CAHIERS DE
TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
CATÉGORIQUES

RENÉ GUITART

Foncteurs sous-objets et relations continues

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 13, nº 1 (1972), p. 57-100

<http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1972__13_1_57_0>

CAHIERS DE TOPOLOGIE *Vol. XIII-1*
ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE

FONCTEURS SOUS-OBJETS ET RELATIONS CONTINUES

par René GUITART

Cette étude est double, c'est-à-dire consiste en l'examen de deux sujets entrelacés, l'un servant de thème, l'autre de modèle ou d'exemple. Le lecteur plus particulièrement intéressé par l'une de ces deux questions aura évidemment intérêt à se reporter aux paragraphes la concernant, les références aux autres parties du texte étant toujours explicites.

Premièrement, donc, le but de cet article est de préciser rapidement ce que l'on peut entendre par l'étude d'une catégorie $H^{\cdot}$ «suivant» ses sous-structures, sans sortir de la catégorie $H^{\cdot}$ elle-même (et par suite sans utiliser explicitement la théorie des catégories fibrées ou plus particulièrement la structuration de certains objets ou ensembles de morphismes en ensembles ordonnés par exemple). Ceci est précisé au paragraphe 0, puis repris au paragraphe III.4. Intuitivement, (§ 0.1.B et C) on désire trouver une (ou plusieurs) fonctions S_0 de $H^{\cdot}_0$ dans $H^{\cdot}_0$ telle que, pour tout objet $e \in H^{\cdot}_0$, l'objet $S_0(e)$ soit «l'objet des sous-objets de e», c'est-à-dire que S_0 soit un analogue dans $H^{\cdot}_0$ de la fonction partie $\mathfrak{P}$ dans un univers $\mathfrak{M}_0$. On peut alors rechercher si S_0 ou l'un de ses itérés S_0^n se prolonge en un foncteur S, et s'il existe un triple $S=(S, i, \mu)$ tel que l'on puisse dire que i_e représente les sous-objets atomiques de e pour tout $e \in H^{\cdot}_0$, et que μ_e représente l'agrégation des sous-objets.

On peut aussi aborder la question dans l'autre sens, c'est-à-dire (cf. § III.4) partant de la donnée des i_e, $e \in H^{\cdot}_0$, essayer de reconstruire les foncteurs S: Grâce à l'étude du paragraphe I où l'on a dégagé les phénomènes essentiels en ce sens dans une catégorie d'applications $\mathfrak{M}^{\circ}$ (à savoir les triples $\overline{\mathfrak{P}}, \overline{\Pi}$, le morphisme ψ de $\overline{\mathfrak{P}}$ dans $\overline{\Pi}$ et les adjonctions environnantes), une telle construction est réalisée aux paragraphes IV.1'.2 et 3, sous des hypothèses minimums. Remarquons à ce sujet qu'il y aurait lieu de comparer la construction de la fonction partie $\mathcal{P}$ que nous donnons avec celle faite par Lawvere et Tierney dans les topos (dont j'ai eu connaissance récemment) qui utilise explicitement une structure d'ordre sur

2^e (ordre que nous n'avons pas sous nos hypothèses plus faibles) et consiste en la généralisation de la remarque (faite ici au paragraphe I, et sur laquelle était centré le chapitre I de [12]) que l'application $\mathfrak{P}(f)$ est l'application ordonnée coadjointe (*) à $(\star \circ \mathfrak{P})(f)$, notre construction, elle, ayant pour clef la fabrication du morphisme ψ_e généralisant l'application ψ_E de $\mathfrak{P}(E)$ dans $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(E))$ qui à un A associe $\{A'/A \cap A' \neq \emptyset\}$.

Dans le cas où l'on dispose ainsi d'un triple S l'étude se poursuit donc logiquement par la détermination des algèbres de ce triple, que l'on peut nommer algèbres de sous-structures, ou par l'étude des relations de S. Notons que ceci suggère un troisième point de vue : Partant d'une catégorie de relations de $H^{\cdot}$ (cf. § 0.2), on pourra essayer de déterminer un triple S dont cette catégorie soit la catégorie de Kleisli. C'est ce procédé qui est adopté aux paragraphes I ou II.

En second lieu, suivant le plan ci-dessus dégagé, on conduit l'étude dans quelques cas particuliers qui ultérieurement pourraient servir aussi bien de modèles que d'outils : on examine successivement le cas d'une catégorie pleine d'applications $\mathfrak{M}^o$, de la duale $\mathfrak{M}^{o\,*}$, de la catégorie $\mathcal{T}^o$ des applications continues au-dessus de $\mathfrak{M}^o$, et quelques autres exemples (cf. § III).

Le cas de $\mathcal{T}^o$ est celui qui nous préoccupe le plus, et est prétexte à développer les différentes théories de relations continues (dont certaines rejoignent les définitions de [4] ou [5]). Après les définitions et propriétés d'adjonctions ou d'existence de limites auxquelles on peut s'attendre on ramène toute étude ultérieure à l'examen des triples dont les relations continues sont les relations. On termine le paragraphe II en montrant que la catégorie des relations s.c.i. entre fermetures est cotensoriellement dominée par sa catégorie duale, ce qui donne une nouvelle interprétation du produit de deux topologies.

Enfin, au paragraphe IV.4, en introduisant la notion d'idempotent

(*) Une étude de ce point de vue est réalisée par C.M. de BARROS dans son texte à paraître « Sur certaines catégories de couples d'applications croissantes ».

dans un triple, on montre comment définir une catégorie $\mathcal{T}(C^{\cdot})^{\cdot}$ analogue à $\mathcal{T}^{o} = \mathcal{T}(\mathfrak{M}^{o})^{o}$ pour une catégorie du type envisagé au paragraphe IV, de sorte que la voie est ouverte à une réécriture du paragraphe II en partant d'une telle catégorie au lieu d'une catégorie d'applications. Néanmoins, il semble qu'un tel développement ne puisse être réalisé sans introduire des données supplémentaires, à savoir un ordre sur les objets de sous-objets. (Voir cependant la deuxième partie à paraître de cet article.)

La plupart des résultats figurant ici ont été annoncés dans une suite de notes aux Compte-rendus de l'Académie des Sciences ([13] a) à e)). Néanmoins les questions d'homotopie de [13] c) et d) ne sont pas reprises ici.

NOTATIONS.

Pour l'algèbre des catégories on emploie les notations de C. Ehresmann [1]. En particulier une catégorie est notée $H^{\cdot}$, où «.» est la loi de composition partielle sur l'ensemble H définissant la structure de catégorie considérée; la classe des unités de $H^{\cdot}$ est notée $H_0^{\cdot}$, α et β désignent les applications source et but de $H^{\cdot}$. Un foncteur de $H^{\cdot}$ vers $K^{\cdot}$ est écrit $p = (K^{\cdot}, \underline{p}, H^{\cdot})$, en notant $\underline{p}$ l'application de H dans K définissant le foncteur p. Si $H^{\cdot}$ est une catégorie, on note $H^{\cdot *}$ la catégorie opposée.

Une construction standard, ou triple dans une catégorie $H^{\cdot}$ est notée $S = (S, \varepsilon, \mu)$ où S désigne l'endofoncteur de $H^{\cdot}$ qui intervient, ε et μ les transformations naturelles «unité» et «multiplication».

Dans tout le texte $\mathfrak{M}_0$ désignera un univers fixé, $\mathfrak{M}^{o}$ la catégorie des applications entre éléments de $\mathfrak{M}_0$, et $\mathcal{F}^{o}$ la catégorie des foncteurs $p = (K^{\cdot}, \underline{p}, H^{\cdot})$ tels que H et K soient éléments de $\mathfrak{M}_0$. Si nécessaire, on note $\hat{\mathfrak{M}}_0$ un univers tel que $\mathfrak{M}_0 \in \hat{\mathfrak{M}}_0$ et que $\mathfrak{M}_0 \subset \hat{\mathfrak{M}}_0$, et $\hat{\mathfrak{M}}^{o}$ ou $\hat{\mathcal{F}}^{o}$, les catégories d'applications ou de foncteurs correspondantes.

Enfin, la catégorie des applications continues entre topologies (X, T) où $X \in \mathfrak{M}_0$ est désignée par $\mathcal{T}^{o}$; la catégorie des néofoncteurs entre graphes multiplicatifs au-dessus de $\mathfrak{M}_0$ est notée $\mathfrak{N}'^{o}$.

SOMMAIRE

0. UN PROBLEME.

0.0. Les notions de M-Sous-objet et de (p, K')-Sous-structure.

Soit $H^\cdot$ une catégorie, M une partie de H, $p = (K^\cdot, \underline{p}, H^\cdot)$ un foncteur, et K' un ensemble de monomorphismes de $K^\cdot$.

- Si $s \in H_0^\cdot$ on appelle *M-sous-objet* de s la classe d'équivalence d'un monomorphisme $m \in M$ de but s pour la congruence σ définie par:

  $m \sim m' \bmod \sigma$ si et seulement s'il existe un $\gamma \in H$ inversible tel que $m = m' . \gamma$.

- Un $f \in H$ est une *p-injection* si pour tout $h \in H$ et $k \in K$ tels que $\beta(h) = \beta(f)$ et $\underline{p}(h) = \underline{p}(f).k$, il existe un unique $\bar{k} \in H$ tel que $h = f.\bar{k}$ et que $\underline{p}(\bar{k}) = k$.

Si de plus $\underline{p}(f) \in K'$, on dit que f est une (p, K')-injection.

- Pour tout $s \in H_0^\cdot$ on appelle *(p, K')-sous-structure* de s toute unité $e \in H_0^\cdot$ source d'une (p, K')-injection de but s. (Voir [1])

Les deux notions de M-sous-objet et de (p, K')-sous-structure ne sont pas équivalentes; néanmoins, dans cet article, toute idée exprimée à l'aide de l'une d'elles a trivialement son analogue pour l'autre. Aussi, pour éviter les redites et assouplir la présentation, on a utilisé tour à tour ces deux notions. De plus, lorsque nos considérations sont directement valables sans modifications vis-à-vis de ces deux notions, on a employé le terme de *sous-structure*, sans autre précision.

0.1. Les fonctions de sous-structuration.

A. Soit $p = (K^\cdot, \underline{p}, H^\cdot)$ un foncteur, K' un ensemble de monomorphismes de $K^\cdot$. Pour tout $s \in H_0^\cdot$ on note $\mathcal{S}_{o,(p,K')}(s)$ l'ensemble des (p, K')-sous-structures de s. Si K' est précisé par le contexte, $\mathcal{S}_{o,(p,K')}$ est abrégé en $\mathcal{S}_{o,p}$.

Si $q = (\mathfrak{M}^o, \underline{q}, L^\cdot)$ est un foncteur, on peut envisager les propriétés:

P1. $\mathcal{S}_{o,(p,K')}$ se factorise par q_o en un $S_{q_o,(p,K')}$.

P2. $S_{q_o,(p,K')}$ se prolonge en un foncteur $S_{q,(p,K')}$.

P3. $S_{q_o,(p,K')}$ se prolonge en un foncteur contravariant $S'_{q,(p,K')}$.

Par exemple, soit $\not{c}$ le foncteur de $\Sigma(\mathfrak{M}^{\circ})^{\circ *}$ vers $\mathfrak{M}^{\circ}$ associant à une fermeture (E, μ) l'ensemble $\not{c}(\mu)$ des parties de E fermées pour μ (voir le §II.1). Alors, pour toute catégorie d'homomorphismes entre structures algébriques usuelles (groupes, anneaux, modules, corps, monoïdes, catégories), soit p son foncteur d'oubli évident vers $\mathfrak{M}^{\circ}$. Il est clair que $\mathcal{S}_{o,p}$ vérifie P1 et P2 pour $q = \not{c}$, car cela signifie, dans le cas des groupes par exemple, que l'ensemble des sous-groupes d'un groupe est une famille stable par intersections quelconques, et que l'image réciproque d'un sous-groupe par un morphisme de groupes f est un sous-groupe de la source de f.

B. Dans le cas où $K^{\cdot} = \mathfrak{M}^{\circ}$ et où $q = p$, on peut considérer les propriétés suivantes ($\mathfrak{M}'$ désignant un ensemble de monomorphismes de $\mathfrak{M}^{\circ}$):

P'1. $\mathcal{S}_{o,(p,\mathfrak{M}')}$ se factorise à travers p_o par un $S_{p_o,(p,\mathfrak{M}')}$.

P'2. L'une des applications $S^n_{p_o,(p,\mathfrak{M}')}$, $n \in \mathbf{N}$, se prolonge en un foncteur $S^{n'}_{(p,\mathfrak{M}')}$.

P'3. L'une des applications $S^n_{p_o,(p,\mathfrak{M}')}$, $n \in \mathbf{N}$, se prolonge en un foncteur contravariant $S^{n'}_{(p,\mathfrak{M}')}$.

P'4. Il existe un monomorphisme naturel de $H^{\cdot}$ vers $S^n_{(p,\mathfrak{M}')}$.

P'5. $S^n_{(p,\mathfrak{M}')}$ est l'endofoncteur d'un triple dans $H^{\cdot}$. On dira alors de ce triple que c'est un *triple de sous-structuration de degré* n.

C. Dans le cas où p est de la forme $Hom_{H^{\cdot}}(-, e)$ avec $e \in H^{\cdot}_o$, il peut être utile de savoir si :

P"1. Il existe une fonction S_o de $H^{\cdot}_o$ dans $H^{\cdot}_o$ telle que pour tout $e' \in H^{\cdot}_o$ il y ait une bijection entre $\underline{p}(S_o(e'))$ et l'ensemble des $(p, \mathfrak{M}')$-injections de but e' (resp. l'ensemble des sous-objets de e').
Dans ce cas, si toute $(p, \mathfrak{M}')$-sous-structure est déterminée par une unique $(p, \mathfrak{M}')$-injection, P'1 est vérifiée avec $S_{p_o,(p,\mathfrak{M}')} = S_o$.

D. Enfin, on peut s'interroger sur des points plus précis, par exemple sur le fait que chaque objet est bien défini par l'objet $S_o(e)$ de ses sous-objets, c'est-à-dire si :

P'''1. $S_o(e) = S_o(e')$ entraîne $e = e'$, pour tout $(e, e') \in H^{\cdot}_o \times H^{\cdot}_o$.

P'''2. $S_o(e)$ isomorphe à $S_o(e')$ entraîne e isomorphe à e', pour tout $(e, e') \in H^{\cdot}_o \times H^{\cdot}_o$.

REMARQUES.

1. Que ce soit dans les cas A, B ou C, l'existence d'un $S_{q_0,(p,K')}$ n'implique pas son unicité.

2. *Il existe des exemples de chacune des situations envisagées ci-dessus.* (Voir la suite de ce texte).

Les différentes fonctions $S_{q_0,(p,K')}$, $S_{q,(p,K')}$, $S^n_{(p,\mathfrak{M}')}$, $S^{n'}_{(p,\mathfrak{M}')}$ sont nommées *fonctions de sous-structuration de la catégorie* $H^{\cdot}$; leur recherche et leur comparaison est un travail préparatoire, entre autres, à l'étude du point suivant.

0.2. Les relations (de sous-structures).

Les différentes constructions qui, à une catégorie pleine d'applications $\mathfrak{M}^{\circ}$, associent la catégorie $\mathfrak{M}^{r\circ}$ des relations entre ensembles suggèrent chacune une construction distincte lorsque l'on remplace $\mathfrak{M}^{\circ}$ par une catégorie quelconque $H^{\cdot}$.

0.2.1. Soit $H^{\cdot}$ une catégorie à $\{1,2\}$-produits et produits fibrés, v une application $\{1,2\}$-produits fibrés naturalisés associant à tout couple (g,f') d'éléments de H tel que $\beta(g)=\beta(f')$ un quatuor cartésien

$$v(g,f')=(g,v_1,f',v_2).$$

Soit $S(H^{\cdot})$ l'ensemble des couples (f,g) d'éléments de H tels que $\alpha(f)=\alpha(g)$, et soit r l'équivalence sur $S(H^{\cdot})$ définie par:

$(f,g)\sim(f_1,g_1) \bmod r$ si et seulement si il existe un inversible $\gamma\in H$ tel que $f=f_1.\gamma$ et $g=g_1.\gamma$.

On note $Sp(H^{\cdot})$ le quotient de $S(H^{\cdot})$ par r; un élément de $Sp(H^{\cdot})$ est appelé *angle*. $Sp(H^{\cdot})$ devient une catégorie pour la composition:

$((f,g) \bmod r)\vee((f',g') \bmod r)=(f.v_1,g'.v_2) \bmod r$, si et seulement si $\beta(g)=\beta(f')$.

On appelle *angle-relation* un élément de $Sp(H^{\cdot})$ de la forme (f,g) $\bmod r$, où $[f,g]$ est un monomorphisme.

Dans le cas où l'ensemble $Sp'(H^{\cdot})$ des angle-relations définit une sous-catégorie de $Sp(H^{\cdot})^{\vee}$, cette sous-catégorie $Sp'(H^{\cdot})^{\vee}$ est appelée *catégorie des angle-relations de* $H^{\cdot}$.

0.2.2. Si $S_{(p,\mathfrak{M}')}$ est un triple de sous-structuration de $H^{\cdot}$, les éléments $(S_{o,(p,\mathfrak{M}')}(e'), f, e)$ de la catégorie de Kleisli $Kl(S_{(p,\mathfrak{M}')})^{\cdot}$ de $S_{(p,\mathfrak{M}')}$ sont appelés les $S_{(p,\mathfrak{M}')}$*-relations.*

0.2.3. Si S_o vérifie P'1 et si $I^{\cdot}$ est une sous-catégorie de $H^{\cdot}$ ayant pour classe d'objets les $S_o(e)$ avec $e \in H^{\cdot}_o$, les éléments de I sont appelés (S_o, I)*-relations.*

0.2.4. Enfin, mais ceci est plus éloigné de notre point de vue, on pourra définir les «catégories de relations» comme certaines *catégories à involution* particulières.

La question est alors d'étudier ces diverses catégories et principalement de les comparer entre elles. En particulier, il importe de déterminer les $S_{(p,\mathfrak{M}')}$ tels que $Kl(S_{(p,\mathfrak{M}')})^{\cdot}$ soit équivalente à $Sp'(H^{\cdot})^{\mathsf{V}}$.

I. CAS D'UNE CATEGORIE D'APPLICATIONS.

On met en évidence certaines adjonctions entre foncteurs, déduites des foncteurs *partie* et *image réciproque* dans une catégorie pleine d'applications. Ces faits sont assez caractéristiques des ensembles de parties pour que l'on désire les retrouver par la suite pour les bons foncteurs de sous-structures dans une catégorie quelconque. On ne donne pas de démonstrations, celles-ci étant naturelles à partir des énoncés des théorèmes, et de plus figurant, sauf celles concernant le paragraphe I.3, dans le premier chapitre de [12].

I.1. Notations et adjonctions fondamentales.

Soit $\mathfrak{M}_0$ et $\hat{\mathfrak{M}}_0$ deux univers tels que $\mathfrak{M}_0 \in \hat{\mathfrak{M}}_0$ et $\mathfrak{M}_0 \subset \hat{\mathfrak{M}}_0$, et $\mathfrak{M}^{\circ}$ (resp. $\hat{\mathfrak{M}}^{\circ}$) la catégorie pleine d'applications au-dessus de $\mathfrak{M}_0$ (resp. $\hat{\mathfrak{M}}_0$). Le foncteur *partie* de $\mathfrak{M}^{\circ}$ dans $\mathfrak{M}^{\circ}$ sera désigné par $\mathfrak{P}$. On note $\mathfrak{P}(\mathfrak{M}^{\circ})^{\circ}$ ou simplement $\mathfrak{P}^{\circ}$ la sous-catégorie de $\mathfrak{M}^{\circ}$ formée des applications extensions aux parties, et $\mathfrak{P}^{\star}(\mathfrak{M}^{\circ})^{\circ}$ ou $\mathfrak{P}^{\star\circ}$ celle formée des applications images réciproques.

On introduit également la sous-catégorie $\mathfrak{I}_a(\mathfrak{M}^{\circ})^{\circ}$ (ou $\mathfrak{I}_a^{\circ}$) de

$\mathfrak{M}^o$ constituée des triplets $(\mathfrak{P}(F), \underline{f}, \mathfrak{P}(E))$, où E et F sont des éléments de $\mathfrak{M}_o$, et $\underline{f}$ le graphe d'une application f de $\mathfrak{P}(E)$ dans $\mathfrak{P}(F)$, croissante et admettant une application croissante $\star(f)$ adjointe, c'est-à-dire vérifiant :

$$\forall\ F' \subset F,\ (f \circ \star(f))(F') \subset F'$$

et

$$\forall\ E' \subset E,\ (\star(f) \circ f)(E') \supset E'.$$

Quand $\star(f)$ existe, elle est unique, de sorte que $\star$ est bien définie sur $\mathcal{J}_a$. On vérifie aisément que les éléments de $\mathcal{J}_a$ sont exactement les applications entre ensembles de parties compatibles avec les réunions, si bien que $\mathcal{J}_a^{\ o}$ est isomorphe, dans la catégorie $\hat{\mathcal{F}}^o$ des foncteurs au-dessus de $\hat{\mathfrak{M}}_o$, à la catégorie $\mathfrak{M}^{r\,o}$ des relations de $\mathfrak{M}^o$, un isomorphisme de source $\mathfrak{M}^{r\,o}$ étant par exemple le foncteur J défini par :

$$\forall\ E' \subset E,\quad J((F, \underline{R}, E))(E') = \{ y \in F / (\exists x \in E')\ ((y, x) \in \underline{R}) \}.$$

L'image $\mathcal{J}_a^{\ \star o}$ de $\mathcal{J}_a^{\ o}$ par $\star$ dans $\hat{\mathfrak{M}}^o$ est la sous-catégorie de $\mathfrak{M}^o$ formée des applications entre ensembles de parties compatibles avec les intersections. On remarquera que, si $\mathfrak{P}(f)$ est l'extension aux parties d'une application f, elle admet pour adjointe l'application image réciproque de f, $(\star \circ \mathfrak{P})(f)$, et que $\mathfrak{P}^{\star o} = \mathcal{J}_a^{\ o} \cap \mathcal{J}_a^{\ \star o}$. On note $\mathbf{P}^o$ la sous-catégorie pleine de $\mathfrak{M}^o$ engendrée par $\mathfrak{P}^o_o$.

On définit un foncteur contravariant d de $\mathcal{J}_a^{\ o}$ vers elle-même en posant, pour tout $\Phi = (\mathfrak{P}(F), \underline{f}, \mathfrak{P}(E)) \in \mathcal{J}_a$:

$d(\Phi) = (\mathfrak{P}(E), d(\underline{f}), \mathfrak{P}(F))$, avec, $\forall\, y \in F,\ d(\underline{f})(\{y\}) = \{ x \in E / \ y \in f(\{x\}) \}$.

Ainsi, par l'anti-isomorphisme d, $\mathcal{J}_a^{\ o}$ est auto-duale. On pose :

$$\wedge = \star \circ d \text{ et } \vee = \wedge^{-1}.$$

Pour une application quelconque f de $\mathfrak{P}(E)$ dans $\mathfrak{P}(F)$, on définit les applications $K(f)$ et $K'(f)$ de $\mathfrak{P}(E)$ dans $\mathfrak{P}(F)$ par :

$$\forall\ E' \subset E \qquad K(f)(E') = F \setminus \bigcap_{x \in E''} f(E \setminus \{x\}),$$

$$\forall\ E' \subset E \qquad K'(f)(E') = F \setminus f(E \setminus E').$$

K ou K' restreint à $\mathcal{J}_a^{\star}$ est identique à $\bigvee$, et K' restreint à $\mathcal{J}_a$ est identique à $\bigwedge$.

La catégorie $\mathcal{J}_a^{\circ}$ est à I-produits et à I-sommes pour tout $I \in \mathfrak{M}_0$: en effet, $\mathfrak{P}(\sum_{i\in I} E_i)$ est un produit de $(\mathfrak{P}(E_i))_{i\in I}$ naturalisé par les $(\star \circ \mathfrak{P})(s_i)$, où s_i est l'injection canonique de E_i dans la somme $\sum_{i \in I} E_i$ dans $\mathfrak{M}^{\circ}$; c'est aussi une somme de $(\mathfrak{P}(E_i))_{i\in I}$, naturalisée par les $\mathfrak{P}(s_i)$. (Voir aussi [2]). Par contre, on peut donner des exemples (cf. [12]) montrant que cette catégorie n'est ni à noyaux, ni à conoyaux, ni à images, ni à coimages.

REMARQUE. On sait que, si $C^{\cdot}$ est une catégorie, le triplet $(C^{\cdot} \times C^{\cdot *}, C, K_{C^{\cdot}})$ définit (cf. [10]) une espèce de structures $\eta(C^{\cdot})$ pour la composition $K_{C^{\cdot}}$ donnée par :

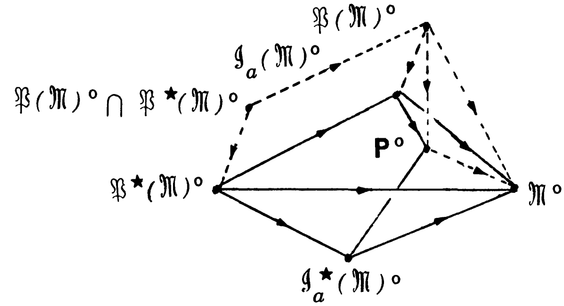
$K_{C^{\cdot}}(((f,g),h)) = f.h.g$, si et seulement si $\alpha(f)=\beta(h)$ et $\beta(g)=\alpha(h)$.

On voit alors que $\mathfrak{P}^{\star\circ} \times \mathfrak{P}^{\circ *}$ est une sous-catégorie de $\mathcal{J}_a^{\circ} \times \mathcal{J}_a^{\circ *}$ définissant une sous-espèce de structures de $\eta(\mathcal{J}_a^{\circ})$ qui est $(\mathfrak{M}^{\circ}, \iota, \mathfrak{P}^{\star\circ})$-dominée; cette espèce de structures est isomorphe à $(\mathfrak{M}^{\circ *} \times \mathfrak{M}^{\circ *}, \mathfrak{M}^{r}, k)$, où k est définie par

$$k(((f,g),R)) = J^{-1}((\star \circ \mathfrak{P})(f) \circ J(R) \circ \mathfrak{P}(g))$$

$$[\text{ resp. } k(((f,g),R)) = ((\star \circ \mathfrak{P})(f \times g))(R) \;].$$

THEOREME I.1. *a) Dans le diagramme commutatif ci-dessous, où les flèches représentent des foncteurs injections canoniques, les foncteurs admettant un adjoint sont en traits pleins. Le seul foncteur ayant un coadjoint est* $(\mathcal{J}_a^{\circ}, \iota, \mathfrak{P}^{\circ})$, *tous les autres sauf* $(\mathfrak{M}^{\circ}, \iota, \mathbf{P}^{\circ})$ *n'admettant même pas de semi-coadjoint. Ce dernier est aussi le seul parmi les foncteurs représentés à admettre un semi-adjoint sans admettre d'adjoint.*



b) Les catégories $\mathcal{I}_a^{o}$ et $\mathcal{I}_a^{\star o}$ sont auto-duales et isomorphes, un isomorphisme entre ces deux catégories étant établi par les foncteurs $\wedge$ *et* $\vee$, *foncteurs qui rendent, par ailleurs, commutatif le diagramme suivant*

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{I}_a(\mathfrak{M})^{o} \arrow[dd, bend left, "\wedge"] & \\
\mathfrak{P}^{\star}(\mathfrak{M})^{o} \arrow[ur, "i"] \arrow[dr, "i"'] & & \mathfrak{M}^{o} \arrow[ul, "\mathfrak{P}"'] \arrow[dl, "\star\circ\star\circ\mathfrak{P}"] \\
& \mathcal{I}_a^{\star}(\mathfrak{M})^{o} \arrow[uu, bend left, "\vee"] &
\end{tikzcd}$$

c) On peut choisir les adjoints dont l'existence est affirmée en a) de sorte à avoir le diagramme commutatif de foncteurs adjoints:

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{I}_a(\mathfrak{M})^{o} \arrow[dl, "\star\circ\mathfrak{P}\circ d"'] & & \\
\mathfrak{P}^{\star}(\mathfrak{M})^{o} & & \mathfrak{M}^{o} \arrow[ul, "\mathfrak{P}"'] \arrow[ll, "\star\circ\mathfrak{P}\circ\star\circ\mathfrak{P}"] \arrow[r, "i"'] \arrow[dl, "\star\circ\star\circ\mathfrak{P}"] & \mathfrak{M}^{ro} \arrow[ull, "J"'] \\
& \mathcal{I}_a^{\star}(\mathfrak{M})^{o} \arrow[ul, "\star\circ\mathfrak{P}\circ\star\circ\vee"] & &
\end{tikzcd}$$

On notera qu'évidemment $\mathcal{I}_a^{o}$ (ou $\mathfrak{M}^{ro}$) est isomorphe à la catégorie de Kleisli du triple $\overline{\mathfrak{P}}=(\mathfrak{P},\gamma,U)$ dans $\mathfrak{M}^{o}$, où $\mathfrak{P}$ est donc le foncteur partie, γ la transformation naturelle de $\mathfrak{M}^{o}$ vers $\mathfrak{P}$ telle que γ_E soit l'application de E dans $\mathfrak{P}(E)$ associant $\{x\}$ à $x \in E$, pour tout $E \in \mathfrak{M}^{o}$, et U la transformation naturelle de $\mathfrak{P}\circ\mathfrak{P}$ vers $\mathfrak{P}$ telle que U_E désigne l'application «réunion» de $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(E))$ sur $\mathfrak{P}(E)$, pour chaque E.

On remarquera aussi, dans ce théorème I.1, l'adjoint $\star\circ\mathfrak{P}\circ\star\circ\mathfrak{P} = {}^{\backprime}\Pi$ de l'injection canonique de $\mathfrak{P}^{\star o}$ dans $\mathfrak{M}^{o}$ qui permet de définir dans $\mathfrak{M}^{o}$ un triple

$$\overline{\Pi} = (\Pi, t, (\star_0 \mathfrak{P})(t_{\mathfrak{P}})), \text{ avec } \Pi = \iota . {}^{\backprime}\Pi,$$

en prenant pour t la transformation naturelle définie par les applications t_E de E dans $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(E))$ associant à chaque $x \in E$ l'ensemble $t_E(x)$ des $X \subset E$ tels que $x \in X$.

En fait, si l'on note ψ_E l'application de $\mathfrak{P}(E)$ dans $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(E))$ associant à un A l'ensemble des A' tels que A' contienne A, on peut montrer que $(\Pi, \psi, \mathfrak{P})$ est une transformation naturelle et même que ψ définit un morphisme du triple $\overline{\mathfrak{P}}$ dans le triple $\overline{\Pi}$.

Aux paragraphes II et III suivants, on essaiera sur des exemples de relever les triples $\overline{\mathfrak{P}}$ et $\overline{\Pi}$; au paragraphe IV, on retrouvera une fonction $\mathcal{P}$, jouant le rôle de $\mathfrak{P}$, et un triple analogue à $\overline{\Pi}$, encore noté $\overline{\Pi}$ (ou $\overline{\overline{\Pi}}$).

I.2. Rapport avec les espaces et anneaux de Boole.

Soit 2 l'ensemble à deux éléments $\{0, 1\}$. Notons $\bar{2}$ l'espace topologique discret sur 2 (resp. le seul anneau booléien sur 2 ayant 1 pour unité). Pour tout anneau B, on désignera par $X(B)$ le sous-espace topologique du produit $\bar{2}^B$ dont les éléments sont les morphismes unitaires d'anneaux de B dans $\bar{2}$. Pour un espace topologique X, on note $B(X)$ le sous-anneau de l'anneau produit $\bar{2}^X$ constitué des applications continues de X dans $\bar{2}$.

Si nous notons $\mathfrak{A}(\mathfrak{M}^\circ)^\circ$, ou $\mathfrak{A}^\circ$, la catégorie des anneaux unitaires et morphismes unitaires d'anneaux au-dessus de $\mathfrak{M}^\circ$, et $\mathfrak{T}(\mathfrak{M}^\circ)^\circ$, ou $\mathfrak{T}^\circ$, la catégorie des espaces topologiques et applications continues au-dessus de $\mathfrak{M}^\circ$, on définit deux foncteurs X et B par:

$$\forall\, f = (B', \underline{f}, B) \in \mathfrak{A},\quad X(f) = (X(B), X(\underline{f}), X(B')) \in \mathfrak{T}, \text{ avec}$$
$$X(\underline{f})(u) = u \circ f,$$

$$\forall\, h = (X', \underline{h}, X) \in \mathfrak{T},\ B(h) = (B(X), B(\underline{h}), B(X')) \in \mathfrak{A}, \text{ avec}$$
$$B(\underline{h})(v) = v \circ h.$$

Désignons par $\mathfrak{A}\mathfrak{B}^\circ$ la sous-catégorie pleine de $\mathfrak{A}^\circ$ ayant pour unités les anneaux de Boole, et par $\mathfrak{T}\mathfrak{B}^\circ$ la sous-catégorie pleine de $\mathfrak{T}^\circ$ définie par les espaces topologiques booléiens (i.e. compacts et totalement discontinus).

Si nous notons $`X$ la restriction de $X$ à $\mathfrak{A}\mathfrak{B}^{o}$ et $`B$ la restriction de B à $\mathfrak{T}\mathfrak{B}^{o}$, on établit, en utilisant l'isomorphisme de Stone sur un anneau de parties (lequel signifie que $\bar{2}$ est un générateur de $\mathfrak{A}\mathfrak{B}^{o}$) que les foncteurs $`X^*$ et $`B$ définissent une équivalence entre les catégories $\mathfrak{A}\mathfrak{B}^{o*}$ et $\mathfrak{T}\mathfrak{B}^{o}$.

Désignons enfin par $\mathfrak{T}\mathcal{C}^{o}$ la catégorie des applications continues entre espaces compacts, et par $\mathfrak{T}\mathfrak{D}^{o}$ celle des applications continues entre topologies totalement discontinues. On sait (Théorème de Stone-Čech, aisément démontrable à l'aide du théorème d'existence de structures libres) que $(\mathfrak{T}^{o}, \iota, \mathfrak{T}\mathcal{C}^{o})$ admet un adjoint.

PROPOSITION. *Les foncteurs injections canoniques de* $\mathfrak{A}\mathfrak{B}^{o}$ *dans* $\mathfrak{A}^{o}$, *de* $\mathfrak{T}\mathcal{C}^{o}$ *dans* $\mathfrak{T}^{o}$, *de* $\mathfrak{T}\mathfrak{D}^{o}$ *dans* $\mathfrak{T}^{o}$, *de* $\mathfrak{T}\mathfrak{B}^{o}$ *dans* $\mathfrak{T}^{o}$, *de* $\mathfrak{T}\mathfrak{B}^{o}$ *dans* $\mathfrak{T}\mathcal{C}^{o}$ *et de* $\mathfrak{T}\mathfrak{B}^{o}$ *dans* $\mathfrak{T}\mathfrak{D}^{o}$ *ont des adjoints.*

L'injection canonique de $\mathfrak{T}\mathfrak{B}^{o}$ *dans* $\mathfrak{T}^{o}$ *n'a pas de coadjoint.*

Enfin, $(\mathfrak{T}\mathfrak{B}^{o}, `X^* \circ \iota, \mathfrak{A}\mathfrak{B}^{o*})$ *définit une équivalence.*

On remarquera que cette proposition permet de construire les sommes dans $\mathfrak{A}\mathfrak{B}^{o}$. La construction de deux adjoints à $(\mathfrak{T}^{o}, \iota, \mathfrak{T}\mathfrak{B}^{o})$ et leur comparaison donne le

COROLLAIRE. *Un espace topologique possède n composantes connexes si et seulement si son compactifié de Stone-Čech possède n composantes connexes.*

Bien sûr, une fois en possession de l'énoncé, corollaire de considérations purement catégoriques, il n'est pas trop difficile de le rétablir directement. De plus, la question soulevée par le corollaire reste ouverte pour les cardinaux infinis.

Si $f = (\mathfrak{P}(F), \underline{f}, \mathfrak{P}(E)) \in \mathfrak{P}^{\star}$, alors f définit un morphisme unitaire entre les anneaux de Boole définis par $\mathfrak{P}(E)$ et $\mathfrak{P}(F)$; on définit ainsi un foncteur j de $\mathfrak{P}^{\star o}$ vers $\mathfrak{A}\mathfrak{B}^{o}$.

Si l'on note $\theta_{\mathfrak{T}\mathfrak{B}^{o}}$ le foncteur d'oubli de $\mathfrak{T}\mathfrak{B}^{o}$ vers $\mathfrak{M}^{o}$, on démontre, en utilisant la proposition précédente :

THEOREME I.2. *Le foncteur* $j = (\mathfrak{A}\mathfrak{B}^{o}, j, \mathfrak{P}^{\star o})$ *admet* $\star \circ \mathfrak{P} \circ \theta^{*}_{\mathcal{T}_{\mathfrak{B}_o}} \circ {}^{\backprime}X$ *pour adjoint.*

REMARQUE : Pour des catégories moins particulières que les catégories $\mathfrak{M}^{o}$ d'applications, il n'y aura plus lieu de considérer les algèbres de Boole: par exemple, dans le cas des topos élémentaires [11], Lawvere et Tierney ont mis en évidence le fait qu'il fallait s'intéresser aux algèbres de Heyting. Peut-être même, dans un cadre moins strict tel celui envisagé au paragraphe IV de cet article, faudrait-il utiliser la notion d'algèbre de Hilbert étudiée par exemple dans [3].

I.3. Structures quotients.

Pour tout $X \in \mathfrak{M}_o$ on désigne par $\mathfrak{E}(X)$ l'ensemble des relations d'équivalence sur X. Pour une application f de X dans Y, on note $\mathfrak{E}(f)$ l'application de $\mathfrak{E}(X)$ dans $\mathfrak{E}(Y)$ qui à $\rho \in \mathfrak{E}(X)$ associe l'équivalence $f\rho$ sur Y engendrée par la relation $\mathfrak{P}(f \times f)(\rho)$, et on note $\mathfrak{E}^{\star}(f)$ l'application de $\mathfrak{E}(Y)$ dans $\mathfrak{E}(X)$ qui à $\rho' \in \mathfrak{E}(Y)$ associe l'équivalence $(\star \circ \mathfrak{P})(f \times f)(\rho')$ sur X. Muni de l'ordre défini par l'inclusion, $\mathfrak{E}(X)$ est évidemment un ensemble ordonné inductif à plus grand élément; pour tout f, l'application $\mathfrak{E}(f)$ est croissante et admet $\mathfrak{E}^{\star}(f)$ pour application ordonnée adjointe. En général (contrairement à $(\star \circ \mathfrak{P})(f))$, $\mathfrak{E}^{\star}(f)$ n'admet pas d'adjointe; c'est néanmoins le cas si f est injective.

Les applications qui à f associent $\mathfrak{E}(f)$ et $\mathfrak{E}^{\star}(f)$ définissent deux foncteurs $\mathfrak{E}$ et $\mathfrak{E}^{\star}$ (ce second contravariant) de $\mathfrak{M}^{o}$ vers $\mathfrak{M}^{o}$. On remarque qu'il n'existe pas de transformation naturelle de $\mathfrak{M}^{o}$ vers $\mathfrak{E}$, hormis la transformation naturelle D telle que, pour tout X et tout $x \in X$, $D_X(x)$ soit égal à Δ_X, de sorte que $\mathfrak{E}$ n'est pas l'endofoncteur d'un triple sur $\mathfrak{M}^{o}$.

Pour tout X on note q_X l'application de $\mathfrak{P}(X)$ dans $\mathfrak{E}(X)$ associant à chaque $A \subset X$ l'équivalence $\Delta_X \cup A \times A$; on a alors des transformations naturelles $(\mathfrak{E}, q, \mathfrak{P})$ et $(\mathfrak{E}^{\star}, q, \star \circ \mathfrak{P})$. Pour tout $X \in \mathfrak{M}_o$, soit τ_X l'application de X dans $\mathfrak{E}(\mathfrak{E}(X))$ définie par:

$(\rho, \rho') \in \tau_X(x)$ si et seulement si: x *modulo* $\rho = x$ *modulo* ρ', pour tout ρ et $\rho' \in \mathfrak{E}(X)$.

τ_X est un monomorphisme si et seulement si X n'est pas un ensemble à deux éléments.

On posera : $\Pi'(f) = \mathfrak{S}^\star(\mathfrak{S}^\star(f))$ pour tout $f \in \mathfrak{M}$. Alors

$$\Pi'(f) \circ \tau_{\alpha(f)} \supset \tau_{\beta(f)} \circ f,$$

avec égalité si et seulement si f est surjective. En fait, la seule transformation naturelle de $\mathfrak{M}^o$ vers Π' est celle associant à chaque ensemble X l'application constante de X sur $\mathfrak{S}(\mathfrak{S}(X))$ envoyant chaque $x \in X$ sur la relation $\mathfrak{S}(X) \times \mathfrak{S}(X)$, de sorte que Π n'est pas non plus l'endofoncteur d'un triple propre dans $\mathfrak{M}^o$. Néanmoins, reste posée la question de savoir si $\mathfrak{S}$ et Π' sont les endofoncteurs d'un système multiplicatif associatif non unitaire sur $\mathfrak{M}^o$ (à ce sujet, le lecteur constatera de lui-même que ce problème se laisse mieux traiter dans la catégorie des applications pointées).

Il est peut-être bon de noter, que jusqu'ici, comme on continuera de le faire dans tout l'article, on a utilisé l'outil simple qu'est la notion de triple ou monade. Cependant, la question ci-dessus sur $\mathfrak{S}$ ou Π', les remarques 2 et 3 du paragraphe II.2 ci-dessous, suggèrent qu'une notion plus générale est peut-être plus naturelle : il s'agit de la notion de *catéade* qui est en quelque sorte aux catégories ce que les monades sont aux monoïdes. D'autres exemples, en géométrie par exemple, militent en faveur de cette notion. A ce sujet, l'auteur prépare actuellement un article traitant plus largement de la description des structures algébriques.

II. LES RELATIONS CONTINUES ENTRE TOPOLOGIES.

L'étude de la « répartition » des sous-structures dans la catégorie $\mathcal{T}^o$ des applications continues entre espaces topologiques est faite ici en dégageant a priori deux définitions de relations continues, l'une utilisant l'involution d de $\mathfrak{M}^{r\,o}$, l'autre l'anti-isomorphisme $\star$ de $\mathcal{G}_a^o$ sur $\mathcal{G}_a^{\star o}$. Ces deux définitions ne sont pas duales. On constate qu'en réalité ces notions peuvent être obtenues comme les relations de certains triples dans $\mathcal{T}^o$ « relevant » le triple $\overline{\mathfrak{P}}$ déjà vu dans $\mathfrak{M}^o$. Ce point de vue permet de définir (§II.2, Remarque 1) ce que doit être une «bonne» notion de relation continue. On termine (§II.3) en montrant le rôle particulier joué par les relations semi-continues inférieurement.

II.1. Les catégories de relations continues entre fermetures.

On appelle *fermeture* sur un ensemble E une application μ de $\mathfrak{P}(E)$ dans $\mathfrak{P}(E)$ croissante, extensive et idempotente. Rappelons qu'un tel μ est complètement déterminé par la donnée d'une famille de parties de E, stable par intersections, ou encore, comme précisé en [12], par la donnée d'une partie de $\mathfrak{P}(E) \times E$, ou d'une application M de E dans $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(E))$: A partir de μ, M est définie comme suit:

$$(\forall x \in E) \quad (M(x) = \{A \subset E / x \in \mu(A)\}).$$

(Cette manière de voir sera reprise au dernier paragraphe de cet article pour définir les topologies tordues ou gauches).

On désignera la donnée d'une fermeture μ sur E par le couple (E, μ) et l'on notera $m(\mu)$ l'ensemble $\mathfrak{P}(E)$.

Etant donnée une catégorie pleine d'applications $\mathfrak{M}^o$, on considère la classe $\overline{\Sigma}(\mathfrak{M}^o)$ formée des triplets (ν, Φ, μ), où μ et ν sont des fermetures sur des éléments de $\mathfrak{M}_o$, où Φ est un élément de $\mathfrak{I}_a(\mathfrak{M}^o)$ de source $m(\mu)$ et de but $m(\nu)$, et où l'on a

$$\mu \circ \star(\Phi) \circ \nu = \star(\Phi) \circ \nu$$

ou bien, ce qui est équivalent,

$$K'(\mu) \circ d(\Phi) \circ K'(\nu) = d(\Phi) \circ K'(\nu).$$

Cette classe, munie de la composition :

$$(\nu', \Phi', \mu') \circ (\nu, \Phi, \mu) = (\nu', \Phi' \circ \Phi, \mu) \text{ si, et seulement si, } \mu' = \nu,$$

forme la catégorie des relations semi-continues inférieurement (s.c.i.) entre fermetures, catégorie que l'on notera $\overline{\Sigma}(\mathfrak{M}^o)^o$ ou seulement $\overline{\Sigma}^o$.

Notons $\overline{\mathfrak{T}}^o$ la sous-catégorie pleine de $\overline{\Sigma}^o$ ayant pour objets les fermetures associées à des topologies, Σ^o (resp. ${}^\star\Sigma^o$) la sous-catégorie de $\overline{\Sigma}^o$ formée des triplets (ν, Φ, μ), où Φ est de la forme $\mathfrak{P}(\phi)$ (resp. de la forme $(\star \circ \mathfrak{P})(\phi)$). Alors $\mathfrak{T}^o = \overline{\mathfrak{T}}^o \cap \Sigma^o$, et $\overline{\mathfrak{T}}^o \cap {}^\star\Sigma^o$ est isomorphe à la catégorie duale de la catégorie $\mathcal{T}'^{\circ}$ des applications ouvertes entre espaces topologiques.

Soit m le foncteur $(\mathcal{J}_a^{\circ}, \underline{m}, \overline{\Sigma}^{\circ})$ défini par:

$$\underline{m}((\nu, \Phi, \mu)) = (m(\nu), \Phi, m(\mu)).$$

Il est aisé de vérifier que m a un adjoint et un coadjoint.

On notera $\underline{\Sigma}(\mathfrak{M}^{\circ})^{\circ}$ ou $\underline{\Sigma}^{\circ}$ la catégorie des relations semi-continues supérieurement (s.c.s.) entre fermetures, sur-jacente à la catégorie $\mathfrak{M}^{\circ}$, c'est-à-dire la classe des triplets (ν, Φ, μ), où μ et ν sont des fermetures, où Φ est un élément de $m(\nu) \circ \mathcal{J}_a \circ m(\mu)$, et où

$$\mu \circ d(\Phi) \circ \nu = d(\Phi) \circ \nu,$$

munie de la composition $\circ$ évidente.

On note ${}_{\star}\Sigma^{\circ}$ la sous-catégorie de $\underline{\Sigma}^{\circ}$ formée des triplets (ν, Φ, μ), où Φ est de la forme $(\star \circ \mathfrak{P})(\phi)$. La catégorie $\underline{\Sigma}^{\circ *}$ est isomorphe à la catégorie RF° des relations fermées entre fermetures, tandis que que $\overline{\Sigma}^{\circ *}$ est isomorphe à RO°, catégorie des relations ouvertes entre fermetures.. On pose enfin

$$RC^{\circ} = \overline{\Sigma}^{\circ} \cap \underline{\Sigma}^{\circ}, \quad RCT^{\circ} = \overline{\mathcal{T}}^{\circ} \cap \underline{\Sigma}^{\circ} \quad \text{et} \quad ROF^{\circ} = RO^{\circ} \cap RF^{\circ}.$$

On vérifie que $(\Sigma^{\circ}, \iota, \mathcal{T}^{\circ})$ a un coadjoint et n'a pas de semi-adjoint: la topologie $\tau(\mu)$ colibre sur une fermeture (E, μ) est la topologie la moins fine sur E ayant pour fermés les fermés de μ.

Le foncteur $(\overline{\Sigma}^{\circ}, \iota, {}^{\star}\Sigma^{\circ})$ a un adjoint et n'a pas de semi-coadjoint, et le foncteur $(\overline{\Sigma}^{\circ}, \iota, \Sigma^{\circ})$ a un coadjoint et n'a pas de semi-adjoint.

Ceci se montre aisément en utilisant les adjonctions sous-jacentes évoquées dans le théorème I.1; joint au fait également facile à vérifier que Σ° est à $\mathcal{F}$-limites inductives et projectives et ${}^{\star}\Sigma^{\circ}$ à $\mathcal{F}$-limites inductives, cela entraîne:

PROPOSITION II.1. *Soit* $((E_i, \mu_i))_{i \in I}$ *une famille d'unités de* $\overline{\Sigma}^{\circ}$ *avec* $I \in \mathfrak{M}_0$.

(a) Cette famille admet $\sum_{i \in I} \mu_i$ *pour somme dans* $\overline{\Sigma}^{\circ}$, *naturalisée par les* $(\sum_{i \in I} \mu_i, \mathfrak{P}(\sigma_i), \mu_i)$, *où* σ_i *est l'injection canonique de* E_i *dans* $\sum_{i \in I} E_i$, *et* $m(\sum_{i \in I} \mu_i) = \mathfrak{P}(\sum_{i \in I} E_i)$, *avec*

$$\forall X \subset \sum_{i\in I} E\ ,\ (\sum_{i\in I}\mu_i)(X) = \bigcup_{i\in I}(\mathfrak{P}(\sigma_i)\circ\mu_i\circ(\star\circ\mathfrak{P})(\sigma_i))(X).$$

(b) Cette famille admet aussi $\sum_{i\in I}\mu_i$ *pour produit dans* $\overline{\Sigma}^{\circ}$, *naturalisé par les* $(\mu_i, (\star\circ\mathfrak{P})(\sigma_i), \sum_{i\in I}\mu_i)$.

Par contre, $\overline{\Sigma}^{\circ}$ n'est ni à noyaux, ni à conoyaux, car $\mathfrak{I}^{\circ}_a$ ne l'est pas (cf. [12]); néanmoins, on a:

PROPOSITION II.2. *Soit* $F = (\overline{\Sigma}^{\circ}, \underline{F}, I^{\cdot})$ *un foncteur, où* $I^{\cdot} \in \mathfrak{F}_0$.

(a) Si $F(I) \subset \Sigma$, *alors* F *admet pour limite projective sa limite dans* Σ°.

(b) Si $F(I) \subset {}^{\star}\Sigma$, *alors* F *admet pour limite inductive sa limite dans* ${}^{\star}\Sigma^{\circ}$.

Signalons aussi que $\underline{\Sigma}^{\circ}$ est à $\mathfrak{M}_0$-sommes, les sommes (et leurs naturalisations) dans $\underline{\Sigma}^{\circ}$ étant les mêmes que dans $\overline{\Sigma}^{\circ}$. La catégorie RC° est donc aussi à $\mathfrak{M}_0$-sommes, de sorte que sa duale ROF° est à $\mathfrak{M}_0$-produits.

Désignons par Q° l'une des catégories $\overline{\Sigma}^{\circ}$, $\underline{\Sigma}^{\circ}$, RC°, RCT°.

THEOREME II.1. *Les foncteurs* $(Q^{\circ}, \iota, \Sigma^{\circ})$ *et* $(Q^{\circ}, \iota, \mathfrak{T}^{\circ})$ *admettent des coadjoints; une* $(Q^{\circ}, \iota, \Sigma^{\circ})$*-structure colibre sur une fermeture sera notée* $2_{Q^{\circ}}(\mu)$.

Par exemple, la $(RCT^{\circ}, \iota, \mathfrak{T}^{\circ})$-structure colibre sur un espace topologique (E, μ) est la topologie la moins fine sur $\mathfrak{P}(E)$ telle que, pour tout X ouvert (resp. fermé) de (E, μ), l'ensemble

$$\{ Y \subset E /\ E \setminus Y \subset X \}$$

soit ouvert (resp. fermé): Cette topologie est homéomorphe à la «finite topology» de E. Michael définie dans [5].

Soit μ une fermeture sur E, La fermeture $2_{\overline{\Sigma}^{\circ}}(\mu)$ sera aussi notée $U^d\mu$: c'est la fermeture sur $\mathfrak{P}(E)$ ayant pour ouverts les ensemde la forme

$$O_V = \{ Y \subset E /\ Y \cap V \neq \emptyset \},$$

avec V ouvert de μ, i.e. la fermeture la moins fine parmi les fermetures Λ sur $\mathfrak{P}(E)$ rendant s.c.i. de Λ vers μ la relation surjective U_E de

$\mathfrak{P}(E)$ vers E, définie par $U_E(\{A\})=A$ pour tout $A\in\mathfrak{P}(E)$. Notons $U'^d\mu$ la fermeture induite par U^d_μ sur $\mathfrak{P}(E)\setminus\{\emptyset\}$: on peut alors établir pour la topologie engendrée $\tau(U'^d\mu)$ plusieurs des propriétés de la «finite topology». (Par exemple, une topologie μ est quasi-compacte si et seulement si la topologie $U'^d\mu$ est quasi-compacte : voir aussi [6], où on trouvera, entre autres, une formulation différente de certains résultats de ce paragraphe II).

De même, la fermeture $2_{\underline{\Sigma}^o}(\mu)$ est la moins fine rendant s.c.s. la relation U_E ; on la notera $U^\star\mu$. La fermeture $2_{RC^o}(\mu)$ qui est la borne supérieure de $U^d\mu$ et $U^\star\mu$ sera notée $U^{-1}\mu$.

II.2. Les triples de sous-structures.

Les relations continues, que nous avons introduites ci-dessus comme généralisations des applications continues, peuvent en fait être définies comme éléments de catégories de Kleisli de triples dans Σ^o (ou $\mathcal{T}^o$). Soit $\overline{\mathfrak{P}}=(\mathfrak{P},\gamma,U)$ le triple dans $\mathfrak{M}^o$ déjà introduit au paragraphe I.1. Posons, pour toute fermeture (E,μ),

$$\mathfrak{P}_i(\mu)=(\mathfrak{P}(E),U^d\mu),\quad \mathfrak{P}_s(\mu)=(\mathfrak{P}(E),U^\star\mu),$$

et

$$\mathfrak{P}_c(\mu)=(\mathfrak{P}(E),U^{-1}\mu).$$

Alors on a

THEOREME II.2. *(a) Pour* $\delta=i, s$ *ou* c, $\mathfrak{P}_\delta$ *se prolonge en un foncteur surjacent au foncteur* $\mathfrak{P}$, γ *et* U *se relèvent en des transformations naturelles* $\overline{\gamma}$ *et* $\overline{U}_\delta$ *telles que* $(\mathfrak{P}_\delta,\overline{\gamma}_\delta,\overline{U}_\delta)$ *définisse un triple* $\overline{\mathfrak{P}}_\delta$ *dans* Σ^o.

(b) Les $\overline{\mathfrak{P}}_\delta$ *sont les triples associés aux adjonctions du théorème II.1.*

(c) La catégorie de Kleisli de $\overline{\mathfrak{P}}_i$ *(resp.* $\overline{\mathfrak{P}}_s$, *resp.* $\overline{\mathfrak{P}}_c$*) est isomorphe à* $\overline{\Sigma}^o$ *(resp.* $\underline{\Sigma}^o$, *resp.* RC^o*).*

Appelons relèvement de $\overline{\mathfrak{P}}$ dans Σ^o un triple $\overline{P}=(P,\varepsilon,\mu)$, où P est un foncteur de Σ^o dans Σ^o surjacent au foncteur $\mathfrak{P}$, et où ε et μ sont des transformations naturelles surjacentes à γ et U. Notons $\hat{P}$

l'ensemble des relèvements de $\overline{\mathfrak{P}}$ dans Σ^0. On a donc $\overline{\mathfrak{P}}_\delta \in \hat{P}$. Soit $\overline{P}_m$ l'élément de $\hat{P}$ défini en prenant pour $P_m((E,\mu))$ la fermeture grossière sur $\mathfrak{P}(E)$. Si l'on note P_M le foncteur surjacent à $\mathfrak{P}$ associant à (E,μ) la fermeture sur $\mathfrak{P}(E)$ la plus fine qui rende γ_E continue, alors U_E est continue de $P_M(P_M(\mu))$ vers $P_M(\mu)$, de sorte que P_M définit bien un élément $\overline{P}_M$ de $\hat{P}$. Si $\overline{P}_1$ et $\overline{P}_2 \in P$, on dira que $\overline{P}_1 \leqslant \overline{P}_2$ si $P_1(\mu)$ est moins fine que $P_2(\mu)$ pour toute fermeture μ. Il est clair que $(\hat{P}, \leqslant)$ est un treillis complet, admettant $\overline{P}_M$ et $\overline{P}_m$ pour plus grand et plus petit éléments, et que, par exemple, $\overline{\mathfrak{P}}_c$ est la borne inférieure de de $\overline{\mathfrak{P}}_i$ et $\overline{\mathfrak{P}}_s$. L'étude de la «répartition» des sous-structures dans Σ^0 pourrait être comprise comme l'étude de l'ensemble ordonné $(\hat{P}, \leqslant)$.

REMARQUE 1. Evidemment, chaque élément $\overline{P}$ de $\hat{P}$ donne lieu à une notion de relation continue: ci-dessus, nous nous sommes particulièrement intéressés aux relations s.c.i. et s.c.s., c'est-à-dire aux relations des triples $\overline{\mathfrak{P}}_i$ et $\overline{\mathfrak{P}}_s$; l'étude détaillée des relations de $\overline{P}_M$ reste à faire. L'intérêt de ces dernières provient du fait que toute relation de $\overline{P}_M$ est évidemment une relation de $\overline{P}$, pour tout $\overline{P} \in \hat{P}$; ainsi, les relations de $\overline{P}_M$ pourraient être appelées *relations absolument continues.*

REMARQUE 2. Si l'on s'intéresse à un certain type de sous-structures, (sous-espaces ouverts, compacts, séparés, connexes, etc...), certains $\overline{P}$ jouent un rôle spécial, à savoir ceux pour lesquels il existe un sous-foncteur F de P tel que γ_E soit à valeurs dans $F(\mu)$ pour tout (E,μ) et que U_E définisse par restriction une application continue de $F(F(\mu))$ vers $F(\mu)$, c'est-à-dire les triples $\overline{P}$ tels qu'il existe un sous-triple $\overline{F} = (F, \gamma', U')$ de $\overline{P}$ «représentant» les sous-structures considérées. Dans ce cas, on dira que $\overline{F}$ est induit sur F par $\overline{P}$. Par exemple, si l'on note $K_s(\mu)$ le sous-espace de $\mathfrak{P}_s(\mu)$ ayant pour éléments les sous-espaces quasi-compacts de μ, on obtient un foncteur K_s de Σ^0 dans Σ^0 et $\overline{\mathfrak{P}}_s$ induit un triple $\overline{K}_s$ sur K_s.

REMARQUE 3. Aucune des fonctions $\mathfrak{P}_i^2, \mathfrak{P}_s^2, \mathfrak{P}_c^2, P_M^2$ de Σ_0^0 dans Σ_0^0 ne se prolonge en un foncteur de Σ^0 dans Σ^0 surjacent au foncteur Π défini à la fin du paragraphe I.1. Aussi la question de savoir si l'on peut relever non trivialement Π dans Σ° reste-t-elle posée.

REMARQUE 4. Il est clair que les triples ici envisagés donnent lieu à des triples analogues dans $\mathcal{T}^{\circ}$.

Nous terminerons ce paragraphe II en montrant le rôle particulier joué par le triple $\overline{\mathfrak{P}}_i$:

II.3. La domination de $\overline{\Sigma}^{\circ}$ par $\overline{\Sigma}^{\circ *}$.

Soit A, B, A', B', A'', B'' des ensembles, R une relation de A' vers A, R' une relation de B' vers B, U une relation de A vers B, R_1 une relation de A'' vers A', et R'_1 une relation de B'' vers B'. On définit la relation $R' \times R$ de $B' \times A'$ vers $B \times A$ par :

$$(\forall x' \in A')(\forall y' \in B')\ [(R' \times R)(\{(y', x')\}) = R'(\{y'\}) \times R(\{x'\})].$$

On a alors les formules :

$$(R' \circ R'_1) \times (R \circ R_1) = (R' \times R) \circ (R'_1 \times R_1),$$

$$(d(R' \times R))(U) = (d(R')) \circ U \circ R.$$

(Avec les notations déjà introduites au paragraphe I, et l'identification fréquente d'une relation R et de l'application $J(R)$ entre ensembles de parties correspondante). Le foncteur de $\mathfrak{M}^{r\circ 2}$ dans $\mathfrak{M}^{r\circ}$ associant à un couple (R', R) de relations la relation $R' \times R$, sera noté X^r.

LEMME. *Soit $E \in \mathfrak{M}_0$; l'endofoncteur $(\cdot) X^r E$ de $\mathfrak{M}^{r\circ}$ déduit de X^r, est son propre adjoint (ou coadjoint).*

En effet, il suffit d'utiliser comme coprojecteur de but F la relation

$$H_{F,E} = (F, \underline{H}_{F,E}, E \times E \times F)$$

associant à $\{(e, e', f)\}$ l'ensemble $\{f\}$ si $e = e'$ et l'ensemble $\emptyset$ si $e \neq e'$.

On définit un foncteur Ω de $\overline{\Sigma}^{\circ *} \times \overline{\Sigma}^{\circ}$ vers $\overline{\Sigma}^{\circ}$ en prenant pour $\Omega((F, \nu), (E, \mu))$ la fermeture sur $F \times E$ dont les ouverts sont les relations s.c.i. de (E, μ) vers (F, ν), et en posant, pour R s.c.i. de μ vers ν et R' ouverte de μ' vers ν' :

$$\Omega((\nu', R', \mu'), (\nu, R, \mu)) = (\Omega(\nu', \nu), R' \times R, \Omega(\mu', \mu)).$$

Si μ et ν sont des topologies, on remarquera que $\tau(\Omega(\nu,\mu))$ est plus fine que la topologie produit, mais non discrète en général.

On note $T=(\overline{\overline{\Sigma}}^{o}, \underline{T}, \overline{\overline{\Sigma}}^{o2})$ le bifoncteur surjacent à X^r tel que $\underline{T}((F,\nu),(E,\mu))$ soit la fermeture sur $F\times E$ ayant pour ouverts les réunions quelconques d'ensembles de la forme $V\times U$, avec U ouvert de μ et V ouvert de ν. Si μ et ν sont des topologies, alors $T(\nu,\mu)$ est la topologie produit de μ par ν.

Enfin, soit ω le foncteur de $\overline{\overline{\Sigma}}^{o*}$ vers $\mathfrak{M}^o$ tel que $\omega(\mu)$ soit l'ensemble des ouverts de la fermeture μ, et que, pour un élément (ν,R,μ) de $\overline{\overline{\Sigma}}^{o*}$, $\omega((\nu,R,\mu))$ soit l'application de $\omega(\mu)$ dans $\omega(\nu)$ induite par R. En fait si 1 désigne l'espace topologique sur un ensemble à un élément, ω est égal à $Hom_{\overline{\overline{\Sigma}}^{o*}}(-,1)$.

Par ailleurs, la définition universelle de la topologie de la convergence compacte et les adjonctions du théorème II.1 nous permettent d'affirmer que, (E,μ) étant un espace topologique localement compact et $\mu\times\mathcal{J}^o(-)$ désignant le foncteur produit par (E,μ) de $\mathcal{J}^o$ dans $\mathcal{J}^o$, le foncteur $(Q^o,\iota,\mathcal{J}^o)\circ(\mathcal{J}^o,\mu\times\mathcal{J}^o(-),\mathcal{J}^o)$ admet un coadjoint $c_{Q^o}(-,\mu)$.

Notons $c'_{\overline{\overline{\Sigma}}^o}(\nu,\mu)$ la fermeture sur $Hom_{\overline{\overline{\Sigma}}^o}(\nu,\mu)$ dont les ouverts sont les réunions quelconques d'ensembles de la forme

$$\mathfrak{C}_c(V,K)=\{R\in Hom_{\overline{\overline{\Sigma}}^o}(\nu,\mu)/\ K\subset(d(R))(V)\},$$

pour K compact de (E,μ) et V ouvert de (F,ν). Alors $c_{\overline{\overline{\Sigma}}^o}(\nu,\mu)$ est la topologie $\tau(c'_{\overline{\overline{\Sigma}}^o}(\nu,\mu))$, que l'on abrègera en $\bar{p}(\nu,\mu)$. Nous pouvons maintenant énoncer :

THEOREME II.3. *Le foncteur Ω^* dual de Ω définit une domination de $\overline{\overline{\Sigma}}^o$ par ω.*

De plus, si (E,μ) est une fermeture sur $E\in\mathfrak{M}_0$, on a:

(i) $(\overline{\overline{\Sigma}}^o, \Omega(-,\mu), \overline{\overline{\Sigma}}^{o*})$ admet son foncteur dual pour coadjoint.

(ii) $(\overline{\overline{\Sigma}}^o, \Omega(\mu,-), \overline{\overline{\Sigma}}^o)$ admet $(\overline{\overline{\Sigma}}^o, T(-,\mu), \overline{\overline{\Sigma}}^o)$ pour coadjoint.

(iii) $(\overline{\overline{\Sigma}}^o, T(-,\mu)\circ\iota, \mathcal{J}^o)$ admet $(\mathcal{J}^o, \bar{p}(-,\mu), \overline{\overline{\Sigma}}^o)$ pour coadjoint si et et seulement si $\tau(\mu)$ est localement compacte.

(iv) $(\overline{\overline{\Sigma}}^o, T(-,\mu), \overline{\overline{\Sigma}}^o)$ n'admet pas toujours de coadjoint.

Remarquons qu'ainsi l'espace topologique produit de deux espaces topologiques est un produit tensoriel dans la catégorie $\overline{\Sigma}^{\circ}$ des relations s.c.i. entre fermetures (ii), alors qu'il n'apparaît comme produit tensoriel dans $\mathcal{T}^{\circ}$ que dans le cas où l'un des facteurs est localement compact.

Indiquons la preuve de (ii): Si $(E,\mu),(F,\xi)$ et (G,ζ) sont des fermetures, alors $H_{E,F}$ est continue de $\Omega(\xi, T(\xi,\mu))$ vers μ, puisque, pour U ouvert de (E,μ) et V ouvert de (F,ξ), on a:

$$(d((d(H_{E,F}))(U)))(V)=V\times U.$$

Par ailleurs, si h est une relation s.c.i. de $\Omega(\xi,\zeta)$ vers μ, la relation $\tilde{h}$ de ζ vers $T(\xi,\mu)$ définie par

$$(\tilde{h}(\{g\}))(\{e\})=h(\{(g,e)\})$$

est continue; en effet, pour U ouvert de μ et V ouvert de ξ, on a

$$(d(\tilde{h}))(V\times U)=(d(d(h)(U)))(V).$$

La preuve de (i) est similaire. (On peut voir aussi que (i) se déduit de (ii) et de la symétrie de T). (iii) se ramène clairement au théorème analogue de [7], et (iv) se constate en désignant par μ_0 la seule topologie sur $\{\emptyset\}$ et en remarquant que, si μ_0 admet une $T(\cdot,\mu)$-structure libre, l'ensemble des ouverts de μ a un cardinal de la forme 2^A, ce qui n'est pas toujours vrai pour des espaces finis (alors qu'on ne connaît pas de contr'exemple si les espaces sont infinis).

Signalons, sans développer la question, que ce théorème nous a servi de point de départ dans [13c] pour définir des notions d'homotopie entre relations continues, définitions qui sont reprises et améliorées dans [13d] de sorte à donner lieu à des théories effectivement non triviales. La question la plus intéressante à ce sujet serait certainement l'étude de l'homotopie au sens de la définition 2 de [13d] entre relations compactes ouvertes.

III. D'AUTRES EXEMPLES ; TYPES DE SOUS-OBJETS.

III.1. Les relations uniformes.

Soit $\mathfrak{Un}^\circ$ la catégorie au-dessus de $\mathfrak{M}_0$ ayant pour objets les espaces uniformes $(E, \mathfrak{U})$ et pour morphismes les applications uniformes entre ces espaces. Si $(E, \mathfrak{U})$ est un espace uniforme, on note, pour $U \in \mathfrak{U}$:

$$\tilde{U} = \{(B, A) \in \mathfrak{P}(E) \times \mathfrak{P}(E) / B \subset U(A) \ \ et \ \ A \subset U(B)\}.$$

La famille $(\tilde{U})_{U \in \mathfrak{U}}$ définit un système fondamental d'entourages d'une structure uniforme $\tilde{\mathfrak{U}}$ sur $\mathfrak{P}(E)$ (cf. [8] ch.II, §1, exercice 5). On pose

$$\mathfrak{P}_{\mathfrak{Un}}((E, \mathfrak{U})) = (\mathfrak{P}(E), \tilde{\mathfrak{U}}).$$

$\mathfrak{P}_{\mathfrak{Un}}$ se prolonge en un foncteur de $\mathfrak{Un}^\circ$ vers $\mathfrak{Un}^\circ$ surjacent au foncteur $\mathfrak{P}$; pour tout $(E, \mathfrak{U})$, γ_E définit une application uniforme $\bar{\gamma}_E$ de $(E, \mathfrak{U})$ vers $\mathfrak{P}_{\mathfrak{Un}}((E, \mathfrak{U}))$, car, si V' est un entourage symétrique contenu dans un entourage V, on a $(\mathfrak{P}(\gamma_E \times \gamma_E))(V') \subset \tilde{V}$; on voit aussi que U_E définit une application uniforme $\bar{U}_E$ de $\mathfrak{P}_{\mathfrak{Un}}(\mathfrak{P}_{\mathfrak{Un}}((E, \mathfrak{U})))$ vers $\mathfrak{P}_{\mathfrak{Un}}((E, \mathfrak{U}))$, car, pour tout $V \in \mathfrak{U}$, on a $(\mathfrak{P}(U_E \times U_E))(\tilde{\tilde{V}}) \subset \tilde{V}$. $(\mathfrak{P}_{\mathfrak{Un}}, \bar{\gamma}, \bar{U})$ définit donc un triple $\bar{\mathfrak{P}}_{\mathfrak{Un}}$ dans $\mathfrak{Un}$, dont on pourra appeler les relations des *relations uniformes*.

Si $(E, \mathfrak{U})$ est un espace uniforme, on note $(E, T(\mathfrak{U}))$ l'espace topologique sous-jacent. Désignons par $\mathfrak{P}'_s$ le foncteur dans $\mathcal{T}^\circ$ analogue de $\mathfrak{P}_s$ dans Σ°, et $\bar{\mathfrak{P}}'_s$ le triple correspondant. On vérifie alors que la topologie $(\mathfrak{P}(E), T(\tilde{\mathfrak{U}}))$ est plus fine que la topologie $\mathfrak{P}'_s((E, T(\mathfrak{U})))$, de sorte qu'une relation uniforme entre deux espaces uniformes est s.c.s. entre les topologies sous-jacentes. Réciproquement, une relation s.c.s. d'un espace compact vers un espace uniforme est uniforme.

III.2. Les relations croissantes strictes.

Soit $\mathcal{O}^\circ$ la catégorie construite sur $\mathfrak{M}_0$ dont les objets sont les ensembles non vides munis d'un ordre strict, et dont les morphismes sont les applications strictement croissantes entre ces objets. Notons ω le foncteur de $\mathcal{O}^\circ$ vers $\mathfrak{M}^\circ$ oubliant l'ordre. Alors, pour tout objet $(E, <)$, on munit l'ensemble $\mathcal{S}_\omega((E, <))$ de ses $(\omega, \mathfrak{M}^\iota)$-sous-structures de l'ordre strict

$\bar{<}$ défini par :

$(E', <_{|E'}) \bar{<} (E'', <_{|E''})$ ssi $e' < e''$ pour tout $e' \in E'$ et tout $e'' \in E''$.

L'ensemble ordonné ainsi défini est noté $S_\omega((E,<))$. γ_E (resp. U_E) définit une application croissante stricte γ'_E de $(E,<)$ vers $S_\omega((E,<))$ (resp. U'_E de $S_\omega(S_\omega(E,<)))$ vers $S_\omega((E,<))$). On prolonge S_ω à l'aide de $\mathfrak{P}$ en un foncteur noté S_ω, de sorte que $\overline{S}_\omega = (S_\omega, \gamma', U')$ est un triple dans $\mathcal{O}^o$; les éléments de la catégorie de Kleisli de $\overline{S}_\omega$ se nommeront *relations croissantes strictes*. Cet exemple peut se modifier comme suit: Soit $\mathcal{O}^o_r$ la catégorie dont les objets sont les ensembles ordonnés non vides et les morphismes les applications croissantes régulières, et u_r son foncteur d'oubli vers $\mathfrak{M}^o$. On note $S_{u_r}((E,<))$ l'ensemble de ses $(u_r, \mathfrak{M}^\iota)$-sous-structures ordonné par inclusion. On obtient alors un triple dont les relations sont les $\mathcal{X}$-foncteurs [9].

III.3. Les relations multiplicatives.

Désignons par $\mathfrak{N}^o$ la catégorie des homomorphismes entre systèmes multiplicatifs (E,k) au-dessus de $\mathfrak{M}^o$ et par $p_{\mathfrak{N}}$ le foncteur d'oubli fidèle de $\mathfrak{N}^o$ vers $\mathfrak{M}^o$. $p_{\mathfrak{N}}$ est sous-étalant de sorte que l'ensemble des $(p_{\mathfrak{N}}, \mathfrak{M}^\iota)$-sous-structures de (E,k) est en bijection avec $\mathfrak{P}(E)$. Si A et B sont inclus dans E, on note

$$A.B = \{k(a,b) / a \in A, b \in B\}.$$

$\mathfrak{P}(E)$ muni de cette composition partout définie est un système multiplicatif que l'on notera $\mathfrak{P}^\cdot((E,k))$. De cette façon, on définit un foncteur $\mathfrak{P}^\cdot$ au-dessus de $\mathfrak{P}$, et $(\mathfrak{P}, \gamma, U)$ se relève en un triple $\overline{\mathfrak{P}}^\cdot$ dans $\mathfrak{N}^o$.

Considérons maintenant la loi $\bullet$ sur $\mathfrak{P}(E)$ définie par :

$A \bullet B = A.B$ si et seulement si, pour tout $a \in A$ (resp. tout $b' \in B$) il existe un $b \in B$ (resp. un $a' \in A$) tel que $k(a,b)$ (resp. $k(a',b')$) soit défini.

Notons $\mathfrak{P}^\bullet((E,k))$ le système multiplicatif ainsi obtenu. Là encore, on a un triple, noté $\overline{\mathfrak{P}}^\bullet$.

On pourra appeler *relation multiplicative* (resp. *multiplicative stricte*) une relation de $\mathfrak{P}^\cdot$ (resp. de $\mathfrak{P}^\bullet$).

On sait (voir [10] chapitre II) que, si (E, k) est un graphe multiplicatif (resp. une catégorie), il en est de même de $\mathfrak{P}^{\bullet}((E, k))$; on peut constater plus, à savoir que $\overline{\mathfrak{P}}^{\bullet}$ induit un triple dans la catégorie des homomorphismes de graphes multiplicatifs (resp. de catégories).

Malheureusement, on ne sait pas fabriquer de triple dans $\mathfrak{N}'^{o}$ représentant les sous-graphes multiplicatifs, bien que pour chaque graphe multiplicatif (E, k) il existe un graphe multiplicatif ayant pour éléments les sous-graphes multiplicatifs de (E, k): il s'agit, par exemple, du graphe multiplicatif $S^{\bullet}(E, k)$ formé des sous-graphes multiplicatifs de (E, k), avec pour composition :

$A \bullet B = A \bullet B$ si et seulement si $A \bullet B$ est défini et est un sous-graphe multiplicatif de (E, k).

Mais cette fonction $S^{\bullet}$ ne se prolonge pas en un foncteur de $\mathfrak{N}'^{o}$ dans $\mathfrak{N}'^{o}$.

La même question se pose dans $\mathcal{F}^{o}$ pour les sous-catégories, ou les sous-catégories pleines. Néanmoins, dans ce dernier cas, il est facile de remarquer que l'ensemble des sous-catégories pleines d'une catégorie $C^{\cdot}$ est en bijection avec l'ensemble des foncteurs de $C^{\cdot}$ dans $U^{\cdot}_{p}$, en désignant par $U^{\cdot}_{p}$ la catégorie comportant deux unités e et e' et deux morphismes u et v de e dans e' et de e' dans e inverses l'un de l'autre : Si l'on note 1 la catégorie à un seul élément ϕ et m l'injection de 1 dans $U^{\cdot}_{p}$ définie par $m(\phi) = e$, et si F est un foncteur de $C^{\cdot}$ dans $U^{\cdot}_{p}$, le produit fibré de F et m est une sous-catégorie pleine de $C^{\cdot}$, et la correspondance ainsi définie est bijective. On pourra dire que m «classifie» les sous-catégories pleines, ou encore que *le type de sous-objets que sont les sous-catégories pleines est défini par* m.

III.4. Type de sous-objets.

Soit $H^{\cdot}$ une catégorie à $\{1,2\}$-produits fibrés canoniques. Si (f, h, h', f') est un quatuor cartésien (c'est-à-dire un produit fibré naturalisé) où $f.h' = h.f'$, alors h' sera noté $f^{\star}(h)_{f'}$ ou $f^{\star}(h)$ lorsque l'indication de f' est superflue, c'est-à-dire essentiellement si l'on ne s'intéresse à h' qu'à «un isomorphisme près»; en particulier, si h est un monomorphisme, $f^{\star}(h)$ désignera aussi le sous-objet de $\alpha(f)$ défini par $f^{\star}(h)_{f'}$. L'ensemble des $f^{\star}(h)_{f'}$, lorsque f et f' varient dans H sera noté $H^{\star}(h)$.

Si M est un ensemble de monomorphismes de H de la forme $H^{\star}(m)$ tel que, pour tout $e \in H_0^{\cdot}$, l'application $\overline{m}_e$ qui à f élément de $\beta(m).H.e$ associe le M-sous-objet $f^{\star}(m)$ soit bijective sur l'ensemble des M-sous-objets de e, on dit (suivant en cela le cas où M est l'ensemble de tous les monomorphismes envisagé dans [11]) que m *classifie les* M*-sous-objets* ou bien que les M-sous-objets sont *de type* m. Bien sûr, un classifiant m des M-sous-objets est unique à un isomorphisme près.

Par exemple, avec les notations de II.2, on voit que les sous-espaces ouverts, fermés, ouverts et fermés de fermetures sont classifiés par des monomorphismes $\gamma_{\delta 1}$ pour δ convenable et 1 la seule topologie sur $\{\emptyset\}$.

D'autres exemples peuvent être donnés sans utiliser une fonction «partie» S_0 satisfaisant P''_1 (cf. §0.1) tel l'exemple des sous-catégories pleines du paragraphe précédent. Voici un autre exemple de ce type : Soit m l'injection canonique γ_{i_2} de $2 = \{0, 1\}$ muni de la topologie discrète d_2 dans $\mathfrak{P}_i((2, d_2))$ et (X, μ) une fermeture; alors $\overline{m}_{(X,\mu)}$ est surjective mais non injective. Néanmoins, en notant σ l'isomorphisme de 2 échangeant 0 et 1 on voit que, si ϕ et $\phi' \in \beta(m) \circ \Sigma_0(X, \mu)$ représentent le même sous-objet de (X, μ), on a $\phi' = \mathfrak{P}_i(\sigma) \circ \phi$, et ceci permet de parler quand même des sous-objets de (X, μ) «classifiés» par m : il s'agit des sous-espaces *localement fermés* (i.e. intersection d'un ouvert et d'un fermé) de (X, μ).

En général, étant donné un triple de sous-structure d'unité une transformation naturelle i, on peut chercher les sous-objets classifiés par i_1, en désignant par 1 un élément final de la catégorie. Inversement, ayant défini un type de sous-objets par la donnée d'un monomorphisme, on peut essayer de reconstituer des fonctions et triples de sous-objets : c'est une telle construction qui est envisagée au paragraphe suivant.

IV. UNE CONSTRUCTION DE FONCTIONS SOUS-OBJETS.

IV.1. Le morphisme ψ_e .

Soit $C^{\cdot}$ une catégorie à $\{1,2\}$-produits et produits fibrés et m un monomorphisme de $C^{\cdot}$ classifiant les $C^{\star}(m)$-sous-objets (cf. §III.4). Supposons de plus que :

(i) Pour tout $e \in C^{\cdot}_0$, le morphisme diagonal Δ_e de e dans $e \times e$ définit un $C^{\star}(m)$-sous-objet de $e \times e$. (On dit que l'on a la *m-égalité*).

(ii) Pour tout $e \in C^{\cdot}_0$ le but de m, noté 2, admet une $(\cdot) \times e$-structure colibre, notée 2^e, naturalisée par un coprojecteur ε_e de source $2^e \times e$ et de but 2. La famille $\varepsilon = (\varepsilon_e)_{e \in C^{\cdot}_0}$ est appelée *m-appartenance*.

On adopte alors les notations et définitions suivantes :

- Pour tout $f \in C$, de but e' et de source e, on note 2^f le morphisme de $2^{e'}$ vers 2^e déterminé par

$$\varepsilon_e . (2^f \times e) = \varepsilon_{e'} . (2^{e'} \times f).$$

L'application qui à f associe 2^f définit un foncteur de $C^{\cdot}$ vers $C^{\cdot *}$, noté $2^{(-)}$. On posera $2^{(2^f)} = \Pi(f)$. L'application associant $\Pi(f)$ à f définit un foncteur de source et de but $C^{\cdot}$, noté Π. Nous reviendrons sur Π plus loin.

- Soit Δ_e le morphisme diagonal de e dans $e \times e$, et q_e défini par $q_e^{\star}(m) = \Delta_e$. Soit i_e le morphisme de e dans 2^e que détermine l'égalité

$$\varepsilon_e . (i_e \times e) = q_e .$$

Alors *i_e est un monomorphisme:*

▲ En effet (voir [11]), $i_e . u = i_e . v$ équivaut à $q_e . (u \times e) = q_e . (v \times e)$; dire que $u = v$ équivaut à dire que $f = [u, v]$ se factorise à travers Δ_e. Or

$$q_e . f = q_e . (v \times e) . [\alpha(v), u] = q_e . (u \times e) . [\alpha(v), u] = q_e . \Delta_e . u .$$

La propriété universelle du produit fibré montre alors que f se factorise à travers Δ_e. ▲

On pose $O_e = \varepsilon_e^{\star}(m)$ et $H_e = \alpha(O_e)$. Soit ξ_e l'isomorphisme de $(2^e \times e) \times (2^e \times e)$ sur $(2^e \times 2^e) \times (e \times e)$ échangeant les deuxième et troisième facteurs. On pose :

$$j_e = ((2^e \times 2^e) \times \Delta_e)^{\star} (\xi_e . (O_e \times O_e)) \quad \text{et} \quad R_e = \alpha(j_e).$$

Nous allons voir qu'inversement on peut définir O_e à l'aide de j_e et i_e.

PROPOSITION IV.1. *Si l'on note p_e la projection canonique de $(2^e \times 2^e) \times e$ sur $2^e \times 2^e$ et S_e l'isomorphisme canonique de $2^e \times e$ sur $e \times 2^e$, alors il existe un g_e de H_e vers R_e tel que l'on ait le produit fibré*

$$\begin{tikzcd} H_e \arrow[r, "g_e"] \arrow[d, "O_e"'] & R_e \arrow[d, "p_e \cdot j_e"] \\ 2^e \times e \arrow[r, "(i_e \times 2^e) . S_e"'] & 2^e \times 2^e \end{tikzcd}$$

DEMONSTRATION. On désignera par $p_A^{A \times B}$ la projection canonique d'un produit $A \times B$ sur son facteur A. Remarquons d'abord que l'on a le produit fibré

$$\begin{tikzcd} (e \times 2^e) \times e \arrow[r, "(i_e \times 2^e) \times e"] \arrow[d, "S_e^{-1} . p_{e \times 2^e}^{(e \times 2^e) \times e}"'] & (2^e \times 2^e) \times e \arrow[d, "p_e"] \\ 2^e \times e \arrow[r, "(i_e \times 2^e) . S_e"'] & 2^e \times 2^e \end{tikzcd}$$

Ceci est aisé à voir (et ne tient d'ailleurs pas à la nature particulière de i_e). On définit alors f_e de H_e vers $(e \times 2^e) \times e$ par $f_e = [S_e, p_e^{2^e \times e}] . O_e$; bien sûr, $(S_e^{-1} . p_{e \times 2^e}^{(e \times 2^e) \times e}) . f_e = O_e$, de sorte que pour établir la proposition il suffit d'établir que l'on a un produit fibré de la forme

$$\begin{tikzcd} H_e \arrow[r] \arrow[d, "f_e"'] & R_e \arrow[d, "j_e"] \\ (e \times 2^e) \times e \arrow[r, "(i_e \times 2^e) \times e"'] & (2^e \times 2^e) \times e \end{tikzcd}$$

Mais j_e est défini par le produit fibré

$$\begin{tikzcd} R_e \arrow[r, "\mu_e"] \arrow[d, "j_e"'] & H_e \times H_e \arrow[d, "\xi_e . (O_e \times O_e)"] \\ (2^e \times 2^e) \times e \arrow[r, "(2^e \times 2^e) \times \Delta_e"'] & (2^e \times 2^e) \times (e \times e) \end{tikzcd}$$

où μ_e est évidemment un monomorphisme, de sorte que tout revient à trouver un h_e tel que l'on ait un produit fibré

$$\begin{tikzcd} H_e \arrow[r, "h_e"] \arrow[d, "f_e"'] & H_e \times H_e \arrow[d, "\xi_e . (O_e \times O_e)"] \\ (e \times 2^e) \times e \arrow[r, "(i_e \times 2^e) \times \Delta_e"'] & (2^e \times 2^e) \times (e \times e) \end{tikzcd}$$

Définissons h_e : On a

$$\varepsilon_e . [i_e, e] = \varepsilon_e . (i_e \times e) . \Delta_e = q_e . \Delta_e = m . m^\star(q_e);$$

donc il existe un unique a_e de e vers H_e tel que

$$O_e . a_e = [i_e, e] \text{ et } m^\star(\varepsilon_e) . a_e = m^\star(q_e).$$

On pose alors

$$b_e = a_e . p_e^{2^e \times e} . O_e \quad \text{et} \quad h_e = [b_e, H_e].$$

1) Le carré est commutatif, c'est-à-dire

$$\xi_e . (O_e \times O_e) . h_e = ((i_e \times 2^e) \times \Delta_e) . f_e .$$

Pour vérifier cette égalité, il suffit d'en composer les deux membres avec les quatre projections canoniques de source $(2^e \times 2^e) \times (e \times e)$. On obtient:

$$p_{2^e}^{2^e \times e} . O_e . b_e = i_e . p_e^{2^e \times e} . O_e, \quad p_{2^e}^{2^e \times e} . O_e = p_{2^e}^{2^e \times e} . O_e$$

$$p_e^{2^e \times e} . O_e . b_e = p_e^{2^e \times e} . O_e, \quad p_e^{2^e \times e} . O_e = p_e^{2^e \times e} . O_e .$$

La première ou la troisième de ces égalités se vérifie en remplaçant b_e par sa valeur et à l'aide de $O_e . a_e = [i_e, e]$.

2) Propriété universelle: Soit u un morphisme de $C^\cdot$, de source K et de but $H_e \times H_e$ et v un morphisme de $C^\cdot$ de source K et de but $(e \times 2^e) \times e$,

tels que

(1) $$\xi_e . (O_e \times O_e) . u = ((i_e \times 2^e) \times \Delta_e) . v .$$

L'unicité d'une éventuelle factorisation résulte du fait que h_e est un monomorphisme. Il reste à en établir l'existence: Notons p_1 et p_2 les première et deuxième projections de $H_e \times H_e$ sur H_e. Nous allons montre. que $u = h_e . (p_2 . u)$ et $v = f_e . (p_2 . u)$. La projection canonique de $(2^e \times 2^e) \times (e \times e)$ sur le i$^{\text{ème}}$ facteur sera notée p'_i ; le crochet $[p'_i, p'_j]$ sera noté p'_{ij}; de même, on note p''_i ou p''_{ij} les projections de source $(2^e \times 2^e) \times e$. De (1) on déduit :

$$O_e . p_1 . u = (i_e \times e) . p''_{13} . v$$

et, en composant avec ε_e,

$$\varepsilon_e . O_e . p_1 . u = q_e . p''_{13} . v, \text{ soit } m . (m^\star(\varepsilon_e) . p_1 . u) = q_e . (p''_{13} . v).$$

Donc il existe un unique φ tel que

$$p''_{13} . v = \Delta_e . \varphi \text{ et } m^\star(\varepsilon_e) . p_1 . u = m^\star(q_e) . \varphi .$$

Mais la première de ces dernières égalités entraîne

(2) $$p''_1 . v = p''_3 . v .$$

a) $u = h_e . (p_2 . u)$ s'écrit aussi $[b_e . p_2 . u, p_2 . u] = [p_1 . u, p_2 . u]$, soit

$$b_e . p_2 . u = p_1 . u \quad \text{ou} \quad a_e . p_e^{2^e \times e} . O_e . p_2 . u = p_1 . u;$$

en composant avec le monomorphisme O_e on obtient:

$$O_e . a_e . p_e^{2^e \times e} . O_e . p_2 . u = O_e . p_1 . u,$$

$$[i_e, e] . p_e^{2^e \times e} . O_e . p_2 . u = O_e . p_1 . u,$$

ce qui s'écrit

(i) $$p_e^{2^e \times e} . O_e . p_2 . u = p_e^{2^e \times e} . O_e . p_1 . u,$$

(ii) $$i_e . p_e^{2^e \times e} . O_e . p_2 . u = p_{2^e}^{2^e \times e} . O_e . p_1 . u .$$

Posons

$$\xi_e . (O_e \times O_e) = \alpha \text{ et } (i_e \times 2^e) \times \Delta_e = \beta .$$

Alors (i) équivaut à

$$p'_4 . \alpha . u = p'_3 . \alpha . u, \text{ ou encore } p'_4 . \beta . v = p'_3 . \beta . v;$$

mais précisément

$$p'_4 . \beta = p'_3 . \beta \,(= i_e \times 2^e).$$

Par ailleurs, puisque $\alpha . u = \beta . v$ entraîne $O_e . p_1 . u = (i_e \times e) . p''_{13} . v$ (3) et que

$$p_e^{2^e \times e} . O_e . p_2 . u = p'_4 . \alpha . u = p'_4 . \beta . v = p'_3 . \beta . v$$

d'après (3), (ii) s'écrit

$$i_e . p'_3 . \beta . v = p_{2^e}^{2^e \times e} . (i_e \times e) . p''_{13} . v,$$

c'est-à-dire $i_e . p''_3 . v = i_e . p''_1 . v$, ce qui se déduit de (2).

b) $v = f_e . (p_2 . u)$: En effet, ceci s'écrit $v = [S_e, p_e^{2^e \times e}] . O_e . p_2 . u$ ou, en projetant :

(i') $$p''_{12} . v = S_e . O_e . p_2 . u,$$

(i") $$p''_3 . v = p_e^{2^e \times e} . O_e . p_2 . u,$$

Or (i") est vrai, car

$$p''_3 . v = p'_4 . \beta . v = p'_3 . \beta . v = p'_3 . \alpha . u = p_e^{2^e \times e} . O_e . p_2 . u.$$

Pour (i') on a

$$S_e . O_e . p_2 . u = p'_{42} . \alpha . u = p'_{42} . \beta . v$$

On veut donc prouver que $p''_{12} . v = p'_{42} . \beta . v$, c'est-à-dire :

(j) $$p''_1 . v = p'_4 . \beta . v,$$

(jj) $$p''_2 . v = p'_2 . \beta . v.$$

(jj) est clair et (j) équivaut, grâce à (3), à (2). Ceci achève la preuve de cette proposition 1.

Supposons maintenant que $p_e . j_e$ admette une $C^\star(m)$-image, notée j'_e, et soit ϕ_e défini par $\phi_e^\star(m) = j'_e$. On définit alors ψ_e de 2^e dans $2^{(2^e)}$ par

$$\varepsilon_{2^e} . (\psi_e \times 2^e) = \phi_e .$$

Cette définition est cohérente puisque ϕ_e, et a fortiori ψ_e, sont indépendants du choix des divers produits fibrés utilisés.

IV.2. La fonction $\mathcal{P}$.

Si e et e' appartiennent à $C^{\cdot}_o$, on note $S_{e,e'}$ l'isomorphisme canoque de $e\times e'$ sur $e'\times e$. Soit g un morphisme de source e et de but $2^{e'}$; on note g^d le morphisme qui définit l'égalité :

$$\varepsilon_{e'}.(g\times e') = \varepsilon_e.(g^d\times e).S_{e,e'}.$$

Si $f\in C$, $\alpha(f)=e$ et $\beta(f)=e'$, alors $(i_{e'}.f)^d = 2^f.i_{e'}$ (ceci se vérifie aisément) et l'on pose

$$\mathcal{P}(f) = 2^{((i_{e'}.f)^d)}.\psi_e.$$

Alors on a :

PROPOSITION IV.2. *Pour tout e on a :* $2^{i_e}.\mathcal{P}(i_e) = 2^{i_e}.\psi_e$.

DEMONSTRATION. Montrons d'abord que

$$i_e = 2^{i_e}.i_{2^e}.i_e \qquad (1).$$

Ceci revient à

$$\varepsilon_e.(i_e\times e) = \varepsilon_e.(2^{i_e}\times e).(i_{2^e}\times e).(i_e\times e)$$

ou

$$q_e = \varepsilon_{2^e}.(2^{(2^e)}\times i_e).(i_{2^e}\times e).(i_e\times e),$$

$$q_e = \varepsilon_{2^e}.(i_{2^e}\times e).(i_e\times i_e),$$

$$q_e = q_{2^e}.(i_e\times i_e).$$

Cette dernière égalité s'établit en montrant que l'on a le produit fibré

$$\begin{tikzcd}
e \arrow[r, "i_e"] \arrow[d, "\Delta_e"'] & 2^e \arrow[d, "\Delta_{2^e}"] \\
e\times e \arrow[r, "i_e\times i_e"'] & 2^e\times 2^e
\end{tikzcd}$$

Mais alors, $2^{i_e}.\mathcal{P}(i_e) = 2^{i_e}.2^{2^{i_e}.i_{2^e}}.\psi_e$

$$2^{i_e}.\mathcal{P}(i_e) = 2^{(2^{i_e}.i_{2^e}.i_e)}.\psi_e,$$

d'où le résultat, grâce à (1).

Si $\underline{q}=(f,h,h',f')$ est un quatuor cartésien, notons $im\,\underline{q}$ le quatuor $(im(f),h,\bar{h}',im(f'))$ avec $\bar{h}'=(im(f))^{\star}(h).v$, où v est l'unique morphisme tel que $h^{\star}(im(f)).v=im(f')$, en notant $im(z)$ la $C^{\cdot\star}(m)$-image de z, que l'on suppose exister, pour tout $z\in C$. On dira que les $C^{\star}(m)$-images *sont compatibles avec les produits fibrés* si $im\,\underline{q}$ est cartésien lorsque $\underline{q}$ l'est.

Par ailleurs, si $j_e=j'_e.\tilde{p}_e$ est la décomposition de j_e à travers sa $C^{\star}(m)$-image, il peut se faire que $\tilde{p}_e$ admette une section; dans ce cas, en notant $\underline{k}_e$ le quatuor cartésien de la proposition 1, le quatuor $im\,\underline{k}_e$ est cartésien (ceci a lieu en particulier si les $C^{\star}(m)$-images sont compatibles avec les produits fibrés), c'est-à-dire que l'on a deux produits fibrés:

$$\begin{tikzcd} H_e \arrow[r] \arrow[d, "O_e"'] & \cdot \arrow[r] \arrow[d, "j'_e"] & \cdot \arrow[d, "m"] \\ 2^e\times e \arrow[r, "(i_e\times 2^e).S_e"'] & 2^e\times 2^e \arrow[r, "¢_e"'] & 2 \end{tikzcd}$$

et on a donc la formule

$$¢_e.(i_e\times 2^e).S_e=\varepsilon_e$$

d'où l'on déduit, par exemple, $2^{i_e}.\psi_e=2^e$ (et par suite ψ_e et $\mathcal{P}(i_e)$ sont des monomorphismes) ainsi que $\mathcal{P}(e)=2^e$ pour tout $e\in C_0^{\cdot}$. De plus:

PROPOSITION IV.3. *Dans les hypothèses ci-dessus ($im\,\underline{k}_e$ cartésien), pour tout f de source e et de but e', on a $\mathcal{P}(f).i_e=i_{e'}.f$.*

La preuve est immédiate.

REMARQUE. Si $\alpha(m)$ est final dans $C^{\cdot}$, alors

$$m=i_{\alpha(m)} \text{ et } \beta(m)=\mathcal{P}(\alpha(m)).$$

EXEMPLES. - 1. Prenons pour $C^{\cdot}$ la catégorie $\mathfrak{M}^{o}$ (cf. §I) et pour m l'application de $\{\emptyset\}$ dans $\{\emptyset,\{\emptyset\}\}$ telle que $m(\emptyset)=\emptyset$. Alors les $\mathfrak{M}^{\star}(m)$-sous-objets sont les sous-objets quelconques. Les hypothèses (i) et (ii) sont vérifiées (ainsi que l'hypothèse de la proposition 3). On vérifiera qu'alors $\mathcal{P}$ est identique à $\mathfrak{P}$, et que, pour tout ensemble E, ψ_E est l'application de $\mathfrak{P}(E)$ dans $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(E))$ associant $\{X \subset E / X \cap A \neq \emptyset\}$ à tout $A \in \mathfrak{P}(E)$ (déjà remarqué au § I.1).

- 2. Prenons $C^{\cdot} = \mathcal{T}^{\circ}$ et m l'application continue de $\{\emptyset\}$ dans $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ muni de la topologie grossière. L'hypothèse (ii) du § IV.1 est satisfaite en prenant pour $2^{(X,T)}$ l'ensemble $\mathfrak{P}(X)$ muni de la topologie grossière. On obtient alors pour $\mathcal{P}$ le foncteur P_m défini au § II.2.

- 3. Les autres fonctions sous-objets envisagées aux § II et III ne semblent pas entrer dans le cadre de la construction ci-dessus.

IV.3. Le triple $\overline{\Pi}$.

On utilise ici les seules hypothèses (i) et (ii) indiquées au début § IV.1. Pour tout $e \in C_0^{\cdot}$, notons t_e le morphisme de e vers $2^{(2^e)}$ déterminé, grâce à la condition (ii) § IV. 1, par l'égalité

$$\varepsilon_{2^e} . (t_e \times 2^e) . S_e = \varepsilon_e .$$

On remarquera donc que, si $im\, \underline{k}_e$ est cartésien, alors $t_e = \psi_e . i_e$.

Notons $\mathcal{P}^\star(C^{\cdot})^{\cdot}$ la sous-catégorie de $C^{\cdot}$ image de $C^{\cdot}$ par le foncteur $2^{(-)}$, et $\mathbf{P}(C^{\cdot})^{\cdot}$ la sous-catégorie pleine de $C^{\cdot}$ ayant pour unités celles de la forme 2^e, où $e \in C_0^{\cdot}$.

PROPOSITION IV.4. *L'injection canonique de $\mathcal{P}^\star(C^{\cdot})^{\cdot}$ dans $C^{\cdot}$ admet un adjoint, à savoir le foncteur* Π.

PREUVE. 1) Si f est un morphisme de e vers $2^{e'}$, alors on a

(1) $$2^{(f^d)} . t_e = f .$$

En effet, ceci équivaut à

$$\varepsilon_{e'} . (2^{(f^d)} \times e') . (t_e \times e') = \varepsilon_{e'} . (f \times e');$$

mais

$$\varepsilon_{e'} . (2^{(f^d)} \times e') = \varepsilon_{2^e} . (2^{(2^e)} \times f^d);$$

il nous faut donc

$$\varepsilon_{2^e} . (t_e \times 2^e) . (e \times f^d) = \varepsilon_{e'} . (f \times e'),$$

c'est-à-dire

$$\varepsilon_e \cdot S_e^{-1} \cdot (e \times f^d) = \varepsilon_{e'} \cdot (f \times e'),$$

ou

$$\varepsilon_e \cdot (f^d \times e) \cdot S_{e,e'} = \varepsilon_{e'} \cdot (f \times e'),$$

ce qui est justement la définition de f^d (voir début du § IV.2).

2) Soit u un morphisme de e' dans 2^e, alors on a

(2) $$(2^u \cdot t_e)^d = u.$$

En effet, ceci revient à

$$\varepsilon_e \cdot ((2^u \cdot t_e)^d \times e) = \varepsilon_e \cdot (u \times e),$$

ou successivement

$$\varepsilon_{e'} \cdot (2^u \cdot t_e \times e') \cdot S_{e',e} = \varepsilon_e \cdot (u \times e),$$

$$\varepsilon_{e'} \cdot (2^u \times e') \cdot (t_e \times e') \cdot S_{e',e} = \varepsilon_e \cdot (u \times e),$$

$$\varepsilon_{2^e} \cdot (2^{(2^e)} \times u) \cdot (t_e \times e') \cdot S_{e',e} = \varepsilon_e \cdot (u \times e),$$

$$\varepsilon_{2^e} \cdot (t_e \times 2^e) \cdot (e \times u) \cdot S_{e',e} = \varepsilon_e \cdot (u \times e),$$

ce qui est vrai, vu la définition de t_e. Il est alors clair que t_e est un projecteur : Pour un f de e dans $2^{e'}$ on a la factorisation (1), et l'unicité grâce à (2).

Reste à voir que Π est bien l'adjoint ainsi défini, c'est-à-dire que pour tout f de source e et de but e' on a

$$2^{((t_{e'} \cdot f)^d)} = 2^{(2^f)},$$

soit

(3) $$(t_{e'} \cdot f)^d = 2^f$$

ou

$$\varepsilon_e \cdot ((t_{e'} \cdot f)^d \times e) = \varepsilon_e \cdot (2^f \times e),$$

ou

$$\varepsilon_{2^{e'}} \cdot ((t_{e'} \cdot f) \times 2^{e'}) \cdot S_{2^{e'},e} = \varepsilon_e \cdot (2^f \times e),$$

ou encore

$$\varepsilon_{2^{e'}} . (t_{e'} \times 2^{e'}) . (f \times 2^{e'}) . S_{2^{e'}, e} = \varepsilon_e . (2^f \times e),$$

et par suite

$$\varepsilon_{e'} . (2^{e'} \times f) = \varepsilon_e . (2^f \times e),$$

ce qui est la définition de 2^f.

L'adjonction de la proposition IV.4 détermine donc un triple dans $C^{\cdot}$: Posons $2^{(2^e)} = \Pi(e)$. La multiplication de ce triple est en tout $e \in C^{\cdot}_0$ l'unique flèche K_e de $\mathcal{P}^{\star}(C^{\cdot})^{\cdot}$ (i.e. de la forme 2^{k_e}) telle que

$$K_e . t_{\Pi(e)} = \Pi(e), \quad \text{soit} \quad 2^{k_e} . t_{\Pi(e)} = \Pi(e) \quad \text{ou}$$

$$\varepsilon_{2^e} . (2^{k_e} \times 2^e) . (t_{\Pi(e)} \times 2^e) = \varepsilon_{2^e},$$

ou encore

$$\varepsilon_{2^{\Pi(e)}} . (\Pi^2(e) \times k_e) . (t_{\Pi(e)} \times 2^e) = \varepsilon_{2^e},$$

$$\varepsilon_{2^{\Pi(e)}} . (t_{\Pi(e)} \times 2^{\Pi(e)}) . (\Pi(e) \times k_e) = \varepsilon_{2^e} ;$$

c'est-à-dire

$$\varepsilon_{\Pi(e)} . (k_e \times \Pi(e)) . S_{\Pi(e), 2^e} = \varepsilon_{2^e} .$$

Mais comme

$$\varepsilon_{2^e} = \varepsilon_{\Pi(e)} . (t_{2^e} \times \Pi(e)) . S_{\Pi(e), 2^e} ,$$

il vient $k_e = t_{2^e}$.

PROPOSITION IV.5. *Le triplet* $\overline{\Pi} = (\Pi, t, 2^{t_{2^{(-)}}})$ *est un triple dans* $C^{\cdot}$, *dont la catégorie de Kleisli est isomorphe à la catégorie duale* $\mathbf{P}(C^{\cdot})^{\cdot *}$ *de* $\mathbf{P}(C^{\cdot})^{\cdot}$.

PREUVE. Il reste seulement à prouver la dernière affirmation : Si f a pour source e et pour but $\Pi(e')$, on lui associe f^d qui a pour source $2^{e'}$ et but 2^e. Il est clair que cette association définit une bijection de $Kl(\overline{\Pi})$ sur $\mathbf{P}(C^{\cdot})$. Montrons qu'elle définit un foncteur contravariant : Si g a pour source e' et pour but $\Pi(e'')$, il nous faut avoir

(1) $$(2^{(t_{2^{e''}})} . \Pi(g) . f)^d = f^d . g^d ,$$

ce qui se transforme aisément en

$$\varepsilon_{2^{e''}} . (2^{t_{2^{e''}}} . \Pi(g) \times 2^{e''}) . (f \times 2^{e''}) = \varepsilon_{2^{e'}} . (2^{(2^{e'})} \times g^d) . (f \times 2^{e''});$$

il nous suffit donc de montrer que

$$\varepsilon_{2^{e''}} . (2^{t_{2^{e''}}} . 2^{2^g} \times 2^{e''}) = \varepsilon_{2^{e'}} . (2^{(2^{e'})} \times g^d),$$

$$\varepsilon_{2^{e''}} . (2^{2^g . t_{2^{e''}}} \times 2^{e''}) = \varepsilon_{2^{e'}} . (2^{(2^{e'})} \times g^d),$$

soit

$$\varepsilon_{2^{e'}} . (2^{(2^{e'})} \times 2^g . t_{2^{e''}}) = \varepsilon_{2^{e'}} . (2^{(2^{e'})} \times g^d).$$

Mais on a bien $2^g . t_{2^{e''}} = g^d$ (formule (2) de la preuve de la proposition IV.4.)

Supposons que $C^{\cdot}$ soit une catégorie à $\mathfrak{M}_0$-produits. On sait qu'alors le foncteur $Hom_{C^{\cdot}}(u, -)$ de C^* vers $\mathfrak{M}^0$ admet un adjoint, ce qui donne lieu à un cotriple dans $C^{\cdot *}$, c'est-à-dire à un triple dans $C^{\cdot}$, qui, dans le cas où l'on prend pour u le but 2 de m (cf. § IV.1), sera noté $\tilde{\tilde{\Pi}} = (\tilde{\Pi}, \tilde{t}, \tilde{K})$. On suppose de plus que $\alpha(m)$ est un élément final de $C^{\cdot}$. A tout morphisme f de e dans 2 correspond par adjonction cartésienne un morphisme f de 1 dans 2^e, d'où le morphisme $2^{(f^d)}$ de $2^{(2^e)}$ vers 2. On sait que $\tilde{\Pi}(e) = \prod_{2.C.e} 2$ de sorte que $j_e = [2^{(f^d)}]_{f \in 2.C.e}$ est un morphisme de $\Pi(e)$ vers $\tilde{\Pi}(e)$. On pose $j = (j_e)_{e \in C_0^{\cdot}}$. Par des calculs longs mais sans surprises on établit:

PROPOSITION IV.6. *j est une transformation naturelle de Π vers $\tilde{\Pi}$, et définit un morphisme du triple $\bar{\Pi}$ vers le triple $\tilde{\tilde{\Pi}}$.*

On pourra chercher des conditions pour que j soit un isomorphisme. C'est par exemple le cas pour $\mathfrak{M}^0$.

REMARQUE. Quand on regarde la forme du triple $\bar{\Pi}$, on peut, comme me l'a suggéré mon camarade R. Dorard, se demander si, étant donné un foncteur contravariant F dans une catégorie $C^{\cdot}$ et une transformation naturelle t de $Id_{C^{\cdot}}$ vers $F \circ F = F^2$, le triplet $F^2 = (F^2, t, F.t_F)$ est un triple. Effectivement, on peut montrer que si pour tout $e \in C_0^{\cdot}$ on a

$$F(t_e) . t_{F(e)} = F(e),$$

alors F^2 est un triple. Ceci suggère donc une troisième manière de définir un triple $\bar{\Pi}$. Notons qu'en particulier, ce qui est donné au paragraphe suivant comme valable pour les triples $\bar{\Pi}$ ou $\tilde{\bar{\Pi}}$ l'est aussi pour les triples de la forme F^2.

IV.4. Idempotents dans les triples $\bar{\mathfrak{P}}$ et $\bar{\Pi}$.

A titre d'application de la notion de triple de sous-structuration et des quelques développements ci-dessus, on montre comment dans une catégorie s'introduisent les notions de «pseudocongruence» et de «topologie gauche». Ceci fournit un nouvel éclairage du début de l'article, et permettrait, par exemple, une nouvelle version du paragraphe II.

Soit $S=(S,\ \varepsilon,\ \mu)$ un triple dans une catégorie $C^{\cdot}$. Un morphisme M de $C^{\cdot}$, de source $e \in C_0^{\cdot}$ et de but $S(e)$, sera dit *S-idempotent* si

(I) $$M = \mu_e . S(M) . M .$$

(On remarquera que si $U=(C^{\cdot}, \underline{U}, K^{\cdot})$ et $F=(K^{\cdot}, \underline{F}, C^{\cdot})$ forment un couple d'adjoints induisant le triple S, la donnée de M équivaut à la donnée d'un idempotent dans $K^{\cdot}$ au point $F(e)$).

Si M est un S-idempotent de source e, et N un S-idempotent de source e', un morphisme f de e vers e' dans $C^{\cdot}$ sera dit *S-continu* de M vers N si

(c) $$\mu_{e'} . S(N) . S(f) . M = N . f .$$

Soit $Id(S)$ la classe des triplets (N, f, M) où f est S-continu du S-idempotent M vers le S-idempotent N; on la munit de la composition «.»:

$$(N', f', M').(N, f, M) = (N', f'.f, M) \quad \text{si et seulement si } M' = N.$$

On vérifie, grâce à l'associativité de μ, que cette composition est bien interne dans $Id(S)$, et que le système multiplicatif $Id(S)^{\cdot}$ est une catégorie. (L'existence d'unités sources et buts, par exemple, résulte de (I)). L'application qui à $(N, f, M) \in Id(S)$ associe $f \in C$ définit un foncteur Θ_S de $Id(S)^{\cdot}$ vers $C^{\cdot}$; l'unité ε du triple S sert alors exactement à montrer que Θ_S admet un adjoint, la Θ_S-structure libre sur $e \in C_0^{\cdot}$ étant le S-idempotent ε_e.

DEFINITION. Soit $S = (S, \varepsilon, \mu)$ un triple dans une catégorie $C^{\cdot}$, et K un sous-foncteur de S défini par un monomorphisme naturel $j = (S, j, K)$. On appelle *(S, K)-idempotent en $e \in C_0^{\cdot}$* un S-idempotent M en e tel qu'il existe un M' vérifiant $M = j_e . M'$.
On note $Id(S, K)^{\cdot}$ la catégorie des morphismes S-continus entre (S, K)-idempotents, et $\Theta_{(S,K)}$ le foncteur d'oubli de $Id(S, K)^{\cdot}$ vers $C^{\cdot}$.

Une condition R sur un M s'exprimant par l'égalité de deux composés de morphismes obtenus à l'aide de S, ε, μ et M sera dite *S-simple*. Par exemple la condition d'idempotence est simple. Un autre exemple est la condition

$$S(M).M = S(M).\varepsilon_e,$$

qui est strictement plus forte que l'idempotence.

Soit $Id(S, K)^{\cdot}_R$ la sous-catégorie pleine de $Id(S, K)^{\cdot}$ ayant pour objets les M satisfaisant la condition S-simple R.

L'étude systématique des catégories du type $Id(S, K)^{\cdot}_R$ fera l'objet d'une prochaine publication; nous nous contenterons, ici, pour conclure, de donner deux exemples fondamentaux.

En premier lieu, soit $\overline{\mathfrak{P}}$ le triple «partie» introduit au paragraphe I, et R la condition $\overline{\mathfrak{P}}$-simple :

$$\mathfrak{P}(M).M = \mathfrak{P}(M).\gamma_{a(M)}.$$

Un tel M sera appelé pseudo-congruence. Alors $Id(\overline{\mathfrak{P}})^{\cdot}_R$ est isomorphe à la catégorie ayant pour objets les (X, M) où $X \in \mathfrak{M}_0$ et où M est une relation sur X satisfaisant

1) $(\forall x \in X) \quad M(x) \neq \emptyset$,

2) $(\forall x, x' \in X)\ (x' \in M(x) \Longrightarrow M(x') = M(x))$,

et pour morphismes les triplets $((X', M'), f, (X, M))$ où f est une application de X dans X' vérifiant :

$$(\forall x \in X)(\forall x' \in X')\ [x' \in M'(f(x)) \Longleftrightarrow$$
$$(\exists x_2 \in X)\ [(x' \in M'(f(x_2))) \text{ et } (x_2 \in M(x))]].$$

La sous-catégorie pleine de $Id(\overline{\mathfrak{P}})^{\cdot}_R$ ayant pour objets les M réflexifs est exactement la catégorie des applications compatibles entre relations d'équivalences.

Nous allons considérer le cas particulier où S est le triple $\overline{\Pi}$ défini au paragraphe précédent dans une catégorie $C^{\cdot}$:
Tout d'abord, si $e \in C^{\cdot}_0$, par l'adjonction cartésienne on a une bijection de $Hom_{C^{\cdot}}(2^e, 2^e)$ sur $Hom_{C^{\cdot}}(2^{(2^e)}, e)$, associant à un μ de source et de but 2^e le M de e dans $2^{(2^e)}$ défini par

$$\varepsilon_e . (\mu \times e) = \varepsilon_{2^e} . (M \times 2^e) . S_{2^e, e} .$$

Il est facile de voir que

$$M = 2^{\mu} . t_e \quad \text{et} \quad \mu = 2^M . t_{2^e} ;$$

la multiplication du triple $\overline{\Pi}$ étant $2^{t_{2^e}} = K_e$ au point e, on voit que $2^{\mu} = K_e . \Pi(M)$, d'où l'on déduit que la condition (I) sur M se traduit pour μ par

(I') $$\mu . \mu = \mu .$$

Soit maintenant (N, f, M) un élément de $Id(\overline{\Pi})$, c'est-à-dire un un triplet tel que $f \in e' . C . e$ vérifiant

(C1) $$K_{e'} . \Pi(N) . \Pi(f) . M = N . f .$$

Ceci entraîne

(C2) $$K_{e'} . \Pi(K_{e'} . \Pi(N) . \Pi(f) . M) = K_{e'} . \Pi(N . f) .$$

Inversement, en composant à droite avec t_e les deux membres de (C2), on obtient

$$K_{e'} . \Pi(K_{e'} . \Pi(N) . \Pi(f) . M) . t_e = K_{e'} . \Pi(N . f) . t_e ,$$

soit

$$K_{e'} . t_{\Pi(e')} . K_{e'} . \Pi(N) . \Pi(f) . M = K_{e'} . t_{\Pi(e')} . N . f$$

d'où (C1) puisque $K_{e'} . t_{\Pi(e')} = \Pi(e')$. Mais alors (C2) s'écrit aussi

$$K_{e'} . \Pi(K_{e'}) . \Pi^2(N) . \Pi^2(f) . \Pi(M) = K_{e'} . \Pi(N) . \Pi(f) ,$$

$$K_{e'} . K_{\Pi(e')} . \Pi^2(N) . \Pi^2(f) . \Pi(M) = K_{e'} . \Pi(N) . \Pi(f) ,$$

$$K_{e'} . \Pi(N) . K_{e'} . \Pi^2(f) . \Pi(M) = K_{e'} . \Pi(N) . \Pi(f) ,$$

$$K_{e'} . \Pi(N) . \Pi(f) . K_e . \Pi(M) = K_{e'} . \Pi(N) . \Pi(f),$$

soit, si ν est le morphisme associé à N,

$$2^{\nu} . 2^{(2^f)} . 2^{\mu} = 2^{\nu} . 2^{(2^f)},$$

ou

$$2^{(\mu . 2^f . \nu)} = 2^{(2^f . \nu)},$$

ce qui équivaut à

(c') $$\mu . 2^f . \nu = 2^f . \nu .$$

Dans le cas où $C^{\cdot} = \mathfrak{M}^{\circ}$ et où μ et ν sont des fermetures, c'est par cette condition que, au paragraphe II, on a défini les fonctions continues de μ vers ν. Autrement dit, la catégorie $\Sigma(\mathfrak{M}^{\circ})^{\circ}$ est une sous-catégorie pleine de la catégorie $Id(\overline{\overline{\Pi}}_{\mathfrak{M}^{\circ}})$, si $\overline{\overline{\Pi}}_{\mathfrak{M}^{\circ}}$ est le triple $\overline{\overline{\Pi}}$ du paragraphe précédent, lorsque $C^{\cdot} = \mathfrak{M}^{\circ}$. Ainsi, pour définir $\Sigma(C^{\cdot})^{\cdot}$ (resp. $\mathfrak{T}(C^{\cdot})^{\cdot}$), il ne reste plus qu'à caractériser les fermetures (resp. les topologies) parmi les $\overline{\overline{\Pi}}$-idempotents, sans plus se préoccuper de la continuité des morphismes.

Plaçons-nous dans $\mathfrak{M}^{\circ}$: pour tout ensemble X, soit $T_g(X)$ le sous-ensemble de $\Pi(X)$ formé des ensembles $\hat{A}$ de parties de X vérifiant:

1. $\emptyset \in \hat{A}$,
2. $A \in \hat{A}$ et $B \supset A$ entraînent $B \in \hat{A}$.
3. $A \cup B \in \hat{A}$ entraîne $A \in \hat{A}$ ou $B \in \hat{A}$.

Alors T_g se prolonge en un sous-foncteur de Π. De plus, un M de X dans $\Pi(X)$ prend en fait ses valeurs dans $T_g(X)$ si et seulement si le μ qui lui correspond de $\mathfrak{P}(X)$ dans $\mathfrak{P}(X)$ vérifie les conditions:

1. $\mu(\emptyset) = \emptyset$,
2. Si $A \subset B$ alors $\mu(A) \subset \mu(B)$,
3. Pour tout A et B on a $\mu(A \cup B) = \mu(A) \cup \mu(B)$.

Si bien que, lorsque M est idempotent, c'est-à-dire si

4. Pour tout A, $\mu(\mu(A)) = \mu(A)$,

la seule propriété à ajouter pour que M soit une topologie est:

$$\text{pour tout } A, \quad \mu(A) \supset A.$$

Contrairement aux propriétés 1, 2, 3 et 4, il ne semble pas que cette dernière propriété puisse s'exprimer sans utiliser explicitement l'ordre sur $\Pi(X)$, c'est-à-dire par la donnée d'un sous-foncteur de Π ou, à la rigueur, par la donnée d'une condition $\overline{\Pi}$-simple.

On appellera *topologie gauche* sur un ensemble X une application μ de $\mathfrak{P}(X)$ dans $\mathfrak{P}(X)$ satisfaisant aux propriétés 1 à 4 ci-dessus, et on notera $\mathcal{T}^{o}_{g}$ la catégorie (au-dessus de $\mathfrak{M}^{o}$) des applications continues entre topologies gauches. On a donc alors:

PROPOSITION. *$Id(\overline{\Pi}, T_g)^{\cdot}$ est isomorphe à $\mathcal{T}^{o}_{g}$*

On remarquera de plus que le foncteur injection canonique ι de $\mathcal{T}^{o}$ dans $\mathcal{T}^{o}_{g}$ admet un adjoint: Si (X, μ) est une topologie gauche, on définit la topologie $(X, \hat{\mu})$ par $\hat{\mu}(A) = \bigcap_{\substack{A \subset F \subset X \\ \mu(F) = F}} F$. On obtient bien ainsi un adjoint $\hat{-}$ à ι. Par ailleurs, soit $\mathcal{T}^{\prime\prime o}$ la catégorie des applications continues ouvertes entre topologies. Si (X, μ) est une topologie, on définit $\check{\mu}$ par:

$$(\forall A \subset X) \quad \check{\mu}(A) = \mu(A) \setminus is_{\mu}(\mu(A)),$$

$is_{\mu}(B)$ désignant pour tout $B \subset X$ l'ensemble des points isolés de B pour μ. $\check{-}$ est un foncteur de $\mathcal{T}^{\prime\prime o}$ vers $\mathcal{T}^{o}_{g}$, et on note $\mathfrak{pf}$ le foncteur $\hat{-} \circ \check{-}$ de $\mathcal{T}^{\prime\prime o}$ dans $\mathcal{T}^{o}$. On pourra remarquer qu'un espace (X, μ) vérifie:

$$\mathfrak{pf}(X, \mu) = (X, \mu)$$

si et seulement si tout fermé de (X, μ) peut s'écrire comme intersection de fermés sans points isolés (i.e. d'ensembles parfaits). Ceci est vérifié en particulier dès que tout point $x \in X$ admet une base fondamentale de voisinages parfaits avec $\{x\}$ intersection de cette base. Ce dernier point est réalisé si (X, μ) est métrique sans point isolé.

Cet article sera suivi d'une deuxième partie qui débutera par le développement d'une Note aux Compte-rendus communiquée le 17 Juillet 1972 sous le titre: «Sur les idempotents dans les triples et la description des structures».

Références.

[1] C. EHRESMANN, *Cours de C3 : Algèbre,* CDU, Paris 1968.

[2] DAVAR-PANAH, *Catégories de relations,* Thèse de 3ème cycle (multigraphiée), Paris, 1968.

[3] DIEGO, *Sur les algèbres de Hilbert,* Coll. de Logique Mathématique Série A n° 21, Gauthiers-Villars, Paris 1968.

[4] G. CHOQUET, Convergences, *Annales de l'université de Grenoble,* t. XXIII (1947-48), page 57.

[5] E. MICHAEL, Topology on spaces of subsets, *T.A.M.S.* 71 (1951).

[6] O. FEICHTINGER, Properties of the λ-topology, *Lecture Notes* 171 Springer (1970).

[7] R. PUPIER et A. ROUX, Une caractérisation des espaces localement compacts, *C.R.A.S.* t. 266 (1968), p. 910.

[8] N. BOURBAKI, *Topologie générale,* ch. 2, Hermann.

[9] O.A. LAUDAL, Sur les limites projectives et inductives. *Ann. Sc. Ec. Norm. Sup* p. 241, t. 82, 1965.

[10] C. EHRESMANN, *Catégories et structures,* Dunod, Paris, 1965.

[11] J. BENABOU et J. CELEYRETTE, Généralités sur les topos de Lawvere et Tierney, *Séminaire Bénabou* (multigraphié, Paris, 1971).

[12] R. GUITART, Relations- Fermetures- Continuité, *Esquisses Mathématiques* 1, Paris, 1970.

[13] R. GUITART, *C.R.A.S.* a) 270 p. 1388; b) 270 p. 1572; c) 271 p. 635; d) 272 p. 1175; e) 273 p. 558.

Département de Mathématiques
Tours 45-55
Université Paris VII
2 Place Jussieu
75- Paris (5e).