf{V} , cobérent est associée une costructure double dite canonique $C: \sigma \otimes \sigma \rightarrow \mathbf{V}$, symétrique et cobérente. Les constructions standards de l lui sont donc applicables..*

PREUVE. Ceci est immédiat en posant $C = D \cdot \bar{C}$.

Nous montrerons ultérieurement que l'existence d'un tel foncteur se réduit à une étude de type homologique des esquisses σ et $\sigma \otimes \sigma$. De même, la cohérence d'un foncteur de comparaison, ou d'une \mathbf{V} -costructure double C , ou d'une structure de catégorie monoïdale fermée symétrique $\underline{\mathbf{V}}'$ sur \mathbf{V} , c'est-à-dire l'existence d'une unité particulière S_0 de \mathbf{S} , résulte de l'étude de la forme de l'esquisse σ . On pourra en trouver un premier exemple dans [I.M.S.A] concernant les « systèmes générateurs d'une esquisse » et dans [F.O.S.A] concernant l'existence d'unités particulières de σ . Utilisant la structure monoïdale de la catégorie des homomorphismes entre esquisses [F.M.C.E] une structure de monoïde commutatif

$$\mathbb{K}: \sigma \otimes \sigma \rightarrow \sigma$$

induit un foncteur de comparaison cohérent D ; ce dernier est défini comme adjoint du foncteur $\mathcal{O}(\mathbf{H}, \mathcal{K})$.

II.3. Obstructions à la fermeture monoïdale des catégories algébriques.

Désignons par \mathbf{X} la catégorie des \mathbf{W}' -structures algébriques d'espèce σ et considérons un objet S_o de \mathbf{S} . Nous avons vu qu'il existe un \mathbf{H} -foncteur d'omission associé à S_o , $\bar{D}_{S_o} : \mathbf{W}' \rightarrow \mathbf{V}$ qui à $W(-, -)$ associe $W(-, S_o)$. Nous en obtenons un second $D_{S_o} : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{W}'$, qui à $X((-, -), -)$ associe $X((- , -), S_o) : \sigma \otimes \sigma \rightarrow \mathbf{H}$.

Désignons par \mathbf{V}_{S_o} et par \mathbf{W}'_{S_o} respectivement les sous-catégories pleines et saturées (pour les isomorphismes) de \mathbf{V} et de \mathbf{W} , engendrées par l'image de D_{S_o} et de \bar{D}_{S_o} (ceci signifie que tout objet de \mathbf{W}_{S_o} , par exemple, est isomorphe à l'image d'au moins un objet de \mathbf{X}).

THEOREME II.3. *Si \mathbf{V}_{S_o} est différente de \mathbf{V} , si \mathbf{W}'_{S_o} est égale à \mathbf{W} , il ne peut exister de structure de catégorie monoïdale fermée symétrique sur \mathbf{V} qui soit adaptée à \mathbf{H} .*

PREUVE. Supposons que \mathbf{V} est munie d'une structure de catégorie monoïdale fermée symétrique adaptée à \mathbf{H} et notée $\underline{\mathbf{V}}'' = (\mathbf{V}, \underline{\mathbf{V}}''(-, -), \otimes'', \bar{V}', \dots)$. D'après le théorème II.1 cette structure définit une \mathbf{V} -costructure double $C : \sigma \otimes \sigma \rightarrow \mathbf{V}^*$. Cette dernière définit un foncteur Hom interne standard $\underline{\mathbf{V}}(-, -)$ qui est équivalent au foncteur $\underline{\mathbf{V}}''(-, -)$.

Considérons un objet V de \mathbf{V} qui n'appartient pas à \mathbf{V}_{S_o} . Nous avons les isomorphismes naturels :

$$V \xrightarrow{\cong} \underline{\mathbf{V}}''(V, \bar{V}') \xrightarrow{\cong} \underline{\mathbf{V}}(\square V, \bar{V}').$$

Or $\square V : \sigma \otimes \sigma \rightarrow \mathbf{V}$ détermine une structure double $B^{-1}(\square V)$. Comme $\mathbf{W}' = \mathbf{W}'_{S_o}$, la structure double $B^{-1}(\square V)$ est isomorphe à une structure double de la forme $X((- , -), S_o)$, où $X((- , -), -) : \sigma \otimes \sigma \otimes \sigma \rightarrow \mathbf{H}$ est une structure triple. Par suite, on a un isomorphisme

$$V \xrightarrow{\cong} \underline{\mathbf{V}}(B(X(-, -), S_o), \bar{V}').$$

Comme le foncteur $\underline{\mathbf{V}}(-, \bar{V}')$ est compatible avec les limites projectives, on en déduit que $\underline{\mathbf{V}}(B(X(-, -), S_o), \bar{V}')$ est sous-jacente (en S_o) à une

structure double. C'est donc un objet de \mathbf{V}_{S_0} ; il en résulte que V en est aussi un, d'où une contradiction.

REMARQUE. Ce théorème explique pourquoi dans la plupart des cas une catégorie algébrique munie d'une structure monoïdale fermée symétrique est telle que toute structure simple est sous-jacente à une structure double, triple...

Supposons par exemple que \mathbf{H} soit la catégorie des ensembles et que σ soit l'esquisse habituelle de groupe $\sigma^{\mathbf{G}}$. Un groupe double s'identifie à un groupe abélien; il en est de même d'un groupe triple. Il en résulte que $\mathbf{W}'_{S_0} = \mathbf{W}'$ et $\mathbf{V}_{S_0} \neq \mathbf{V}$, lorsque S_0 est l'objet de \mathbf{S} tel que F_{S_0} soit le foncteur d'oubli usuel de \mathbf{G} vers \mathbb{M} . On en déduit :

COROLLAIRE. *Il n'existe aucune structure monoïdale fermée symétrique sur la catégorie des groupes.*

III. EXEMPLES.

III.1. Exemples de costructures doubles.

III.1.A. Cas des groupes abéliens.

Désignons par \mathbf{A} la catégorie des groupes abéliens et des homomorphismes de groupes abéliens. On sait qu'il existe une esquisse projective petite $\sigma^{\mathbf{A}} = (\mathbf{S}_{\mathbf{A}}, A_{\mathbf{A}})$ telle que $\mathcal{U}(\mathbb{M}, \sigma^{\mathbf{A}})$ soit équivalente à \mathbf{A} . Rappelons que $\mathbf{S}_{\mathbf{A}}$ est un graphe multiplicatif admettant pour générateurs les morphismes représentés par le diagramme I.

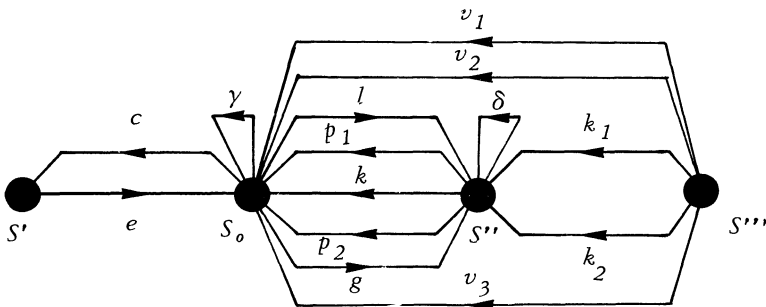
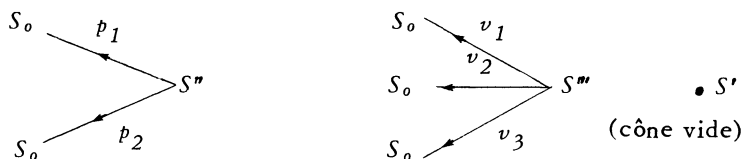


diagramme I

Le morphisme e représente l'élément neutre d'un groupe tandis que k représente la loi de composition et γ l'opération passage à l'inverse. Il y a d'autre part des relations que nous n'écrirons pas toutes. Ainsi, l'égalité $k \cdot k_1 = k \cdot k_2$ exprime l'associativité tandis que $k \cdot \delta = k$ exprime la commutativité. Enfin \mathbf{A} est un ensemble constitué des trois cônes projectifs:



Un groupe G s'identifie à un foncteur $G: \mathbf{S}_{\mathbf{A}} \rightarrow \mathfrak{M}$ qui associe à ces cônes projectifs des limites projectives dans \mathfrak{M} . L'ensemble sous-jacent au groupe est alors $G(S_0)$, son élément neutre est $G(e)(0)$ (on rappelle que $1 = G(S')$ a pour seul élément 0) et sa loi de composition est $G(k)$.

Il est facile de montrer que, pour toute catégorie \mathbf{H} à petites limites projectives, les catégories $\mathfrak{U}(\mathfrak{M}, \sigma^{\mathbf{A}})$ et $\mathfrak{U}(\mathfrak{M}, \sigma^{\mathbf{A}} \otimes \sigma^{\mathbf{A}})$ sont équivalentes. Il existe donc une costructure double $C_{\mathbf{Z}}: \sigma^{\mathbf{A}} \otimes \sigma^{\mathbf{A}} \rightarrow \mathbf{A}^*$, évidemment cohérente. Dans \mathbf{A} , on représente en partie ses valeurs par le diagramme II, où $1, \mathbf{Z}, \dots$ sont les structures de groupes usuelles et où l'on a des homomorphismes de groupes (abéliens) suivants :

$E: \mathbf{Z} \rightarrow 1$ défini par $E(z) = 0$ pour tout $z \in \mathbf{Z}$,

$K: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ défini par $K(z) = (z, z)$ pour tout $z \in \mathbf{Z}$,

$P_1: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ défini par $P_1(z) = (z, 0)$ pour tout $z \in \mathbf{Z}$,

$P_2: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ défini par $P_2(z) = (0, z)$ pour tout $z \in \mathbf{Z}$,

$\Delta: \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ défini par $\Delta(z, z') = (z', z)$, pour tout (z, z') appartenant à $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}, \dots$

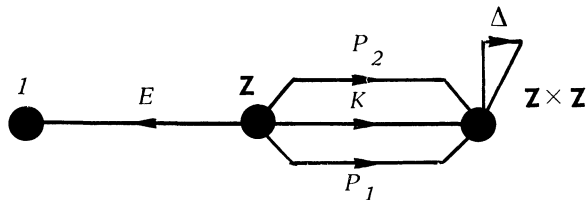


diagramme II

On associe à cette costructure une domination (c'est-à-dire un Hom interne) $\underline{\mathbf{A}}$ et un produit tensoriel \otimes en vertu de I. Un calcul simple montre qu'il s'agit du foncteur Hom interne et du produit tensoriel usuels sur \mathbf{A} . Enfin le foncteur \square construit en I est, dans ce cas, équivalent au foncteur identique.

THEOREME III.1.A. *La structure monoïdale fermée symétrique usuelle sur \mathbf{A} est obtenue par construction standard à partir d'une costructure double dans \mathbf{A} (c'est-à-dire d'une structure de cogroupe abélien sur le groupe abélien \mathbf{Z}).*

III.1.B. Cas des catégories.

On sait qu'il existe une esquisse projective petite $\sigma^{\mathcal{F}} = (\mathbf{S}_{\mathcal{F}}, A_{\mathcal{F}})$ telle que $\mathcal{U}(\mathcal{M}, \sigma^{\mathcal{F}})$ soit équivalente à la catégorie \mathcal{F} des foncteurs. Rappelons que $\mathbf{S}_{\mathcal{F}}$ est un graphe multiplicatif admettant pour générateurs les morphismes représentés par le diagramme III.

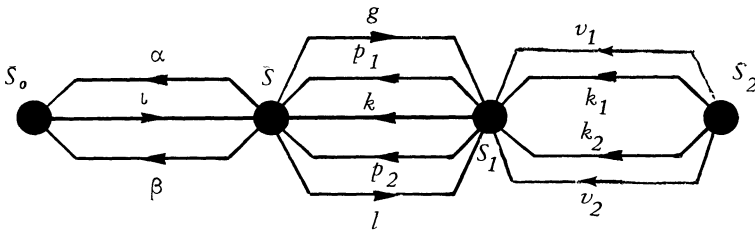
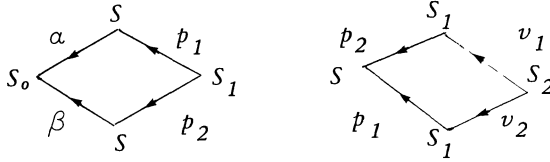


diagramme III

Par exemple, le morphisme ι représente l'injection d'une classe d'objets d'une catégorie dans son ensemble sous-jacent. Les morphismes α et β représentent les opérations source et but de cette catégorie (ou domaine et codomaine). Le morphisme k en est la loi de composition. Il y a également des relations, notamment les égalités $k \cdot k_1 = k \cdot k_2$ représentant l'associativité tandis que l'égalité $\alpha \cdot \iota = Id$ signifie que la source ou le but d'une unité (d'un objet) est cette unité... Enfin, $A_{\mathcal{F}}$ est un ensemble constitué des deux cônes projectifs :



Une catégorie G est donc un foncteur $G: \mathcal{S}\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{M}$ qui associe à ces deux cônes projectifs deux limites projectives dans \mathcal{M} , que l'on peut supposer canoniques, de même $G(\iota)$ est une injection canonique de $G(S_0)$ vers $G(S)$. La catégorie G admet alors $G(S_0)$ pour classe d'objets et $G(S)$ pour ensemble sous-jacent. (Pour des précisions supplémentaires se reporter à [E.T.S.A.].)


Alors \mathcal{F} est munie d'une costructure double cohérente :

$$C_{2 \times 2} : \sigma^{\mathcal{F}} \rightarrow \mathcal{F}^*$$

dont certaines valeurs sont représentées par le diagramme IV, où les catégories 1, 2 et 3 sont les suivantes :

1 est la catégorie triviale n'ayant qu'une unité,

2 est la catégorie \longrightarrow ,

3 est la catégorie .

Le produit tensoriel associé à cette costructure double cohérente est alors le produit usuel de catégories. Tandis que, si G et G' sont deux catégories, la structure de catégorie sur $Hom_{\mathcal{F}}(G', G)$ est la catégorie usuelle des transformations naturelles G'^G dont $Hom_{\mathcal{F}}(G', G)$ est une classe d'objets.

Remarquons que $\square G'$ s'identifie à une catégorie double [C.A.S.R.], que l'on note $(\square \square G', \square G')$ sur l'ensemble des carrés commutatifs, appelés aussi quatuors de la catégorie G .

(Rappelons qu'une catégorie double est un couple (D', D^+) de deux structures de catégories sur un même ensemble D , compatibles entre elles, i. e. lorsque les composés ci-dessous ont un sens, on a les égalités :

$$(x + y) \cdot (x' + y') = (x \cdot x') + (y \cdot y'), \quad \delta \cdot (x + y) = \delta \cdot (x) + \delta \cdot (y),$$

$$\delta^+(x \cdot y) = \delta^+(x) \cdot \delta^+(y), \quad \text{lorsque } \delta = \alpha \text{ ou } \beta .)$$

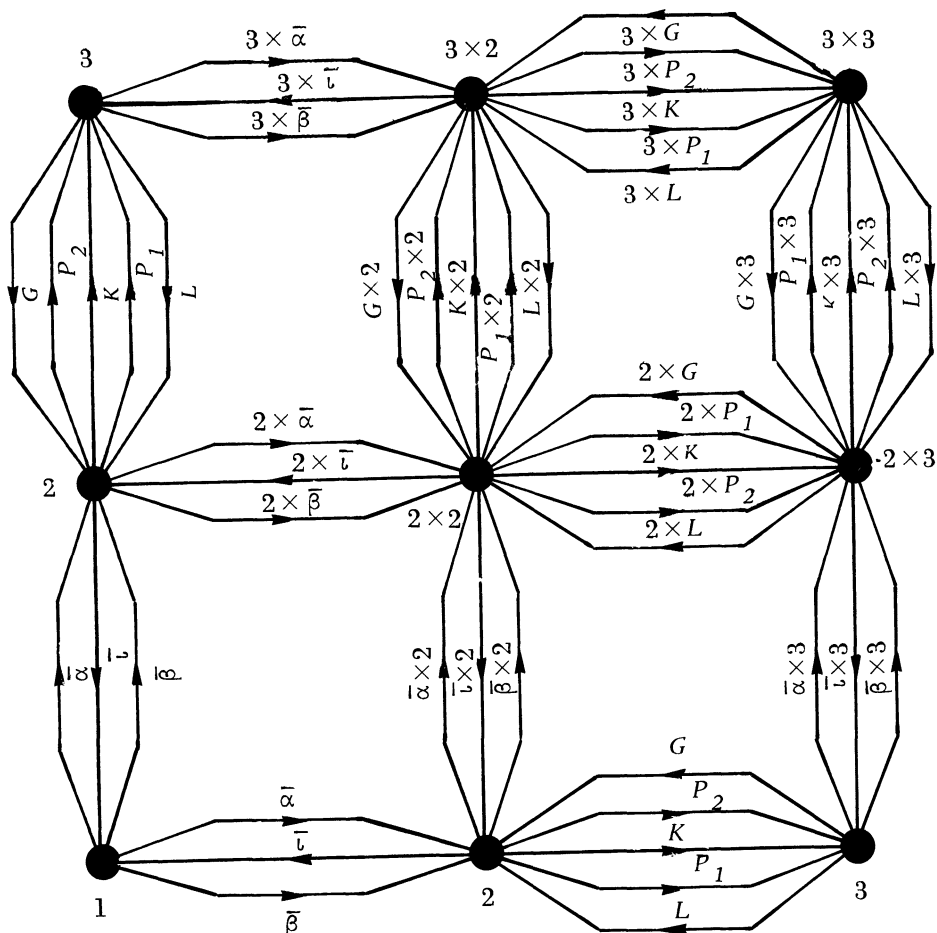
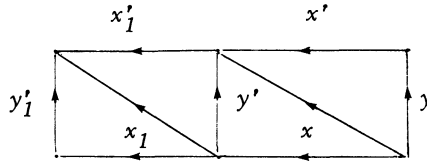


diagramme IV

La composition longitudinale des quatuors, définie par la structure $\square G'$, est donnée par l'égalité:

$$(y', x'_1, x_1, y') \square (y', x', x, y) = (y', x'_1, x', x_1 \cdot x, y),$$

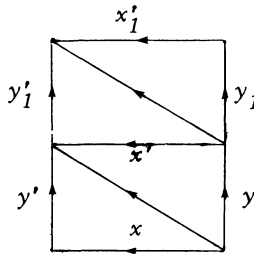
ou par le diagramme suivant:



De même la composition latérale de deux quatuors de G' , définie par la structure $\square G'$ est donnée par l'égalité :

$$(y'_1, x'_1, x', y_1) \square (y', x', x, y) = (y'_1 \cdot y', x'_1, x, y_1 \cdot y)$$

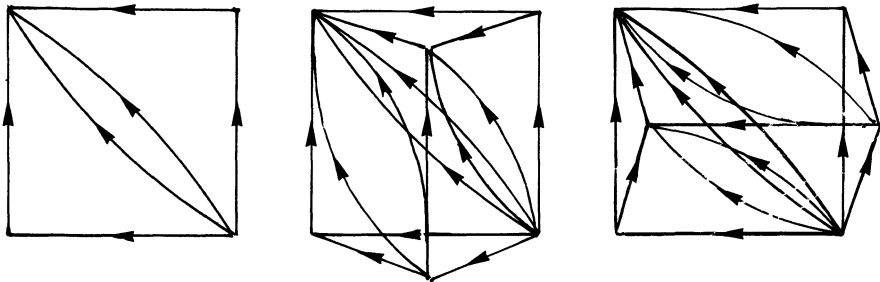
ou par le diagramme :



Les constructions de I montrent que tout élément de G'^G , pour tout couple (G', G) de deux catégories, c'est-à-dire toute transformation naturelle entre deux foncteurs de G vers G' , s'identifie à un foncteur de G vers la catégorie $\square G$ (resp. $\square\square G$). La loi de composition des transformations naturelles est alors induite par l'autre loi $\square\square$ (resp. \square). C'est ce point de vue, développé par C. Ehresmann dans [C.A.S.R], que ce texte explique et généralise. Nous pouvons énoncer le théorème :

THEOREME III.1.B. *La structure monoïdale fermée symétrique de \mathcal{F} est obtenue par construction standard à partir d'une costructure double dans \mathcal{F} (c'est-à-dire d'une structure de cocatégorie double sur la catégorie 2×2).*

Nous allons décrire une autre costructure double dans \mathcal{F} . Pour cela, désignons par $2 \otimes 2$ (resp. $2 \otimes 3$, $3 \otimes 2$) les catégories libres sur les graphes multiplicatifs produits 2×2 (resp. 2×3 , 3×2). Elles sont représentées par les diagrammes ci-dessous :

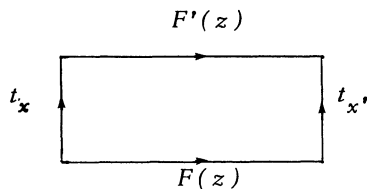


Il en résulte une costructure double cohérente $C_{2 \otimes, 2}$ dont les valeurs dans \mathcal{F} sont représentés comme au diagramme IV en remplaçant partout \otimes par \otimes' .

Cette costructure cohérente induit donc une structure monoïdale fermée symétrique sur \mathcal{F} .

Pour toute catégorie G' , $\square' G'$ est l'ensemble des carrés non commutatifs de G' . On le munit des deux lois \square' et \square'' qui prolongent les lois \square et \square'' définies ci-dessus pour les carrés commutatifs. Il en résulte une catégorie double $(\square' G', \square'' G')$. Ainsi, à tout couple (G', G) de deux catégories, le foncteur Hom interne standard associe la catégorie $(G'^G)'$ des pseudo-transformations naturelles entre foncteurs de G vers G' . On peut les définir comme étant les triplets $(F', (t_x)_{x \in G(S_0)}, F)$ tels que :

- $F : G \rightarrow G'$ et $F' : G \rightarrow G'$ sont deux foncteurs,
- $(t_x)_{x \in G(S_0)}$ est une famille de morphismes de G' telle que, pour tout morphisme $z : x \rightarrow x'$ appartenant à $G(S)$, on ait le carré non commutatif



Ces pseudo-transformations naturelles s'identifient donc à des foncteurs de G vers $\square' G'$ (resp. $\square'' G'$), la loi de composition sur $(G'^G)'$ étant alors celle que l'on déduit de l'autre loi \square'' (resp. \square').

Les costructures doubles que nous venons de décrire déterminent aussi des costructures doubles (des cographes multiplicatifs doubles) dans la catégorie des graphes multiplicatifs, qui est équivalente à une catégorie de réalisations d'une esquisse projective petite (« esquisse de graphes multiplicatifs ») dans \mathfrak{M} . Cette catégorie est donc munie de deux structures monoïdales fermées symétriques (au moins) dont l'une, de même que pour \mathcal{F} , est cartésienne.

On pourrait multiplier les exemples à tous les cas connus de structures algébriques munies de produits tensoriels et de foncteurs Hom internes. Signalons simplement pour terminer que la catégorie des petites esquisses \mathcal{I} -projectives et \mathcal{I} -inductives peut être munie d'une structure monoïdale fermée symétrique standard dont le produit tensoriel est celui qui a été défini en 0.2 (restreint à ces esquisses). Dans le cas où $\mathcal{I} = \phi$ le foncteur Hom interne standard \mathcal{D} est tel que, pour toute catégorie \mathbf{H} à limites projectives de foncteurs de $\mathbf{I} \rightarrow \mathbf{H}$, où $\mathbf{I} \in \mathcal{I}$, on a :

$$\mathcal{D}(\sigma_{\mathbf{H}}, \sigma) = \sigma \mathcal{U}(\mathbf{H}, \sigma) ;$$

cet isomorphisme justifie alors les isomorphismes tels que B (0.2).

III.2. Exemples de foncteurs de comparaison.

III.2.A. Cas des groupes abéliens.

Nous avons déjà signalé en III.1.A que les catégories $\mathcal{U}(\mathfrak{M}, \sigma^{\mathbf{A}})$ et $\mathcal{U}(\mathfrak{M}, \sigma^{\mathbf{A}} \otimes \sigma^{\mathbf{A}})$ étaient équivalentes. Désignons par D :

$$\mathcal{U}(\mathfrak{M}, \sigma^{\mathbf{A}} \otimes \sigma^{\mathbf{A}}) \xrightarrow{\cong} \mathcal{U}(\mathfrak{M}, \sigma^{\mathbf{A}})$$

un foncteur associé à cette équivalence. Il est évident que c'est un foncteur de comparaison cohérent. La costructure $C_{\mathbf{Z}}$ en résulte (voir 1. A); elle apparaît comme une costructure canonique associée à D .

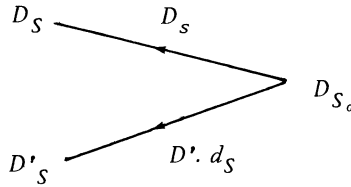
III.2.B. Cas des catégories.

Nous avons vu en II.2 qu'il existait une costructure double

$$G_{(\cdot, \cdot)}(J) : \sigma^{\mathcal{F}} \otimes \sigma^{\mathcal{F}} \longrightarrow \mathcal{F}_2,$$

où \mathcal{F}_2 est la catégorie pleine de foncteurs doubles associée à \mathfrak{M} . Cette costructure induit des foncteurs d'omission $D_S : \mathcal{F}_2 \rightarrow \mathcal{F}$, pour tout objet S de $\mathfrak{S}\mathcal{F}$ et, pour tout morphisme $s : S \rightarrow S'$, une transformation naturelle

$D_S : D_S \rightrightarrows D_{S^*}$, en posant $D_S(W) = W(-, S)$. Il en résulte que l'on peut également définir $D'_S(W) = W(S, -)$. Comme $\sigma^{\mathcal{F}} \otimes \sigma^{\mathcal{F}}$ est symétrique, les foncteurs D_S et D'_S sont équivalents: $d_S : D_S \xrightarrow{\cong} D'_S$. Nous désignons, dans ces conditions, par D_0 le foncteur somme fibrée du diagramme :



Il est immédiat de constater que D_0 est un foncteur de comparaison cohérent tel que $D_0 \cdot G_{(-, -)}(J)$ soit la costructure $C_{2 \otimes 2}$ de III.1.B, J étant un ensemble à un élément.

Désignons par $[G]$ la catégorie quasi-quotient de la catégorie G par la relation qui identifie deux morphismes de G dès qu'ils ont la même source et le même but. Le foncteur $q : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ défini sur les objets par $q(G) = [G]$ (et que l'on prolonge aisément par « universalité ») est compatible avec les limites inductives. Il en résulte que $q \cdot D_0$ est un second foncteur de comparaison cohérent D'_0 et tel que $D'_0 \cdot G_{(-, -)}(J)$ soit la costructure $C_{2 \times 2}$ de III.1.B.

APPENDICE. H-ADJONCTION POUR LE FONCTEUR INCLUSION $V \rightarrow H^S$.

Supposons encore que \mathcal{I} est un ensemble de petites catégories et que $\sigma = (\mathbf{S}, A_{\mathbf{S}})$ est une petite esquisse \mathcal{I} -projective, où \mathbf{S} est une catégorie. Il est clair que le cas où \mathbf{S} est un graphe multiplicatif s'y ramène en considérant la catégorie libre qu'il engendre. Nous supposons également, comme précédemment, que $(\mathbf{H}, \underline{\mathbf{H}}(-, -), \otimes, J)$ est une catégorie monoïdale fermée (symétrique).

A σ on associe un foncteur $T: \tilde{\mathbf{S}} \rightarrow \mathbf{S}$, où $\tilde{\mathbf{S}}$ est une catégorie obtenue en ajoutant «formellement» à \mathbf{S} :

- un cône $\tilde{\Theta}$ de même base que Θ chaque fois que $\Theta \in A_{\mathbf{S}}$,
- une flèche $r_{\Theta}: S \rightarrow \tilde{S}$ du sommet S de Θ au sommet \tilde{S} de $\tilde{\Theta}$ et telle que $\tilde{f}(I) \cdot r_{\Theta} = \mathbf{t}(I)$ pour tout objet I de \mathbf{I} , lorsque Θ est un cône \mathbf{I} -projectif de $A_{\mathbf{S}}$ défini par la famille $(\mathbf{t}(I))_{I \in \mathbf{I}_0}$ et $\tilde{\Theta}$ est le \mathbf{I} -cône projectif défini par la famille $(\tilde{f}(I))_{I \in \mathbf{I}_0}$, \mathbf{I}_0 étant la classe des unités de \mathbf{I} .

Alors le foncteur T admet un inverse à droite qui applique chaque r_{Θ} sur la flèche identique de S .

A tout foncteur $V: \mathbf{S} \rightarrow \mathbf{H}$ on associe un foncteur $\tilde{V}: \tilde{\mathbf{S}} \rightarrow \mathbf{H}$ tel que la restriction de \tilde{V} à \mathbf{S} soit égale à V et que $\tilde{V} \cdot \tilde{\Theta}$ soit une limite projective (moyennant un choix de telles limites dans \mathbf{H}). On désigne par $\mathbf{K}(V)$ une $\underline{\mathbf{H}}$ -extension de Kan [K.E.C.T] de \tilde{V} par T . On obtient une $\underline{\mathbf{H}}$ -transformation naturelle $\hat{\mathbf{K}}(V): V \rightrightarrows \mathbf{K}(V)$.

Soit ξ un petit ordinal régulier. Pour tout couple d'ordinaux $\xi'' \leq \xi' \leq \xi$, on définit, à partir de V , des $\underline{\mathbf{H}}$ -transformations naturelles

$$v(\xi', \xi'') \cdot V_{\xi''} \rightrightarrows V_{\xi'}$$

telles que

$$v(\xi', \xi'') \cdot v(\xi'', \xi'_1) = v(\xi', \xi'_1),$$

au moyen d'une récurrence transfinie vérifiant :

- $V_1 = V$,
- $v(\xi' + 1, \xi') = \hat{\mathbf{K}}(V_{\xi'})$,
- si $\xi'' \leq \xi$ est un ordinal limite, si $v(\xi'', \xi''')$ est défini pour tout $\xi''' \leq \xi'' < \xi'$, alors $V_{\xi''}$ est une $\underline{\mathbf{H}}$ -limite inductive de $(v(\xi'', \xi'''))_{\xi''' \leq \xi'' < \xi'}$

et $v(\xi', \xi'')$ est une co-projection.

THEOREME. Si, dans \mathbf{H} , les limites inductives de catégories d'indices $[\xi]$ commutent avec les limites projectives de catégories d'indices $I \in \mathcal{I}$, le foncteur $V_\xi: \mathbf{S} \rightarrow \mathbf{H}$ est une réalisation libre de σ dans \mathbf{H} , associée au foncteur V de \mathbf{S} dans \mathbf{H} .

On en déduit les deux corollaires suivants :

COROLLAIRE 1. Si \mathbf{H} est à limites inductives, la catégorie $\mathcal{U}(\mathbf{H}, \sigma)$ est une $\underline{\mathbf{H}}$ -catégorie à $\underline{\mathbf{H}}$ -limites inductives.

COROLLAIRE 2. Soit $n: \sigma' \rightarrow \sigma$ un morphisme entre petites esquisses projectives. Le $\underline{\mathbf{H}}$ -foncteur $\mathcal{U}(\mathbf{H}, n): \mathcal{U}(\mathbf{H}, \sigma) \rightarrow \mathcal{U}(\mathbf{H}, \sigma')$ admet un $\underline{\mathbf{H}}$ -adjoint.

Remarquons que ce corollaire s'applique lorsque σ' est réduite à un point; il en résulte l'existence d'un adjoint pour les foncteurs d'omission.

Département de Mathématiques
Tour 55, Université Paris VII
2, Place Jussieu
75221 PARIS, Cedex 05.

BIBLIOGRAPHIE

- [A.D.J.F] D.M. KAN, Adjoint Functors, *Trans Amer. Math. Soc.*, 87 (1958).
- [C.A.S.R] C. EHRESMANN, Catégories Structurées, *Ann. Scient. Ec. Nor. Sup.*, 3^e Série, t. 80 (1963).
- [C.D.F.S] A. BASTIANI et C. EHRESMANN, Catégorie de Foncteurs Structurés, *Cahiers de Top. et Géo. Diff.*, Vol. XI,4, Dunod, Paris (1969).
- [C.D.S.T] E. BURRONI, Catégories discrètement structurées et Triples, *Esquisses Mathématiques* 4, Paris 1970.
- [C.L.C.A] S. EILENBERG et G.M. KELLY, Closed Categories, *Proc. of the Conf. Cat. Alg. (La Jolla 1965)*, Springer 1966.
- [C.O.S.S] A. BASTIANI et C. EHRESMANN, Categories of sketched structures, *Cahiers de Top. et Géo. Diff.* Vol XIII,2, Paris 1972.
- [C.T.N.G] C. LAIR, Constructions d'Esquisses et Transformations Naturelles Généralisées, *Esquisses Mathématiques* 2, Paris (1970).
- [D.O.C.A] F. FOLTZ, Domination des Catégories, *Cahiers de Top. et Géo. Diff.*, Vol. XI,2, Dunod, Paris (1970).
- [E.C.Q.T] A. BURRONI, Esquisses des Catégories à limites et des Quasi-Topologies, *Esquisses Mathématiques* 5, Paris (1970).
- [E.T.S.A] C. EHRESMANN, Esquisses et Types de Structures Algébriques, *Bul. Insti. Polit., Iași*, XIV (1968).
- [F.M.C.E] C. LAIR, Fermeture Monoïdale de la Catégorie des Esquisses, (à paraître).
- [F.O.S.A] C. LAIR, Foncteurs d'Omission de Structures Algébriques, *Cahiers Top. et Géo. Diff.*, Vol. XII,2, Dunod, Paris (1971).
- [I.M.S.A] C. LAIR, Idées et Maquettes de Structures Algébriques, *Cahiers Top. Géo. Diff.*, Vol. XII,1, Dunod, Paris (1971).
- [I.T.S.C] C. EHRESMANN, Introduction to the Theory of Structured Categories, *Technical Report* 10, Univ. Kansas, Lawrence, 1966.
- [K.E.C.T] E.J. DUBUC, Kan Extensions in Enriched Categories, *Lecture Notes in Math.* 145, Springer (1970).
- [L.P.L.G] F. ULMER, Locally α -Presentable and Locally α -Generated Categories, *Lecture Notes in Math.* 195, Springer (1971).
- [O.C.C.F] B. DAY, On Closed Categories of Functors, *Lecture Notes in Math.* 137, Springer (1970).
- [R.E.D.O] F. FOLTZ, Réalisations dominées, *C.R.A.S.* t. 271, Paris (1970), p. 221.

- [S.C.F.D.] F. FOLTZ, Sur la Catégorie des Foncteurs Dominés, *Cahiers Top. Géo. Diff.*, Vol. XI,2, Dunod, Paris (1970).
- [S.N.U.H] C. LAIR, Structures n-Uples de Hurewicz, *C.R.A.S.*, t. 273, Paris (1971), p. 700.
- [S.T.A.L] C. EHRESMANN, Sur les Structures Algébriques, *C.R.A.S.* t. 264, Paris 1967.
- [T.C.C.A] E. MANES, A Triple Theoretic Construction of Compact Algebras, *Lecture Notes in Math.* 80, Springer (1969).

SOMMAIRE.

0. Préliminaires.

- 0.1. *Notations générales* 4
- 0.2. *Théorie des Esquisses* 5
- 0.3. *Hypothèses générales* 7

I. Fermeture Standard.

- I.1. *Etude de la catégorie des foncteurs H^S* 7
- I.2. *Etude de la catégorie des structures algébriques* 12
- I.3. *Fermeture standard de V* 14

II. Costructures standards et canoniques.

- II.1. *Costructures standard* 16
- II.2. *Costructures canoniques* 18
- II.3. *Obstruction à la fermeture monoïdale des catégories* . . . 20

III. Exemples.

- III.1. *Exemples de costructures doubles* 21
- III.2. *Exemples de foncteurs de comparaison* 28

Appendice: H-adjonction pour le foncteur inclusion $V \rightarrow H^S$

Bibliographie