CAHIERS DE
TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
CATÉGORIQUES

PIERRE MICHAUD

Faisceaux principaux et plongements

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 12, n° 4 (1971), p. 469-497

<http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1971__12_4_469_0>

CAHIERS DE TOPOLOGIE
ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE

Vol. XII,4

FAISCEAUX PRINCIPAUX ET PLONGEMENTS

par Pierre MICHAUD

Introduction

L'essentiel de cet article est l'exposé d'une méthode permettant d'étudier les voisinages d'un sous-espace X d'un espace topologique Y lorsque X et Y sont munis de diverses structures. Moyennant le théorème de restriction (1.2.2) et les propriétés des Γ-plongements (2.3.2), il suffira en effet de montrer que certains faisceaux de germes d'homéomorphismes sont fins par rapport à certains autres (1.2.1) pour avoir un voisinage de X dans Y possédant une structure plus précise que celle qui est donnée (2.3.6). C'est ce que nous faisons dans trois cas; en 3.1.3 on obtient un voisinage feuilleté transversalement pour une sous-variété d'une variété différentiable réelle, en 3.1.4 on obtient un voisinage tubulaire sous des conditions de différentiabilité plus faibles que lorsque l'on utilise l'application exponentielle; enfin en 3.2.1 on donne un exemple d'utilisation dans le cas topologique.

Les résultats de cet article ont, pour l'essentiel, été annoncés dans [9].

Chapitre 1

FAISCEAUX PRINCIPAUX

Après avoir fait quelques rappels sur les faisceaux principaux, on démontre le théorème de restriction.

1.1. Généralités sur les faisceaux principaux. (cf. [4]. Chapitre 1)

1.1.1. Soit G un groupe opérant à gauche sur un ensemble P. Nous disons que G opère *principalement* sur P si, pour tout couple de points p, p' de P, il existe un élément g de G et un seul tel que $gp = p'$. Si P est non vide, pour que G opère principalement sur P, il faut et il suffit qu'il existe $p \in P$ tel que l'application $g \to gp$ de G dans P soit un isomorphisme d'ensembles à opérateurs; cette propriété est alors vraie pour tout élément p de P.

Soit G un groupe opérant principalement sur deux ensembles P et P' non vides; un homomorphisme d'ensembles à opérateurs de P dans P' est toujours un isomorphisme; on dira que c'est un *G-isomorphisme* et on étendra l'expression au cas où P et P' sont vides tous les deux.

1.1.2. Soit X un espace topologique et soit $\mathcal{G}$ un faisceau de groupes sur X opérant à gauche sur un faisceau d'ensembles $\mathcal{P}$ sur X; on dit que $\mathcal{P}$ est un *faisceau $\mathcal{G}$-principal* si tout point de X possède un voisinage ouvert U tel qu'il existe un isomorphisme $\mathcal{G}|U \to \mathcal{P}|U$ de faisceaux d'ensembles à opérateurs; pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que pour tout $x \in X$ la fibre $\mathcal{G}_x$ opère principalement sur la fibre $\mathcal{P}_x$ et que cette dernière soit non vide, ou encore il faut et il suffit que, pour tout ouvert U de X, $\mathcal{G}(U)$ opère principalement sur $\mathcal{P}(U)$ et que tout point de X possède un voisinage U tel que $\mathcal{P}(U)$ soit non vide.

Si $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont deux faisceaux $\mathcal{G}$-principaux sur X, on appelle *$\mathcal{G}$-isomorphisme* de $\mathcal{P}$ sur $\mathcal{P}'$ tout isomorphisme de faisceaux d'ensembles à opérateurs $F : \mathcal{P} \to \mathcal{P}'$. Pour qu'un homomorphisme de faisceaux d'ensembles $F : \mathcal{P} \to \mathcal{P}'$ soit un $\mathcal{G}$-isomorphisme, il faut et il suffit que, pour tout ouvert U de X, $F(U)$ soit un $\mathcal{G}(U)$-isomorphisme de $\mathcal{P}(U)$ sur $\mathcal{P}'(U)$, ou encore que, pour tout $x \in X$, F_x soit un $\mathcal{G}_x$-isomorphisme de $\mathcal{P}_x$ sur $\mathcal{P}'_x$.

1.1.3. Soient X un espace topologique et $\mathcal{G}$ un faisceau de groupes sur X. Un *cocycle sur X à valeurs dans* $\mathcal{G}$ est un couple $((U_i)_{i\in I}, (g_{ij})_{(i,j)\in I^2})$, où $(U_i)_{i\in I}$ est un recouvrement ouvert de X et g_{ij} est un élément de $\mathcal{G}(U_i \cap U_j)$, la famille des g_{ij} étant astreinte à vérifier la condition:

$$\forall\ (i,j,k) \in I^3, \qquad x \in U_i \cap U_j \cap U_k, \quad g_{ik}(x) = g_{ij}(x) g_{jk}(x).$$

Si $((U_i)_{i\in I}, (g_{ij}))$ et $((U'_k)_{k\in K}, (g'_{kl}))$ sont des cocycles sur X, à valeurs dans $\mathcal{G}$, la relation :

Il existe un recouvrement ouvert $(W_m)_{m\in M}$ de X, deux applications $\theta : M \to I$, $\theta' : M \to K$ et une famille de sections $(h_m)_{m\in M}$, où $h_m \in \mathcal{G}(W_m)$, tels que pour tout $m \in M$ on ait $W_m \subset U_{\theta m} \cap U'_{\theta' m}$ et que pour tout couple $(m,p) \in M^2$ et tout $x \in W_m \cap W_p$ on ait

$$g'_{\theta' m \theta' p}(x) = h_m(x)^{-1} g_{\theta m \theta p} h_p(x).$$

est une relation d'équivalence.

Tout cocycle sur X à valeurs dans $\mathcal{G}$ étant équivalent à un cocycle indexé par X, les classes d'équivalence des cocycles sur X à valeurs dans $\mathcal{G}$ forment un ensemble que l'on appelle *premier ensemble de cohomologie de X à valeurs dans* $\mathcal{G}$ et que l'on note $H^1(X;\mathcal{G})$; cet ensemble n'est pas un groupe mais il possède un élément distingué qui est la classe du cocycle formé par la seule section neutre de $\mathcal{G}$ sur X.

Soit $\mathcal{P}$ un faisceau $\mathcal{G}$-principal; à toute famille de sections $(p_i)_{i\in I}$ de $\mathcal{P}$ dont les domaines de définition forment un recouvrement ouvert $(U_i)_{i\in I}$ de X, on peut associer le cocycle $((U_i)_{i\in I}, (g_{ij}))$, où g_{ij} est la *section de transition passant de* $p_i | U_i \cap U_j$ *à* $p_j | U_i \cap U_j$ (i.e. l'élément de $\mathcal{G}(U_i \cap U_j)$ défini par la relation

$$p_i | U_i \cap U_j = g_{ij}(p_j | U_i \cap U_j) \ ;$$

l'élément de $H^1(X;\mathcal{G})$ défini par ce cocycle ne dépend que de la classe de $\mathcal{G}$-isomorphismes $[\mathcal{P}]$ de $\mathcal{P}$. En outre l'application qui, à une classe de $\mathcal{G}$-isomorphismes de faisceaux principaux, associe l'élément de $H^1(X;\mathcal{G})$

obtenu comme ci-dessus, est une bijection et même un isomorphisme d'ensembles à élément distingué, l'élément distingué de $H^1(X;\mathcal{G})$ étant la classe $[\mathcal{G}]$ ([4] proposition 4.1 page 148).

1.1.4. Soient $\mathcal{G}_0$ un sous-faisceau de groupes d'un faisceau de groupes $\mathcal{G}$ sur un espace topologique X et $\mathcal{P}_0$ un sous-faisceau d'un faisceau $\mathcal{G}$-principal $\mathcal{P}$; on dit que $\mathcal{P}_0$ est une $\mathcal{G}_0$-*restriction* de $\mathcal{P}$ (ou que $\mathcal{P}$ est une $\mathcal{G}$-*prolongation* de $\mathcal{P}_0$) si $\mathcal{P}_0$ est un faisceau $\mathcal{G}_0$-principal pour la loi induite. (La définition donnée en [9] 1.1 est inexacte).

Si on identifie ensembles de classes d'isomorphisme et premiers ensembles de cohomologie et si $\mathcal{P}_0$ est une $\mathcal{G}_0$-restriction de $\mathcal{P}$, alors la classe $[\mathcal{P}]$ est l'image de la classe $[\mathcal{P}_0]$ par l'application

$$i^*: H^1(X;\mathcal{G}_0) \to H^1(X;\mathcal{G})$$

qui, à l'élément de $H^1(X;\mathcal{G}_0)$ défini par un cocycle sur X à valeurs dans $\mathcal{G}_0$, associe l'élément de $H^1(X;\mathcal{G})$ défini par ce même cocycle; ce dernier élément ne dépend en effet que de l'image du cocycle dans $H^1(X;\mathcal{G}_0)$. Il en résulte que tout faisceau $\mathcal{G}_0$-principal admet une $\mathcal{G}$-prolongation; de plus, un faisceau $\mathcal{G}$-principal $\mathcal{P}$ admet une $\mathcal{G}_0$-restriction si et seulement si sa classe $[\mathcal{P}]$ est dans l'image de i^*; plus précisément, l'ensemble des classes de $\mathcal{G}_0$-isomorphisme des $\mathcal{G}_0$-restrictions de $\mathcal{P}$ est égal à l'image réciproque de $[\mathcal{P}]$ par i^*.

Notons enfin que, pour qu'un faisceau $\mathcal{G}$-principal $\mathcal{P}$ possède une $\mathcal{G}_0$-restriction, il faut et il suffit qu'il existe une famille de sections de $\mathcal{P}$ dont les domaines de définition constituent un recouvrement ouvert de X et dont les sections de transition soient à valeurs dans $\mathcal{G}_0$.

1.2. Un théorème de restriction.

1.2.1. DEFINITIONS. Soit $\mathcal{G}_0$ un sous-faisceau de groupes d'un faisceau de groupes $\mathcal{G}$ sur un espace topologique X. On dira que $\mathcal{G}$ est *fin relativement à* $\mathcal{G}_0$ si, pour tout point $x \in X$, il existe un voisinage ouvert Ω de x tel que, pour tout ouvert U inclus dans Ω, pour tout couple (A, B) de sous-ensembles de U fermés dans U et disjoints, et pour toute section s de $\mathcal{G}$ au-dessus de U, il existe une section $\bar{s}$ de $\mathcal{G}$ au-dessus de U égale à s sur A, prenant ses valeurs dans $\mathcal{G}_0$ sur B et telle que pour tout $y \in U$, la relation $s(y) \in \mathcal{G}_0$ implique $\bar{s}(y) = s(y)$. Les ouverts Ω possédant la propriété ci-dessus seront appelés *domaines de finesse pour* $\mathcal{G}$ *relativement à* $\mathcal{G}_0$.

1.2.2. THEOREME. *Soit* $\mathcal{G}_0$ *un sous-faisceau de groupes d'un faisceau de groupes* $\mathcal{G}$ *sur un espace topologique* X. *On suppose que :*

a) X *est paracompact et tout ouvert de* X *est un espace normal;*

b) le faisceau $\mathcal{G}$ *est fin relativement à* $\mathcal{G}_0$.

Alors tout faisceau $\mathcal{G}$*-principal possède une* $\mathcal{G}_0$*-restriction.*

La démonstration repose sur deux lemmes :

1.2.3. LEMME. *Soit* X *un espace topologique et soit* $(V_i)_{i \in I}$ *une famille localement finie d'ouverts de* X. *Soit* $\mathfrak{R}$ *l'ensemble des familles d'ouverts* $(U_i)_{i \in J}$ *de* X *telles que* J *soit un sous-ensemble de* I, *que, pour tout* $i \in J$, U_i *soit inclus dans* V_i *et que les ensembles* $\bigcup_{i \in J} U_i$ *et* $\bigcup_{i \in J} V_i$ *soient égaux. Sur* $\mathfrak{R}$ *la relation* $(U_i)_{i \in J} \leqslant (U'_i)_{i \in J'}$, *définie par*

$$\text{«}\, J \subset J' \text{ et } \forall i \in J,\ U_i \setminus \big(\bigcup_{j \in J' \setminus J} U'_j\big) \subset U'_i \subset U_i \,\text{»}$$

est une relation d'ordre pour laquelle $\mathfrak{R}$ *est inductif.*

DEMONSTRATION. La relation $\leqslant$ est évidemment réflexive et antisymétrique; pour établir que $\mathfrak{R}$ est une relation d'ordre, seule la transitivité pose un problème. Supposons que :

$$(U_i)_{i \in J} \leqslant (U'_j)_{j \in J'} \leqslant (U''_k)_{k \in J''};$$

alors :

$$(1) \qquad \forall\, i \in J,\ U_i \setminus \big(\bigcup_{j \in J' \setminus J} U'_j\big) \subset U'_i \subset U_i,$$

$$(2) \qquad \forall\, j \in J',\ U'_j \setminus \big(\bigcup_{k \in J'' \setminus J'} U''_k\big) \subset U''_j \subset U'_j.$$

Pour $i \in J$ on a donc $U''_i \subset U'_i \subset U_i$; prenons l'intersection de (1) avec $X \setminus \big(\bigcup_{k \in J'' \setminus J'} U''_k\big)$ et utilisons (2) avec $j = i$. Il vient

$$U_i \setminus \Big[\big(\bigcup_{j \in J' \setminus J} U'_j\big) \cup \big(\bigcup_{k \in J'' \setminus J'} U''_k\big)\Big] \subset U''_i;$$

or d'après (2)

$$(\bigcup_{j\in J''\setminus J} U'_j) \cup (\bigcup_{k\in J'''\setminus J'} U''_k) \subset \bigcup_{k\in J'''\setminus J} U''_k \text{ (et même égalité)},$$

d'où l'on conclut $U_i \setminus (\bigcup_{k\in J'''\setminus J_{\mathfrak{R}}} U''_k) \subset U''_i$, ce qui montre que $\leqslant$ est une relation d'ordre. Montrons que $\mathfrak{R}$ est inductif pour cette relation et pour cela soit A un ensemble totalement ordonné d'éléments de $\mathfrak{R}$. Pour tout $\alpha \in A$ écrivons $\alpha = (U_i^\alpha)_{i\in J_\alpha}$ et posons $J = \bigcup_{\alpha\in A} J_\alpha$; par ailleurs pour $i \in J$ posons $U_i = \bigcap_{J_\alpha \ni i} U_i^\alpha$. Nous allons montrer que la famille $(U_i)_{i\in J}$ est dans $\mathfrak{R}$ et majore A. Pour cela nous allons choisir pour tout $x \in \bigcup_{j\in J} V_j$ un voisinage ouvert V_x qui ne rencontre qu'un nombre fini de V_i. Désignons par $V_{j_1}, \dots, V_{j_p}$ ceux parmi ces derniers tels que $i \in J$ et choisissons $\beta(x) \in A$ tel que $\{j_1, \dots, j_p\} \subset J_{\beta(x)}$. Si $\alpha \geqslant \beta(x)$, on a pour tout $i \in J_{\beta(x)}$

$$U_i^{\beta(x)} \setminus [\bigcup_{j\in J_\alpha\setminus J_{\beta(x)}} U_j^\alpha] \subset U_i^\alpha \subset U_i^{\beta(x)};$$

mais V_x ne rencontre aucun des V_j pour $j \in J_\alpha \setminus J_{\beta(x)}$, donc a fortiori aucun des U_j^α pour les mêmes j. D'où les relations:

$$V_x \cap U_i^{\beta(x)} = V_x \cap U_i^{\beta(x)} \setminus [\bigcup_{j\in J_\alpha\setminus J_{\beta(x)}} U_j^\alpha] \subset U_i^\alpha \cap V_x \subset U_i^{\beta(x)} \cap V_x .$$

Soit $U_i^\alpha \cap V_x = U_i^{\beta(x)} \cap V_x$ et, comme la famille $(U_i^\alpha)_{\alpha\in A}$ est décroissante, on aboutit au résultat que, pour tout $\alpha \geqslant \beta(x)$ et tout $i \in J_{\beta(x)}$, on a

$$U_i^\alpha \cap V_x = U_i \cap V_x .$$

Si $x \in U_i$, on a $i \in J_{\beta(x)}$ et le résultat ci-dessus montre, $U_i^{\beta(x)}$ étant ouvert, que U_i est ouvert. Par ailleurs on a: $\bigcup_{i\in J} U_i \subset \bigcup_{i\in J} V_i$; vérifions l'inclusion opposée: Soit $x \in V_i$ pour $i \in J$; on a $i \in J_{\beta(x)}$, or

$$\bigcup_{j\in J_{\beta(x)}} V_j = \bigcup_{j\in J_{\beta(x)}} U_j^{\beta(x)},$$

par conséquent il existe $j \in J_{\beta(x)}$ tel que $x \in U_j^{\beta(x)}$, d'où

$$x \in U_j^{\beta(x)} \cap V_x = U_j \cap V_x .$$

Nous avons finalement montré que la famille $(U_i)_{i\in J}$ est dans $\mathfrak{R}$. Reste à montrer que $(U_i)_{i\in J}$ majore un α quelconque de A. Soit donc, pour un tel α, $i \in J_\alpha$ et soit $x \in U_i^\alpha \setminus (\bigcup_{j \in J \setminus J_\alpha} U_j)$; il nous faut montrer que $x \in U_i$, les autres conditions étant évidentes. Soit K l'ensemble des $j \in J \setminus J_\alpha$ tels que V_j rencontre V_x. On a

$$x \in V_x \cap U_i^\alpha \setminus [\bigcup_{j \in J \setminus J_\alpha} U_j] = V_x \cap U_i^\alpha \setminus [\bigcup_{j \in K} U_j] .$$

Soit $\beta = Sup (\alpha, \beta(x))$; on a, en vertu des relations $\beta \geqslant \alpha$ et $i \in J_\alpha$,

$$V_x \cap U_i^\alpha \setminus [\bigcup_{j \in J_\beta \setminus J_\alpha} U_j^\beta] \subset V_x \cap U_i^\beta ;$$

de plus

$$V_x \cap U_i^\alpha \setminus [\bigcup_{j \in K} U_j] \subset V_x \cap U_i^\alpha \setminus [\bigcup_{j \in J_\beta \setminus J_\alpha} U_j^\beta] \quad \text{(et même égalité)},$$

puisque, si, pour $j \in J_\beta \setminus J_\alpha$, U_j^β rencontre $V_x \cap U^\alpha$, on a $j \in K$, et que, par ailleurs, puisqu'alors $j \in J_{\beta(x)}$, on a $U_j^\beta \cap V_x = U_j \cap V_x$, donc aussi $V_x \setminus U_j^\beta = V_x \setminus U_j$. Finalement

$$x \in V_x \cap U_i^\alpha \setminus [\bigcup_{j \in K} U_j] \subset V_x \cap U_i^\alpha \setminus [\bigcup_{j \in J_\beta \setminus J_\alpha} U_j^\beta] \subset V_x \cap U_i^\beta = V_x \cap U_i ,$$

ce qui achève la démonstration du lemme 1.2.3.

1.2.4. LEMME. *Sous les hypothèses du théorème 1.2.2, soit $\mathcal{P}$ un faisceau $\mathcal{G}$-principal, soit $(U_i)_{i \in K}$ une famille localement finie d'ouverts de X telle que chaque U_i soit inclus dans un domaine de finesse pour $\mathcal{G}$ relativement à $\mathcal{G}_0$ et, pour tout $i \in K$, soit $p_i \in \mathcal{P}(U_i)$, les sections de transition de la famille (p_i) étant à valeurs dans $\mathcal{G}_0$. Alors si V est un ouvert de X tel que $\mathcal{P}(V)$ soit non vide, il existe une famille $(W_i)_{i \in K}$ d'ouverts de X et une section p de $\mathcal{P}$ au-dessus de V telles que pour tout $i \in K$ on ait les inclusions $U_i \setminus V \subset W_i \subset U_i$ et que les sections de transition de la famille constituée de p et des $p_i | W_i$ soient à valeurs dans $\mathcal{G}_0$.*

DEMONSTRATION. Sur l'ensemble (non vide) $\mathcal{E}$ des couples $(q, (W_i)_{i \in J})$, où J est une partie de K, où, pour tout $i \in J$, W_i est un ouvert de X tel que $U_i \setminus V \subset W_i \subset U_i$ et où q est une section de $\mathcal{P}$ sur V telle que pour tout $i \in J$ la section de transition passant de $p_i | W_i$ à q soit à valeurs dans $\mathcal{G}_0$, considérons la relation d'ordre: $(q,(W_i)_{i\in J}) < (q',(W'_i)_{i\in J'})$ définie par

«$J \subset J'$, pour tout $i \in J$, $W_i = W'_i$ et sur $V \setminus [\bigcup_{j\in J'\setminus J} U_j]$ les sections q et q' sont égales.»

Pour cette relation l'ensemble de ces couples est inductif. En effet, soit A un ensemble totalement ordonné de tels couples et pour $\alpha \in A$ écrivons $\alpha = (q_\alpha, (W_i^\alpha)_{i\in J_\alpha})$. Posons $J = \bigcup_{\alpha\in A} J_\alpha$ et $W_i = W_i^\alpha$ pour $i \in J_\alpha \subset J$ (définition indépendante du α); nous allons définir q de façon que le couple $(q,(W_i)_{i\in J})$ majore A.

Pour chaque $x \in V$ soit V_x un voisinage ouvert inclus dans V et ne rencontrant qu'un nombre fini de U_i pour $i \in J$, à savoir $U_{i_1},\dots,U_{i_p}$, et soit $\alpha(x) \in A$ tel que $\{i_1,\dots,i_p\} \subset J_{\alpha(x)}$. Posons $q_x = q_{\alpha(x)} | V_x$. Si

$$V_x \cap V_y \neq \emptyset, \text{ on a } q_x | V_x \cap V_y = q_y | V_x \cap V_y\,;$$

en effet, si par exemple $\alpha(y) > \alpha(x)$, $q_{\alpha(x)}$ et $q_{\alpha(y)}$ coïncident sur $V \setminus [\bigcup_{j\in J_{\alpha(y)}\setminus J_{\alpha(x)}} U_j]$ et $V_x \cap V_y$ ne rencontre aucun des U_j si $j \in J_{\alpha(y)} \setminus J_{\alpha(x)}$. On peut donc définir q par $q | V_x = q_x$. Soit maintenant $\alpha \in A$ et soit $x \in V \setminus [\bigcup_{j\in J\setminus J_\alpha} U_j]$. Posons $\beta = \sup(\alpha(x), \alpha)$; comme q_β et $q_{\alpha(x)}$ sont égales sur $V \setminus [\bigcup_{j\in J_\beta\setminus J_{\alpha(x)}} U_j]$ et, comme V_x ne rencontre pas U_j pour $j \in J_\beta \setminus J_{\alpha(x)}$, il s'ensuit que $q(x) = q_{\alpha(x)}(x) = q_\beta(x)$; par ailleurs x est élément de $V \setminus [\bigcup_{j\in J_\beta\setminus J_\alpha} U_j]$, donc $q_\alpha(x) = q_\beta(x)$ et finalement

$$q(x) = q_\alpha(x).$$

Donc il existe un couple maximal $(q,(W_i)_{i\in J})$ dans $\mathcal{E}$; montrons que pour ce couple $J = K$, ce qui démontrera le lemme. Raisonnons par l'absurde: soit $n \in K \setminus J$. Dans l'espace normal $U_n \cup V$ considérons les deux fermés disjoints $U_n \setminus V$ et $V \setminus U_n$; ils possèdent des voisinages fermés disjoints, N_1 et N_2 respectivement. Soit $g \in \mathcal{G}(U_n \cap V)$ défini par $q | U_n \cap V = g(p_n | U_n \cap V)$. Comme $U_n \cap V$ est inclus dans un domaine de finesse pour $\mathcal{G}$ relativement a $\mathcal{G}_0$, il existe $\bar{g} \in \mathcal{G}(U_n \cap V)$ qui prend ses valeurs dans $\mathcal{G}_0$ sur $N_1 \cap V$, qui est égale à g sur $N_2 \cap U_n$

et telle que, si $g(x) \in \mathcal{G}_0$, alors $\bar{g}(x) = g(x)$. Posons

$$q' = \bar{g}(p_n \mid U_n \cap V);$$

alors $q \mid \overset{\circ}{N_2}$ et q' coincident sur $\overset{\circ}{N_2} \cap \underset{\circ}{U_n}$ et définissent donc une section p de $\mathcal{P}$ sur V. Enfin, si l'on pose $W_n = \overset{\circ}{N_1}$, le couple $(p, (W_i)_{i \in J \cup \{n\}})$ est dans $\mathcal{E}$; en particulier si $i \in J$ la section de transition passant de $p_i \mid W_i$ à p est dans $\mathcal{G}_0$, puisque la section de transition passant de $p_i \mid W_i$ à q est elle-même dans $\mathcal{G}_0$, que si $g(x) \in \mathcal{G}_0$ alors $\bar{g}(x) = g(x)$ et que le cocycle défini par les p_j est à valeurs dans $\mathcal{G}_0$: on a majoré le couple maximal , ce qui est contradictoire.

1.2.5. DEMONSTRATION DU THEOREME 1.2.2 . Soit $\mathcal{P}$ un faisceau $\mathcal{G}$-principal et soit $(V_i)_{i \in I}$ un recouvrement localement fini de X par des ouverts de finesse pour $\mathcal{G}$ relativement à $\mathcal{G}_0$ tels que, pour tout $i \in I$, $\mathcal{P}(V_i)$ ne soit pas vide. Considérons l'ensemble $\mathcal{R}_1$ des couples $((U_i)_{i \in J},$ $(p_i)_{i \in J})$, où $(U_i)_{i \in J}$ appartient à l'ensemble $\mathcal{R}$ du lemme 1.2.3, relatif au recouvrement $(V_i)_{i \in I}$ ci-dessus et où, pour tout $i \in J$, $p_i \in \mathcal{P}(U_i)$, la famille $(p_i)_{i \in J}$ ayant ses sections de transition dans $\mathcal{G}_0$. La relation

$$((U_i)_{i \in J}, (p_i)_{i \in J}) << ((U'_i)_{i \in J'}, (p'_i)_{i \in J'})$$

définie sur $\mathcal{R}_1$ par

« $(U_i)_{i \in J} \leqslant (U'_i)_{i \in J}$ (où $\leqslant$ est la relation du lemme 1.2.3) et pour tout $i \in J$, $p_i \mid U'_i = p'_i$ »

est une relation d'ordre pour laquelle $\mathcal{R}_1$ est inductif; cela découle immédiatement du lemme 1.2.3.

Soit donc $((W_i)_{i \in K}, (p_i)_{i \in K})$ un élément maximal de $\mathcal{R}_1$ et supposons $K \neq I$. Soit $l \in I \setminus K$; alors, appliquant le lemme 1.2.4 avec $V = V_l$, on trouve un élément $(((W_i)_{i \in K}, V_l), ((p_i \mid W_i)_{i \in K}, p_l))$ qui est dans $\mathcal{R}_1$ et qui majore strictement l'élément maximal. Donc $K = I$ et le théorème en découle, puisqu'on a obtenu une famille de sections de $\mathcal{P}$ dont les domaines de définition forment un recouvrement ouvert de X et qui définit un cocycle à valeurs dans $\mathcal{G}_0$.

1.2.6. REMARQUE . La fin de la démonstration du lemme 1.2.4 montre que ce théorème reste valide si, dans la définition 1.2.1 , on ne considère pas des parties A, B fermées dans U mais ouvertes; elle montre aussi que dans cette même définition la relation

$$\forall\ x \in U,\ s(x) \in \mathcal{G}_0 \Longrightarrow \bar{s}(x) = s(x)$$

peut être affaiblie en

$$\forall\ x \in U,\ s(x) \in \mathcal{G}_0 \Longrightarrow \bar{s}(x) \in \mathcal{G}_0$$

sans nuire non plus à la validité du théorème.

Chapitre II

Γ - PLONGEMENTS

Le but de ce chapitre est de démontrer l'énoncé 2.3.6 qui est l'outil essentiel du chapitre 3. En 2.1 et 2.2 on présente les notions intervenant dans cet énoncé, en 2.3.2 on démontre une proposition inspirée de [7] p. 296 dont 2.3.6 sera un corollaire.

2.1. Plongements admissibles.

2.1.1. DEFINITION. On appellera *plongement* toute injection p d'un espace topologique M dans un autre N telle que p soit un homéomorphisme de M sur $p(M)$. Si en outre la condition suivante est réalisée :

> Pour tout faisceau d'ensembles $\mathcal{F}$ sur N, toute section s de $\mathcal{F}$ au-dessus de l'image par p d'un ouvert A de M se prolonge à un voisinage de $p(A)$ dans N,

on dira que le plongement p est *admissible*.

(Cette définition diffère de celle qui est donnée en [9] 2.1., cette dernière ne suffit pas en effet pour montrer que $P_{jj'}$ - voir 2.2- est un faisceau).

2.1.2. PROPOSITION. *Soit $p: M \to N$ un plongement. Si l'une au moins des conditions suivantes est vérifiée :*

(1) Tout ouvert de N est paracompact,

(2) Tout ouvert de M est paracompact et il existe une rétraction $\pi : W \to p(M)$, où W est un voisinage de $p(M)$ dans N,

alors p est un plongement admissible.

DEMONSTRATION : L'assertion relative à la condition (1) découle de [6] II.3.3.1. Supposons la condition (2) vérifiée et donnons-nous un faisceau d'ensembles $\mathcal{F}$ sur N, un ouvert A de M et une section s de $\mathcal{F}$ au-dessus de $U = p(A)$. On peut recouvrir U par une famille $(W_i)_{i \in I}$ d'ouverts de N inclus dans W et trouver des sections $s_i \in \mathcal{F}(W_i)$ telles que $s_i = s$ dans $U_i = U \cap W_i$. On peut supposer en outre que le recouvrement de U

par les U_i est localement fini. Soit $(U'_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts de U, recouvrant U, telle que pour tout i l'adhérence $\overline{U'_i}$ de U'_i dans U soit incluse dans U_i. Pour $x \in U$ posons $V(x) = \bigcap_{x\in U'_j} U'_j \setminus \bigcup_{x\notin U'_j} \overline{U'_j}$. Alors, si $V(x) \cap V(y) \neq \emptyset$, il existe $i \in I$ tel que x et y soient dans U_i; il suffit en effet de considérer un i tel que $x \in U'_i$ puisqu'alors, $V(y) \cap \overline{U'_i}$ n'étant pas vide, y est dans U'_i. Maintenant, pour toute partie finie K de I on peut trouver un voisinage ouvert W_K de $\bigcap_{k\in K} U_k$ dans N où les s_k telles que $k \in K$ soient définis et coïncident. Posons, pour $x \in U$,

$$K(x) = \{ i \in I \mid x \in U_i \} \text{ et } W_x = \pi^{-1}(V(x)) \cap W_{K(x)};$$

soit enfin σ_x la section de $\mathcal{F}$ sur W_x égale à la valeur commune des s_k pour $k \in K(x)$. Alors σ_x et σ_y coïncident sur $W_x \cap W_y$, puisque, si cet ensemble est non vide, $K(x) \cap K(y) \neq \phi$ et il suffit de considérer la section σ de $\mathcal{F}$ sur $\bigcup_{x\in U} W_x$ égale à σ_x sur W_x.

2.2. Le faisceau $P_{jj'}$.

2.2.1. Soit B un espace topologique. Un *pseudogroupe d'automorphismes locaux* de B est un ensemble Γ d'homéomorphismes ayant pour source et pour but des ouverts de B, tel que les axiomes suivants soient vérifiés:

a) Si $(f: U \to V) \in \Gamma$ et $(g: W \to X) \in \Gamma$, alors l'homéomorphisme $x \to g(f(x))$ de $f^{-1}(W)$ dans $g(W \cap V)$ - que l'on note gf - est dans Γ.

b) Si $f \in \Gamma$, alors $f^{-1} \in \Gamma$

c) L'application identique de B est dans Γ.

d) Si U est un ouvert de B, égal à la réunion d'une famille d'ouverts $(U_i)_{i\in I}$, si $f: U \to V$ est un homéomorphisme de U sur un ouvert de B tel que pour tout i l'homéomorphisme de U_i sur $f(U_i)$ induit par f soit dans Γ, alors f est dans Γ.

e) Si $(f: U \to V) \in \Gamma$ et si U' est un ouvert inclus dans U, l'homéomorphisme de U' sur $f(U')$ induit par f est dans Γ.

Dans toute la suite de ce paragraphe 2.2, B est un espace topologique fixé et Γ un pseudogroupe d'automorphismes locaux de B.

Une (B, Γ)-*structure* sur un espace topologique E est la donnée d'un *atlas* $\mathfrak{U}$ sur E, à valeurs dans B *et compatible avec* Γ, i.e. d'un ensemble d'homéomorphismes d'ouverts de E, recouvrant E, sur des ouverts de B (appelés *cartes*) tels que, si $f, g \in \mathfrak{U}$, alors $gf^{-1} \in \Gamma$. Deux tels atlas $\mathfrak{U}$ et $\mathfrak{U}'$ définissent la même (B, Γ)-structure si $\mathfrak{U} \cup \mathfrak{U}'$ est un atlas compatible avec Γ (cf. [7] ch.I, §1 et ch.III, §3, exemple 1. Nous avons ajouté l'axiome c) pour ne pas avoir à introduire le faisceau $\mathfrak{P}_\Gamma$).

2.2.2. Soient Y et Y' deux espaces topologiques munis de (B, Γ)-structures s et s' respectivement. Un *(s, s')-homéomorphisme local* est un homéomorphisme local F d'un ouvert W de Y à valeurs dans Y' tel que pour tout $y \in W$ il existe une carte ϕ de s définie sur un voisinage U de y dans W et une carte ϕ' de s' définie sur $F(U)$ telles que $\phi' F \phi^{-1}$ soit dans Γ.

Si, à tout ouvert W de Y, on associe l'ensemble des (s, s')-homéomorphismes locaux de W dans Y' on définit un préfaisceau d'ensembles sur Y, car l'axiome e) de 2.2.1 nous assure que la restriction à un ouvert d'un (s, s')-homéomorphisme local est encore un (s, s')-homéomorphisme local, et ce préfaisceau est un faisceau en vertu de l'axiome d).

Soit maintenant X un espace topologique et j (resp. j') un plongement (2.1.1) de X dans Y (resp. Y'). On définit un sous-faisceau du faisceau précédent en imposant aux (s, s')-homéomorphismes locaux F la condition $F(j(x)) = j'(x)$ chaque fois que F est défini sur $j(x)$. On désignera par $\Pi_{jj'}$ ce sous-faisceau.

Enfin, on désignera par $P_{jj'}$ le préfaisceau sur X qui associe à l'ouvert U l'ensemble des germes - selon le filtre des voisinages de $j(U)$ dans Y - des éléments des $\Pi_{jj'}(W)$ qui sont des homéomorphismes, W parcourant l'ensemble des voisinages ouverts de $j(U)$ dans Y.

Si pour un ouvert U de X on représente $f \in P_{jj'}(U)$ par $F \in \Pi_{jj'}(W)$, on définit une section de $\Pi_{jj'}$ sur $j(U)$ en associant à $x \in j(U)$ le germe de F en x et cette section ne dépend que de f; de plus, l'application $P_{jj'}(U) \to H^0(j(U), \Pi_{jj'})$ ainsi obtenue est injective.

2.2.3. PROPOSITION. *Soient $j: X \to Y$ et $j': X \to Y'$ deux plongements d'un espace topologique dans deux autres. On suppose Y et Y' munis* *respectivement des (B,Γ)-structures s et s'.*

Si les plongements j et j' sont admissibles (2.1.1), alors, pour tout ouvert U de X et toute section $f \in H^0(j(U), \Pi_{jj'})$, il existe un voisinage ouvert W de $j(U)$ dans Y et un élément $F \in \Pi_{jj'}(W)$ qui est un homéomorphisme de W sur $F(W)$ et tel que pour $x \in U$ le germe $F_{j(x)}$ de F en $j(x)$ soit égal à $f(x)$.

DEMONSTRATION. Puisque j est admissible, il existe un voisinage ouvert $\tilde{W}$ de $j(U)$ dans Y et $\tilde{F} \in \Pi_{jj'}(\tilde{W})$ tel que $\tilde{F}_{j(x)} = f(x)$ pour $x \in U$. Or $\tilde{F}$ étale $\tilde{W}$ dans Y et $j_0 j'^{-1} | j'(U)$ est une section de cet espace étalé; comme j' est admissible, cette section se prolonge à un voisinage de $j'(U)$ dans Y' en un homéomorphisme dont l'homéomorphisme réciproque répond à la question.

COROLLAIRE. *Si les plongements j et j' sont admissibles, alors $P_{jj'}$ est un faisceau et il existe un isomorphisme naturel $P_{jj'} \simeq j^{-1}(\Pi_{jj'})$.*

En effet, pour U ouvert de X, la proposition 2.2.3 nous assure que l'application de $P_{jj'}(U)$ dans $H^0(j(U), \Pi_{jj'})$ est surjective et on a vu qu'elle était injective; d'autre part, on sait que les ensembles $H^0(j(U), \Pi_{jj'})$ et $j^{-1}(\Pi_{jj'})(U)$ sont en bijection canonique.

REMARQUE. Dans tous les cas le préfaisceau $P_{jj'}$ est canoniquement isomorphe au préfaisceau $P_{j'j}$.

2.2.4. Soient $j: X \to Y$, $j': X \to Y'$, $j'': X \to Y''$ trois plongements admissibles d'un même espace dans trois espaces munis de (B,Γ)-structures s, s' et s''. On définit un homomorphisme de faisceaux

$$O_{jj'j''}: P_{jj'} \times P_{j'j''} \to P_{jj''}$$

en associant à $(\gamma, \gamma') \in P_{jj',x} \times P_{j'j'',x}$ le germe composé $\gamma'\gamma \in P_{jj'',x}$, comme on le voit d'après le numéro précédent.

Si $p''': X \to Y'''$ est un quatrième plongement admissible, où Y''' est est muni d'une (B,Γ)-structure, la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} P_{jj'} \times P_{j'j''} \times P_{j''j'''} & \xrightarrow{O_{jj'j''} \times 1} & P_{jj''} \times P_{j''j'''} \\ \downarrow 1 \times O_{j'j''j'''} & & \downarrow O_{jj''j'''} \\ P_{jj'} \times P_{j'j'''} & \xrightarrow{O_{jj'j'''}} & P_{jj'''} \end{array}$$

et la remarque que, pour tout $x \in X$, $P_{jj,x}$ est un groupe opérant principalement sur $P_{jj',x}$ nous assurent d'abord que le faisceau P_{jj} muni de la loi O_{jjj} est un faisceau de groupes qu'on notera G_j, et ensuite que, si aucune des fibres de $P_{jj'}$ n'est vide, la loi $O_{jjj'}$ fait de ce faisceau un faisceau G_j-principal et la loi $O_{jj'j'}$ un faisceau $G_{j'}$-principal.

2.2.5. Soit maintenant Γ_0 un *sous-pseudogroupe d'automorphismes locaux de* Γ (i.e. un sous-ensemble de Γ qui est un pseudogroupe d'automorphismes locaux). Si des espaces topologiques Y et Y' sont munis des (B,Γ_0)-structures s et s' définies par les atlas $\mathfrak{U}$ et $\mathfrak{U}'$, alors ces mêmes atlas définissent des (B,Γ)-structures $\bar{s}$ et $\bar{s}'$ qui ne dépendent que des structures s et s' données; par conséquent, si $j: X \to Y$ et $j': X \to Y'$ sont deux plongements admissibles, on obtiendra deux faisceaux $P_{jj'}$ distincts suivant que l'on considère les (B,Γ)-structures ou les (B,Γ_0)-structures. Nous les noterons $P_{jj'}[\Gamma]$, $P_{jj'}[\Gamma_0]$ et le second est sous-faisceau du premier; plus précisément, si les fibres du faisceau $P_{jj'}[\Gamma_0]$ sont non vides, ce faisceau est une $G_j[\Gamma_0]$-restriction du faisceau $G_j[\Gamma]$-principal $P_{jj'}[\Gamma]$.

2.3. Γ-plongements.

Dans le paragraphe 2.3, X désigne un espace topologique, $p: X \to B$ un plongement admissible de X dans un espace topologique B et Γ un pseudogroupe d'automorphismes locaux de B tel que, pour tout $(F: W \to W') \in \Gamma$ et tout $y \in p(X) \cap W$, $F(y) = y$. L'espace B sera muni de sa (B,Γ)-structure canonique σ, à savoir celle qui est définie par l'atlas constitué de la seule carte 1_B; un (σ,σ)-homéomorphisme n'est autre alors qu'un élément de Γ en vertu de l'axiome d) de 2.2.1.

2.3.1. DEFINITIONS: On appelle Γ-*plongement* de X tout triplet (j, Y, s), où j est un plongement de X dans un espace topologique Y muni d'une (B,Γ)-structure s telle que pour toute carte $\phi: U \to B$ de cette structure on ait la relation $\phi(j(x)) = p(x)$ chaque fois que $j(x) \in U$. On dira qu'un tel Γ-plongement (j, Y, s) est *admissible* si le plongement j est admissible. (Etant données les propriétés de Γ, cette définition des Γ-plongements est équivalente à celle de [7] ch.IV, § 2).

Si (j, Y, s) est un Γ-plongement, aucune des fibres du préfaisceau P_{jp} n'est vide; si en outre ce Γ-plongement est admissible, P_{jp} est donc un faisceau G_p-principal.

Soient (j, Y, s) et (j', Y', s') deux Γ-plongements admissibles de X. Si le faisceau $P_{jj'}$ possède une section globale, alors les faisceaux P_{jp} et $P_{j'p}$ sont G_p-isomorphes. La relation «$P_{jj'}$ possède une section globale» étant une équivalence sur les Γ-plongements admissibles (la *Γ-équivalence*), on en déduit une application qui associe à une classe de Γ-équivalence de Γ-plongement admissible de X un élément de $H^1(X, G_p)$. De plus, si X et B sont localement compacts et à base dénombrable d'ouverts et si on ne considère que des plongements à valeurs dans les espaces séparés (on montre alors qu'ils sont nécessairement admissibles), cette application est bijective en vertu du théorème 1, page 296 de [7] et de son corollaire. Dans la proposition suivante on démontre cette même bijectivité sous des hypothèses différentes.

2.3.2. PROPOSITION *Sous les conditions du début de ce paragraphe:*

(i) L'application qui associe à la classe de Γ-équivalence d'un Γ-plongement admissible (j, Y, s) de X l'élément de $H^1(X; G_p)$ défini par le faisceau P_{jp} est injective.

(ii) S'il existe une rétraction π de B sur $p(X)$ telle que, pour tout homéomorphisme $F: W \to W'$ de Γ et tout $y \in W$, $\pi(F(y)) = \pi(y)$ (ce que nous exprimerons en disant que π est compatible avec Γ) et si en outre tout ouvert de X est paracompact, alors l'application considérée au (i) est aussi surjective.

DEMONSTRATION. (i) Soient (j, Y, s) et (j', Y', s') deux Γ-plongements admissibles de X tels que les images dans $H^1(X, G_p)$ de P_{jp} et $P_{j'p}$ soient identiques. Il est donc possible de trouver un recouvrement ouvert $(U_i)_{i\in I}$ de X, des familles de sections $(f_i)_{i\in I}$, $(f'_i)_{i\in I}$, $(h_i)_{i\in I}$ de P_{jp}, $P_{j'p}$ et G_j respectivement telles que, pour tout $i \in I$, f_i, f'_i et h_i soient définies sur U_i et que les cocycles sur X à valeur dans G_p définis par les relations

$$f_i(x) = g_{ik}(x) f_k(x) \text{ et } f'_i(x) = g'_{ik}(x) f'_k(x), \text{ pour } x \in U_i \cap U_k,$$

vérifient les relations $g'_{ik}(x)=h_i^{-1}(x)g_{ik}(x)h_k(x)$ pour les mêmes x. Soit l_i la section de $P_{jj'}$ sur U_i définie par $l_i(x)=f_i'^{-1}(x)h_i(x)f_i(x)$; alors l_i et l_k coïncident sur $U_i \cap U_k$, donc $P_{jj'}$ possède une section globale.

(ii) Soit $((U_i)_{i\in I},(g_{ij}))$ un cocycle sur X à valeur dans G_p et posons $U_{i_1\ldots i_n}=\bigcap_{k=1}^{n} U_{i_k}$. On peut supposer que le recouvrement est localement fini. Par définition du faisceau G_p (2.2.4 et 2.2.2), on peut associer à chaque g_{ij} un voisinage ouvert de $p(U_{ij})$ dans B et un homéomorphisme $G_{ij}\in\Gamma$ défini sur ce voisinage, dont le germe en $y=p(x)\in p(U_{ij})$ soit $g_{ij}(x)$. On peut supposer que $G_{ii}=1_B$ et $G_{ji}=G_{ij}^{-1}$.

2.3.3. LEMME. *Soit X un espace topologique où tout ouvert est normal et $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert localement fini de X. On pose, pour $K\subset I$, $U_K=\bigcap_{i\in K} U_i$ et, pour $x\in X$, $K(x)=\{j\in I \mid x\in U_j\}$. Alors on peut associer à tout $x\in X$ un voisinage ouvert $V(x)$ de façon que:*

(i) $\forall\ x\in X,\ V(x)\subset U_{K(x)}$,

(ii) $\forall\ x,y\in X,\ (V(x)\cap V(y)\neq\emptyset)\Longrightarrow(K(x)\subset K(y)$ ou $K(y)\subset K(x))$.

Pour tout couple de parties finies et non vides K, L de I choisissons des voisinages ouverts disjoints $U^*_{L,K}$ et $U^*_{K,L}$ pour les fermés disjoints $U_L\setminus U_K$ et $U_K\setminus U_L$ respectivement dans l'espace normal $U_k\cup U_L$, Par ailleurs, pour chaque $x\in X$, soit $V_1(x)$ un voisinage ouvert de x ne rencontrant qu'un nombre fini de U_i, et soit

$$K'(x)=\{j\in I \mid V_1(x)\cap U_j\neq\emptyset \text{ et } x\notin U_j\}.$$

Enfin, si $K'(x)$ n'est pas vide, posons

$$V(x)=V_1(x)\cap U_{K(x)}\cap\Big(\bigcap_{\substack{\phi\neq K'\subset K'(x)\\ \phi\neq K\subset K(x)}} U^*_{K,K'}\Big);$$

cet ensemble est un voisinage de x, puisque pour les couples K, K' considérés on a $x\in U_K\setminus U_{K'}\subset U^*_{K,K'}$; si $K'(x)$ est vide, on pose

$$V(x)=V_1(x)\cap U_{K(x)}.$$

Maintenant supposons que $V(x)$ et $V(y)$ se rencontrent; alors

$V(x)$ rencontre $U_{K(y)}$, donc $K(y)\setminus K(x)\subset K'(x)$; par conséquent si on avait à la fois $K(y)\setminus K(x)\neq\phi$ et $K(x)\setminus K(y)\neq\phi$, on aurait

$$V(x)\subset U^{*}_{K(x)\setminus K(y),\, K(y)\setminus K(x)}$$

et symétriquement

$$V(x)\subset U^{*}_{K(y)\setminus K(x),\, K(x)\setminus K(y)},$$

ce qui est impossible, car on a là l'inclusion de $V(x)$ dans deux ensembles disjoints. Donc $K(x)\subset K(y)$ ou $K(y)\subset K(x)$.

Continuons la démonstration de 2.3.2 (ii).

A) Choix des voisinages W^i_x. Soit $x\in X$; nous allons montrer qu'on peut associer à tout $i\in K(x)$ un voisinage ouvert W^i_x de $p(x)$ dans B de manière que les conditions suivantes soient réalisées:

(1) pour tous $i, j\in K(x)$, G_{ji} est défini sur W^i_x et $G_{ji}(W^i_x)=W^j_x$;

(2) pour tous $i, j, k\in K(x)$ le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} W^i_x & & W^k_x \arrow[ll, "G_{ik}"'] \arrow[dl, "G_{jk}"] \\ & W^j_x \arrow[from=ul, "G_{ij}"'] & \end{tikzcd}$$

(3) pour tout $i\in K(x)$, $\pi(W^i_x)\subset p(V(x))$, où π est la rétraction donnée dans l'énoncé 2.3.2 et où $V(x)$ est fourni par le lemme 2.3.3. Remarquons d'abord que, si on trouve des W^i_x tels que (1) et (2) soient réalisés, il suffit de remplacer W^i_x par $W^i_x\cap\pi^{-1}(p(V(x)))$ pour que (3) soit vérifié et que (1) et (2) restent vérifiés; en effet, on aura (en posant $\Lambda=\pi^{-1}(p(V(x)))$) $G_{ij}(W^j_x\cap\Lambda)\subset W^j_x\cap\Lambda$ en vertu des relations $\pi(G_{ij}(y))=\pi(y)$ exprimant la compatibilité de π et Γ, et de même $G_{ji}(W^i_x\cap\Lambda)\subset W^j_x\cap\Lambda$; donc $G_{ij}G_{ji}(W^i_x\cap\Lambda)\subset G_{ij}(W^i_x\cap\Lambda)$, soit finalement, puisque $G_{ji}=G^{-1}_{ij}$, $G_{ij}(W^j_x\cap\Lambda)=W^i_x\cap\Lambda$.

Maintenant, si on pose $K(x)=\{i_1,\dots,i_n\}$, les relations $G_{ji}=G^{-1}_{ij}$ et $G_{ii}=1_B$ nous assurent que, si on trouve des W^i_x tels que (1) soit vérifié pour les couples (i_c, i_d) avec $1\leqslant c<d\leqslant n$ et que (2) le soit pour les triplets (i_c, i_d, i_e) avec $1\leqslant c<d<e\leqslant n$, alors ces mêmes relations seront vérifiées pour tous les couples et triplets respectivement d'éléments de $K(x)$. Considérons alors l'égalité

$$g_{i_1 i_2}(x) g_{i_2 i_3}(x) \dots g_{i_{n-1} i_n}(x) = g_{i_1 i_n}(x)$$

qui découle des propriétés de cocycle des g_{ij}; elle signifie que sur un voisinage ouvert $W_x^{i_n}$ de $p(x)$ les homéomorphismes $G_{i_1 i_2} G_{i_2 i_3} \dots G_{i_{n-1} i_n}$ et $G_{i_1 i_n}$ sont définis et égaux. Posons, par récurrence

$$G_{i_k i_{k+1}}(W_x^{i_{k+1}}) = W_x^{i_k} \text{ pour } k = 1, \dots, n,$$

puis considérons un couple (c, d) d'entiers avec $1 \leqslant c < d \leqslant n$; on peut rapetisser $W_x^{i_d}$ de manière que les homéomorphismes $G_{i_c i_{c+1}} \dots G_{i_{d-1} i_d}$ et $G_{i_c i_d}$ (qui définissent le même germe en $p(x)$) soient définis et égaux sur $W_x^{i_d}$ et on peut rapetisser en conséquence tous les $W_x^{i_k}$ de manière que les relations $G_{i_k i_{k+1}}(W_x^{i_{k+1}}) = W_x^{i_k}$ soient conservées; on a alors

$$(*) \quad G_{i_c i_{c+1}} \dots G_{i_{d-1} i_d} \mid W_x^{i_d} = G_{i_c i_d} \mid W_x^{i_d} \text{ et } G_{i_c i_d}(W_x^{i_d}) = W_x^{i_c}.$$

Faisons cette operation pour tous les couples $c < d$ de $K(x)$; on remarque que la relation $(*)$ relative à un tel couple reste vérifiée après les rétrécissements des $W_x^{i_k}$ effectués pour un couple considéré ultérieurement. A la fin, les $W_x^{i_k}$ obtenus répondent à la question.

B) Construction de l'espace Ω. Posons $\Omega_i = \bigcup_{x \in U_i} W_x^i$ et $\Omega_{ij} = \bigcup_{x \in U_{ij}} W_x^i$; alors Ω_{ij} est un sous-espace de Ω_i et la relation (1) du § A ci-dessus nous assure que G_{ji} est défini sur Ω_{ij} et $G_{ji}(\Omega_{ij}) = \Omega_{ji}$; remarquons en outre que d'après (3) du § A et (i) du lemme, on a

$$\Omega_{ij} \cap p(U_i) = p(U_{ij}).$$

Pour que l'on puisse recoller les espaces topologiques Ω_i le long des Ω_{ij} au moyen des G_{ji} ([1], ch.I, § 2, n°5), il suffit donc de vérifier que, si $t \in \Omega_{ij} \cap \Omega_{ik}$, alors $G_{ji}(t) \in \Omega_{jk}$ et $G_{ki}(t) = G_{kj}(G_{ji}(t))$; or, si $t \in \Omega_{ij} \cap \Omega_{ik}$, par définition il existe $y \in U_{ij}$ tel que $t \in W_y^i$ et $z \in U_{ik}$ tel que $t \in W_z^i$; donc en vertu de la relation (3) du § A ci-dessus on a $\pi(t) \in p(V(y)) \cap p(V(z))$, d'où $V(y) \cap V(z) \neq \phi$ et en conséquence (2.3.3 (ii)) on a

$$K(y) \subset K(z) \text{ ou } K(z) \subset K(y).$$

Soit par exemple $K(y) \subset K(z)$; or $\{i,j\} \subset K(y)$ et $\{i,k\} \subset K(z)$, donc $\{i,j,k\} \subset K(z)$; on en déduit (§ A, condition (2) appliquée au triplet (k,j,i))

$$G_{ii}(t) \in G_{ji}(W_z^i) = W_z^j \subset \Omega_{jk} \text{ et } G_{ki}(t) = G_{kj}(G_{ji}(t)).$$

Soit Ω l'espace obtenu par recollement des Ω_i et soient $\rho_i : \Omega_i \to \Omega$ les injections canoniques; comme Ω_{ij} est ouvert dans Ω_i, ρ_i est un homéomorphisme de Ω_i sur $\rho_i(\Omega_i)$ qui est lui-même ouvert dans Ω ([1] loc. cit. proposition 9); de plus la famille des ρ_i^{-1} constitue un atlas sur Ω à valeurs dans B et cet atlas est compatible avec Γ (2.2.1); en effet, d'une part, lorsque l'on a construit Ω, les points de Ω_{ij} sont les seuls points de Ω_i qui ont été identifiés à des points de Ω_j, par conséquent l'intersection des domaines $\rho_i(\Omega_i)$ et $\rho_j(\Omega_j)$ des cartes ρ_i^{-1} et ρ_j^{-1} est exactement égale à $\rho_i(\Omega_{ij}) = \rho_j(\Omega_{ji})$; d'autre part, l'homéomorphisme de changement de carte $(\rho_j^{-1})(\rho_i^{-1})^{-1}$ n'est autre que $G_{ji}|\Omega_{ij}$ qui est un élément de Γ; nous avons donc une (B,Γ)-structure s sur Ω. Enfin, $p(X)$ étant stable par G_{ij}, dans l'identification de Ω_{ji} et Ω_{ij}, les points de $p(U_{ij})$ sont identifiés avec eux-mêmes, autrement dit ρ_i et ρ_j sont égales sur $p(U_{ij})$; par ailleurs

$$\begin{aligned}\rho_i(\Omega_i) \cap \rho_j(p(U_j)) &= \rho_i(\Omega_i) \cap \rho_j(\Omega_j) \cap \rho_j(p(U_j)) \\ &= \rho_j(\Omega_{ji}) \cap \rho_j(p(U_j)) \\ &= \rho_j(p(U_{ij}));\end{aligned}$$

donc, en vertu de la remarque qui précède, on a

$$\rho_i(\Omega_i) \cap \rho_j(p(U_j)) = \rho_i(p(U_{ij})).$$

Si l'on pose $X_1 = \bigcup_j \rho_j(p(U_j))$, il vient alors

$$\rho_i(\Omega_i) \cap X_1 = \bigcup_j \rho_i(p(U_{ij})) = \rho_i(p(U_i)),$$

ce qui montre que $\rho_i(p(U_i))$ est ouvert dans X_1, puisque $\rho_i(\Omega_i)$ est ouvert dans Ω. Donc les ρ_i induisent un homéomorphisme local ρ de $p(X)$ sur X_1; en fait, ρ est un homéomorphisme car il est injectif: si $\rho(t) = \rho(t')$, cela signifie que $t \in p(U_i)$, $t' \in p(U_j)$ et $\rho_i(t) = \rho_j(t')$, donc ce dernier point est dans

$$\rho_i(\Omega_i) \cap \rho_j(\Omega_j) = \rho_i(\Omega_{ij}) = \rho_j(\Omega_{ji}),$$

d'où $t \in p(U_i) \cap \Omega_{ij} = p(U_{ij})$ et il en est de même pour t'; finalement par injectivité de ρ_i et ρ_j qui sont égales sur $p(U_{ij})$, $t = t'$. Posons enfin $\mu = \rho_0 p$; le triplet (μ, Ω, s) est un Γ-plongement en vertu des relations $\rho_i^{-1}(\mu(x)) = p(x)$ pour $x \in U_i$; c'est un Γ-plongement admissible, car les rétractions des Ω_i sur les $p(U_i)$ sont compatibles avec les G_{ji} et définissent ainsi une rétraction $\pi_1 : \Omega \to X_1$ (2.1.2 (2)). Enfin, ce Γ-plongement admissible a pour image dans $H^1(X; G_p)$ la classe du cocycle donné au départ en vertu des relations $\rho_i^{-1} \rho_j = G_{ij}$.

2.3.4. DEFINITION: Soit (j, Y, s) un Γ-plongement de X et soit Γ_0 un sous-pseudogroupe d'automorphismes locaux de Γ. Une Γ_0-*restriction* du Γ-plongement (j, Y, s) est un Γ_0-plongement (j, W, s_0), où W est un voisinage de $j(X)$ dans Y muni de la (B, Γ_0)-structure s_0 de façon que la (B, Γ)-structure $\bar{s}_0$ définie par s_0 sur W soit identique à celle qui y est induite par s.

Une telle Γ_0-restriction est donc donnée par une famille de cartes de s formant un atlas compatible avec Γ_0 sur un voisinage de $j(X)$ dans Y. Si j est admissible et si une telle Γ_0-restriction existe, alors $P_{jp}[\Gamma_0]$ est une $G_p[\Gamma_0]$-restriction du faisceau $G_p[\Gamma]$-principal $P_{jp}[\Gamma]$ et on définit là une injection de l'ensemble des classes de Γ_0-équivalence des Γ_0-restrictions de (j, Y, s) dans l'ensemble des classes de $G_p[\Gamma_0]$-isomorphisme des $G_p[\Gamma_0]$-restrictions de $P_{jp}[\Gamma]$, cela d'après 2.3.2 (i). Inversement, si on se donne une $G_p[\Gamma_0]$-restriction P de $P_{jp}[\Gamma]$, si on suppose tout ouvert de X paracompact et $p(X)$ muni d'une rétraction $\pi: B \to p(X)$ compatible avec Γ_0, alors il existe un Γ_0-plongement admissible $\mu : X \to \Omega$ tel que le faisceau $P_{\mu p}[\Gamma_0]$ soit $G_p[\Gamma_0]$-isomorphe à P en vertu de 2.3.2 (ii); par suite, d'après 2.3.2 (i), les éléments de $H^1(X; G_p[\Gamma])$ définis par $P_{\mu p}[\Gamma]$ et $P_{jp}[\Gamma]$ étant identiques, le faisceau $P_{\mu j}[\Gamma]$ possède une section globale qui, si on la représente par un homéomorphisme d'un voisinage de $\mu(X)$ dans Ω sur un voisinage W de $j(X)$ dans Y, munit W d'une (B, Γ_0)-structure s_0 et fait du triplet (j, W, s_0) une Γ_0-restriction de (j, Y, s). D'où le résultat suivant:

2.3.5. PROPOSITION. *On suppose que tout ouvert de X est paracompact et qu'il existe une rétraction $\pi : B \to p(X)$ compatible avec Γ_0; alors pour tout Γ-plongement admissible (j, Y, s) de X, l'ensemble des classes de Γ_0-équivalence des Γ_0-restrictions de (j, Y, s) est en bijection avec les classes d'isomorphisme des $G_p\,[\Gamma_0]$-restrictions de $P_{jp}\,[\Gamma]$.*

En particulier, pour qu'il existe une telle Γ_0-restriction, il faut et il suffit que P_{jp} possède une $G_p\,[\Gamma_0]$-restriction. Le théorème 1.2.2 fournit alors le résultat suivant:

2.3.6. COROLLAIRE. *Si les hypothèses de 2.3.5 sont réalisées et si $G_p\,[\Gamma]$ est fin relativement à $G_p\,[\Gamma_0]$, alors tout Γ-plongement possède une Γ_0-restriction.*

Chapitre III

APPLICATIONS

3.1. Applications à l'étude des voisinages d'une variété.

Dans ce paragraphe, X désigne une variété paracompacte réelle de classe C^r avec $r \geqslant 1$. On sait qu'alors, X étant métrisable, tout ouvert de X est paracompact. On désigne par E un espace de Banach réel et on pose $B = X \times E$. Le plongement $p : X \to B$ défini par $p(x) = (x, 0)$ est donc admissible d'après 2.1.2. Désignons enfin par Γ^1 le pseudogroupe d'automorphismes locaux de B formé de tous les C^1-difféomorphismes d'ouverts de B induisant l'identité sur $p(X)$ (i.e. pour $(F : W \to W') \in \Gamma^1$ et $x \in W \cap p(X)$, $F(x) = x$). Nous sommes donc dans les hypothèses du début de 2.3.

3.1.1. Nous allons définir un certain nombre de sous-pseudogroupes d'automorphismes locaux de Γ^1 en imposant diverses conditions sur ses éléments. Pour un tel homéomorphisme $F : W \to W'$ on écrira

$$F(x,t) = (\xi(x,t), \tau(x,t)) \quad \text{avec} \quad \xi, x \in X \quad \text{et} \quad \tau, t \in E;$$

d'autre part on désigne par $GL(E)$ le groupe des homéomorphismes linéaires de E sur E ; rappelons que cet ensemble est un ouvert de l'algèbre de Banach des endomorphismes continus de E. Auparavant notons la propriété suivante :

LEMME. *Si $(F : W \to X \times E) \in \Gamma^1$, alors, pour tout $x \in X$, si $\phi : U \to E'$ est une carte de X définie au voisinage de x, la différentielle de l'application $(\phi \times 1_E) F (\phi \times 1_E)^{-1}$ en $(x', 0)$ avec $x' = \phi(x)$ est:*

$$\begin{vmatrix} 1_{E'} & \dfrac{\partial [\phi \circ \xi \circ (\phi^{-1} \times 1_E)]}{\partial t} (x', 0) \\ 0 & \dfrac{\partial \tau}{\partial t} (x, 0) \end{vmatrix}$$

où $\dfrac{\partial \tau}{\partial t}(x, 0)$ est un élément de $GL(E)$.

Cela découle immédiatement du fait que, sur $(X\times\{0\})\cap W$, F se réduit à l'identité et du théorème d'inversion locale.

Voici maintenant le tableau des sous-pseudogroupes de Γ^1 que nous considérons: (q est un élément de $\{1,2,\ldots,r\}$.)

Condition sur F	Notation pour le pseudo-groupe obtenu
F est de classe C^q	Γ^q
$\xi(x,t)=x$	$\underline{\Gamma}$
F est de classe C^q et l'application $x\to\frac{\partial\tau}{\partial t}(x,0)$ est aussi de classe C^q	$*\Gamma^q$
$F(x,t)=(x,g(x)t)$ où g est une application de classe C^q de X dans le groupe $GL(E)$	ΓL^q

Enfin $\underline{\Gamma}^q=\Gamma^q\cap\underline{\Gamma}$ et $*\underline{\Gamma}^q=\underline{\Gamma}^q\cap *\Gamma^q$.

Dans tous les cas on obtient des sous-pseudogroupes de Γ^1; seul le fait que $*\Gamma^q$ est stable pour la composition et le passage à l'inverse nécessite une démonstration; or il résulte du lemme que, si $F_1=(\xi_1,\tau_1)$ et $F_2=(\xi_2,\tau_2)$ sont des éléments de $*\Gamma^q$ et si $F=(\xi,\tau)=F_2\circ F_1$, alors

$$\frac{\partial\tau}{\partial t}(x,0)=\frac{\partial\tau_2}{\partial t}\circ\frac{\partial\tau_1}{\partial t}(x,0),$$

donc aussi, si $F_1^{-1}=(\xi_1',\tau_1')$,

$$\frac{\partial\tau_1'}{\partial t}(x,0)=[\frac{\partial\tau}{\partial t}(x,0)]^{-1},$$

ce qui résoud la question posée puisque pour $u,v\in GL(E)$ les applications $(u,v)\to u\circ v$ et $u\to u^{-1}$ sont analytiques.

Nous montrons maintenant que, pour diverses valeurs du couple $(\mathcal{G}, \mathcal{G}_0)$ de sous-faisceaux de groupes de $G_p(\Gamma^1)$ avec $\mathcal{G}_0 \subset \mathcal{G}$, $\mathcal{G}$ est fin relativement à $\mathcal{G}_0$; les domaines de finesse de $\mathcal{G}$ relativement à $\mathcal{G}_0$ seront les domaines de cartes de X. Pour chacune des démonstrations qui suivent, U est donc un ouvert de X inclus dans un domaine de carte de X, A et B deux parties de U fermées dans U et disjointes; f est est une section de $\mathcal{G}$ au-dessus de U et l'on représente f par un homéomorphisme $F=(\xi, \tau): W \to W'$. On démontre alors l'existence d'un élément $\bar{F}$ de Γ^1 tel que la section $\bar{f}$ de $G_p\,[\Gamma^1]$ définie par $\bar{F}$ soit dans $\mathcal{G}$, que, pour $x \in A$, $\bar{f}(x)=f(x)$, que, pour $x \in B$, $\bar{f}(x) \in \mathcal{G}_0$ et que $f(x) \in \mathcal{G}_0$ entraîne $\bar{f}(x)=f(x)$.

3.1.2. PROPOSITION. *Soit $q \in \{1, 2, \dots, r\}$ tel que X admette des partitions de l'unité de classe C^q; alors*

(i) $G_p\,[\Gamma^q]$ est fin relativement à $G_p\,[\underline{\Gamma}^q]$.

(ii) $G_p\,[{}^*\underline{\Gamma}^q]$ est fin relativement à $G_p\,[\Gamma L^q]$.

DEMONSTRATION. On peut supposer que U est un ouvert d'un espace de Banach car ensuite, dans le cas général, il suffira de poser

$$F'=(\phi\times 1_E)F(\phi\times 1_E)^{-1},$$

où ϕ est une carte de X sur U, puis $\bar{F}'$ étant construite de poser

$$\bar{F}=(\phi\times 1_E)^{-1}\bar{F}'(\phi\times 1_E)$$

qui répondra à la question; cela découle du lemme 3.1.1 en particulier pour le cas (ii).

(i) Choisissons une fonction réelle λ de classe C^q sur U égale à 1 au voisinage de A et à 0 au voisinage de B et posons

$$\bar{F}(x,t)=(\bar{\xi}(x,t), \bar{\tau}(x,t))=(\lambda(x)\xi(x,t)+(1-\lambda(x))x, \tau(x,t)).$$

La différentielle de $\bar{F}$ en $(x,0)$ s'écrit

$$\begin{vmatrix} 1_X & \dfrac{\partial\bar{\xi}}{\partial t}(x,0) \\ 0 & \dfrac{\partial\tau}{\partial t}(x,0) \end{vmatrix}$$

elle est donc inversible; par conséquent, $\overline{F}$ est un homéomorphisme local sur un voisinage de $U \times \{0\}$ donc aussi un homéomorphisme sur un voisinage plus petit (2.2.3) et cet homéomorphisme répond à la question; en particulier si le germe de F en $(x, 0)$ est dans $G_p\ [\underline{\Gamma}^q]$, i.e. si, au voisinage de x, $\xi(y,t)=y$, alors $\overline{\xi}=\xi$ et $\overline{F}=F$ sur ce voisinage.

(ii) La démarche est la même; on pose cette fois

$$\overline{F}(x,t)=(x, \lambda(x)\tau(x,t)+(1-\lambda(x))\frac{\partial \tau}{\partial t}(x,0)t),$$

qui est de classe C^q puisque $x \to \frac{\partial \tau}{\partial t}(x,0)$ l'est, et qui définit encore une section de $G_p\ [{*}\underline{\Gamma}^q]$, puisque la différentielle de $\overline{F}$ et celle de F sont égales aux points $(x, 0)$.

3.1.3. THEOREME. *Soit X une sous-variété d'une variété paracompacte réelle Y de classe C^r avec $r \geqslant 1$. On suppose que l'espace transversal à X dans Y ([2] p. 49) est en tout point isomorphe à un espace de Banach fixe E. Alors pour tout $q \in \{1, 2, \ldots, r\}$ tel que X admette des partitions de l'unité de classe C^q, il existe un voisinage ouvert W de X dans Y muni d'une submersion $\pi: W \to X$ de classe C^q ([2] 5.9.1).*

Cela découle du corollaire 2.3.6, de la proposition précédente, assertion (i) et du fait que la donnée d'une $(X \times E, \underline{\Gamma}^q)$-structure $\underline{s}$ sur un voisinage W de X faisant du triplet (j, W, x) - où $j: X \to Y$ est l'injection - un Γ^q-plongement équivaut à la donnée d'une submersion $\pi: W \to X$ de classe C^q. Notons qu'alors W est muni d'une structure feuilletée dont les feuilles sont les variétés $\pi^{-1}(x)$ pour $x \in X$ et sont transversales à X.

3.1.4. THEOREME. *Sous les mêmes hypothèses qu'en 3.1.3 mais en supposant $r \geqslant 2$, pour tout $q \in \{2, 3, \ldots, r\}$ tel que X admette des partitions de l'unité de classe C^q, il existe un voisinage tubulaire (au sens de [8] page 76) de X dans Y de classe C^{q-1}.*

Par application du théorème 3.1.3, on trouve une $\underline{\Gamma}^q$-restriction $(j, W', \underline{s})$ du Γ^q-plongement (j, W, s) défini par l'injection $j: X \to Y$, donc a fortiori un ${*}\Gamma^{q-1}$-plongement $(j, W', {*}\underline{s})$; il découle alors du corollaire 2.3.6 et de la proposition 3.1.2 assertion (ii) que $(j, W', *\underline{s})$ possède une ΓL^{q-1}-restriction (j, W'', σ). Il suffit alors de construire le fibré de fibre E associé au cocycle sur X à valeurs dans $GL(E)$ défini par les cartes de σ ([2]: 6.4.3, 6.5.1), et de remarquer qu'en vertu de 2.3.2 (i), la section nulle de ce fibré possède un voisinage C^{q-1}-difféomorphe à un voisinage de X dans W''.

3.2. Voisinages tubulaires de codimension 1.

3.2.1. THEOREME. *Soit X un espace topologique; soit Γ le pseudogroupe d'automorphismes locaux de $X \times \mathbf{R}$ formé des homéomorphismes $F: W \to W'$ tels que pour tout $y \in W \cap (X \times 0)$, $F(y) = y$, et Γ_0 le sous-pseudogroupe de Γ formé des homéomorphismes F tels que $F(x,t)=(x, \pm t)$ $(x \in X,\ t \in \mathbf{R})$. Alors, si X est métrisable et localement connexe, tout Γ-plongement de X possède une Γ_0-restriction.*

Comme le théorème 3.1.3, ce théorème découle de la proposition suivante, et du corollaire 2.3.6.

3.2.2. PROPOSITION. *Sous les conditions du théorème, le faisceau $G_p[\Gamma]$ est fin relativement à $G_p[\Gamma_0]$ (où $p: X \to X \times \mathbf{R}$ est le plongement admissible défini par $p(x)=(x,0)$).*

Soient U un ouvert de X, A et B des parties de U fermées dans U et disjointes et soit $(F: W \to W') \in \Gamma$ représentant $f \in G_p[\Gamma](U)$ donnée, avec $W \cap (X \times \{0\}) = U$; on écrit $F(x,t)=(\xi(x,t), \tau(x,t))$ avec $\xi, x \in X$ et $\tau, t \in \mathbf{R}$. Quitte à rapetisser W, on peut supposer que $\tau(x,t)$ garde un signe constant lorsque t garde un signe constant et que x parcourt une composante connexe de U; en effet, pour $x \in U$ donné, il existe un voisinage de x connexe $V \subset U$ et un nombre $\varepsilon > 0$ tels que le voisinage $V \times \{t \mid |t| < \varepsilon\}$ soit inclus dans W; si (x', t'), (x'', t'') sont dans ce voisinage, t et t' n'étant pas nuls et ayant même signe - supposons-les positifs par exemple - l'ensemble

$$\{(x', s') \in W \mid 0 < s' < \varepsilon\} \cup \{(x'', s'') \in W \mid 0 < s'' < \varepsilon\} \cup (V \times \{\tfrac{\varepsilon}{2}\})$$

est connexe, donc son image par τ l'est aussi et comme elle ne rencontre pas 0, elle a un signe constant. Les composantes connexes de U étant ouvertes, on peut donc définir un homéomorphisme $J: U\times \mathbf{R} \to U\times \mathbf{R}$ par $J(x,t)=(x,t)$ si $\tau(x,t)$ a même signe que t et $J(x,t)=(x,-t)$ sinon.

Choisissons un voisinage ouvert V de B dans U tel que l'adhérence de V dans U ne rencontre pas A et posons

$$\lambda(x)=\inf\ \{\ \delta(x, U-V), \frac{1}{2}d((x,0),(X\times \mathbf{R})-W)\}\ \text{pour } x\in U,$$

où $d((x,t),(x',t'))=\sup\ \{\ \delta(x,x'),\ |t-t'|\ \}$, δ étant une distance sur X compatible avec sa topologie. Soit

$$W_1=\{(x,t)\in W \mid |t|> \lambda(x)/2\}$$

et soit π l'homéomorphisme de W_1 dans $W-(U\times\{0\})$ défini par

$$\pi(x,t)=\begin{cases}(x,t) & \text{si } |t|\geqslant\lambda(x)\\ (x, 2t-\dfrac{t}{|t|}\lambda(x)) & \text{si } \lambda(x)/2\leqslant |t|\leqslant\lambda(x).\end{cases}$$

On définit alors un élément $\overline{F}$ de Γ en prenant l'application J dans $W-W_1$ et $\pi^{-1}F\pi$ dans W_1; la section de $G_p\,[\Gamma]$ sur U définie par $\overline{F}$ répond à la question. (Nous avons utilisé la technique des « spindle-neighborhood » de Morton Brown, [3] lemme 2 p.334).

REMARQUE. Les notations étant celle de l'énoncé 3.2.1, on associe de façon naturelle à un Γ_0-plongement $h: X\to Y$ un fibré λ de base X, de fibre $\mathbf{R}$ et de groupe structural $\mathbf{Z}_2$ et en vertu de 2.3.2 (i) il existe un voisinage de la section nulle de ce fibré homéomorphe à un voisinage de $h(X)$ dans Y, la section nulle étant envoyée sur $h(X)$. Le théorème 4.1 de [9] est donc un cas particulier du théorème 3.2.1 (cf. [5] théorème 1).

Bibliographie

[1] N. BOURBAKI, *Topologie générale, ch.I et II* (3^{e}édit.), A.S.I. n° 1142, Hermann, Paris (1961).

[2] N. BOURBAKI, *Variétés différentielles et analytiques. Fascicule de résultats*, A.S.I. n° 1333, Hermann, Paris (1967).

[3] M. BROWN, Locally flat imbeddings of topological manifolds, *Ann. of Math.* 75 (1962), 331-341.

[4] J. FRENKEL, Cohomologie non abélienne et espaces fibrés (thèse), *Bull. Soc. Math. Fr.* 85 (1957), 135-220.

[5] E.D. GLUSKINA, Locally flat embeddings of codimensionality 1, *Siberian Mathematical Journal* 7 (1966), 174-177 (traduit du russe).

[6] R. GODEMENT, *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*, A.S.I n° 1252, Hermann, Paris (1958).

[7] A. HAEFLIGER, Structures feuilletées et cohomologie à valeur dans un faisceau de groupoïdes (thèse), *Comm. Math. Helv.* 32 (1958) 248-329

[8] S. LANG, *Introduction aux variétés différentiables*, Dunod, Paris (1967).

[9] P. MICHAUD, Faisceaux principaux et plongements de variétés différentielles, *C.R.A.S. Paris* 269 (1969), 443-446. (Voir aussi sous le même titre: thèse de 3^{e}cycle (20 mars 1969) Fac. Sc. Poitiers).

Département de Mathématiques
U.E.R. Sciences fondamentales et appliquées
Université de Poitiers
40 Avenue du Recteur Pineau
86- POITIERS