CAHIERS DE
TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
CATÉGORIQUES

ALBERT BURRONI

T-catégories (catégories dans un triple)

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 12, n° 3 (1971), p. 215-321

<http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1971__12_3_215_0>

CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE *Vol. XII,3*

En hommage amical à José Luis Viviente

T-CATEGORIES

(Catégories dans un triple)

par Albert BURRONI

Introduction.

Si **T** est un triple sur une catégorie $\mathcal{E}$, les **T**-catégories sont des structures plus générales que les **T**-algèbres; elles correspondent au passage de «lois partout définies» à des «lois partiellement définies» (en un sens très large d'ailleurs) et englobent ainsi des structures aussi diverses que les topologies et les catégories.

Manes avait montré dans [Ma] que la catégorie des espaces topologiques compacts était une catégorie de **T**-algèbres, où **T** est le triple des ultrafiltres sur $\mathcal{E} = Ens$. Ceci avait conduit Barr dans [Ba] à définir les «relationnal **T**-algebras», de sorte que la catégorie des espaces topologiques soit une catégorie de «relationnal **T**-algebras». Mais Barr semblait déçu de ce que, en dehors de ce cas particulier et de celui des préordres relatifs au triple identique, il y ait peu d'exemples. Indépendamment, le nouveau système d'axiomes des topologies que nous avions donné dans [Bu] nous conduisait à une idée voisine (malheureusement avec le triple des filtres... mais notre but était de situer les topologies parmi les quasi-topologies) qui consiste à voir les topologies comme une notion analogue aux préordres (il est significatif d'ailleurs que la structure de topologie finie soit équivalente à celle de préordre fini). Mais cette idée devait nous conduire à chercher à passer des préordres aux catégories et nous avons trouvé dans les définitions de Bénabou [Be] des catégories à l'aide de spans ce qu'il nous fallait pour définir les **T**-catégories. Nous montrons (proposition I.2.4) que les «relationnal **T**-algebras» sont obtenues comme cas particulier: celui des **T**-préordres (qui sont aux **T**-catégories ce que sont les préordres aux catégories).

Le plan général de cet article est le suivant: Un chapitre 0 est consacré à des détails de terminologie. Le chapitre I donne d'abord une définition des **T**-catégories qui met en évidence leur rapport avec les catégories: si $\mathcal{E} = Ens$, les morphismes d'une **T**-catégorie apparaissent non pas comme des flèches allant d'un objet vers un autre objet mais comme des flèches allant d'une structure sur les objets vers un objet. Ainsi une «convergence» dans une topologie peut être représentée comme une flèche $F \to x$ allant d'un filtre vers un point. Il est facile de constater alors qu'il faut que ces structures soient données par l'endofoncteur d'un triple pour pouvoir définir les propriétés de réflexivité, transitivité, neutralité et associativité d'une **T**-catégorie. Ensuite nous développons quelques propriétés générales: celles qu'on peut obtenir sans faire d'hypothèse sur le triple **T**, essentiellement l'existence de limites projectives et fibration du foncteur d'oubli vers $\mathcal{E}$ (ce qui nous permet, en passant, de résoudre le problème qui consiste à plonger universellement le foncteur d'oubli des **T**-algèbres dans un foncteur fibrant). D'autres propriétés telles que l'existence de limites inductives, adjonction au foncteur d'oubli vers les **T**-graphes (l'analogue du théorème de Stone-Čech-Barr), ou cofibration du foncteur d'oubli vers $\mathcal{E}$ ne pourront être obtenues que si on suppose que le triple **T** soit «borné».

Le chapitre II est consacré essentiellement à deux interprétations des **T**-catégories, d'une part comme monades (ou monoïdes si on préfère) de la «pseudo-catégorie de Kleisli» et d'autre part comme pseudo-algèbres de la «bicatégorie des spans».

Le chapitre III donne divers exemples dont le plus développé est celui des multicatégories (qui généralisent celles définies par Lambek dans [La]). Pour cela nous avons été amené à étudier dans les sections III.1 et III.2 le cas particulier où **T** est un triple «fortement cartésien», ce qui permet non seulement la construction de **T**-catégories libres sur le modèle habituel des monoïdes libres (voir l'appendice), mais donne une description maniable de cette structure. Nous améliorons ainsi quantitativement les exemples donnés par Barr, et d'ailleurs nous étudierons plus tard d'autres exemples utiles, mais ce problème nous apparaît moins important dans la mesure où notre définition nous semble plus naturelle et de portée plus générale.

Le chapitre IV est consacré d'abord à la description de divers cas particuliers de **T**-foncteurs, par exemple les **T**-foncteurs étales (ou «à fibration discrète»), puis à une généralisation, les **T**-profoncteurs qui donnent une approche des **T**-transformations naturelles.

Dans un prochain travail, nous définirons les **T**-catégories tensorielles qui donneront diverses formules «de cohérence», en particulier celles des «pseudo-catégories» introduites au chapitre II. Nous espérons également faire une étude homologique sur ces structures.

Je voudrais, en terminant, exprimer mes remerciements à Madame Bastiani qui m'a encouragé à développer ce sujet et qui a relu le manuscrit, ce qui m'a permis de corriger de nombreuses imperfections et parfois des erreurs.

SOMMAIRE

0. TERMINOLOGIE

Les catégories généralisent à la fois les monoïdes et les préordres; il en résulte deux sortes de définitions des catégories (et deux choix de foncteurs d'oubli vers les ensembles). Le choix de ces définitions dépend surtout de nécessités pratiques ou des généralisations qu'on désire obtenir. Les rapports entre ces deux définitions peuvent s'éclairer par les notions de monade et de polyade de Bénabou [Be].

Une telle situation se retrouvera à propos des diverses structures que nous introduirons, et nous appellerons respectivement définitions «globales» et «locales» ces deux types de définitions. Les rappels ci-dessous ont seulement pour but de nous permettre de préciser la terminologie et de nous fournir un modèle de définition «locale», mais, bien entendu, nous supposons connus les éléments de la Théorie des Catégories et des Triples et ce chapitre peut être parcouru rapidement.

0.1. Catégories.

Une *catégorie* est un quadruplet $\mathcal{C} = (|\mathcal{C}|, Hom_{\mathcal{C}}, \iota, \kappa)$ vérifiant les conditions 1 à 6 ci-dessous:

1° $|\mathcal{C}|$ est un ensemble; ses éléments sont appelés *objets de* $\mathcal{C}$.

2° $Hom_{\mathcal{C}}$ est une famille d'ensembles (que nous supposerons disjoints entre eux et disjoints de $|\mathcal{C}|$ -ceci, afin de simplifier les constructions; mais c'est rarement le cas en pratique et, en théorie, ce n'est pas indispensable). Cette famille est indexée par $|\mathcal{C}|^2$ et les relations

$$e \in |\mathcal{C}|, \quad e' \in |\mathcal{C}| \quad \text{et} \quad f \in Hom_{\mathcal{C}}(e', e)$$

s'expriment simplement en disant que $f: e \to e'$ est un *morphisme* (de $\mathcal{C}$); on appelle e la *source de* f et e' le *but de* f.

3° ι est une famille d'applications de la forme

$$\iota(e): \{\emptyset\} \to Hom_{\mathcal{C}}(e, e),$$

où l'indice e parcourt l'ensemble $|\mathcal{C}|$. On notera $id(e)$, id_e, ou même simplement e, le morphisme $\iota(e)(\emptyset): e \to e$. (C'est une manière sophistiquée de se donner une famille de morphismes $id_e : e \to e$, où $e \in |\mathcal{C}|$).

4° κ est une famille d'applications de la forme

$$\kappa(e'', e', e) : Hom_{\mathcal{C}}(e'', e') \times Hom_{\mathcal{C}}(e', e) \to Hom_{\mathcal{C}}(e'', e),$$

où l'indice (e'', e', e) parcourt l'ensemble $|\mathcal{C}|^3$. On notera en général $g.f$ le composé, c'est-à-dire l'image par une telle application, d'un couple (g, f).

5° Si $f : e \to e'$ est un morphisme de $\mathcal{C}$, on a

$$f.id_e = f = id_{e'}.f.$$

6° Si $f : e \to e'$, $g : e' \to e''$, $h : e''' \to e'''$ sont trois morphismes «consécutifs» de $\mathcal{C}$, on a

$$h.(g.f) = (h.g).f,$$

ce qui permet de noter $h.g.f$ ce morphisme.

Un couple $(|\mathcal{C}|, Hom_{\mathcal{C}})$ vérifiant 1 et 2 est appelé *graphe*; un triplet $(|\mathcal{C}|, Hom_{\mathcal{C}}, \iota)$ vérifiant 1, 2 et 3 est appelé *graphe pointé*, et on applique chaque fois la terminologie correspondante de 1, 2 et 3.

On dit que $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ est un *foncteur* si $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont deux catégories et F un couple $(|F|, F_1)$ tel que:

1'° $|F| : |\mathcal{C}| \to |\mathcal{C}'|$ est une application. On notera simplement $F(e)$ l'objet $|F|(e)$, pour tout $e \in |\mathcal{C}|$.

2'° F_1 est une famille d'applications de la forme

$$F_1(e', e) : Hom_{\mathcal{C}}(e', e) \to Hom_{\mathcal{C}'}(F(e'), F(e)),$$

où l'indice (e', e) parcourt l'ensemble $|\mathcal{C}|^2$. Si $f : e \to e'$ est un morphisme de $\mathcal{C}$, on note simplement $F(f)$ au lieu de $F_1(e', e)(f)$.

3'° On a $F(id_e) = id_{F(e)}$ pour tout $e \in |\mathcal{C}|$.

4'° On a $F(g.f) = F(g).F(f)$, si $f : e \to e'$ et $g : e' \to e''$ sont 2 morphismes consécutifs de $\mathcal{C}$.

Une *transformation naturelle* $I : F \to F'$, où $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ et $F' : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ sont des foncteurs de même source et de même but, est donnée par une famille de morphismes de $\mathcal{C}'$ de la forme $I(e) : F(e) \to F'(e)$, où l'indice e parcourt l'ensemble $|\mathcal{C}|$ telle que pour tout morphisme $f : e \to e'$ de $\mathcal{C}$

on ait la relation $I(e').F(f) = F'(f).I(e)$. On notera $\mathcal{C}'^{\mathcal{C}}$ la catégorie habituelle dont les objets sont les foncteurs $F: \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ et les morphismes les transformations naturelles entre ces foncteurs. La loi de composition dans $\mathcal{C}'^{\mathcal{C}}$ empruntera généralement sa notation à celle de $\mathcal{C}'$, ce qui risque de produire une confusion: En effet, si $F: \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ et $G: \mathcal{C}' \to \mathcal{C}''$ sont deux foncteurs consécutifs, on note $G.F: \mathcal{C} \to \mathcal{C}''$ le composé habituel. Une telle composition s'étend aux transformations naturelles: si $I: F \to F'$ est un morphisme de $\mathcal{C}'^{\mathcal{C}}$ et $J: G \to G'$ un morphisme de $\mathcal{C}''^{\mathcal{C}'}$, on définit un composé $J.I: G.F \to G'.F'$ par la formule:

$$(J.I)(e) = J(F'(e)).G(I(e)) = G'(I(e)).J(F(e)).$$

Mais la notation par un point de cette composition risque de se confondre avec la composition dans $\mathcal{C}^{\mathcal{C}}$ lorsque par exemple $\mathcal{C} = \mathcal{C}' = \mathcal{C}''$ et que la composition est notée par un point dans $\mathcal{C}$. Aussi, bien que nous notions en général par un point les compositions de «morphismes entre structures», on notera souvent JI le composé $J.I$ ci-dessus, de sorte que, par exemple, on peut écrire:

$$JI = JF'.GI = G'I.JF\ .$$

De même, on notera souvent Fe, Ff, Ie au lieu de $F(e)$, $F(f)$, $I(e)$; cette convention est surtout employée lorsque la convention précédente sur la notation JI au lieu de $J.I$ est en vigueur.

Sur les *limites*, nous adopterons la terminologie suivante: Si $e \in |\mathcal{C}|$ et si $\phi: A \to \mathcal{E}$ est un foncteur, on dit que $C: e \to \phi$ est un *cône projectif* si C est une famille de morphismes de $\mathcal{E}$, appelés *projections canoniques de* C, de la forme $C(n): e \to \phi(n)$ pour tout $n \in |A|$, telle que, pour tout morphisme $x: n \to n'$ de A, on ait $\phi(x).C(n) = C(n')$. On dit que le cône projectif C est une *limite projective*, ou simplement que e est la *limite projective de* ϕ, si, pour tout cône projectif de la forme $C': e' \to \phi$, il existe un et un seul morphisme $f: e' \to e$ de $\mathcal{E}$ tel que $C'(n) = C(n).f$ pour tout $n \in |A|$. On appelle f le *crochet de* C' *confronté à* (ou *par rapport à*) la limite C. Cette terminologie est souvent modifiée pour des limites particulières: produits, produits fibrés, diagrammes divers. Par exemple, on dit que le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} e'' & \pi \arrow[l, "v_2"'] \arrow[d, "v_1"] \\ e \arrow[from=u, "g"'] & e' \arrow[l, "f"] \end{tikzcd}$$

est un *carré cartésien*, ou encore un *produit fibré*† ou encore que (v_1, v_2) est un produit fibré de (f, g), ou simplement que π est un produit fibré de (f, g), si la relation $f.f' = g.g'$ dans $\mathcal{E}$ entraîne l'existence et l'unicité d'un crochet h tel que $f' = v_1.h$ et $g' = v_2.h$. On fait des conventions analogues sur les limites inductives - mais l'expression «projection canonique» doit alors être remplacée par *injection canonique*. On dit que $\mathcal{E}$ *admet des A-limites projectives*, par exemple, si, pour tout $\phi \in |\mathcal{E}^A|$, il existe une limite projective $C: e \to \phi$; et si on a choisi une telle limite pour tout ϕ, on dit que $\mathcal{E}$ est muni d'un *choix canonique* (ou *officiel*) de A-limites projectives. On fait des conventions analogues pour les produits fibrés, les limites inductives, etc.... Souvent un tel choix est classique et se fait tacitement.

Nous ne reviendrons pas sur la notion de foncteur *commutant avec des limites*, ni sur celle de limites commutant entre elles; ces notions sont assez claires.

Rappelons que, si $C: \phi \to e$ est un cône inductif, où $\phi: A \to \mathcal{E}$ est un foncteur, si $f: e' \to e$ est un morphisme de $\mathcal{E}$ et si on peut former pour tout $n \in |A|$ un produit fibré

$$\begin{tikzcd} \phi(n) \arrow[d, "C(n)"'] & \phi'(n) \arrow[l, "t(n)"'] \arrow[d, "C'(n)"] \\ e & e' \arrow[l, "f"] \end{tikzcd}$$

alors la famille $\phi'(n)$ se prolonge en un foncteur $\phi': A \to \mathcal{E}$ entièrement déterminé par la condition que $t: \phi' \to \phi$ soit une transformation naturelle. On dit que le cône $C': \phi' \to e'$ est obtenu par le *changement de base f*, et on le note parfois f^*C. On dit que dans $\mathcal{E}$ les *A-limites inductives sont universelles* si, chaque fois que C est une A-limite inductive et que C' existe, alors C' est une A-limite inductive.

† Cette terminologie suppose qu'on considère le diagramme comme orienté dans le plan.

0.2. Triples.

Soit $\mathcal{E}$ une catégorie. On dit que $\mathbf{T} = (T, I, K)$ est un *triple* sur $\mathcal{E}$ si $T: \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ est un foncteur, $I: id_{\mathcal{E}} \to T$ et $K: TT \to T$ deux transformations naturelles telles que

$$(1) \qquad K.TI = T = K.IT, \quad K.TK = K.KT.$$

On dit que $(M, m): \mathbf{T} \to \mathbf{T}'$ est un *morphisme de triples* si $\mathbf{T} = (T, I, K)$ est un triple sur $\mathcal{E}$, $\mathbf{T}' = (T', I', K')$ un triple sur une autre catégorie $\mathcal{E}'$, $M: \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ un foncteur et $m: T'M \to MT$ une transformation naturelle, tels que:

$$(2) \qquad m.I'M = MI, \quad m.K'M = MK.mT.T'm.$$

En général, lorsqu'il n'y a pas de risque de confusion, les notations I et K seront les mêmes pour tous les triples.

On dit que le foncteur $F: \mathcal{E} \to \overline{\mathcal{E}}$ est un *foncteur adjoint* du foncteur $U: \overline{\mathcal{E}} \to \mathcal{E}$ s'il existe deux transformations naturelles $I: id_{\mathcal{E}} \to UF$ et $\overline{I}: FU \to id_{\overline{\mathcal{E}}}$ telles que

$$(3) \qquad U\overline{I}.IU = U, \quad \overline{I}F.FI = F.$$

Pour tout $e \in |\mathcal{E}|$, on appelle Ie *morphisme d'adjonction* associé à e; pour tout $\overline{e} \in |\overline{\mathcal{E}}|$, on appelle $\overline{I}\overline{e}$ *morphisme de coadjonction* associé à $\overline{e}$; On montre que $\mathbf{T} = (UF, I, U\overline{I}F)$ est un triple sur $\mathcal{E}$: on dit qu'il est *déduit du couple d'adjoints* (F, U); il dépend du choix (tacite en général) de I et de $\overline{I}$.

Rappelons que, si $\mathbf{T}$ est un triple sur $\mathcal{E}$, on note $Alg(\mathbf{T})$ la catégorie des $\mathbf{T}$-*algèbres*: Une $\mathbf{T}$-algèbre sur $e \in |\mathcal{E}|$ est un morphisme de de $\mathcal{E}$ de la forme $b: Te \to e$ tel que

$$(4) \qquad b.Ie = e, \quad b.Ke = b.Tb.$$

Un morphisme $f: b \to b'$ de $Alg(\mathbf{T})$ est défini par un morphisme $f: e \to e'$ de $\mathcal{E}$ tel que b soit une algèbre sur e, b' une algèbre sur e' et que

$$(5) \qquad f.b = b'.Tf.$$

On note $Kl(\mathbf{T})$ la *catégorie de Kleisli* de $\mathbf{T}$: elle a les mêmes objets que $\mathcal{E}$ et un morphisme $g: e \to e'$ de $Kl(\mathbf{T})$ est un morphisme $g: Te \to Te'$ de

$\mathcal{E}$ tel que $g: Ke \to Ke'$ soit un morphisme de $Alg(\mathbf{T})$. Rappelons qu'il revient au même de se donner un morphisme $h: e \to Te'$ et que le composé de h avec un deuxième morphisme $h': e' \to Te''$ dans $Kl(\mathbf{T})$ est égal à $Ke''.Th'.h: e \to Te''$. Les foncteurs d'oubli $Alg(\mathbf{T}) \to \mathcal{E}$ et $Kl(\mathbf{T}) \to \mathcal{E}$ (ce dernier foncteur associe au morphisme $g: e \to e'$ de $Kl(\mathbf{T})$ le morphisme $g: Te \to Te'$ de $\mathcal{E}$) admettent des adjoints et $\mathbf{T}$ est le triple déduit de chacun de ces deux couples d'adjoints.

Rappelons enfin que, si $\mathbf{T}$ est le triple déduit d'un couple d'adjoints (F, U), on a un diagramme commutatif;

$$\begin{tikzcd} Kl(\mathbf{T}) \arrow[r] \arrow[dr] & \overline{\mathcal{E}} \arrow[r] \arrow[d] & Alg(\mathbf{T}) \arrow[dl] \\ & \mathcal{E} & \end{tikzcd}$$

les flèches horizontales étant de plus uniques lorsqu'elles rendent commutatif le diagramme obtenu en remplaçant les trois foncteurs vers $\mathcal{E}$ par leurs adjoints. Le foncteur $\overline{\mathcal{E}} \to Alg(\mathbf{T})$ s'appelle le *foncteur d'Eilenberg-Moore* associé à (F, U), ou simplement à U. Lorsque ce foncteur est un isomorphisme, on dit que U est *triplable*. Par exemple, le foncteur d'Eilenberg-Moore $Kl(\mathbf{T}) \to Alg(\mathbf{T})$ est pleinement fidèle, mais pas toujours injectif.

I. PROPRIETES GENERALES DES T-CATEGORIES

Nous allons remplacer le morphisme $b: Te \to e$ d'une **T**-algèbre, où **T** est un triple sur une catégorie $\mathcal{E}$, par un span, c'est-à-dire par un couple de morphismes de $\mathcal{E}$ de même source

$$b: \pi \to e \quad \text{et} \quad a: \pi \to Te,$$

et définir la notion de **T**-catégorie en ajoutant des données et des conditions sur ce span, de façon à généraliser la notion de «relationnal **T**-algebra» de Barr [Ba]. Nous verrons au chapitre II que cette généralisation est naturelle; ci-dessous nous nous inspirons de la définition «globale» d'une catégorie pour choisir nos axiomes.

I.1. T-catégories.

Dans tout le reste de ce chapitre, $\mathcal{E}$ sera une catégorie admettant des produits fibrés finis, et $\mathbf{T} = (T, I, K)$ un triple sur $\mathcal{E}$.

Un **T**-*graphe* sur un objet $e \in |\mathcal{E}|$ est un couple (b, a), où

$$b: \pi \to e \quad \text{et} \quad a: \pi \to Te$$

sont deux morphismes de $\mathcal{E}$.

Un **T**-*graphe pointé* est un triplet (b, a, i) tel que (b, a) soit un **T**-graphe sur e et $i: e \to \pi$ un morphisme de $\mathcal{E}$ tel que:

(1) $$b . i = id_e \quad \text{et} \quad a . i = I e.$$

Formons alors un produit fibré de (a, Tb):

$$\begin{tikzcd} T\pi \arrow[d, "Tb"'] & \pi_2 \arrow[l, "v_2"'] \arrow[d, "v_1"] \\ Te & \pi \arrow[l, "a"] \end{tikzcd}$$

Les relations

$$a . id_\pi = a = id_{Te} . a = Tb . (Ti . a),$$
$$a . (i . b) = Ie . b = Tb . I\pi$$

entraînent l'existence de crochets $i_1, i_2: \pi \to \pi_2$ tels que

(2) $$v_1 . i_1 = id_\pi, \quad v_2 . i_1 = Ti . a,$$

(3) $$v_1 . i_2 = i . b, \quad v_2 . i_2 = I\pi .$$

Formons alors un produit fibré (w_1, w_2) de (v_2, Tv_1). Si $k : \pi_2 \to \pi$ est morphisme vérifiant

(4) $$b . k = b . v_1 , \quad a . k = Ke . Ta . v_2 ,$$

les relations

$$a.(k.w_1) = Ke.Ta.v_2.w_1 = Ke.TTb.Tv_2.w_2 = Tb.(K\pi.Tv_2.w_2),$$
$$a.(v_1.w_1) = Tb.Tv_1.w_2 = Tb.(Tk.w_2)$$

entraînent l'existence de crochets $k_1, k_2 : \pi_3 \to \pi_2$ tels que:

(5) $$v_1 . k_1 = k . w_1 , \quad v_2 . k_1 = K\pi . Tv_2 . w_2 ,$$

(6) $$v_1 . k_2 = v_1 . w_1 , \quad v_2 . k_2 = Tk . w_2 .$$

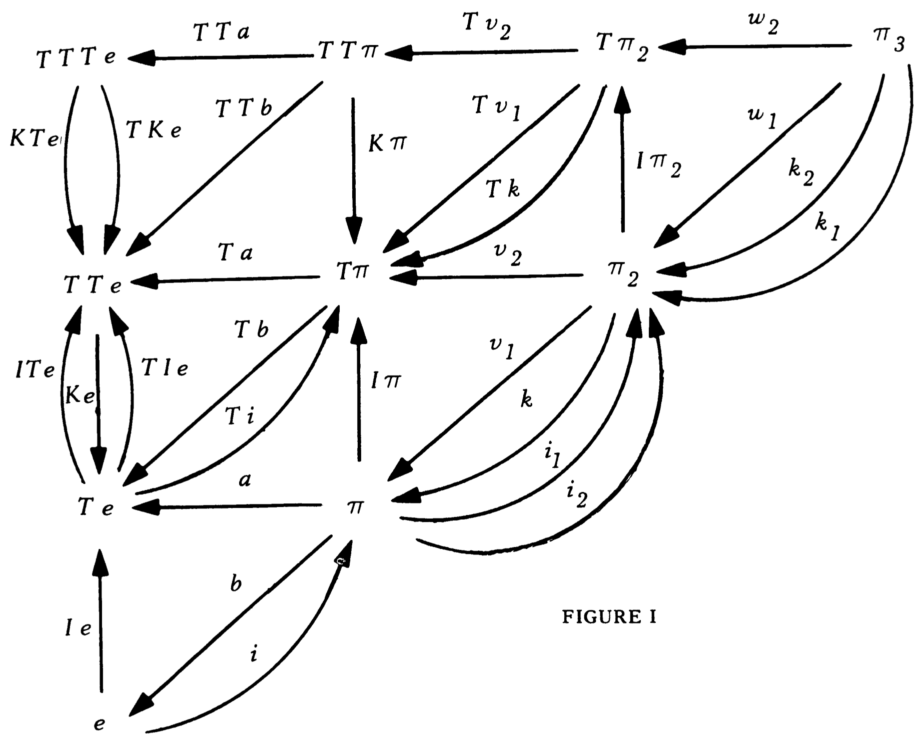


FIGURE I

Une **T**-*catégorie* est, alors, un quadruplet $\theta = (b, a, i, k)$ tel que (b, a, i) soit un **T**-graphe pointé et vérifiant de plus les axiomes (4), (5), (6) et, ci-dessous, (7) et (8):

(7) $$k . i_1 = id_\pi = k . i_2 \quad \text{(«neutralité»)},$$

(8) $$k.k_1 = k.k_2 \quad (\text{«associativité»}).$$

REMARQUE. En réalité, θ dépend du choix des produits fibrés (v_1, v_2) et (w_1, w_2), et on appellera ces couples les produits fibrés *associés* à la **T**-catégorie θ; leur donnée est sous-entendue dans le quadruplet (b, a, i, k). On appelle respectivement b et a le morphisme *but* et le morphisme *source de* θ; l'objet e sera noté $|\theta|$ et appelé *objet des objets*, l'objet π sera appelé *objet des morphismes*. Plus généralement π_n, pour $n = 0, 1, 2, 3$, où $\pi_0 = e$ et $\pi_1 = \pi$, est appelé *objet des chemins de longueur* n de θ. (Toute cette terminologie peut aussi s'appliquer à un **T**-graphe.)

Lorsque $\mathcal{E}$ est muni d'un choix canonique de produits fibrés et que (v_1, v_2) et (w_1, w_2) sont canoniquement choisis, on dit que θ est une **T**-*catégorie canonique* (ou *officielle*). En fait, dans le cas où $\mathcal{E}$ est muni d'un tel choix, il sera sous-entendu que la **T**-catégorie est canonique, et nous le signalerons explicitement s'il n'en est pas ainsi. Il est évident qu'à toute **T**-catégorie non canonique est associée une **T**-catégorie canonique ayant même **T**-graphe sous-jacent et qu'il y a un isomorphisme (voir la définition de morphisme qui suit) unique entre elles. Inversement, si θ est une **T**-catégorie canonique, tout autre choix des deux produits fibrés ci-dessus fournit une et une seule **T**-catégorie non canonique qui lui est isomorphe. Cette remarque sera tacitement appliquée à d'autres structures analogues.

Si $\theta = (b, a)$ et $\theta' = (b', a')$ sont deux **T**-graphes, un *morphisme* f de θ vers θ', aussi noté $(f_0, f_1): \theta \to \theta'$, est déterminé par un couple de morphismes $f_0: e \to e'$, $f_1: \pi \to \pi'$ de $\mathcal{E}$ entre les objets des objets et les objets des morphismes, vérifiant les relations:

(1') $$b'.f_1 = f_0.b, \quad a'.f_1 = Tf_0.a.$$

f_0 est encore noté $|f|$ et appelé *morphisme sous-jacent à* f.

Si $\theta = (b, a, i)$ et $\theta' = (b', a', i')$ sont deux **T**-graphes pointés, un morphisme $(f_0, f_1): \theta \to \theta'$ est défini par un morphisme des **T**-graphes sous-jacents vérifiant de plus:

(2') $$i'.f_0 = f_1.i.$$

Enfin, soient $\theta = (b, a, i, k)$ et $\theta' = (b', a', i', k')$ deux **T**-catégories; si (f_0, f_1) définit un morphisme des **T**-graphes pointés sous-jacents, il existe deux crochets $f_2 : \pi_2 \to \pi'_2$ et $f_3 : \pi_3 \to \pi'_3$ caractérisés par les relations:

$$v'_1 \cdot f_2 = f_1 \cdot v_1 , \quad v'_2 \cdot f_2 = T f_1 \cdot v_2 ,$$
$$w'_1 \cdot f_3 = f_2 \cdot w_1 , \quad w'_2 \cdot f_3 = T f_2 \cdot w_2 ,$$

où (v_1, v_2), (w_1, w_2) sont les produits fibrés associés à θ et (v'_1, v'_2), (w'_1, w'_2) ceux associés à θ'. Alors (f_0, f_1) définit un *morphisme de* **T**-*catégories*, ou **T**-*foncteur*, $(f_0, f_1) : \theta \to \theta'$ si de plus:

(3') $$k' \cdot f_2 = f_1 \cdot k .$$

Soit **2** la catégorie réduite à deux objets 0 et 1 et un seul morphisme $0 \to 1$ autre que les deux morphismes identiques. Un objet de $\mathcal{E}^2$ est identifié à un morphisme de $\mathcal{E}$, et $(g, g') : f \to f'$ est identifié à un morphisme de $\mathcal{E}^2$, si g, g', f, f' sont des morphismes de $\mathcal{E}$ tels que l'on ait $f' \cdot g' = g \cdot f$. Si $\mathcal{E}$ admet des produits fibrés, il en est de même de $\mathcal{E}^2$ et, si $\mathbf{T} = (T, I, K)$ est un triple sur $\mathcal{E}$, on en déduit un triple $\mathbf{T}^2$ sur $\mathcal{E}^2$, où $\mathbf{T}^2 = (T^2, I^2, K^2)$, comme on le ferait pour n'importe quelle catégorie de préfaisceaux (i.e. de foncteurs) à valeurs dans $\mathcal{E}$. Si $f : e \to e'$ est un morphisme de $\mathcal{E}$, donc un objet de $\mathcal{E}^2$, on a $T^2 f = T f$, et $I^2 f$, $K^2 f$ sont les morphismes de $\mathcal{E}^2$ suivants:

$$(I e', I e) : f \to T f , \quad (K e', K e) : T T f \to T f .$$

Si $(g, g') : f \to f'$ est un morphisme de $\mathcal{E}^2$, son image par T^2 sera, par définition, le morphisme $(T g, T g') : T f \to T f'$ de $\mathcal{E}^2$.

PROPOSITION I. 1. 1. *Une* $\mathbf{T}^2$-*catégorie est identifiable à un morphisme de* **T**-*catégories.*

PREUVE. La démonstration, élémentaire, est laissée au lecteur; indiquons simplement que, si $(f_0, f_1) : \theta \to \theta'$ est un morphisme de **T**-catégories, f_0 est l'objet des objets, et f_1 l'objet des morphismes de la $\mathbf{T}^2$-catégorie associée. ∎

On peut faire des remarques analogues pour les **T**-graphes et pour les **T**-graphes pointés.

Si $\mathcal{E}$ est munie de produits fibrés finis officiels, on notera *Gr(* **T** *)* et *Cat(* **T** *)* les catégories ayant respectivement pour objets les **T**-graphes et les **T**-catégories officiels. Lorsque $\mathcal{E}$ admet des produits fibrés finis sans qu'on en ait choisi d'officiels, on note encore quelquefois *Gr(* **T** *)* et *Cat(* **T** *)* les catégories (équivalentes aux précédentes) de tous les **T**-graphes et de toutes les **T**-catégories, respectivement. Les lois de composition dans ces catégories sont évidentes.

I.2. T-préordres.

Un **T**-graphe *régulier* est un **T**-graphe (b, a) tel que les relations

$$b.f = b.f' \quad \text{et} \quad a.f = a.f'$$

entraînent $f = f'$. Un **T**-*préordre* est une **T**-catégorie dont le graphe sous-jacent est régulier.

PROPOSITION I.2.2. *Si (b, a) est un* **T**-*graphe régulier, e l'objet des objets, π l'objet des morphismes, π_2 la source d'un produit fibré de (a, Tb) et $i: e \to \pi$, $k: \pi_2 \to \pi$ deux morphismes de $\mathcal{E}$ vérifiant les seuls axiomes (1) et (4) de I.4, alors (b, a, i, k) est un* **T**-*préordre. De plus les conditions (2') et (3') sont conséquences de (1') pour un morphisme vers un* **T**-*préordre.*

PREUVE. Il faut montrer que les axiomes de neutralité et associativité (7) et (8) de I.4 sont automatiquement satisfaits. (b, a) étant régulier, les relations

$$k.i_1 = \pi = k.i_2, \quad k.k_1 = k.k_2$$

se ramènent aux égalités suivantes:

(α) $$b.k.i_1 = b = b.k.i_2,$$

(β) $$a.k.i_1 = a = a.k.i_2,$$

(γ) $$b.k.k_1 = b.k.k_2,$$

(δ) $$a.k.k_1 = a.k.k_2.$$

En effet,

$$b.k.i_1 \underset{\text{d'après (4)}}{=} b.v_1.i_1 \underset{\text{d'après (2)}}{=} b$$

et de même

$$b.k.i_2 = b.v_1.i_2 \underset{\text{d'après (3)}}{=} b.i.b \underset{\text{d'après (1)}}{=} b,$$

ce qui démontre (α).

$$a.k.i_1 \underset{\text{d'après (4)}}{=} Ke.Ta.v_2.i_1 = Ke.Ta.Ti.a =$$

$$= Ke.T(a.i).a \underset{\text{d'après (1)}}{=} Ke.Tle.a = a$$

et

$$a.k.i_2 = Ke.Ta.v_2.i_2 = Ke.Ta.I\pi = Ke.ITe.a = a,$$

ce qui démontre (β).

$$b.k.k_1 = b.v_1.k_1 = b.k.w_1 = b.v_1.w_1 = b.v_1.k_2 = b.k.k_2,$$

d'où (γ). Enfin

$$a.k.k_1 = Ke.Ta.v_2.k_1 = Ke.Ta.K\pi.Tv_2.w_2 =$$

$$Ke.KTe.TTa.Tv_2.w_2 = Ke.TKe.TTa.Tv_2.w_2 =$$

$$Ke.T(Ke.Ta.v_2).w_2 = Ke.T(a.k).w_2 = Ke.Ta.Tk.w_2 =$$

$$Ke.Ta.v_2.k_2 = a.k.k_2,$$

ce qui démontre (δ). La vérification de la dernière affirmation de la proposition est aisée. ■

Cette proposition permet d'identifier un **T**-préordre au **T**-graphe sous-jacent et de noter quelquefois (b, a) au lieu de (b, a, i, k) un **T**-préordre. Parmi les **T**-préordres, nous distinguerons beaucoup de cas intéressants suivant les propriétés de a et b (voir des exemples au chapitre IV). Limitons-nous à constater le fait suivant:

PROPOSITION I.2.3. *Une* **T**-*algèbre* b *sur* e *s'identifie à un* **T**-*préordre* (b, a) *tel que* $a = id_{Te}$ *et réciproquement.*

PREUVE. C'est tout à fait évident, puisque la relation $a = id_{Te}$ entraîne

$$i = Ie, \quad Ta = v_2 = id_{TTe} \quad \text{et} \quad k = Ke. \;■$$

On notera $Ord(\mathbf{T})$ et $Alg(\mathbf{T})$ les sous-catégories pleines de la catégorie $Gr(\mathbf{T})$ ayant respectivement pour objets les $\mathbf{T}$-préordres et les $\mathbf{T}$-algèbres. Nous venons de voir que $Alg(\mathbf{T})$ s'identifie à la catégorie habituelle des $\mathbf{T}$-algèbres. De plus, lorsque $\mathcal{E} = Ens$ est la catégorie des ensembles associée à un univers, on a:

PROPOSITION I.2.4. *Si $\mathcal{E} = Ens$, la catégorie $Ord(\mathbf{T})$ est équivalente à la catégorie des «relationnal $\mathbf{T}$-algebras» de Barr* [Ba].

PREUVE. Une «relationnal $\mathbf{T}$-prealgebra» est une relation $r: Te \to e$. Elle est définie par une partie π de $e \times Te$, qui définit un $\mathbf{T}$-graphe régulier (b, a) obtenu en prenant pour b et a respectivement les composés de l'inclusion $\pi \to e \times Te$ par les projections $e \times Te \to e$ et $e \times Te \to Te$. C'est une «relationnal $\mathbf{T}$-algebra» si elle vérifie de plus les conditions:

$$(1) \quad id_e \subset r.Ie, \quad (2) \quad r.\tilde{T}r \subset r.Ke,$$

où $\tilde{T}r: TTe \to Te$ est la relation définie par l'ensemble

$$\hat{\pi} = \{(Tb(z), Ta(z)) \mid z \in T\pi\} \subset Te \times TTe.$$

On identifie toute application $f: e \to e'$ à une relation et on notera

$$\tilde{f} = \{(f(x), x) \mid x \in e\} \subset e' \times e$$

son «graphe». Nous allons montrer que (b, a) est un $\mathbf{T}$-préordre.

Pour tout $x \in e$, posons $i(x) = (x, Ie(x))$; on a $i(x) \in \pi$, car d'après (1), comme $(x, x) \in id_e$, il existe $y \in Te$ tel que

$$(x, y) \in r \quad \text{et} \quad (y, x) \in Ie$$

et, puisque Ie est une application, on a $y = Ie(x)$, donc $i(x) \in \pi$, et $i: e \to \pi$ est une application telle que

$$b.i = id_e, \quad a.i = Ie.$$

Un élément $((x, y), m)$ du produit fibré π_2 de (a, Tb) est caractérisé par les relations $(x, y) \in \pi$, $m \in T\pi$ et $y = Tb(m)$. Posons

$$k((x, y), m) = (x, Ke.Ta(m));$$

ce couple est un élément de π. En effet, comme $(Tb(m), Ta(m)) \in \hat{\pi}$, l'axiome (2) entraîne que $(x, Ta(m)) \in r.Ke$, donc il existe $y \in Te$ tel que $(x, y) \in \pi$ et $(y, Ta(m)) \in Ke$. Comme Ke est une application, on en tire $y = Ke.Ta(m)$, ce qui montre que $k((x,y),m) \in \pi$ et que l'application $k: \pi_2 \to \pi$ vérifie les conditions:

$$b.k = b.v_1 \quad \text{et} \quad a.k = Ke.Ta.v_2.$$

Ceci, d'après la proposition 1.4.2, achève de montrer que (b,a) est un $\mathbf{T}$-préordre. ■

I.3. Propriétés (limites projectives, fibrations,...).

On a une suite de foncteurs d'oubli

$$(*) \qquad Alg(\mathbf{T}) \to Ord(\mathbf{T}) \to Cat(\mathbf{T}) \to Gr(\mathbf{T}) \to \mathfrak{S}.$$

Les deux premiers sont des inclusions pleines, le troisième est fidèle et le dernier ne l'est pas en général.

PROPOSITION I.3.5. *Si $\mathfrak{S}$ admet des A-limites projectives, il en est de même des catégories figurant dans la suite (*) et les foncteurs de cette suite commutent avec ces limites.*

PREUVE. Nous montrerons d'abord comment construire une limite projective pour un foncteur $\phi: A \to Cat(\mathbf{T})$. A chaque *symbole* d'objet x sur la figure 1 (I.3) correspond un foncteur évident, qu'on note $U_x: Cat(\mathbf{T}) \to \mathfrak{S}$, qui associe à toute $\mathbf{T}$-catégorie θ l'objet noté x sur cette même figure 1. Ainsi

$$U_e(\theta) = e, \quad U_\pi(\theta) = \pi, \quad U_{Te}(\theta) = Te, \ etc...$$

et à chaque *symbole* de morphisme $\xi: x \to x'$ sur la figure 1 est associée une transformation naturelle $U_\xi: U_x \to U_{x'}$, telle que $U_\xi(\theta) = \xi$. On pose

$$\hat{x} = U_x.\phi \quad \text{et} \quad \hat{\xi} = U_\xi.\phi;$$

ainsi, pour tout $n \in |A|$, on a

$$\phi(n) = (\hat{b}(n), \hat{a}(n), \hat{i}(n), \hat{k}(n)).$$

Si $\hat{x}: A \to \mathfrak{S}$ est un foncteur, on notera $p_n^x: lim\,\hat{x} \to \hat{x}(n)$ la n-ième projection canonique de cette limite. De même si $\hat{\xi}: \hat{x} \to \hat{x}'$ est une transformation naturelle, on note $lim\,\hat{\xi}: lim\,\hat{x} \to lim\,\hat{x}'$ l'unique morphisme de $\mathfrak{S}$ tel que $lim\,\hat{\xi}.p_n^x = p_n^{x'}.\hat{\xi}(n)$ pour tout $n \in |A|$. † On pose $e = lim\,\hat{e}$.

† Dans un travail ultérieur, nous considérerons la figure 1 comme «l'esquisse» des $\mathbf{T}$-catégories, ces dernières n'étant que des «réalisations» de cette «esquisse» munie de «typifications» (voir terminologie de [Bu], par exemple).

Soit m^{Te} l'unique morphisme (appelé encore *crochet*) qui résulte de la propriété de la limite projective $lim\, \hat{Te}$, tel que $p_n^{Te} . m^{Te} = T p_n^e$ pour tout $n \in |A|$. Formons un produit fibré de $(lim\, \hat{a}, m^{Te})$:

$$\begin{tikzcd} lim\, \hat{Te} & Te \arrow[l, "m^{Te}"'] \\ lim\, \hat{\pi} \arrow[u, "lim\, \hat{a}"] & \pi \arrow[l, "m^{\pi}"'] \arrow[u, "a"'] \end{tikzcd}$$

On a $m^{Te} . Ie = lim\, \hat{Ie}$. Le **T**-graphe (b, a), où $b = lim\, \hat{b} . m^{\pi}$ et où a est la projection définie ci-dessus, se prolonge en une **T**-catégorie. En effet, les relations

$$lim\, \hat{a} .\, lim\, \hat{i} = lim\, \hat{Ie} = m^{Te} . Ie$$

entraînent l'existence d'un crochet $i : e \to \pi$ caractérisé par les relations

$$m^{\pi} . i = lim\, \hat{i} \quad \text{et} \quad a . i = Ie,$$

et alors (b, a, i) est un **T**-graphe pointé.

Soit $m^{T\pi} : T\pi \to lim\, \hat{T\pi}$ le crochet caractérisé par les relations $p_n^{T\pi} . m^{T\pi} = T p_n^{\pi}$; on montre que $lim\, \hat{Tb} . m^{T\pi} = m^{Te} . Tb$ en obtenant des égalités chaque fois que l'on compose à gauche par les p_n^{Te}. Il en résulte, puisque les limites projectives de produits fibrés restent des produits fibrés, qu'il existe un crochet $m^{\pi 2} : \pi_2 \to lim\, \hat{\pi}_2$ tel que

$$lim\, \hat{v}_2 . m^{\pi 2} = m^{T\pi} . v_2 \quad \text{et} \quad lim\, \hat{v}_1 . m^{\pi 2} = m^{\pi} . v_1 ,$$

où (v_1, v_2) est le produit fibré de (a, Tb). Les relations

$$lim\, \hat{a} .\, lim\, \hat{k} . m^{\pi 2} = lim\, \hat{Ke} . (lim\, \hat{Ta} .\, lim\, \hat{v}_2 . m^{\pi 2}) =$$

$$lim\, \hat{Ke} . m^{TTe} . Ta . v_2 = m^{Te} . Ke . Ta . v_2$$

entraînent l'existence de $k : \pi_2 \to \pi$ tel que

$$a . k = Ke . Ta . v_2 \quad \text{et} \quad m^{\pi} . k = lim\, \hat{k} . m^{\pi 2}.$$

On en déduit $b . k = b . v_1$. Il ne reste plus qu'à démontrer que (b, a, i, k) vérifie les axiomes de neutralité et d'associativité, ce que nous laissons au lecteur.

Pour voir que (b, a, i, k) est bien une limite projective, supposons que (b', a', i', k') soit une **T**-catégorie, (v'_1, v'_2) et (w'_1, w'_2) les produits fibrés associés, e', π', π'_2, π'_3 respectivement l'objet des chemins de longueur $n = 0, 1, 2, 3$, et considérons un cône projectif de cette structure vers le foncteur $\phi : A \to Cat(\mathbf{T})$. Pour tout symbole d'objet x de la figure 1, notons $q^x_n : x' \to \hat{x}(n)$ la n-ième projection et q^x le crochet caractérisé par $q^x_n = p^x_n . q^x$ pour tout $n \in |A|$. En composant par les p^{Te}_n, à gauche, on constate que $m^{Te} . T q^e = q^{Te}$, donc

$$lim\, \hat{a} . q^{\pi} = q^{Te} . a' = m^{Te} . T q^e . a',$$

ce qui implique l'existence d'un crochet $\bar{q} : \pi' \to \pi$ caractérisé par:

$$a . \bar{q} = T q^e . a' \quad \text{et} \quad m^{\pi} . \bar{q} = q^{\pi}.$$

On termine alors facilement la démonstration en montrant que $(q^e, \bar{q})$ définit un homomorphisme de $\mathbf{T}$-catégories.

La construction de limites projectives de $\mathbf{T}$-graphes et de $\mathbf{T}$-graphes pointés est, évidemment, «sous-jacente» à celle qu'on vient de faire. Il est alors immédiat que le foncteur d'oubli $Cat(\mathbf{T}) \to Gr(\mathbf{T})$ commute avec ces limites. Enfin, si dans la construction précédente de $lim \phi$, les $\mathbf{T}$-graphes $(b(n), a(n))$ sont réguliers, il en est de même de (b, a), ce qui explicite les limites projectives dans $Ord(\mathbf{T})$ et, si les $a(n)$ sont réduits à des identités, il en est de même de a; donc le foncteur «inclusion pleine» $Alg(\mathbf{T}) \to Ord(\mathbf{T})$ commute avec ces limites. ∎

COROLLAIRE. *Si T commute avec les A-limites projectives, la construction précédente se simplifie et on a $x = lim\, \hat{x}$ pour tout symbole x.*

PREUVE. C'est tout à fait immédiat, puisque les A-limites projectives de produits fibrés restent des produits fibrés (commutation des limites projectives entre elles). ∎

Si $U : \bar{\mathcal{E}} \to \mathcal{E}$ est un foncteur, on dit qu'un morphisme $\bar{f} : \bar{e}' \to \bar{e}$ de $\bar{\mathcal{E}}$ est *U-cartésien* (ou est une *U-injection*, dans la terminologie de [Eh]) si, pour tout morphisme $\bar{g} : \bar{e}'' \to \bar{e}$ de $\bar{\mathcal{E}}$ et toute relation $U(\bar{g}) = U(\bar{f}) . h$ dans $\mathcal{E}$, il existe un et un seul morphisme $\bar{h} : \bar{e}'' \to \bar{e}'$ de $\bar{\mathcal{E}}$ tel que l'on ait $h = U(\bar{h})$. On dit que U est *fibrant* si, pour tout $\bar{e} \in |\bar{\mathcal{E}}|$ et tout morphisme $f : e' \to U(\bar{e})$ de $\mathcal{E}$, il existe un morphisme U-cartésien $\bar{f} : \bar{e}' \to \bar{e}$ tel que $f = U(\bar{f})$; on notera quelquefois $f^*\bar{e}$ l'objet $\bar{e}'$. Si $U' : \bar{\mathcal{E}}' \to \mathcal{E}$

est un autre foncteur fibrant, on dit que le foncteur $V: \overline{\mathcal{E}} \to \overline{\mathcal{E}}'$ *est compatible avec ces fibrations* s'il transforme tout morphisme U-cartésien en un morphisme U'-cartésien. On a, avec les notations précédentes, un isomorphisme $V(f^* \bar{e}) \to f^* V(\bar{e})$.

PROPOSITION I.3.6. *Les foncteurs* $\mathcal{X} \to \mathcal{E}$ *extraits de tous les composés de la suite* (*) *(proposition I.4.4) pour* $\mathcal{X} = Ord(\mathbf{T}),\ Cat(\mathbf{T}),\ Gr(\mathbf{T})$ *sont fibrants, et ces fibrations sont respectées par les foncteurs de la suite* (*) *entre ces catégories.*

PREUVE. Soient $\theta = (b, a)$ un **T**-graphe et $f_0: e' \to e$ un morphisme de $\mathcal{E}$, où $e = |\theta|$. Formons une limite projective du diagramme (en traits forts)

$$\begin{tikzcd} Te & Te' \arrow[l, "Tf_0"'] \\ \pi \arrow[u, "a"] \arrow[d, "b"'] & \pi' \arrow[l, dashed, "f_1"'] \arrow[u, dotted, "a'"'] \arrow[d, dotted, "b'"] \\ e & e' \arrow[l, "f_0"'] \end{tikzcd}$$

(l'existence d'une telle limite résulte de celle des produits fibrés finis). Nous obtenons des projections (notées en pointillés sur la figure) b', f_1, a'. On obtient ainsi un **T**-graphe $\theta' = (b', a')$ et un morphisme

$$(f_0, f_1): \theta' \to \theta \text{ de } Gr(\mathbf{T}).$$

Soient $(f'_0, f'_1): \theta'' \to \theta$ un autre morphisme, où $\theta'' = (b'', a'')$, et $g_0: e'' \to e'$ tel que $e'' = |\theta''|$ et $f'_0 = f_0 \cdot g_0$; nous allons construire un morphisme $(g_0, g_1): \theta'' \to \theta'$ tel que $f'_1 = f_1 \cdot g_1$. Considérons le diagramme commutatif:

$$\begin{tikzcd} Te & Te' \arrow[l, "Tf'_0"'] \\ \pi \arrow[u, "a"] \arrow[d, "b"'] & \pi'' \arrow[l, "f'_1"'] \arrow[u, "Tg_0 \cdot a'"'] \arrow[d, "g_0 \cdot b'"] \\ e & e' \arrow[l, "f'_0"'] \end{tikzcd}$$

La comparaison avec la limite projective fournit un crochet $g_1 : \pi'' \to \pi'$ tel que

$$a' \cdot g_1 = T g_0 \cdot a'', \quad f_1 \cdot g_1 = f'_1 \quad \text{et} \quad b' \cdot g_1 = g_0 \cdot b''.$$

Il en résulte que $(g_0, g_1) : \theta'' \to \theta'$ est un morphisme de $Gr(\mathbf{T})$ et que $(f_0, f_1) : \theta' \to \theta$ est un morphisme cartésien pour le foncteur d'oubli $U : Gr(\mathbf{T}) \to \mathcal{E}$. On posera $\theta' = f_0^* \theta$. Notons de plus que, si θ est régulier, il en est de même de θ'.

Supposons maintenant que $\theta = (b, a)$ soit sous-jacent à une $\mathbf{T}$-catégorie $\overline{\theta} = (b, a, i, k)$; nous allons construire une $\mathbf{T}$-catégorie $\overline{\theta}' = (b', a', i', k')$ telle que $f_0^* \theta = (b', a')$. Considérons les diagrammes commutatifs, où $f_2 : \pi'_2 \to \pi_2$ est défini plus haut à partir de (f_0, f_1):

$$\begin{tikzcd}
Te & Te' \arrow[l, "Tf_0"'] \\
\pi \arrow[u, "a"] \arrow[d, "b"'] & e' \arrow[l, "i \cdot f_0"'] \arrow[u, "Ie'"'] \arrow[d, "id_{e'}"] \\
e & e' \arrow[l, "f_0"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
Te & Te' \arrow[l, "Tf_0"'] \\
\pi \arrow[u, "a"] \arrow[d, "b"'] & \pi'_2 \arrow[l, "k \cdot f_2"'] \arrow[u, "Ke' \cdot Ta' \cdot v'_2"'] \arrow[d, "b' \cdot v'_1"] \\
e & e' \arrow[l, "f_0"']
\end{tikzcd}$$

ils fournissent deux crochets

$$i' : e' \to \pi' \quad \text{et} \quad k' : \pi'_2 \to e'$$

tels que (b', a', i', k') soit la $\mathbf{T}$-catégorie cherchée, notée $\overline{\theta}' = f_0^* \overline{\theta}$. De plus $(f_0, f_1) : \overline{\theta}' \to \overline{\theta}$ est un morphisme de $Cat(\mathbf{T})$. On démontre alors que, si le $\mathbf{T}$-graphe θ'' de la démonstration précédente est sous-jacent à une $\mathbf{T}$-catégorie $\overline{\theta}''$, et si $(f'_0, f'_1) : \overline{\theta}'' \to \overline{\theta}$ est un morphisme de $Cat(\mathbf{T})$, il en est de même de $(g_0, g_1) : \overline{\theta}'' \to \overline{\theta}'$. Donc $(f_0, f_1) : \overline{\theta}' \to \overline{\theta}$ est cartésien. Enfin, si $\overline{\theta}$ est un $\mathbf{T}$-préordre, $\overline{\theta}'$ en est aussi un. ■

Soit maintenant $\mathbf{T}' = (T', I', K')$ un triple sur une autre catégorie $\mathcal{E}'$ admettant des produits fibrés finis. Soit $(M, m) : \mathbf{T} \to \mathbf{T}'$ un morphisme de triples (voir I.3), où $M : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ est un foncteur respectant les produits fibrés finis. Supposons enfin que $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ admettent des A-limites projectives et que M respecte ces limites projectives. Posons $\mathbf{M} = (M, m)$.

PROPOSITION I.3.7. *On peut construire des foncteurs* $Alg(\mathbf{M})$, $Ord(\mathbf{M})$, *etc... rendant commutatif le diagramme suivant:*

$$\begin{tikzcd}
Alg(\mathbf{T}) \arrow[r] \arrow[d, "Alg(\mathbf{M})"'] & Ord(\mathbf{T}) \arrow[r] \arrow[d, "Ord(\mathbf{M})"'] & Cat(\mathbf{T}) \arrow[r] \arrow[d, "Cat(\mathbf{M})"'] & Gr(\mathbf{T}) \arrow[r] \arrow[d, "Gr(\mathbf{M})"'] & \mathcal{E} \arrow[d, "M"] \\
Alg(\mathbf{T}') \arrow[r] & Ord(\mathbf{T}') \arrow[r] & Cat(\mathbf{T}') \arrow[r] & Gr(\mathbf{T}') \arrow[r] & \mathcal{E}'
\end{tikzcd}$$

Ces foncteurs respectent les A-limites projectives et les fibrations définies dans la proposition 6.

PREUVE. Soit $\theta = (b, a)$ un **T**-graphe et formons un produit fibré:

$$\begin{tikzcd}
MTe & T'Me \arrow[l, "me"'] \\
M\pi \arrow[u, "Ma"] & \pi' \arrow[l, "m'"] \arrow[u, "a'"']
\end{tikzcd}$$

Alors $\theta' = (b', a')$, où $b' = Mb.m'$, est un **T'**-graphe. Cette correspondance se prolonge en un foncteur $Gr(\mathbf{M}): Gr(\mathbf{T}) \to Gr(\mathbf{T}')$.

Maintenant, si de plus (b, a, i, k) est une **T**-catégorie, on a un crochet $i': Me \to \pi'$ caractérisé par:

$$m'.i' = Mi \quad \text{et} \quad a'.i' = I'Me.$$

Posons $m'' = m\pi.T'm'$; on montre que $MTb.m'' = me.T'b'$, de sorte qu'il existe un morphisme $m''': \pi_2' \to M\pi_2$ rendant commutatif le diagramme:

$$\begin{tikzcd}
MT\pi & T'\pi' \arrow[l, "m''"'] \\
M\pi_2 \arrow[u, "Mv_2"] \arrow[d, "Mv_1"'] & \pi_2' \arrow[l, "m'''"'] \arrow[u, "v_2'"'] \arrow[d, "v_1'"] \\
M\pi & \pi' \arrow[l, "m'"']
\end{tikzcd}$$

(les données π_2', π_3', v_1',... étant définies comme d'habitude à partir du **T'**-graphe (b', a')). Le morphisme $k': \pi_2' \to \pi'$ est le crochet caractérisé par les relations:

$$m'.k' = Mk.m''' \quad \text{et} \quad a'.k' = K'Me.T'a'.v_2'.$$

On vérifie sans peine que (b', a', i', k') est une $\mathbf{T}'$-catégorie et que la correspondance ainsi définie s'étend en un foncteur

$$Cat(\mathbf{M}): Cat(\mathbf{T}) \to Cat(\mathbf{T}').$$

Le reste de la démonstration est purement technique, bien que pénible. ■

REMARQUE. A titre d'exercice, il est intéressant d'examiner le cas où $M = id_{\mathcal{E}}$, $m = 1$ et $\mathbf{T} = (id_{\mathcal{E}}, id_{\mathcal{E}}, id_{\mathcal{E}})$: il y a une $\mathcal{E}$-catégorie sous-jacente à toute $\mathbf{T}$-catégorie (terminologie de III.2).

Nous étudierons plus tard la question de savoir si tous les foncteurs de la suite (*) admettent des adjoints et des coadjoints; nous nous limiterons ci-dessous à certains d'entre eux. Rappelons que $Alg(\mathbf{T}) \to \mathcal{E}$ a un adjoint. On suppose que $\mathcal{E}$ admet des limites projectives finies.

PROPOSITION I.3.8. *Les foncteurs d'oubli*

$$\mathfrak{X} \to \mathcal{E}, \quad pour \quad \mathfrak{X} = Gr(\mathbf{T}),\ Cat(\mathbf{T})\ et\ Ord(\mathbf{T}),$$

admettent des adjoints et coadjoints, qui sont de plus des foncteurs sections de ces foncteurs d'oubli, commutant avec la suite de foncteurs:

$$Ord(\mathbf{T}) \to Cat(\mathbf{T}) \to Gr(\mathbf{T}).$$

PREUVE. Soit $e \in |\mathcal{E}|$. Posons

$$D(e) = (id_e, 1e) \quad \text{et} \quad G(e) = (p_1, p_2),$$

ce dernier couple étant formé des projections canoniques d'un produit de (e, Te). Alors $D(e)$ et $G(e)$ sont des $\mathbf{T}$-graphes, qui déterminent des $\mathbf{T}$-catégories

$$\overline{D}(e) = (id_e, 1e, id_e, id_e) \quad \text{et} \quad \overline{G}(e) = (p_1, p_2, i_0, k_0),$$

où i_0 et k_0 sont les crochets caractérisés par les relations:

$$p_1 . i_0 = id_e, \quad p_2 . i_0 = 1e, \quad p_1 . k_0 = p_1 . v_1, \quad p_2 . k_0 = Ke . Tp_2 . v_2,$$

où (v_1, v_2) est un produit fibré de (p_2, Tp_1). De plus on remarque que $\overline{D}(e)$ et $\overline{G}(e)$ sont des $\mathbf{T}$-préordres. Il est aisé de montrer qu'on définit ainsi respectivement un adjoint D et un coadjoint G au foncteur $Gr(\mathbf{T}) \to \mathcal{E}$ et un adjoint $\overline{D}$ et un coadjoint $\overline{G}$ au foncteur $Cat(\mathbf{T}) \to \mathcal{E}$, qui, par restriction, donnent un adjoint et un coadjoint du foncteur $Ord(\mathbf{T}) \to \mathcal{E}$. ■

On appelle respectivement **T**-*catégorie discrète* et **T**-*catégorie grossière* sur e les **T**-catégories $\overline{D}(e)$ et $\overleftarrow{G}(e)$.

Examinons enfin le cas de l'inclusion $Ord(\mathbf{T}) \to Cat(\mathbf{T})$.

Supposons que $\mathcal{E}$, en plus de la condition d'existence de produits fibrés finis, vérifie les conditions:

(I) Tout morphisme f de $\mathcal{E}$ se décompose en un monomorphisme m et un épimorphisme p: $f = m.p$.

(II) Tout épimorphisme p de $\mathcal{E}$ est une rétraction, i.e. il existe un morphisme s de $\mathcal{E}$ (*section de* p) tel que $p.s = id_e$, où e = but de p. Dans ce cas, la décomposition de f est unique à un isomorphisme près; on appelle (m, p) une décomposition canonique de f. Plus généralement, si $f = m'.p'$ et si m' est un monomorphisme, il existe un et un seul morphisme g tel que $m'.g = m$ et $g.p = p'$.

PROPOSITION I.3.9. *Si $\mathcal{E}$ vérifie ces hypothèses, le foncteur inclusion: $Ord(\mathbf{T}) \to Cat(\mathbf{T})$ admet un adjoint compatible avec les foncteurs d'oubli vers $\mathcal{E}$.*

PREUVE. A tout **T**-graphe $\theta = (b, a)$ sur e, on associe, grâce à la décomposition canonique du crochet $[\theta]: \pi \to e \times Te$, un **T**-graphe régulier $\langle\theta\rangle = (b', a')$ sur e et $(id_e, p): \theta \to \langle\theta\rangle$ est un morphisme, où p est l'épimorphisme de la décomposition canonique de $[\theta]$.

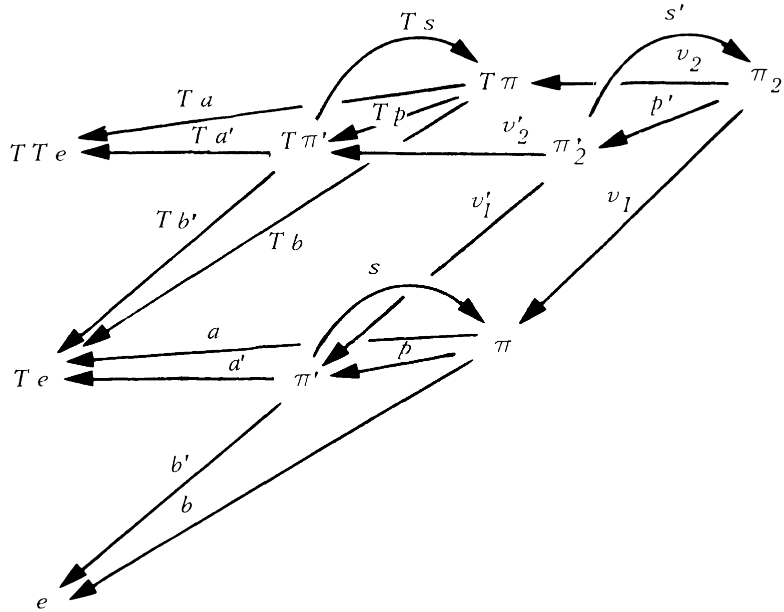
Si maintenant $\overline{\theta} = (b, a, i, k)$ est une **T**-catégorie sur e, nous allons montrer qu'on peut former un **T**-préordre $\langle\overline{\theta}\rangle$ au-dessus de $\langle\theta\rangle$. Si (v_1, v_2) est le produit fibré de (a, Tb) utilisé dans la construction de $\overline{\theta}$, et si (v'_1, v'_2) est un produit fibré de (a', Tb'), soient $p': \pi_2 \to \pi'_2$ et $s': \pi'_2 \to \pi_2$ les crochets caractérisés par les relations:

$$v'_1 . p' = p . v_1, \quad v'_2 . p' = Tp . v_2, \quad v_1 . s' = s . v'_1, \quad v_2 . s' = Ts . v'_2,$$

où s est une section de p; on a alors $p'.s' = id_{\pi'_2}$. Posons

$$i' = p.i \quad \text{et} \quad k' = p.k.s;$$

en composant à gauche avec a' et b', on voit que $\langle\overline{\theta}\rangle = (b', a', i', k')$ est un **T**-préordre. On montre de plus que $(id_e, p): \overline{\theta} \to \langle\overline{\theta}\rangle$ est un morphisme définissant une transformation naturelle d'adjonction au foncteur d'inclusion $Ord(\mathbf{T}) \to Cat(\mathbf{T})$. ∎



En général le foncteur d'oubli $Alg(\mathbf{T}) \to \mathcal{E}$ n'est pas fibrant. La proposition 11, plus loin, résoud le problème de «rendre» fibrant ce foncteur en plongeant universellement $Alg(\mathbf{T})$ dans une sous-catégorie pleine de $Ord(\mathbf{T})$. Pour cela nous aurons besoin de généraliser la proposition 2.4 de [Ba], en y remplaçant la «catégorie des ensembles» par une catégorie $\mathcal{E}$ quelconque, mais vérifiant l'axiome suivant:

(U) Il existe un univers tel que:

a) $Hom_{\mathcal{E}}$ prend ses valeurs dans cet univers.

b) L'ensemble des classes d'isomorphisme des sous-objets d'un objet quelconque e de $\mathcal{E}$, et l'ensemble des classes d'isomorphisme des objets quotients de e sont des éléments de cet univers.

c) $\mathcal{E}$ admet des A-limites projectives pour toute catégorie A associée à l'univers (i. e. $|A|$ est un élément de cet univers et Hom_A prend ses valeurs dans cet univers).

Par exemple la catégorie *Ens* associée à un univers quelconque $|Ens|$ satisfait cet axiome.

PROPOSITION I.3.10 (Stone-Čech-Barr). *Le foncteur d'inclusion pleine* $Alg(\mathbf{T}) \to Ord(\mathbf{T})$ *admet un adjoint.*

PREUVE. Compte tenu de l'hypothèse b sur les quotients, qui assure la formation d'images de morphismes de **T**-algèbres, la démonstration est la même que celle de Barr, qui s'appuie sur le critère de Freyd d'existence d'adjoints (sous une forme adaptée à la terminologie des univers -ce qui ne pose pas de problèmes). Nous renvoyons le lecteur à [Ba]. ■

Nous noterons $m_\theta : \theta \to \hat{\theta}$ un morphisme d'adjonction associé à un **T**-préordre θ. Soit $Equ(\mathbf{T})$ la sous-catégorie pleine de $Ord(\mathbf{T})$ ayant pour objets les **T**-préordres θ pour lesquels m_θ est un morphisme cartésien (relativement au foncteur d'oubli vers $\mathfrak{E}$). Les objets de $Equ(\mathbf{T})$ s'appellent des **T**-*équivalences.*

PROPOSITION I.3.11. *Le foncteur d'oubli* $Equ(\mathbf{T}) \to \mathfrak{E}$ *est fibrant et compatible avec la fibration de* $Ord(\mathbf{T}) \to \mathfrak{E}$. *Pour tout diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd} Alg(\mathbf{T}) \arrow[rr, "X"] \arrow[dr, "U"'] & & \mathfrak{X} \arrow[dl, "U'"] \\ & \mathfrak{E} & \end{tikzcd}$$

où le foncteur d'oubli des **T**-*algèbres est factorisé par un foncteur fibrant* $\mathfrak{X} \to \mathfrak{E}$, *il existe un foncteur* $Equ(\mathbf{T}) \to \mathfrak{X}$ *et un seul (à une équivalence près) vérifiant les propriétés:*

1° *Le diagramme suivant est commutatif:*

$$\begin{tikzcd} Alg(\mathbf{T}) \arrow[r] \arrow[dr, "U"'] & Equ(\mathbf{T}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{X} \arrow[dl, "U'"] \\ & \mathfrak{E} & \end{tikzcd}$$

2° *Ce foncteur transforme tout morphisme cartésien pour* $Equ(\mathbf{T}) \to \mathfrak{E}$ *en un morphisme cartésien pour* $U' : \mathfrak{X} \to \mathfrak{E}$. †

PREUVE. Soient θ une **T**-équivalence et $f_1 : e_1 \to |\theta|$ un morphisme de $\mathfrak{E}$. Si $f : f_1{}^*\theta \to \theta$ est le morphisme cartésien tel que $|f| = f_1$, on va mon-

† Lorsque U est fibrant, on se gardera de croire que $Alg(\mathbf{T}) \simeq Equ(\mathbf{T})$ (lorsque par exemple **T** est le triple identité).

trer que $\theta_1 = f_1{}^*\theta$ est une $\mathbf{T}$-équivalence, c'est-à-dire que m_{θ_1} est cartésien. Soient $g: \theta_2 \to \hat{\theta}_1$ un morphisme de $Ord(\mathbf{T})$ et $h_1: |\theta_2| \to e_1$ tel que $|m_{\theta_1}|.\, h_1 = |g|$; on va montrer qu'il existe un et un seul morphisme $h: \theta_2 \to \theta_1$ de $Ord(\mathbf{T})$ tel que

$$m_{\theta_1}.\, h = g \quad \text{et} \quad |h| = h_1 .$$

Soit alors $h: \theta_2 \to \theta_1$ tel que

$$|h| = h_1 \quad \text{et} \quad m_\theta .\, f .\, h = \hat{f} .\, g$$

(où $\hat{f}$ est l'image de f par le foncteur adjoint de la proposition I.5.10); h existe, parce que m_θ et f sont cartésiens ainsi que leur composé. L'égalité $m_{\theta_1}.\, h = g$ est conséquence de la fidélité du foncteur $Ord(\mathbf{T}) \to \mathcal{E}$, de même que l'unicité de h. Ceci démontre la première partie.

Soient $X: Alg(\mathbf{T}) \to \mathcal{X}$ et $U': \mathcal{X} \to \mathcal{E}$ deux foncteurs, tels que $U = U'.\, X$ soit le foncteur d'oubli des $\mathbf{T}$-algèbres et que U' soit fibrant. Pour tout $\theta \in |Equ(\mathbf{T})|$, soit $\hat{X}(\theta)$ la source (qu'on peut noter aussi $|m_\theta|^* X(\hat{\theta})$) d'un morphisme cartésien m de $\mathcal{X}$ de but $X(\hat{\theta})$, tel que l'on ait $U'(m) = |m_\theta|$. Il est clair que la famille $(\hat{X}(\theta) \mid \theta \in |Equ(\mathbf{T})|)$ se prolonge de façon unique en un foncteur $\hat{X}: Equ(\mathbf{T}) \to \mathcal{X}$ répondant aux conditions exigées. L'équivalence de ce foncteur avec tout autre foncteur vérifiant les mêmes conditions résulte de ce que deux flèches cartésiennes de même but et même morphisme sous-jacent sont reliées par un inversible. ■

Sur les limites inductives, nous nous contenterons du résultat suivant, dont la démonstration élémentaire est laissée en exercice.

PROPOSITION I.3.12. *Si $\mathcal{E}$ admet des A-limites inductives (en plus de l'hypothèse que $\mathcal{E}$ admet des produits fibrés finis), si ces limites commutent avec les produits fibrés et si T commute avec ces limites, alors les catégories figurant dans la suite (*) (début de I.6) admettent des A-limites inductives et les foncteurs figurant dans cette suite commutent avec ces limites inductives.*

II. PSEUDO-ALGEBRES ET MONADES

II.1. Pseudo-catégories.

Cette structure généralise un peu celle de bicatégorie définie par Bénabou dans [Be]; dans les bicatégories, en effet, les familles l, r, s, considérées ci-dessous, se réduisent à des familles d'équivalences naturelles, ce qui ne sera pas toujours le cas dans nos exemples. (On verra au chapitre III des structures plus générales.)

Une *pseudo-catégorie* est un septuplet

$$\mathfrak{D} = (|\mathfrak{D}|, Hom_{\mathfrak{D}}, \iota, \kappa, l, r, s)$$

tel que les conditions de 1 à 8 ci-dessous soient satisfaites:

1° $|\mathfrak{D}|$ est un ensemble; ses éléments sont appelés *objets de* $\mathfrak{D}$.

2° $Hom_{\mathfrak{D}}$ est une famille de catégories indexée par $|\mathfrak{D}|^2$. Dire que $f: e \to e'$ est un *morphisme de* $\mathfrak{D}$ signifie que

$$e \in |\mathfrak{D}|, \quad e' \in |\mathfrak{D}| \quad \text{et} \quad f \in |Hom_{\mathfrak{D}}(e', e)|.$$

Dire que $\alpha: f \to g : e \to e'$, ou simplement $\alpha: f \to g$, est un *2-morphisme* de $\mathfrak{D}$ signifie que $f: e \to e'$ et $g: e \to e'$ sont des morphismes de $\mathfrak{D}$ et $\alpha: f \to g$ un morphisme de $Hom_{\mathfrak{D}}(e', e)$.

3° ι est une famille de foncteurs indexée par $|\mathfrak{D}|$, de la forme $\iota(e): \mathbf{1} \to Hom_{\mathfrak{D}}(e', e)$, pour tout $e \in |\mathfrak{D}|$, où $\mathbf{1}$ est la catégorie réduite à un objet 0 et au morphisme unité id_0. On notera $id(e)$, ou id_e, ou simplement e le morphisme $\iota(e)(id_0): e \to e'$.

4° κ est une famille de foncteurs indexée par $|\mathfrak{D}|^3$, de la forme

$$\kappa(e'', e', e): Hom_{\mathfrak{D}}(e'', e') \times Hom_{\mathfrak{D}}(e', e) \to Hom_{\mathfrak{D}}(e'', e),$$

pour tout $(e'', e', e) \in |\mathfrak{D}|^3$. L'image d'un couple de morphismes ou de 2-morphismes par ce foncteur s'appellera un composé et sera noté par un même symbole, qui sera généralement le symbole $\circ$ dans cet article. Cette composition s'appellera *première loi de* $\mathfrak{D}$, pour la distinguer des lois de composition dans les $Hom_{\mathfrak{D}}(e', e)$. Ces lois seront notées également par un symbole unique, appelé symbole de la *deuxième loi de* $\mathfrak{D}$.

5° l et r sont deux familles de transformations naturelles, indexées par $|\mathfrak{D}|^2$, de la forme:

$$l(e', e): pr_2 \to \kappa(e', e', e).(\iota(e') \times id(Hom_{\mathfrak{D}}(e', e))),$$
$$r(e', e): pr_1 \to \kappa(e', e, e).(id(Hom_{\mathfrak{D}}(e', e)) \times \iota(e)),$$

où
$$pr_2: \mathbf{1} \times Hom_{\mathfrak{D}}(e', e) \to Hom_{\mathfrak{D}}(e', e),$$
$$pr_1: Hom_{\mathfrak{D}}(e', e) \times \mathbf{1} \to Hom_{\mathfrak{D}}(e', e)$$

désignent les projections canoniques des produits. En d'autres termes, pour tout morphisme $f: e \to e'$ de $\mathfrak{D}$, r et l fournissent des 2-morphismes «naturels», notés en abrégé

$$l(f): f \to id_{e'} \circ f \quad \text{et} \quad r(f): f \to f \circ id_e,$$

où $\circ$ est la première loi de $\mathfrak{D}$.

6° s est une famille de transformations naturelles, indexées par $|\mathfrak{D}|^4$, de la forme

$$s(e_4, e_3, e_2, e_1): \kappa_{421}.(\kappa_{432} \times \mathfrak{D}_{21}) \to \kappa_{431}.(\mathfrak{D}_{43} \times \kappa_{321})$$

pour tout $(e_4, e_3, e_2, e_1) \in |\mathfrak{D}|^4$, en posant

$$\kappa_{ijk} = \kappa(e_i, e_j, e_k) \quad \text{et} \quad \mathfrak{D}_{ij} = Hom_{\mathfrak{D}}(e_i, e_j) \text{ pour } 1 \leqslant i, j, k \leqslant 4.$$

Ces deux foncteurs ont pour source la catégorie $\mathfrak{D}_{43} \times \mathfrak{D}_{32} \times \mathfrak{D}_{21}$ et pour but $\mathfrak{D}_{41}$. En d'autres termes, si $f: e_1 \to e_2$, $g: e_2 \to e_3$, $h: e_3 \to e_4$ sont trois morphismes de $\mathfrak{D}$, s fournit un 2-morphisme «naturel», noté en abrégé

$$s(h, g, f): (h \circ g) \circ f \to h \circ (g \circ f).$$

On dit encore que s *déplace les parenthèses vers la droite.*

7° Soit $\varepsilon: \mathfrak{D}_{32} \times \mathfrak{D}_{21} \to \mathfrak{D}_{32} \times \mathfrak{D}_{22} \times \mathfrak{D}_{21}$ le foncteur composé du foncteur trivial $\mathfrak{D}_{32} \times \mathfrak{D}_{21} \to \mathfrak{D}_{32} \times \mathbf{1} \times \mathfrak{D}_{21}$ et du foncteur $\mathfrak{D}_{32} \times \iota_2 \times \mathfrak{D}_{21}$, en adoptant les notations précédentes et également

$$\iota_i = \iota(e_i), \quad s_{ijkl} = s(e_i, e_j, e_k, e_l), \quad l_{ij} = l(e_i, e_j), \quad r_{ij} = r(e_i, e_j),$$

si les e_i, e_j, e_k, e_l sont des objets de $\mathfrak{D}$.

Pour tout triplet $(e_1, e_2, e_3) \in |\mathfrak{D}|^3$, le diagramme suivant de transformations naturelles:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\kappa_{321}\cdot(\kappa_{332}\times\mathfrak{D}_{21})\cdot\varepsilon \arrow[rr, "s_{3221}\cdot\varepsilon"] & & \kappa_{321}\cdot(\mathfrak{D}_{32}\times\kappa_{221})\cdot\varepsilon \\
& \kappa_{321} \arrow[ul, "\kappa_{321}\cdot(r_{32}\times\mathfrak{D}_{21})"] \arrow[ur, "\kappa_{321}\cdot(\mathfrak{D}_{32}\times l_{21})"'] &
\end{tikzcd}$$

doit être commutatif. Autrement dit, en appliquant ce diagramme à un couple de morphismes $f: e_1 \to e_2$, $g: e_2 \to e_3$, on doit obtenir un diagramme commutatif dans la catégorie $Hom_{\mathfrak{D}}(e_3, e_1)$: (on pose $e = e_2$)

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
(g \circ id_e) \circ f \arrow[rr, "s(g, id_e, f)"] & & g \circ (id_e \circ f) \\
& g \circ f \arrow[ul, "r(g) \circ f"] \arrow[ur, "g \circ l(f)"'] &
\end{tikzcd}$$

8° Pour tout $e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 \in |\mathfrak{D}|$, on a un diagramme commutatif (dont la notation des objets est laissée au lecteur):

$$\begin{tikzcd}
& \cdot \arrow[dl, "\kappa_{521}\cdot(s_{5432}\times\mathfrak{D}_{21})"'] \arrow[dr, "s_{5321}\cdot(\kappa_{543}\times\mathfrak{D}_{32}\times\mathfrak{D}_{21})"] & \\
\cdot \arrow[d, "s_{5421}\cdot(\mathfrak{D}_{54}\times\kappa_{432}\times\mathfrak{D}_{21})"'] & & \cdot \arrow[ddl, "s_{5431}\cdot(\mathfrak{D}_{54}\times\mathfrak{D}_{43}\times\kappa_{321})"] \\
\cdot \arrow[dr, "\kappa_{541}\cdot(\mathfrak{D}_{54}\times s_{4321})"'] & & \\
& \cdot &
\end{tikzcd}$$

de sorte que, en «appliquant» ce diagramme à quatre morphismes de $\mathfrak{D}$,

$$f: e_1 \to e_2, \quad g: e_2 \to e_3, \quad h: e_3 \to e_4, \quad k: e_4 \to e_5,$$

on obtienne un diagramme commutatif dans $Hom_{\mathfrak{D}}(e_5, e_1)$:

$$\begin{tikzcd}
(k \circ (h \circ g)) \circ f \arrow[dd, "s(k, h \circ g, f)"'] & ((k \circ h) \circ g) \circ f \arrow[l, "s(k, h, g) \circ f"'] \arrow[d, "s(k \circ h, g, f)"] \\
& (k \circ h) \circ (g \circ f) \arrow[d, "s(k, h, g \circ f)"] \\
k \circ ((h \circ g) \circ f) \arrow[r, "k \circ s(h, g, f)"] & k \circ (h \circ (g \circ f))
\end{tikzcd}$$

REMARQUE. Les axiomes 7 et 8 s'appellent les «axiomes de cohérence». Si r, l, s sont des équivalences (resp. des identités), on retrouve les bicatégories de [Be] (resp. les 2-catégories). Au chapitre III, les multicatégories donneront, comme cas particuliers, à la fois les pseudo-catégories et les catégories doubles d'Ehresmann.

On dit que $F: \mathfrak{D} \to \mathfrak{D}'$ est un *pseudo-foncteur* si $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}'$ sont deux pseudo-catégories et F un quadruplet $(|F|, F_1, u, c)$ tel que:

1'° $|F|: |\mathfrak{D}| \to |\mathfrak{D}'|$ est une application.

2'° F_1 est une famille de foncteurs

$$F_1(e', e): Hom_{\mathfrak{D}}(e', e) \to Hom_{\mathfrak{D}'}(F(e'), F(e))$$

pour tout $(e', e) \in |\mathfrak{D}|^2$. Si $e \in |\mathfrak{L}|$, on note $F(e)$ son image par $|F|$, lorsqu'il n'y a pas de risque de confusion. De même, si f est un morphisme de $\mathfrak{D}$ et α un 2-morphisme de $\mathfrak{D}$, on note $F(f)$ et $F(\alpha)$ leurs images par F_1.

3'° u est une famille de transformations naturelles indexée par $|\mathfrak{D}|$, entre foncteurs de source $\mathbf{1}$; autrement dit u peut être considéré comme une famille de morphismes de $\mathfrak{D}$ de la forme $u(e): id_{F(e)} \to F(id_e)$, pour tout $e \in |\mathfrak{D}|$.

4'° c est une famille de transformations naturelles indexée par $|\mathfrak{D}|^3$, de la forme

$$c(e'', e', e): \kappa(F(e''), F(e'), F(e)).(F_1(e'', e') \times F_1(e', e)) \to$$
$$\to F_1(e'', e). \kappa(e'', e', e).$$

Autrement dit, pour tout couple de morphismes $f: e \to e'$ et $g: e' \to e''$, on donne naturellement un 2-morphisme, noté simplement

$$c(g, f): F(g) \circ F(f) \to F(g \circ f).$$

5'° Pour tout $f: e \to e'$, on a deux diagrammes commutatifs:

$$\begin{tikzcd}
F(f) \arrow[r, "F(r(f))"] \arrow[d, "r(F(f))"'] & F(f \circ id_e) \\
F(f) \circ id_{F(e)} \arrow[r, "F(f) \circ u(e)"'] & F(f) \circ F(id_e) \arrow[u, "c(f, id_e)"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
F(id_{e'} \circ f) & F(f) \arrow[l, "F(l(f))"'] \arrow[d, "l(F(f))"] \\
F(id_{e'}) \circ F(f) \arrow[u, "c(id_{e'}, f)"] & id_{F(e')} \circ F(f) \arrow[l, "u(e') \circ F(f)"]
\end{tikzcd}$$

6'° Pour trois morphismes $f: e \to e'$, $g: e' \to e''$, $h: e'' \to e'''$ de $\mathfrak{D}$ on a un diagramme commutatif:

$$\begin{tikzcd}
F(h)\circ(F(g)\circ F(f)) \arrow[d, "F(h)\circ c(g,f)"'] & & (F(h)\circ F(g))\circ F(f) \arrow[ll, "s(F(h),F(g),F(f))"'] \arrow[d, "c(h,g)\circ F(f)"] \\
F(h)\circ F(g\circ f) \arrow[d, "c(h,g\circ f)"'] & & F(h\circ g)\circ F(f) \arrow[d, "c(h\circ g,f)"] \\
F(h\circ(g\circ f)) & & F((h\circ g)\circ f) \arrow[ll, "F(s(h,g,f))"]
\end{tikzcd}$$

Toutes ces définitions sont calquées sur celles des bicatégories de Bénabou [Be] (on notera toutefois que nous avons renversé le sens des flèches r et l). On définit la composition des pseudo-foncteurs de façon analogue à celle des bifoncteurs [Be]. On pourrait définir les notions de pseudo-transformation naturelle et même de morphisme entre ces dernières. Ceci permettrait de définir une notion de «pseudo-triple», sur une pseudo-catégorie, ce que nous ne ferons pas - Signalons simplement que la proposition 3 plus loin donnerait des **T**-catégories une signification particulièrement agréable.

REMARQUES.

1° Ces définitions de pseudo-catégorie et de pseudo-foncteur doivent être largement tenues pour provisoires. En effet, nous avons simplement imité la définition des bicatégories de Bénabou [Be], elle-même inspirée de la définition des catégories monoïdales de Mac Lane; mais rien ne nous assure qu'il ne manque pas des axiomes pour obtenir une structure la «meilleure» possible, ni que le sens choisi pour les morphismes de cohérence - suggéré par l'exemple des **T**-spans qui suit - est le «bon». Nous espérons bientôt faire une étude plus sérieuse de cette structure.

2° Dans les exemples pratiques, non seulement les deux morphismes $(f\circ g)\circ h$ et $f\circ(g\circ h)$, où f, g, h sont trois morphismes «consécutifs» de $\mathfrak{D}$, ne sont pas égaux, mais ils sont reliés à un troisième morphisme noté $f\circ g\circ h$ et, d'une façon générale, on a des «composés» de longueur $n > 2$

différents des composés obtenus par groupements des facteurs. C'est le cas par exemple lorsqu'on considère la catégorie des ensembles *Ens* associée à un univers, munie d'une première loi: le produit cartésien. Nous espérons que la notion de multicatégorie définie plus loin (III.3) permettra d'unifier ces diverses notions.

II.2. Pseudo-catégorie des T-spans.

Soit $\mathcal{E}$ une catégorie munie d'un triple $\mathbf{T}$, admettant des produits fibrés finis et munie d'un choix canonique de ces produits fibrés. On va lui associer une pseudo-catégorie $Sp(\mathbf{T})$ ainsi construite: 1° $|Sp(\mathbf{T})| = |\mathcal{E}|$.
2° Pour tout $e, e' \in |\mathcal{E}|$, soit $Hom_{Sp(\mathbf{T})}(e', e)$ la catégorie dont les objets sont les $\mathbf{T}$-spans $\theta: e \to e'$, c'est-à-dire les couples (b, a), où

$$b: \pi \to Te', \quad a: \pi \to e,$$

sont deux morphismes de $\mathcal{E}$ de même source. Si $\theta': e \to e'$ est un autre $\mathbf{T}$-span, où $\theta' = (b', a')$, $b': \pi' \to Te'$, $a': \pi' \to e$, un morphisme $m: \theta \to \theta'$ de $Hom_{Sp(\mathbf{T})}(e', e)$ (donc un 2-morphisme de $Sp(\mathbf{T})$) est défini par un morphisme $m: \pi \to \pi'$ de $\mathcal{E}$ vérifiant les conditions:

$$b'.m = b, \quad a'.m = a.$$

$$\begin{tikzcd}
& \pi \arrow[dl, "b"'] \arrow[dd, "m"] \arrow[dr, "a"] & \\
Te' & & e \\
& \pi' \arrow[ul, "b'"] \arrow[ur, "a'"'] &
\end{tikzcd}$$

La loi de composition évidente sur $Hom_{Sp(\mathbf{T})}(e', e)$ sera notée par un point comme dans $\mathcal{E}$.
3° Pour tout $e \in |\mathcal{E}|$ on définit un $\mathbf{T}$-span $(Ie, id_e): e \to Te$, que nous noterons encore id_e si le contexte précise bien que c'est un $\mathbf{T}$-span.
4° Si $\theta: e \to e'$ et $\theta': e' \to e''$ sont deux $\mathbf{T}$-spans, on définit la première loi de composition de $Sp(\mathbf{T})$ pour les morphismes en posant:

$$\theta' \circ \theta = (Ke''.Tb'.v_1, a.v_2),$$

où (v_1, v_2) est un produit fibré canonique de (Ta', b). La composition des 2-morphismes est alors obtenue grâce à la propriété des produits fibrés.

$$\begin{tikzcd}
TTe'' \arrow[d, "Ke''"'] & T\pi' \arrow[l, "Tb'"'] \arrow[dr, "Ta'"] & \pi_2 \arrow[l, "v_1"'] \arrow[dr, "v_2"] & & \\
Te'' & \pi' \arrow[l, "b'"'] \arrow[dr, "a'"] & Te' & \pi \arrow[l, "b"'] \arrow[dr, "a"] & \\
e'' & & e' & & e
\end{tikzcd}$$

PROPOSITION II.2.13. *Si* $\theta: e \to e'$, $\theta': e' \to e''$, $\theta'': e'' \to e'''$ *sont des* **T**-*spans, on peut construire des 2-morphismes de* $Sp(\mathbf{T})$ *:*

$$id_{e'} \circ \theta \xleftarrow{l(\theta)} \theta \xrightarrow{r(\theta)} \theta \circ id_e$$

$$\theta'' \circ (\theta' \circ \theta) \xrightarrow{s(\theta'', \theta', \theta)} (\theta'' \circ \theta') \circ \theta$$

($r(\theta)$ *étant de plus un isomorphisme) qui achèveront la construction de* $Sp(\mathbf{T})$ *comme pseudo-catégorie.*

PREUVE. Posons $\theta = (b, a)$; formons les produits fibrés canoniques: $(\bar{v}'_1, \bar{v}'_2)$ de $(id_{Te'}, b)$, $(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$ de (Ta, Ie). Comme $id_{Te'}$ est un isomorphisme, il en est de même pour $\bar{v}'_2$. Soit $\bar{v}'^{-1}_2$ son inverse. Les relations

$$(Ke'.TIe'.\bar{v}'_1).\bar{v}'^{-1}_2 = \bar{v}'_1.\bar{v}'^{-1}_2 = b$$

(car $b.\bar{v}'_2 = \bar{v}'_1$) et $(a.\bar{v}'_2).\bar{v}'^{-1}_2 = a$ permettent de poser

$$l(\theta) = \bar{v}'^{-1}_2 : \theta \to id_{e'} \circ \theta.$$

Les relations $Ta.I\pi = Ie.a$ fournissent un crochet $c: \pi \to \pi_2$ tel que

$$\bar{v}_1.c = I\pi, \quad \bar{v}_2.c = a.$$

Les relations

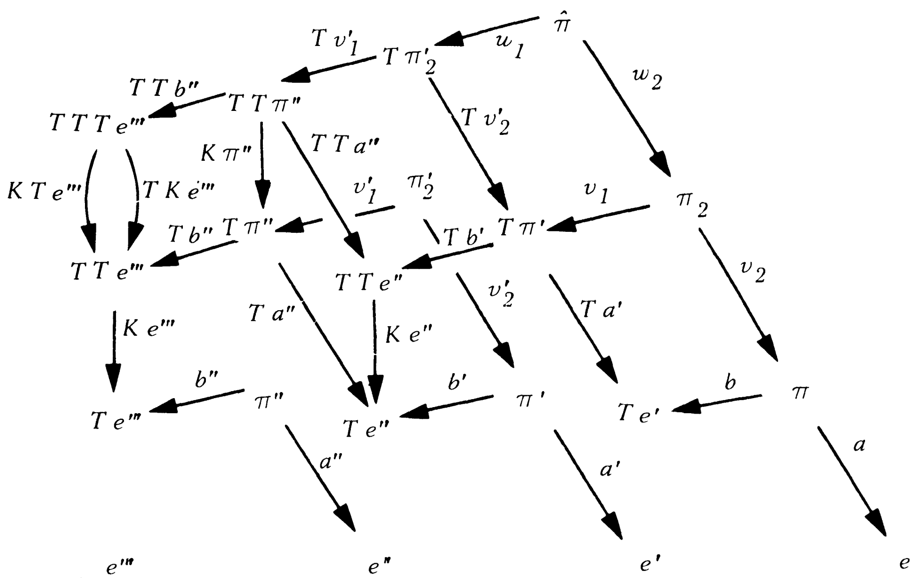
$$(Ke'.Tb.\bar{v}_1).c = b \text{ et } (id_e.\bar{v}_2).c = a$$

permettent de poser $r(\theta) = c: \theta \to \theta \circ id_e$.

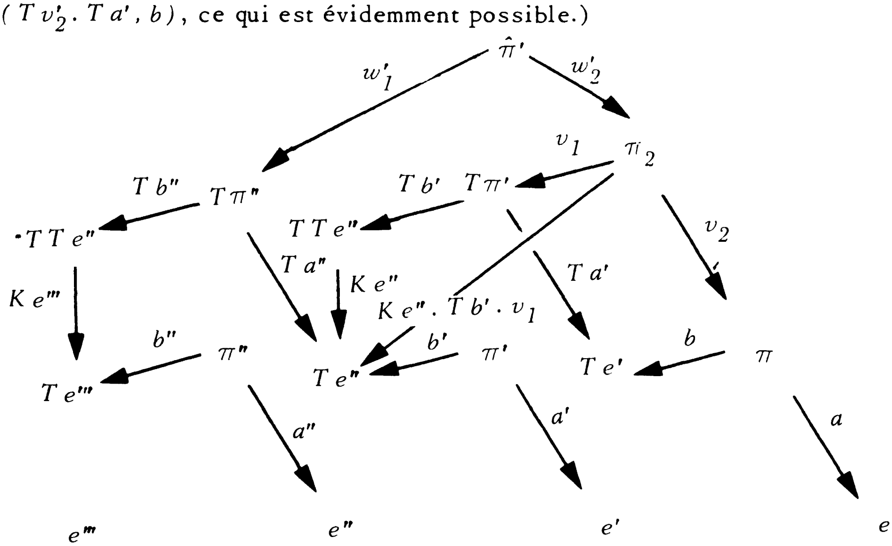
Posons $\theta' = (b', a')$, $\theta'' = (b'', a'')$; la construction des composés $(\theta'' \circ \theta') \circ \theta$ et $\theta'' \circ (\theta' \circ \theta)$ conduit à la formation de produits fibrés qu'on peut suivre, pour les notations, sur les figures ci-dessous.

$(\theta''\circ\theta')\circ\theta : e \to e'''$ est défini par le couple

$$(K e''' . T(K e''' . T b'' . v'_1) . w_1 ,\ a . v_2 . w_2).$$



(Noter que, si (v_1, v_2) est le produit fibré canonique de $(T a', b)$, par contre (w_1, w_2) est choisi tel que $(w_1, v_2 . w_2)$ soit le produit fibré canonique de $(T v'_2 . T a', b)$, ce qui est évidemment possible.)



$\theta''\circ(\theta'\circ\theta): e \to e'''$ est défini par le couple

$$(Ke'''.Tb''.w'_1, a.v_2.w'_2).$$

Les relations

$$(Ke''.Tb'.v_1).w_2 = Ke''.TTa''.Tv'_1.w_1 = Ta''.(K\pi''.Tv'_1.w_1),$$

par comparaison avec le produit fibré (w'_1, w'_2) de $(Ke''.Tb'.v_1, Ta'')$, fournissent un crochet $s = s(\theta'', \theta', \theta): \hat{\pi} \to \hat{\pi}'$ caractérisé par les relations

$$w'_2.s = w_2, \quad w'_1.s = K\pi''.Tv'_1.w_1,$$

de sorte que s est le morphisme d'associativité cherché, puisque

$$Ke'''.Tb''.w'_1.s = Ke'''.Tb''.K\pi''.Tv'_1.w_1 =$$

$$Ke'''.KTe'''.TTb''.Tv'_1.w_1 = Ke'''.TKe'''.TTb''.Tv'_1.w_1$$

et

$$a.v_2.w'_2.s = a.v_2.w_2,$$

ce qui exprime que $s: (\theta''\circ\theta')\circ\theta \to \theta''\circ(\theta'\circ\theta)$ définit un morphisme de $Sp(\mathbf{T})$.

Démontrons l'axiome de cohérence 8. Soient

$$\theta_i: e_i \to e_{i+1}, \quad \theta_i = (b_i, a_i), \quad \text{pour } 1 \leqslant i \leqslant 4,$$

un $\mathbf{T}$-span. Nous poserons

$$p = s(\theta_4, \theta_3, \theta_2)\circ\theta_1, \; p' = s(\theta_4, \theta_3\circ\theta_2, \theta_1), \; p'' = \theta_4\circ s(\theta_3, \theta_2, \theta_1),$$

$$q = s(\theta_4\circ\theta_3, \theta_2, \theta_1), \quad q' = s(\theta_4, \theta_3, \theta_2\circ\theta_1).$$

Il s'agit de montrer la relation $q'.q = p''.p'.p$. Pour simplifier le texte, nous noterons de la même façon un morphisme entre $\mathbf{T}$-spans (2-morphisme de $Sp(\mathbf{T})$) et le morphisme de $\mathcal{E}$ sous-jacent, qui sert à le définir, à condition que le contexte empêche toute confusion. Enfin, on remarquera que les produits fibrés ne sont pas toujours choisis de façon à être canoniques mais de façon à rendre canoniques d'autres produits fibrés.

Construction de $((\theta_4\circ\theta_3)\circ\theta_2)\circ\theta_1$: Soit (u_i, u'_i) le produit fibré canonique de (Ta_{i+1}, b_i), pour $1 \leqslant i \leqslant 3$, de sorte que $\theta_{i+1}\circ\theta_i: e_i \to e_{i+2}$ pour $1 \leqslant i \leqslant 3$ soit défini par $(Ke_{i+1}.Tb_{i+1}.u_i, a_i.u'_i)$. Soit (v_i, v'_i) un produit fibré de (Tu'_{i+1}, u_i), pour $1 \leqslant i \leqslant 2$, de sorte que $(v_i, u'_i.v'_i)$ soit le produit fibré de $(Ta_{i+1}.Tu_{i+1}, b_i)$ et que $(\theta_{i+2}\circ\theta_{i+1})\circ\theta_i$ soit défini par $(Ke_{i+3}.T(Ke_{i+3}.Tb_{i+2}.u_{i+1}).v_i, a_i.u'_i.v'_i)$, pour $i=1$ et 2. Soit (w_1, w'_1) le produit fibré de (Tv'_2, v_1) et π_i, π'_i les sources de a_i et u_i.

Construction de $\theta_4\circ(\theta_3\circ(\theta_2\circ\theta_1))$: Soit (m_1, m'_1) le produit fibré canonique de $(Ta_3, Ke_3.Tb_2.u_1)$, de sorte que $\theta_3\circ(\theta_2\circ\theta_1)$ soit défini par $(Ke_4.Tb_3.m_1, a_1.u'_1.m'_1)$. Soit (o, o') le produit fibré canonique de $(Ta_4, Ke_4.Tb_3.m_1)$, de sorte que $\theta_4\circ(\theta_3\circ(\theta_2\circ\theta_1))$ soit défini par $(Ke_5.Tb_4.o, a_1.u'_1.m'_1.o')$.

Construction de $(\theta_4\circ\theta_3)\circ(\theta_2\circ\theta_1)$: Soit (r, r') un produit fibré de (Tu'_3, m_1), de sorte que $(\theta_4\circ\theta_3)\circ(\theta_2\circ\theta_1)$ soit défini par

$$(Ke_5.T(Ke_5.Tb_4.u_3).r,\ a_1.u'_1.m'_1.r').$$

Construction de q: La relation

$$T(a_3.u'_3).K\pi'_3.Tv_2.w_1 = (Ke_3.Tb_2.u_1).v'_1.w'_1,$$

confrontée au produit fibré $(r, m'_1.r')$ de $(T(a_3.u'_3),\ Ke_3.Tb_2.u_1)$, fournit un crochet q (morphisme de $\mathcal{E}$) caractérisé par:

$$(1) \qquad r.q = K\pi'_3.Tv_2.w_1, \quad m'_1.r'.q = v'_1.w'_1.$$

Alors

$$q:((\theta_4\circ\theta_3)\circ\theta_2)\circ\theta_1 \to (\theta_4\circ\theta_3)\circ(\theta_2\circ\theta_1)$$

est un morphisme de $Sp(\mathbf{T})$. En effet, on a

$$\begin{aligned} Ke_5.T(Ke_5.Tb_4.u_3).r.q &= Ke_5.TKe_5.TTb_4.Tu_3.K\pi'_3.Tv_2.w_1 = \\ & Ke_5.TKe_5.KTTe_5.TTTb_4.TTu_3.Tv_2.w_1 = \\ & Ke_5.T(Ke_5.KTe_5.TTb_4.Tu_3.v_2).w_1 = \\ & Ke_5.T(Ke_5.T(Ke_5.Tb_4.u_3).v_2).w_1 \end{aligned}$$

et

$$a_1.u'_1.m'_1.r'.q = a_1.u'_1.v'_1.w'_1.$$

Construction de q': Les relations

$$Ta_4.(K\pi_4.Tu_3.r) = Ke_4.Tb_3.Tu'_3.r = (Ke_4.Tb_3.m_1).r'$$

confrontées au produit fibré (o, o') de $(Ta_4, Ke_4.Tb_3.m_1)$ fournissent un crochet q' (morphisme de $\mathcal{E}$), caractérisé par

(2) $$o . q' = K\pi_4 . Tu_3 . r , \quad o' . q' = r' .$$

Et alors

$$q' : (\theta_4 \circ \theta_3) \circ (\theta_2 \circ \theta_1) \to \theta_4 \circ (\theta_3 \circ (\theta_2 \circ \theta_1))$$

est un morphisme de $Sp(\mathbf{T})$. En effet, d'après (2),

$$(Ke_5 . Tb_4 . o) . q' = Ke_5 . Tb_4 . K\pi_4 . Tu_3 . r =$$

$$Ke_5 . KTe_5 . TTb_4 . Tu_3 . r = Ke_5 . T(Ke_5 . Tb_4 . u_3) . r$$

et

$$a_1 . u'_1 . m'_1 . o' . q' = a_1 . u'_1 . m'_1 . r' .$$

Construction de $(\theta_4 \circ (\theta_3 \circ \theta_2)) \circ \theta_1$: Soit (m_2, m'_2) le produit fibré canonique de $(Ta_4, Ke_4 . Tb_3 . u_2)$, de sorte que $\theta_4 \circ (\theta_3 \circ \theta_2)$ soit défini par $(Ke_5 . Tb_4 . m_2, a_2 . u'_2 . m'_2)$, et soit (t, t') un produit fibré de (Tm'_2, v_1), de sorte que $(\theta_4 \circ (\theta_3 \circ \theta_2)) \circ \theta_1$ soit défini par

$$(Ke_5 . T(Ke_5 . Tb_4 . m_2) . t, \; a_1 . u'_1 . v'_1 . t')$$

(autrement dit, $(t, u'_1 . v'_1 . t')$ est le produit fibré canonique de

$$(Ta_2 . Tu'_2 . Tm'_2, b_1)).$$

Construction de $\theta_4 \circ ((\theta_3 \circ \theta_2) \circ \theta_1)$: Soit (n, n') le produit fibré canonique de $(Ta_4, Ke_4 . T(Ke_4 . Tb_3 . u_2) . v_1)$, de sorte que le composé $\theta_4 \circ ((\theta_3 \circ \theta_2) \circ \theta_1)$ soit défini par $(Ke_5 . Tb_4 . n, \; a_1 . u'_1 . v'_1 . n')$.

Construction de p: Les relations

$$Ta_4 . (K\pi_4 . Tu_3 . v_2) = Ke_4 . Tb_3 . Tu'_3 . v_2 = (Ke_4 . Tb_3 . u_2) . v'_2$$

confrontées au produit fibré (m_2, m'_2) de $(Ta_4, Ke_4 . Tb_3 . u_2)$ fournissent un crochet d_2 caractérisé par

(3) $$m_2 . d_2 = K\pi_4 . Tu_3 . v_2 , \quad m'_2 . d_2 = v'_2$$

(c'est d'ailleurs le morphisme de $\mathcal{E}$ qui définit $s(\theta_4, \theta_3, \theta_2)$). Maintenant les relations

$$Tm'_2 . Td_2 . w_1 = T(m'_2 . d_2) . w_1 = Tv'_2 . w_1 = v_1 . w'_1$$

confrontées au produit fibré (t, t') fournissent un crochet p caractérisé par

(4) $$t . p = Td_2 . w_1 , \quad t' . p = w'_1 .$$

Alors

$$p : ((\theta_4 \circ \theta_3) \circ \theta_2) \circ \theta_1 \to (\theta_4 \circ (\theta_3 \circ \theta_2)) \circ \theta_1$$

est un morphisme de $Sp(\mathbf{T})$. En effet, on a les relations

$$Ke_5 . T(Ke_5 . Tb_4 . m_2) . t . p = Ke_5 . TKe_5 . TTb_4 . (Tm_2 . Td_2) . w_1$$

$$\underset{\text{d'après (3)}}{=} Ke_5 . TKe_5 . TTb_4 . T(K\pi_4 . Tu_3 . v_2) . w_1 =$$

$$Ke_5 . TKe_5 . TKTe_5 . TTTb_4 . TTu_3 . Tv_2 . w_1 =$$

$$Ke_5 . T(Ke_5 . KTe_5 . TTb_4 . Tu_3 . v_2) . w_1 =$$

$$Ke_5 . T(Ke_5 . T(Ke_5 . Tb_4 . u_3) . v_2) . w_1$$

et, d'après (4),

$$a_1 . u'_1 . v'_1 . t' . p = a_1 . u'_1 . v'_1 . w'_1 .$$

Construction de p': Les relations

$$Ta_4 . (K\pi_4 . Tm_2 . t) = Ke_4 . TTa_4 . Tm_2 . t =$$

$$Ke_4 . T(Ke_4 . Tb_3 . u_2) . Tm'_2 . t = (Ke_4 . T(Ke_4 . Tb_3 . u_2) . v_1) . t',$$

confrontées au produit fibré (n, n') de $(Ta_4, Ke_4 . T(Ke_4 . Tb_3 . u_2) . v_1)$, fournissent un crochet p' caractérisé par

$$(5) \qquad n . p' = K\pi_4 . Tm_2 . t, \quad n' . p' = t' .$$

Alors

$$p' : (\theta_4 \circ (\theta_3 \circ \theta_2)) \circ \theta_1 \to \theta_4 \circ ((\theta_3 \circ \theta_2) \circ \theta_1)$$

est un morphisme de $Sp(\mathbf{T})$. En effet,

$$Ke_5 . Tb_4 . n . p' \underset{\text{d'après (5)}}{=} Ke_5 . Tb_4 . K\pi_4 . Tm_2 . t =$$

$$Ke_5 . KTe_5 . TTb_4 . Tm_2 . t = Ke_5 . T(Ke_5 . Tb_4 . m_2) . t$$

et

$$a_1 . u'_1 . v'_1 . n' . p' = a_1 . u'_1 . v'_1 . t' .$$

Construction de p'': Les relations

$$Ta_3 . K\pi_3 . Tu_2 . v_1 = Ke_3 . Tb_2 . u_1 . v'_1$$

entraînent l'existence d'un crochet d_1 caractérisé par

$$(6) \qquad m_1 . d_1 = K\pi_3 . Tu_2 . v_1, \quad m'_1 . d_1 = v'_1$$

(d_1 est alors le morphisme qui définit $s(\theta_3, \theta_2, \theta_1)$).

Maintenant les relations

$$T a_4 . n = K e_4 . K T e_4 . T T b_3 . T u_2 . v_1 . n' =$$

$$K e_4 . T b_3 . K\pi_3 . T u_2 . v_1 . n' = (K e_4 . T b_3 . m_1) . d_1 . n'$$

confrontées au produit fibré (o, o') de $(T a_4, K e_4 . T b_3 . m_1)$ fournissent un crochet p'' caractérisé par

(7) $$o . p'' = n, \quad o' . p'' = d_1 . n' .$$

Alors

$$p'' : \theta_4 \circ ((\theta_3 \circ \theta_2) \circ \theta_1) \to \theta_4 \circ (\theta_3 \circ (\theta_2 \circ \theta_1))$$

est un morphisme de $Sp(\mathbf{T})$, car

$$K e_5 . T b_4 . o . p'' = K e_5 . T b_4 . n$$

et

$$a_1 . u'_1 . m'_1 . o' . p'' = a_1 . u'_1 . m'_1 . d_1 . n' \underset{\text{d'après (6)}}{=} a_1 . u'_1 . v'_1 . n' .$$

Construction du «Deus ex machina» x : Les relations

$$T a_4 . (K\pi_4 . K T\pi_4 . T T u_3 . T v_2 . w_1) = K e_4 . K T e_4 . T T b_3 . T u_2 . v_1 . w'_1 =$$

$$(K e_4 . T(K e_4 . T b_3 . u_2) . v_1) . w'_1 \underset{\text{d'après (6)}}{=} (K e_4 . T b_3 . m_1) . d_1 . w'_1 ,$$

confrontées au produit fibré (o, o'), fournissent un crochet x tel que

(8) $$o . x = K\pi_4 . K T\pi_4 . T T u_3 . T v_2 . w_1 , \quad o' . x = d_1 . w'_1 .$$

C'est la propriété d'unicité de ce crochet qui va permettre d'achever la démonstration; il suffit en effet de constater que, si dans (8) on remplace x par $q' . q$ ou par $p'' . p' . p$, ces relations restent vraies. En effet,

• $$o . q' . q \underset{\text{d'après (2)}}{=} K\pi_4 . T u_3 . r . q = K\pi_4 . T u_3 . K\pi'_3 . T v_2 . w_1 =$$

$$K\pi_4 . K T\pi_4 . T T u_3 . T v_2 . w_1 ,$$

$$o' . q' . q \underset{\text{d'après (2)}}{=} r' . q = d_1 . w'_1 ;$$

cette dernière égalité se démontre en utilisant la propriété universelle du produit fibré, car, par définition du produit fibré (r, r'), on a

$$m_1 . r' . q = T u'_3 . r . q \underset{\text{d'après (1)}}{=} T u'_3 . K\pi'_3 . T v_2 . w_1 =$$

$$K\pi_3 . Tu_2 . v_1 . w'_1 \underset{\text{d'après (6)}}{=} m_1 . d_1 . w'_1$$

et

$$m' . r' . q \underset{\text{d'après (1)}}{=} v' . w'_1 \underset{\text{d'après (6)}}{=} m'_1 . d_1 . w'_1 .$$

Maintenant remplaçons x par $p'' . p' . p$ dans (8); on a

$$o . p'' . p' . p \underset{\text{d'après (7)}}{=} n . p' . p \underset{\text{d'après (5)}}{=} K\pi_4 . Tm_2 . t . p \underset{\text{d'après (4)}}{=}$$

$$K\pi_4 . T(K\pi_4 . Tu_3 . v_2) . w_1 = K\pi_4 . KT\pi_4 . TTu_3 . Tv_2 . w_1$$

et

$$o' . p'' . p' . p \underset{\text{d'après (7)}}{=} d_1 . n' . p' . p \underset{\text{d'après (5)}}{=} d_1 . t'_1 . p \underset{\text{d'après (4)}}{=} d_1 . w'_1 .$$

Ceci achève de vérifier l'axiome de cohérence (8). La démonstration de l'axiome de cohérence (9) se fait sur le même modèle. ∎

REMARQUE. Nous aurions pu démontrer un résultat plus général et plus rapidement en utilisant systématiquement les pseudo-triples. $Sp(\mathbf{T})$ serait alors apparue comme la pseudo-catégorie «de Kleisli» relative au pseudo-triple induit par $\mathbf{T}$ sur $Sp(\mathcal{E})$, où $Sp(\mathcal{E}) = Sp((id_{\mathcal{E}}, id_{\mathcal{E}}, id_{\mathcal{E}}))$. On obtient canoniquement un pseudo-foncteur de la catégorie de Kleisli $Kl(\mathbf{T})$ relative au triple $\mathbf{T}$ dans la pseudo-catégorie $Sp(\mathbf{T})$ en associant à un morphisme $f: e \to e'$ de $Kl(\mathbf{T})$ (c'est-à-dire $f: e \to Te$ dans $\mathcal{E}$) le $\mathbf{T}$-span

$$(f, id_e): e \to e'.$$

On dit qu'une transformation naturelle $m: F \to F'$, où F, $F': \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ sont deux foncteurs, est *cartésienne* si, pour tout morphisme $f: e \to e'$ de $\mathcal{C}$, alors $(F(f), m(e))$ est un produit fibré de $(m(e'), F'(f))$. On dit que $\mathbf{T} = (T, I, K)$ est un *triple cartésien* si les deux conditions suivantes sont satisfaites:

(a) $\mathcal{E}$ admet des produits fibrés finis et T commute avec ces produits fibrés (ce qui arrive dès que I ou K sont cartésiennes).

(b) I et K sont des transformations naturelles cartésiennes.

On verra au chapitre III des exemples de triples cartésiens; en voici une caractérisation utile:

PROPOSITION II.2.14. *Pour que* $Sp(\mathbf{T})$ *soit une bicatégorie (i. e. que* r,

l et s définissent des équivalences naturelles), il faut et il suffit que **T** *soit cartésien.*

PREUVE. Reprenons les notations de la proposition 1. Pour la construction de $r(\theta)$, il est clair que la condition (c) entraîne que le crochet c entre deux produits fibrés est un inversible, et réciproquement si c'est un inversible, (c) est satisfaite. On sait déjà que $l(\theta)$ est toujours un inversible. Pour la construction de $s(\theta'', \theta', \theta)$ la figure 1 montre clairement que, si (a) et (b) sont remplies, alors $(K\pi''. Tv_1 . w_1, w_2)$ est un produit fibré de $(Ta'', Ke''. Tb'. v_1)$ et, comme s est le crochet résultant d'une confrontation avec le produit fibré canonique (w_1, w_2), c'est un inversible. La réciproque se démontre en considérant des cas dégénérés de cette situation. ■

II.3. Deux interprétations des T-catégories.

Nous allons donner deux interprétations, en quelque sorte duales l'une de l'autre, des **T**-catégories.

Une *monade* (ou *monoïde*) dans une pseudo-catégorie $\mathfrak{D}$ est un pseudo-foncteur $\mu : \mathbf{1} \to \mathfrak{D}$, en désignant par $\mathbf{1}$ la pseudo-catégorie réduite à un seul objet 0, un seul morphisme et un seul 2-morphisme (ce qui détermine entièrement la structure). Nous noterons par un $\circ$ la première loi dans $\mathfrak{D}$ et par un point la deuxième. Si $e = \mu(0)$ et $\theta = \mu(id_0)$, la donnée de de μ équivaut à celle de deux 2-morphismes de $\mathfrak{D}$:

$$i : id_e \to \theta \quad \text{et} \quad k : \theta \circ \theta \to \theta$$

(ce qui correspond aux familles u et c de la définition des pseudo-foncteurs) rendant commutatifs les diagrammes suivants (ce qui correspond aux axiomes 5' et 6' de II.1)

$$\begin{tikzcd} \theta \arrow[r, "id(\theta)"] \arrow[d, "r(\theta)"'] & \theta \\ \theta \circ id_e \arrow[r, "\theta \circ i"'] & \theta \circ \theta \arrow[u, "k"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \theta & \theta \arrow[l, "id(\theta)"'] \arrow[d, "l(\theta)"] \\ \theta \circ \theta \arrow[u, "k"] & id_e \circ \theta \arrow[l, "i \circ \theta"] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\theta\circ(\theta\circ\theta) \arrow[d, "\theta\circ k"'] & & (\theta\circ\theta)\circ\theta \arrow[ll, "s(\theta,\theta,\theta)"'] \arrow[d, "k\circ\theta"] \\
\theta\circ\theta \arrow[d, "k"'] & & \theta\circ\theta \arrow[d, "k"] \\
\theta & & \theta \arrow[ll, "id(\theta)"']
\end{tikzcd}$$

Soit $\mathcal{E}$ une catégorie munie d'un triple $\mathbf{T}$, admettant des produits fibrés finis et munie d'un choix canonique de ces produits fibrés.

PROPOSITION II.3.15. *La donnée d'une* $\mathbf{T}$*-catégorie équivaut à celle d'une monade de la pseudo-catégorie* $Sp(\mathbf{T})$*, sur le même objet.*

PREUVE. Si $\mu: \mathbf{1}\to Sp(\mathbf{T})$ est une monade, le $\mathbf{T}$-span $\theta: e\to e$ est défini par un couple (a, b) de morphismes de $\mathcal{E}$ de la forme

$$a: \pi\to Te, \quad b: \pi\to e.$$

Formons le 2-morphisme de $Sp(\mathbf{T})$:

$$s(\theta,\theta,\theta): (\theta\circ\theta)\circ\theta\to\theta\circ(\theta\circ\theta).$$

Pour cela, soit (v_2, v_1) le produit fibré canonique de (Tb, a), soient (w_2, w_1) le produit fibré de (Tv_1, v_2) rendant canonique le produit fibré $(w_2, v_1.w_1)$ de $(Tb.Tv_1, a)$, et (w'_2, w'_1) le produit fibré canonique de $(Tb, Ke.Ta.v_2)$; alors $s(\theta,\theta,\theta)$ est défini par le morphisme s de $\mathcal{E}$ caractérisé par:

(1) $$w'_1.s = w_1, \quad w'_2.s = K\pi.Tv_2.w_2,$$

qui résulte de la confrontation de la relation

$$Tb.K\pi.Tv_2.w_2 = Ke.Ta.v_2.w_1$$

avec le produit fibré (w'_2, w'_1).

Formons les 2-morphismes de $Sp(\mathbf{T})$:

$$l(\theta): \theta\to id_e\circ\theta \quad\text{et}\quad r(\theta): \theta\to\theta\circ id_e,$$

définis par les morphismes l et r de $\mathcal{E}$ caractérisés par les relations:

(2) $$u'_2.l = a, \quad u'_1.l = id_\pi, \quad u_2.r = I\pi, \quad u_1.r = b,$$

si (u_2, u_1) est le produit fibré canonique de (Tb, Ie) et (u'_2, u'_1) celui de (id_{Te}, a). Dans la suite de la démonstration, nous noterons par la même lettre x un 2-morphisme $x : e' \to e''$ de $Sp(\mathbf{T})$ et le morphisme de $\mathcal{E}$, $x : e \to e'$, qui lui est sous-jacent. i et k ont la même signification que ci-dessus (familles u et c). Nous allons voir que $\theta^* = (b, a, i, k)$ est une **T**-catégorie (non canonique - voir définition au chapitre I.4) ssi les données (θ, i, k) définissent une monade μ de $Sp(\mathbf{T})$.

Dans $\mathcal{E}$, on a les relations caractéristiques pour $i \circ \theta$, $\theta \circ i$, $k \circ \theta$ et $\theta \circ k$:

(3)
$$\begin{aligned}
&v_2 . (i \circ \theta) = Ti . u'_2, && v_1 . (i \circ \theta) = u'_1,\\
&v_2 . (\theta \circ i) = u_2, && v_1 . (\theta \circ i) = i . u_1,\\
&v_2 . (k \circ \theta) = Tk . w_2, && v_1 . (k \circ \theta) = v_1 . w_1,\\
&v_2 . (\theta \circ k) = w'_2, && v_1 . (\theta \circ k) = k . w'_1 .
\end{aligned}$$

En utilisant (1), (2) et (3), on en déduit les relations (dans $\mathcal{E}$):

$$\begin{aligned}
&v_1 . (i \circ \theta) . l = id_\pi, && v_2 . (i \circ \theta) . l = Ti . a,\\
&v_1 . (\theta \circ i) . r = i . b, && v_2 . (\theta \circ i) . r = I\pi,\\
&v_1 . (\theta \circ k) . s = k . w_1, && v_2 . (\theta \circ k) . s = K\pi . Tv_2 . w_2,\\
&v_1 . (k \circ \theta) = v_1 . w_1, && v_2 . (k \circ \theta) = Tk . w_2 .
\end{aligned}$$

Si on confronte ces relations avec les relations caractéristiques du chapitre I.4, (2), (3), (5), (6), on en déduit les relations:

$$\begin{aligned}
&i_1 = (i \circ \theta) . l, && i_2 = (\theta \circ i) . r,\\
&k_1 = (\theta \circ k) . s, && k_2 = k \circ \theta .
\end{aligned}$$

Les conditions de «neutralité» et «associativité» (7) et (8) de I.4 s'écrivent alors:

$$k . (i \circ \theta) . l = id_\pi = k . (\theta \circ i) . r,$$
$$k . (\theta \circ k) . s = k . (k \circ \theta)$$

et expriment justement la commutativité des diagrammes définis, ci-dessus, par μ, extraits du diagramme suivant (dans $Sp(\mathbf{T})$)

$$\begin{tikzcd}
 & & \theta \circ id_e \arrow[dr, "\theta\circ i"] & & (\theta\circ\theta)\circ\theta \arrow[dl, "k\circ\theta"'] \arrow[dd, "{s(\theta,\theta,\theta)}"] \\
id_e \arrow[r, "i"] & \theta \arrow[ur, "r(\theta)"] \arrow[dr, "l(\theta)"'] & & \theta\circ\theta \arrow[ll, "k"'] & \\
 & & id_e \circ \theta \arrow[ur, "i\circ\theta"'] & & \theta\circ(\theta\circ\theta) \arrow[ul, "\theta\circ k"]
\end{tikzcd}$$

ce qui termine la démonstration. ■

Si $\mathcal{E}$ vérifie les mêmes hypothèses, on notera $Sp(\mathcal{E})$ la pseudo-catégorie (qui est en réalité une bicatégorie) $Sp(id_{\mathcal{E}}, id_{\mathcal{E}}, id_{\mathcal{E}})$; ses morphismes s'appellent simplement des *spans de* $\mathcal{E}$. On notera par $\circ$ sa première loi, par un point la seconde et on désignera par une même lettre un morphisme de spans et le morphisme de $\mathcal{E}$ sous-jacent. Nous allons maintenant interpréter une $\mathbf{T}$-catégorie dans $Sp(\mathcal{E})$ au lieu de $Sp(\mathbf{T})$. Si on avait défini la notion de pseudo-triple sur une pseudo-catégorie (par exemple, on verrait que $\mathbf{T}$ induit un pseudo-triple sur $Sp(\mathcal{E})$), on pourrait définir en toute généralité la notion de pseudo-algèbre. Contentons-nous de la définition suivante: Nous dirons que $(\theta, \tilde{i}, \tilde{k})$ est une $\mathbf{T}$-pseudo-algèbre sur e si $\theta : Te \to e$ est un span de $\mathcal{E}$ (et donc défini par deux morphismes $b : \pi \to e$ et $a : \pi \to Te$ de $\mathcal{E}$), si

$$\tilde{i} : id_e \to \theta \circ I e \quad \text{et} \quad \tilde{k} : \theta \circ T\theta \to \theta \circ K e$$

sont des 2-morphismes de $Sp(\mathcal{E})$, en posant $T\theta = (Tb, Ta)$ et en identifiant tout morphisme $x : e' \to e''$ avec le span $(x, id_{e'}) : e' \to e''$, et enfin si les «axiomes de cohérence» suivants sont satisfaits:

$$(1) \qquad (\tilde{k} \circ ITe).(\tilde{i} \circ \theta) = id_\theta = (\tilde{k} \circ TIe).(\theta \circ T\tilde{i}),$$

$$(2) \qquad (\tilde{k} \circ KTe).(\tilde{k} \circ TT\theta) = (\tilde{k} \circ TKe).(\theta \circ T\tilde{k}).$$

PROPOSITION II.3.16. *La donnée d'une* $\mathbf{T}$*-catégorie sur* e *équivaut à celle d'une* $\mathbf{T}$*-pseudo-algèbre sur* e.

PREUVE. Soit $\theta : Te \to e$ un span, $\theta = (b, a)$; soit (u''_1, u''_2) le produit fibré canonique de (a, Ie) ; alors $\theta \circ Ie : e \to e$ est défini par le couple $(b.u''_1, u''_2)$. Un morphisme $i : id_e \to \theta \circ Ie$ dans $Sp(\mathcal{E})$ est défini par un morphisme $\tilde{i} : e \to \pi'$ de $\mathcal{E}$ (voir figure) tel que

$$b.u''_1.\tilde{i} = id_e, \quad u''_2.\tilde{i} = id_e.$$

Posons $i = u''_1.\tilde{i}$; on a

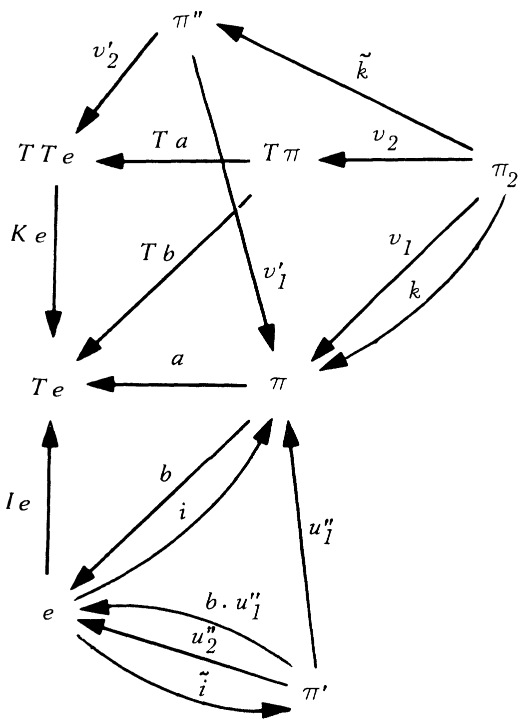
$$b.i = id_e \text{ et } a.i = Ie.u''_2.\tilde{i} = Ie,$$

donc (b, a, i) est un $\mathbf{T}$-graphe pointé sur e. Réciproquement cette donnée détermine un crochet $\tilde{i} : e \to \pi$ déterminant le morphisme de spans $\tilde{i}$

cherché.

Soit (v_1, v_2) et (v'_1, v'_2) les produits fibrés canoniques respectivement de (a, Tb) et de (a, Ke); alors $\theta \circ T\theta$ et $\theta \circ Ke : TTe \to e$ sont définis par les couples $(b.v_1, Ta.v_2)$ et $(b.v'_1, v'_2)$. Un morphisme de spans $\tilde{k} : \theta \circ T\theta \to \theta \circ Ke$ est défini par un morphisme $\tilde{k} : \pi_2 \to \pi''$ de $\mathcal{E}$ tel que

$$b.v'_1.\tilde{k} = b.v_1, \quad v'_2.\tilde{k} = Ta.v_2.$$



Posons $k = v'_1.\tilde{k}$; on a $b.k = b.v_1$,

$$a.k = a.v'_1.\tilde{k} = Ke.v'_2.\tilde{k} = Ke.Ta.v_2,$$

ce qui exprime l'axiome (4) de I.4. Réciproquement, k vérifiant (4) détermine un crochet $\tilde{k}$ définissant un morphisme de spans $\tilde{k} : \theta \circ T\theta \to \theta \circ Ke$. Donc, il reste à montrer que (b, a, i, k) est une **T**-catégorie, c'est-à-dire vérifie les axiomes de neutralité et d'associativité (7) et (8) de I.4, si et seulement si les axiomes de cohérence (1) et (2) ci-dessus sont satisfaits, ce qui est une vérification de routine. ■

REMARQUE. En appliquant ceci aux $\mathbf{T}$-préordres, on redémontrerait la proposition 4 de I.5.

II.4. Catégorie pseudo-monoïdale et fibration de $Gr(\mathbf{T})$.

Une *catégorie pseudo-monoïdale* (ou encore un *pseudo-monoïde*) est est une pseudo-catégorie $\overline{\mathfrak{D}}$ à un seul objet qu'on notera presque toujours 1. Si $\mathfrak{D}$ est la catégorie $Hom_{\overline{\mathfrak{D}}}(1, 1)$, sa loi de composition, qui coïncide avec la «deuxième loi» de $\overline{\mathfrak{D}}$ sera notée par un point, et la «première loi» de $\mathfrak{D}$ sera généralement notée par le symbole $\circ$. On écrira souvent $\overline{\mathfrak{D}} = (\mathfrak{D}, 1, \circ)$: les symboles r, l, s des axiomes 5 et 6 de II.1 seront toujours notés de la même façon; c'est pourquoi ils sont facilement sous-entendus en notant $\overline{\mathfrak{D}}$ sous la forme d'un triplet. De même un pseudo-foncteur $\overline{F}: \overline{\mathfrak{D}} \to \overline{\mathfrak{D}}'$ entre deux catégories pseudo-monoïdales est déterminé par un foncteur $F: \mathfrak{D} \to \mathfrak{D}'$ des catégories sous-jacentes, qui «commute» avec les premières lois: c'est-à-dire qu'en fait, les morphismes u et c des axiomes 3' et 4' seront toujours notés de la même façon: $u: 1 \to F1$ est un morphisme de $\mathfrak{D}'$, tandis que $c: \bigcirc.(F \times F) \to F.\bigcirc$ est une transformation naturelle, en notant $\bigcirc: \mathfrak{D} \times \mathfrak{D} \to \mathfrak{D}$ le foncteur «première loi»:

$$\bigcirc(m', m) = m' \circ m,$$

pour tout couple de morphismes de $\mathfrak{D}$, quelle que soit la catégorie pseudo-monoïdale $\overline{\mathfrak{D}}$. Toutes ces données devant satisfaire «les axiomes de cohérence» 7, 8, 5', 6' de II.1.

Soit $\mathbf{T}$ un triple sur une catégorie $\mathfrak{E}$ munie de produits fibrés canoniques. Pour tout $e \in |\mathfrak{E}|$ la catégorie $Hom_{Sp(\mathbf{T})}(e, e)$ sera notée $Gr(\mathbf{T})/e$; c'est une sous-catégorie de $Gr(\mathbf{T})$ et elle est sous-jacente à une catégorie pseudo-monoïdale notée $\overline{Gr(\mathbf{T})/e} = (Gr(\mathbf{T})/e, 1, \circ)$ et obtenue par «restriction» de la structure de $Sp(\mathbf{T})$: en réalité la dualisée (pour la loi $\circ$ seulement) d'une sous-pseudo-catégorie de $Sp(\mathbf{T})$.

Pour tout morphisme $f: e \to e'$ de $\mathfrak{E}$, on définit un foncteur

$$f^*: Gr(\mathbf{T})/e \to Gr(\mathbf{T})/e, \quad \text{en posant} \quad f^*(m) = f^*m$$

(voir proposition I.5.6).

PROPOSITION II.4.16. *f^* est le foncteur sous-jacent à un pseudo-foncteur, noté $\overline{f^*}: \overline{Gr(\mathbf{T})/e'} \to \overline{Gr(\mathbf{T})/e}$, dont les morphismes u et c sont de plus déterminés de façon unique* (mais ce ne sont pas nécessairement des isomorphismes, même si **T** est cartésien).

PREUVE. Si θ et θ' sont des **T**-graphes sur e, la construction du morphisme $f^*(\theta' \circ \theta)$ par limites projectives (qui se ramènent à des produits fibrés officiels) entraîne l'existence d'un morphisme unique

$$c(\theta', \theta): f^*\theta' \circ f^*\theta \to f^*(\theta' \circ \theta)$$

de $Gr(\mathbf{T})/e$ déterminé par un crochet $c(\theta', \theta): \pi'' \to \pi'$ dans $\mathcal{E}$, si π'' et π' sont les objets des morphismes respectivement des **T**-graphes

$$f^*\theta' \circ f^*\theta \quad \text{et} \quad f^*(\theta' \circ \theta).$$

On détermine un morphisme unique $u: 1 \to f^*1$ d'une manière analogue. Nous allons montrer que ces morphismes satisfont les axiomes de cohérence 5' et 6'. Nous nous limiterons en fait à montrer, par exemple, que le diagramme suivant, pour tout **T**-graphe $\theta = (b, a)$ sur e, commute:

$$\begin{tikzcd}
f^*(1 \circ \theta) & & f^*\theta \arrow[ll, "f^*l\theta"'] \arrow[d, "lf^*\theta"] \\
f^*1 \circ f^*\theta \arrow[u, "c(1,\theta)"] & & 1 \circ f^*\theta \arrow[ll, "u \circ f^*\theta"]
\end{tikzcd}$$

ce qui revient à montrer qu'on a un diagramme commutatif avec les morphismes sous-jacents de $\mathcal{E}$, en utilisant la propriété de limite projective de $f^*(1 \circ \theta)$. On notera par la même lettre un morphisme de $Gr(\mathbf{T})$ et le morphisme sous-jacent de $\mathcal{E}$ qui le définit.

Soit $(b', a') = f^*\theta$ et $(\bar{b}, \bar{a}) = f^*(1 \circ \theta)$; on a deux limites projectives (où les projections canoniques sont en pointillés):

$$\begin{tikzcd}
Te & Te' \arrow[l, "Tf"'] \\
\pi \arrow[u, "a"] \arrow[d, "b"'] & \pi' \arrow[l, dashed, "f'"'] \arrow[u, dashed, "a'"'] \arrow[d, dashed, "b'"] \\
e & e' \arrow[l, "f"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
Te & Te' \arrow[l, "Tf"'] \\
\pi_1 \arrow[u, "Ke.Ta.v_2"] \arrow[d, "v_1"'] & \bar{\pi} \arrow[l, dashed, "\bar{f}"'] \arrow[u, dashed, "\bar{a}"'] \arrow[d, dashed, "\bar{b}"] \\
e & e' \arrow[l, "f"]
\end{tikzcd}$$

et où (v_1, v_2) est le produit fibré de (Ie, Tb) qui sert à former le composé $1 \circ \theta = (v_1, Ke.Ta.v_2)$.

Nous sommes donc amenés à montrer les trois égalités suivantes:

(1) $$\bar{a}.f^*1\theta = \bar{a}.c(1,\theta).(u \circ f^*\theta).1f^*\theta,$$

(2) $$\bar{f}.f^*1\theta = \bar{f}.c(1,\theta).(u \circ f^*\theta).1f^*\theta,$$

(3) $$\bar{b}.f^*1\theta = \bar{b}.c(1,\theta).(u \circ f^*\theta).1f^*\theta.$$

Posons encore $f^*1 = (b_0, a_0)$ et soit f_0 la troisième projection canonique définissant f^*1 :

$$\begin{tikzcd}
Te & Te' \arrow[l, "Tf"'] \\
e \arrow[u, "Ie"] \arrow[d, "id_e"'] & \pi_0 \arrow[l, "f_0"'] \arrow[u, "a_0"'] \arrow[d, "b_0"] \\
e & e' \arrow[l, "f"']
\end{tikzcd}$$

On obtient d'abord un morphisme g de $\mathcal{E}$ tel que, en notant (v_{10}, v_{20}) le produit fibré de (a_0, Tb'); on ait

$$f^*1 \circ f^*\theta = (b_0.v_{10}, Ke'.Ta'.v_{20})$$

et

(4) $$v_1.g = f_0.v_{10}, \quad v_2.g = Tf'.v_{20}.$$

Le morphisme u de $\mathcal{E}$ est caractérisé par les relations:

(5) $$b_0.u = id_{e'}, \quad f_0.u = f, \quad a_0.u = Ie',$$

et donc on a, si (v'_1, v'_2) est le produit fibré de (Ie', Tb'):

$$1 \circ f^*\theta = (v'_1, Ke'.Ta'.v'_2)$$

et

(6) $$u.v'_1 = v_{10}.(u \circ f^*\theta), \quad v'_2 = v_{20}.(u \circ f^*\theta).$$

Par définition du morphisme 1θ, on a

$$v_1.1\theta = b \quad \text{et} \quad v_2.1\theta = !\pi,$$

d'où les relations:

(7) $$\bar{b}.f^*1\theta = b', \quad \bar{f}.f^*1\theta = 1\theta.f', \quad \bar{a}.f^*1\theta = a'.$$

De même le morphisme $lf^*\theta$ est caractérisé par

(8) $$v'_1 . lf^*\theta = b', \quad v'_2 . lf^*\theta = 1\pi'.$$

Et on a

(9) $$l\theta . f' = g.(u \circ f^*\theta).lf^*\theta \quad (\text{«naturalité» de } l),$$

puisque

$$v_1 . g.(u \circ f^*\theta) \underset{\text{d'après (4)}}{=} f_0 . v_{10} .(u \circ f^*\theta) \underset{\text{d'après (6)}}{=}$$
$$= f_0 . u . v'_1 \underset{\text{d'après (5)}}{=} f . v'_1$$

et

$$v_2 . g.(u \circ f^*\theta) \underset{\text{d'après (4)}}{=} Tf' . v_{20} .(u \circ f^*\theta) \underset{\text{d'après (6)}}{=} Tf' . v'_2 .$$

Enfin, par définition de $c(1, \theta)$, on a

(10) $\overline{b} . c(1, \theta) = b_0 . v_{10}, \quad \overline{a} . c(1, \theta) = Ke' . Ta' . v_{20}, \quad \overline{f} . c(1, \theta) = g.$

On a

$$\overline{a} . f^*l\theta \underset{\text{d'après (7)}}{=} a' = Ke' . Ta' . 1\pi' \underset{\text{d'après (8)}}{=}$$
$$= Ke' . Ta' . v'_2 . lf^*\theta \underset{\text{d'après (6)}}{=} Ke' . Ta' . v_{20} .(u \circ f^*\theta).lf^*\theta =$$
$$\underset{\text{d'après (10)}}{=} \overline{a} . c(1, \theta).(u \circ f^*\theta).lf^*\theta,$$

ce qui démontre (1). On a

$$\overline{f} . f^*l\theta \underset{\text{d'après (7)}}{=} l\theta . f' \underset{\text{d'après (9)}}{=} g.(u \circ f^*\theta).lf^*\theta =$$
$$\underset{\text{d'après (10)}}{=} f . c(1, \theta).(u \circ f^*\theta).lf^*\theta),$$

ce qui démontre (2). Enfin,

$$\overline{b} . f^*l\theta \underset{\text{d'après (7)}}{=} b' \underset{\text{d'après (8)}}{=} v'_1 . lf^*\theta \underset{\text{d'après (6)}}{=}$$
$$b_0 . u . v'_1 . lf^*\theta \underset{\text{d'après (6)}}{=} b_0 . v_{10} .(u \circ f^*\theta).lf^*\theta \underset{\text{d'après (10)}}{=}$$
$$= \overline{b} . c(1, \theta).(u \circ f^*\theta).lf^*\theta,$$

ce qui démontre (2). ∎

Relativement à un univers, noté $|Ens|$, on note *Ens*, *Cat*, etc... respectivement les catégories des ensembles, des catégories, etc... Notons $Cat^{\#}$ la catégorie dont les objets sont les catégories pseudo-monoïdales dont la catégorie sous-jacente est dans Cat et dont les morphismes sont les pseudo-foncteurs. Relativement à un univers noté $|\widehat{Ens}|$, on note $\widehat{Ens}$, $\widehat{Cat}$, $\widehat{Cat}^{\#}$, etc... les catégories analogues. Si $\mathcal{E}$ est un élément de $|\widehat{Cat}|$, la proposition précédente nous montre comment, à un morphisme $f: e \to e'$ de $\mathcal{E}$, on peut associer un morphisme

$$\overline{f}^*: \overline{Gr(\mathbf{T})/e'} \to \overline{Gr(\mathbf{T})/e} \text{ de } \widehat{Cat}^{\#}.$$

On appellera *bifoncteur* un pseudo-foncteur (F, u, c) tel que u et c soient des équivalences naturelles (et non pas un pseudo-foncteur entre bicatégories comme dans [Be]).

PROPOSITION II.4.18. *La correspondance qui associe à tout morphisme f de $\mathcal{E}$ le pseudo-foncteur $\overline{f}^*$ définit un bifoncteur $\mathcal{E}^{opp} \to \widehat{Cat}^{\#}$.*

PREUVE. Nous laissons cette démonstration facile en exercice; elle utilise le fait que u et c sont des crochets de limites projectives. ■

III. EXEMPLES

Dans les deux premiers exemples qui suivront (sections 2 et 3) le triple $\mathbf{T}$ possède des propriétés qui en simplifient l'étude. Ces propriétés assurent non seulement que le foncteur $Cat(\mathbf{T}) \to Gr(\mathbf{T})$ est triplable (proposition II.1.19), mais aussi elles permettent une construction simple de l'adjoint (scolie de la proposition III.2.21).

III.1. T-Catégories libres (cas particulier).

Soit $\mathbf{T}$ un triple sur une catégorie $\mathcal{E}$ admettant des produits fibrés finis et munie d'un choix canonique de ces produits fibrés. Soit $\mathcal{X}$ l'une des catégories $Alg(\mathbf{T})$, $Ord(\mathbf{T})$, $Cat(\mathbf{T})$, $Gr(\mathbf{T})$, et $e \in |\mathcal{E}|$; on notera $\mathcal{X}/e$ la sous-catégorie de $\mathcal{X}$ ayant pour objets les objets $\bar{e}$ de $\mathcal{X}$ tels que $U\bar{e} = e$, où $U: \mathcal{X} \to \mathcal{E}$ est le foncteur d'oubli habituel (voir suite (*) au début de I.5), et dont les morphismes sont les morphismes $\bar{f}: \bar{e} \to \bar{e}'$ de $\mathcal{X}$ tels que $U\bar{f} = id_e$. Notons que $Alg(\mathbf{T})/e$ et $Ord(\mathbf{T})/e$ sont, respectivement, une catégorie discrète et un préordre.

On dit que $\mathbf{T} = (T, I, K)$ est un triple *fortement cartésien* s'il est cartésien (II.2) et si, de plus, il vérifie les conditions suivantes:

(c) $\mathcal{E}$ admet des sommes finies et dénombrables et T commute avec les sommes.

(d) Les sommes dans $\mathcal{E}$ sont universelles (0.1) et commutent avec les produits fibrés.

PROPOSITION III.1.19. *Si T est un triple fortement cartésien, le foncteur d'oubli $Cat(\mathbf{T}) \to Gr(\mathbf{T})$ est triplable.*

PREUVE. Soit $U: Cat(\mathbf{T}) \to Gr(\mathbf{T})$ le foncteur d'oubli habituel; on va définir un foncteur adjoint $F: Gr(\mathbf{T}) \to Cat(\mathbf{T})$ en utilisant la proposition A.1 de l'appendice. Pour tout $e \in |\mathcal{E}|$, d'après la proposition II.2.14 et la terminologie de II.4,

$$\overline{Gr(\mathbf{T})/e} = (Gr(\mathbf{T})/e, 1, \circ)$$

est une catégorie monoïdale et, d'après la proposition II.3.15, $Cat(\mathbf{T})/e$

est isomorphe à la catégorie des monades $Mon(\overline{Gr(\mathbf{T})/e})$ (appendice) et son foncteur d'oubli vers $Gr(\mathbf{T})/e$ coïncide avec une restriction de U. Pour montrer que le foncteur $Cat(\mathbf{T})/e \to Gr(\mathbf{T})/e$ admet un adjoint, il suffit donc de montrer que $\overline{Gr(\mathbf{T})/e}$ est dénombrablement distributive (proposition A.1). L'existence de sommes finies et dénombrables résulte de l'hypothèse (c) et de la «créativité» du foncteur $Gr(\mathbf{T})/e \to \mathcal{E}$ qui, à tout $\mathbf{T}$-graphe θ sur $\underline{e}$, associe l'objet des morphismes π de θ. On achève de vérifier que $\overline{Gr(\mathbf{T})/e}$ est dénombrablement distributive en utilisant les conditions (c) et (d), et le fait que, si dans $\mathcal{E}^2$ on a une égalité de la forme $C'.C = C''$ et si C' et C'' sont des transformations naturelles cartésiennes (II.2), alors C est également cartésienne. Le foncteur d'oubli $U_e: Cat(\mathbf{T})/e \to Gr(\mathbf{T})/e$ est donc triplable; notons son adjoint $F_e: Gr(\mathbf{T})/e \to Cat(\mathbf{T})/e$. Nous définissons alors $|F|$ par la condition de prolonger les applications $|F_e|$, lorsque e parcourt $|\mathcal{E}|$.

Si $\mathbf{T}$ est fortement cartésien, il en est de même du triple $\mathbf{T}^2$ (I.1) et le foncteur d'oubli $\hat{U}: Cat(\mathbf{T}^2) \to Gr(\mathbf{T}^2)$ est identifié au foncteur:

$$U^2: Cat(\mathbf{T}^2) \to Gr(\mathbf{T}^2).$$

La manière dont est construit l'adjoint de la proposition A.1 conduit à définir $|F^2|$ comme prolongement des applications $|\hat{F}_f|$, lorsque f parcourt $|\mathcal{E}^2|$, où l'on note $\hat{F}_f$ l'adjoint du foncteur d'oubli

$$\hat{U}_f: Cat(\mathbf{T}^2)/f \to Gr(\mathbf{T}^2)/f.$$

Ces conditions permettent donc de construire un foncteur

$$F: Gr(\mathbf{T}) \to Cat(\mathbf{T}),$$

et ce foncteur est un adjoint de $U: Cat(\mathbf{T}) \to Gr(\mathbf{T})$; il suffit en effet de remarquer que la même démonstration permet de construire les transformations naturelles I' et K' du triple cherché, qu'on notera

$$\mathbf{T}' = (T', I', K'), \quad \text{si} \quad T' = UF.$$

Il reste à montrer que le foncteur d'Eilenberg-Moore

$$E: Cat(\mathbf{T}) \to Alg(\mathbf{T}')$$

est un isomorphisme. Le triple $\mathbf{T}'_e$ déduit du couple d'adjoints (F_e, U_e)

s'obtient par restriction du triple $\mathbf{T}'$ à $Gr(\mathbf{T})/e$ et, puisque le foncteur d'Eilenberg-Moore associé $E_e : Cat(\mathbf{T})/e \to Alg(\mathbf{T}'_e)$ est un isomorphisme, on en déduit aussitôt que $|E|$ est une bijection. Par un raisonnement analogue on montre que $|E^2|$ est une bijection, puisqu'il y a une bijection entre les $\mathbf{T}'^2$-algèbres et les morphismes entre $\mathbf{T}'$-algèbres. Ceci achève de montrer que E est un isomorphisme. ∎

Un morphisme de $\mathfrak{S}^2$ est dit *cartésien* lorsqu'il l'est au sens de II.2 (un tel morphisme étant une transformation naturelle). On dit qu'un cône inductif dans $\mathfrak{S}^2$ est cartésien si ses injections canoniques sont toutes cartésiennes.

LEMME. *Si dans $\mathfrak{S}$ les sommes sont universelles, $\mathfrak{S}$ vérifie la propriété suivante:*

(e) les injections canoniques de sommes dans $\mathfrak{S}$ sont des monomorphismes.

Si $\mathfrak{S}$ vérifie (d) (et donc (e)), toute somme finie ou dénombrable dans $\mathfrak{S}^2$ est un cône cartésien (si $\mathfrak{S}$ admet un objet final, ceci est vrai pour toute somme) et tout crochet de somme formé à partir d'un cône cartésien dans $\mathfrak{S}^2$ est cartésien.

PREUVE. La première partie est un exercice intéressant sur le langage des catégories. On montre alors, à partir de la condition (e), que, si une somme dans $\mathfrak{S}^2$ est un monomorphisme (resp. un épimorphisme) de $\mathfrak{S}$, chacun de ses termes est un monomorphisme (resp. un épimorphisme) de $\mathfrak{S}$. On montre ensuite que les transformations naturelles «codiagonales» sont cartésiennes en utilisant l'universalité des sommes et on achève la preuve en utilisant la fin de la condition (d). ∎

PROPOSITION III.1.20. *Lorsque $\mathbf{T}$ est un triple fortement cartésien, il en est de même du triple déduit du foncteur triplable $Cat(\mathbf{T}) \to Gr(\mathbf{T})$.*

PREUVE. Si $\mathbf{T}' = (T', I', K')$ est ce triple sur $Gr(\mathbf{T})$, la preuve de la proposition A.1 de l'appendice montre que, pour tout $\theta \in |Gr(\mathbf{T})|$, $T'\theta$ est une somme dénombrable, $I'\theta$ une injection canonique de cette somme, $K'\theta$ un crochet de la somme $T'T'\theta$; on en déduit aussitôt que $\mathbf{T}'$ est cartésien. Le reste de la proposition se démontre en utilisant la commutativité des limites projectives entre elles (produits fibrés) et la commutativité des limites inductives entre elles (sommes). ■

III.2. $\mathfrak{S}$-catégories.

On suppose que $\mathfrak{S}$ est une catégorie munie de produits fibrés finis. Considérons le triple identité $(id_{\mathfrak{S}}, id_{\mathfrak{S}}, id_{\mathfrak{S}})$ sur $\mathfrak{S}$; on le notera simplement $\mathfrak{S}$ dans ce paragraphe. La catégorie $Cat(\mathfrak{S})$ des $\mathfrak{S}$-catégories n'est autre que ce qui est habituellement appelé ainsi dans la littérature (ou «catégorie $\mathfrak{S}$-structurée» dans [Eh]). Les axiomes donnés en I.3 deviennent alors:

(1) $\quad b.\,i = id_e\,, \qquad a.\,i = id_e\,,$

(2) $\quad v_1.\,i_1 = id_\pi\,, \qquad v_2.\,i_1 = i.\,a,$

(3) $\quad v_1.\,i_2 = i.\,b, \qquad v_2.\,i_2 = id_\pi\,,$

(4) $\quad b.\,k = b.\,v_1\,, \qquad a.\,k = a.\,v_2\,,$

(5) $\quad v_1.\,k_1 = k.\,w_1\,, \qquad v_2.\,k_1 = v_2.\,w_2\,,$

(6) $\quad v_1.\,k_2 = v_1.\,w_1, \qquad v_2.\,k_2 = k.\,w_2\,,$

(7) $\quad k.\,i_1 = id_\pi = k.\,i_2\,,$

(8) $\quad k.\,k_1 = k.\,k_2\,,$

où (v_1, v_2) et (w_1, w_2) sont respectivement des produits fibrés de (a, b) et (v_2, v_1). Des remarques analogues peuvent être faites pour $Gr(\mathfrak{S})$, $Ord(\mathfrak{S})$, ... La catégorie $Alg(\mathfrak{S})$ est isomorphe à $\mathfrak{S}$ et la catégorie $Equ(\mathfrak{S})$ définie en I.5 n'est autre que la catégorie des $\mathfrak{S}$-relations d'équivalence.

Le triple identité $\mathfrak{S}$ vérifie, évidemment, les conditions (a) et (b) de II.2; donc il est cartésien. Pour qu'il soit fortement cartésien, il faut et il suffit que $\mathfrak{S}$ vérifie les conditions (c), (d), et par suite (e), de II.1. Dans ce cas, le foncteur d'oubli $Cat(\mathfrak{S}) \to Gr(\mathfrak{S})$ est triplable et le triple **N** qu'on en déduit est fortement cartésien (proposition 20).

Soit Ens la catégorie des ensembles associée à un univers (lequel est identique à $|Ens|$). On notera, en principe, Cat, Gr, ... les catégories respectivement des catégories, des graphes, ... ; ces structures étant définies de manière «locale» (I.1). On a alors des foncteurs injectifs connus:

$$Cat(Ens) \to Cat, \quad Gr(Ens) \to Gr, \ \ldots,$$

qui sont des équivalences de catégories. La convention de disjonction faite à l'axiome 2 de I.1 nous permet d'identifier $Cat(Ens)$ et Cat, $Gr(Ens)$ et Gr, ...; mais, autant qu'il sera utile, le contexte précisera si les notations Cat, Gr, ... se réfèrent aux définitions «locales» ou «globales». De même, les notations Ord et Equ désignent les catégories $Ord(Ens)$ et $Equ(Ens)$. Relativement à un autre univers $|\widehat{Ens}|$, on adopte les notations $\widehat{Cat}$, $\widehat{Gr}$, $\widehat{Ord}$, $\widehat{Equ}$, etc...

Nous allons donner une description du triple fortement cartésien, que nous noterons $\mathbf{N} = (N, I, K)$, déduit du foncteur triplable $Cat \to Gr$; nous le ferons dans la terminologie «locale» et, de plus, d'une façon intrinsèque (i. e. non relative à un univers).

Si $\mathcal{G}$ est un graphe, $N\mathcal{G}$ est le graphe suivant: $|N\mathcal{G}| = |\mathcal{G}|$ et $F: e \to e'$ est un morphisme de $N\mathcal{G}$ si c'est un *chemin de* $\mathcal{G}$, c'est-à-dire s'il existe une suite d'objets $(e_n, \ldots, e_1, e_0)$ de $\mathcal{G}$, où $e_0 = e$ et $e_n = e'$, et une suite de morphismes f_i de $\mathcal{G}$ tels que

$$F = (f_n, \ldots, f_1), \quad \text{où } f_i: e_{i-1} \to e_i \quad (1 \leqslant i \leqslant n).$$

Une telle suite s'appelle encore suite de morphismes «consécutifs». L'entier n s'appelle la *longueur* du chemin et parfois, pour simplifier, ce chemin sera noté seulement F. Remarquons que, si $n = 0$, cette définition implique que $e = e' \,(= e_0)$ et $F = \emptyset$ est la suite vide: on note id_e ce chemin $\emptyset: e \to e$, de longueur nulle.

$$I\mathcal{G}: \mathcal{G} \to N\mathcal{G} \quad \text{et} \quad K\mathcal{G}: NN\mathcal{G} \to N\mathcal{G}$$

sont les morphismes de graphes tels que

$$|I\mathcal{G}| = |K\mathcal{G}| = id_{|\mathcal{G}|}$$

et définis sur les morphismes de la manière suivante: A tout morphisme $f: e \to e'$, $I\mathcal{G}$ associe le chemin $(f): e \to e'$ de longueur 1, noté parfois simplement $f: e \to e'$. A tout chemin $\phi: e \to e'$ de $N\mathcal{G}$, on associe par $K\mathcal{G}$ le chemin $\phi: e \to e'$ de $\mathcal{G}$ obtenu en «effaçant les parenthèses» de ϕ (ou par «juxtaposition»). Autrement dit, si

$$\not{c} = (F_p, \dots, F_1) \quad \text{et} \quad F_i = (f_{i,n_i}, \dots, f_{i,1}) \quad (1 \leqslant i \leqslant p),$$

on a

$$F = (f_{p,n_p}, \dots, f_{p,1}, f_{p-1,n_{p-1}}, \dots, f_{1,1}).$$

La notation de ce triple **N** peut difficilement être confondue avec celle de l'ensemble des entiers positifs ou nuls; si une telle confusion risque de se produire, on peut toujours identifier cet ensemble avec $N\,1$.

On notera parfois par une même lettre une **T**-catégorie et le **T**-graphe sous-jacent; ainsi on note encore $N\mathcal{G}$ la structure de catégorie libre sur le graphe $N\mathcal{G}$ défini par la **N**-algèbre libre $K\mathcal{G}$; on les appelle respectivement, *catégorie* et *graphe des chemins de* $\mathcal{G}$. On appelle **N** le triple *des chemins.*

PROPOSITION III.2.21. *Soit* $\mathbf{T} = (T, I, K)$ *un triple cartésien sur* $\mathcal{E}$ *et soit* $\theta = (b, a, i, k)$ *une* **T***-catégorie sur* $e \in |\mathcal{E}|$*; alors*

$$(Tb,\ Ke.Ta,\ Ti,\ Tk)$$

est une $\mathcal{E}$*-catégorie sur* Te*.*

PREUVE. $(Tb,\ Ke.Ta,\ Ti)$ est un $\mathcal{E}$-graphe pointé, puisque

$$Tb.Ti = Te \quad \text{et} \quad Ke.Ta.Ti = Ke.Ie = Te.$$

Soient (v_1, v_2) et (w_1, w_2) les produits fibrés associés à θ; les morphismes cartésiens de $\mathcal{E}^2$ étant stables par composition, $(Tv_1, K\pi.Tv_2)$ et $(Tw_1, K\pi_2.Tw_2)$ sont les produits fibrés de

$$(Ke.Ta,\ Tb) \quad \text{et de} \quad (K\pi.Tv_2,\ Tv_1).$$

Si on remplace $(b, a, i, k, i_1, i_2, k_1, k_2)$ par

$$(Tb,\ Ke.Ta,\ Ti,\ Tk,\ Ti_1,\ Ti_2,\ Tk_1,\ Tk_2)$$

dans les formules de (1) à (8) ci-dessus, elles restent vraies. ∎

Cette proposition permet de simplifier très sensiblement, dans la pratique, la description de la **T**-catégorie libre donnée par l'emploi de la proposition III.1.19. Si $\theta = (b, a)$ est un **T**-graphe sur $e \in |\mathcal{E}|$, on notera $\overset{n}{\bigcirc}\theta = (b_n, a_n)$, et on appellera **T**-*graphe des chemins de longueur* $n \geqslant 0$, le **T**-graphe obtenu en utilisant la «première loi» de $Sp(\mathbf{T})$ (II.2); on notera π_n l'objet de ses morphismes.

SCOLIE. *Si* **T** *est un triple fortement cartésien, la* **T**-*catégorie libre* $\hat{\theta} = (\hat{b}, \hat{a}, \hat{i}, \hat{k})$ *engendrée par un* **T**-*graphe* $\theta = (b, a)$ *sur* $e \in |\mathcal{E}|$ *a même objet* e *des objets que* θ. *L'objet* $\hat{\pi}$ *des morphismes de* $\hat{\theta}$ *est la somme des objets* π_n $(n \in \mathbf{N})$ *que nous décrirons par récurrence:* $\pi_0 = e$, $\pi_1 = \pi$ *et* π_n, *pour* $n \geq 2$, *est la source du produit fibré*

$$\begin{tikzcd} \pi'_{n-1} \arrow[d, "b'_{n-1}"'] & \pi_n \arrow[l] \arrow[d] \\ Te & \pi \arrow[l, "a"'] \end{tikzcd}$$

où $\theta' = (b', a')$ *est le* $\mathcal{E}$-*graphe sur* Te *tel que* $b' = Tb$, $a' = Ke.Ta$ *et où* π'_{n-1} *est l'objet des morphismes du* $\mathcal{E}$-*graphe* $\overset{n}{\bigcirc}\theta' = (b'_n, a'_n)$.

Nous allons étudier maintenant une autre propriété remarquable des triples cartésiens. On a déjà remarqué que, pour tout triple $\mathbf{T} = (T, I, K)$ sur $\mathcal{E}$, on a un morphisme de triples $\mathbf{I} = (id_{\mathcal{E}}, I): \mathbf{T} \to \mathcal{E}$; il en résulte (proposition I.5.7) la formation d'un diagramme commutatif:

$$\begin{tikzcd} Cat(\mathbf{T}) \arrow[r] \arrow[d] & Gr(\mathbf{T}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{E} \arrow[d] \\ Cat(\mathcal{E}) \arrow[r] & Gr(\mathcal{E}) \arrow[r] & \mathcal{E} \end{tikzcd}$$

i.e. toute **T**-catégorie θ sur e «induit» une $\mathcal{E}$-catégorie sur e dont le $\mathcal{E}$-graphe sous-jacent est «induit» par le **T**-graphe sous-jacent à θ. Nous allons montrer que, si **T** est cartésien, inversement, à toute $\mathcal{E}$-catégorie on associe une **T**-catégorie. En fait, nous prouverons une propriété plus générale. Soit $\mathbf{T} = (T, I, K)$ et $\mathbf{T}' = (T', I', K')$ deux triples sur $\mathcal{E}$; un morphisme **M** de triples de la forme $(id_{\mathcal{E}}, m): \mathbf{T}' \to \mathbf{T}$ est défini par une transformation naturelle $m: T \to T'$ telle que

$$m.I = I' \quad \text{et} \quad m.K = K'.mm, \quad \text{où} \quad mm = mT'.Tm = T'm.mT$$

(I.2). On dit que **M** est *cartésien* si **T** et **T**' sont cartésiens et si m est cartésienne.

PROPOSITION III.2.22. *Si* **M** *est cartésien, les foncteurs* $Cat(\mathbf{M})$ *et*

$Gr(\mathbf{M})$ (proposition I.5.7) admettent des adjoints qui commutent avec les foncteurs d'oubli habituels: à toute $\mathbf{T}$-catégorie $\theta = (b, a, i, k)$ est associée une $\mathbf{T}'$-catégorie de la forme $\theta' = (b, a', i, k)$, où $a' = me.a$.

PREUVE. Nous allons d'abord construire un adjoint

$$Gr'(\mathbf{M}): Gr(\mathbf{T}) \to Gr(\mathbf{T}')$$

au foncteur $Gr(\mathbf{M}): Gr(\mathbf{T}') \to Gr(\mathbf{T})$. Soit $\sigma = (b, a)$ un $\mathbf{T}$-graphe sur $e \in |\mathcal{E}|$. Posons $a' = me.a$; alors $\sigma' = (b, a')$ est un $\mathbf{T}'$-graphe et son image par $Gr(\mathbf{M})$ est un $\mathbf{T}$-graphe de la forme $\hat{\sigma} = (\hat{b}, \hat{a})$, où $(m', \hat{a})$ est le produit fibré canonique de (a', me) et où $\hat{b} = b.m'$. On a un crochet j caractérisé par

$$m'.j = id_\pi \quad \text{et} \quad \hat{a}.j = a$$

et, donc, un morphisme $(id_e, j); \sigma \to \hat{\sigma}$ de $\mathbf{T}$-graphes; montrons que c'est un morphisme d'adjonction qui fait de σ' le $\mathbf{T}'$-graphe libre engendré par σ, relativement au foncteur $Gr(\mathbf{M})$, ce qui - classiquement - fournira la construction du foncteur $Gr'(\mathbf{M})$ cherché. Soit $(f_0, f): \sigma \to \hat{\sigma}_1$ un morphisme de $\mathbf{T}$-graphes, où $\hat{\sigma}_1 = (\hat{b}_1, \hat{a}_1)$ est l'image par $Gr(\mathbf{M})$ d'un $\mathbf{T}'$-graphe $\sigma_1 = (b'_1, a'_1)$, c'est-à-dire où $\hat{b}_1 = b'_1.m''$, si $(m'', \hat{a}_1)$ est le produit fibré canonique de (a'_1, me_1). On vérifie aussitôt que

$$(f_0, f'): \sigma \to \sigma'_1, \quad \text{où} \quad f' = m''.f,$$

est un morphisme de $\mathbf{T}'$-graphes et, si $(f_0, \hat{f}): \hat{\sigma} \to \hat{\sigma}_1$ est son image par $Gr(\mathbf{M})$, on constate sans peine que $\hat{f}.j = f$ dans $\mathcal{E}$ et donc

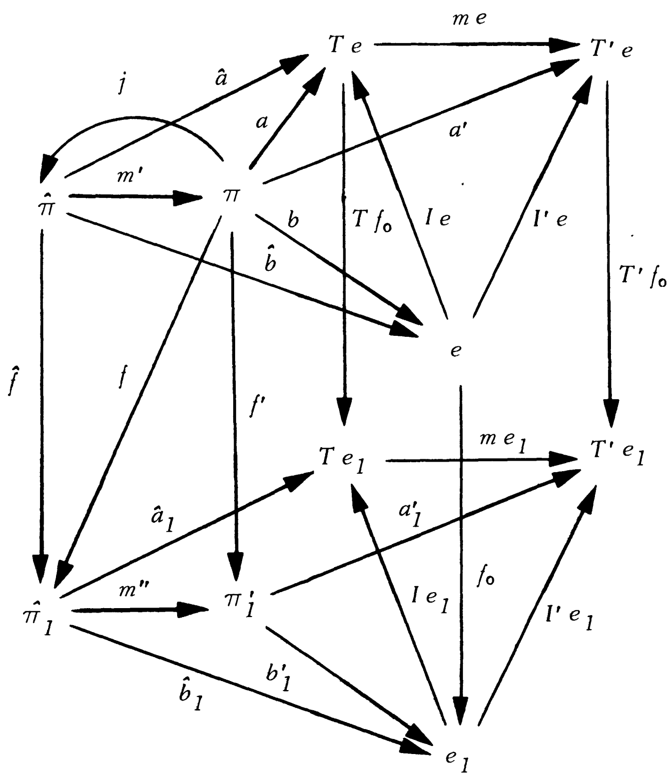
$$(f_0, \hat{f}).(id_e, m') = (f_0, f) \quad \text{dans} \quad Gr(\mathbf{T}),$$

comme on peut le voir en utilisant le produit fibré $(m'', \hat{a}_1)$ de (a'_1, me_1). L'unicité du morphisme f' de $\mathcal{E}$ est assurée, puisqu'on a

$$f' = f'.m'.j = m''.\hat{f}.j = m''.f$$

et que $Gr(\mathbf{M})$ est fidèle.

Considérons maintenant une $\mathbf{T}$-catégorie $\theta = (b, a, i, k)$ sur e et posons, comme ci-dessus, $\sigma = (b, a)$. Si (v_1, v_2) et (w_1, w_2) sont les produits fibrés canoniques respectivement de (a, Tb) et de (v_2, Tv_1), alors $(v_1, m\pi.v_2)$ et $(w_1, m\pi_2.w_2)$ sont des produits fibrés respectivement de $(a', T'b)$ et $(m\pi \cdot v_2, T'v_1)$, puisque m est cartésienne par hypothèse. Pour vérifier que $\theta' = (b, a', i, k)$, où $a' = me.a$, est une **T**'-catégorie, il reste à vérifier que les morphismes i_1, i_2, k_1, k_2 caractérisés par les relations (2), (3), (5) et (6) de I.3 satisfaites pour θ, sont



aussi caractéristiques pour θ', ce qui ne pose aucun problème. Nous pouvons alors constater que, si $\hat{\theta}_1 = (\hat{b}_1, \hat{a}_1, \hat{i}_1, \hat{k}_1)$ est une **T**-catégorie image par $Cat(\mathbf{M})$ d'une **T**'-catégorie

$$\theta'_1 = (b'_1, a'_1, i'_1, k'_1) \quad \text{et} \quad (f_0, f): \theta \to \hat{\theta}_1$$

un morphisme de **T**-catégories, la construction précédente, dont on reprend les notations, peut être utilisée pour montrer que θ' est la **T**'-catégorie libre cherchée. Il suffit de remarquer que $(f_0, f'): \theta' \to \theta'_1$ est un morphisme de **T**'-catégories, c'est-à-dire, par exemple, que $i'_1 . f_0 = f'. i$, ce qui est conséquence de l'égalité $\hat{i}_1 . f_0 = f . i$. On peut ainsi construire un adjoint $Cat'(\mathbf{M})$ du foncteur $Cat(\mathbf{M})$. ■

COROLLAIRE. *Pour tout triple cartésien* $\mathbf{T}$ *sur* $\mathcal{E}$ *on a un foncteur section du foncteur* $Cat(\mathbf{I})$ *qui est en même temps un adjoint: à toute* $\mathcal{E}$*-catégorie* $\theta = (b, a, i, k)$ *il associe une* $\mathbf{T}$*-catégorie* $\theta' = (b, Ie.a, i, k)$.

PREUVE. Si dans la proposition précédente on suppose de plus que m est un monomorphisme, on constate que les adjoints des foncteurs $Cat(\mathbf{M})$ et $Gr(\mathbf{M})$ deviennent des sections de ces foncteurs, car $(m', \hat{a}) = (id_{\pi}, a)$ dans ce cas. Or, si I est cartésienne, (Ie, Ie) est un produit fibré de (ITe, TIe), donc Ie est un monomorphisme, puisque par exemple la relation $Ke . ITe = Te$ montre que ITe est un monomorphisme. ■

III.3. Multicatégories.

(Nous appellerons ainsi les $\mathbf{N}$-catégories dans leur version «locale» - voir plus loin.)

Le triple identité sur *Ens* est fortement cartésien: par suite, d'après la proposition III.1.20, il en est de même du triple $\mathbf{N}$ des chemins (III.2). De plus, le foncteur d'oubli $Gr \to Ens$ définit un morphisme de triples $\mathbf{N} \to Ens$ (en notant aussi *Ens* le triple identité sur *Ens*), d'où, d'après la proposition I.5.7, un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} Cat(\mathbf{N}) \arrow[r] \arrow[d] & Gr(\mathbf{N}) \arrow[r] \arrow[d] & Gr \arrow[d] \\ Cat \arrow[r] & Gr \arrow[r] & Ens \end{tikzcd}$$

dans lequel les foncteurs horizontaux sont triplables et les foncteurs verticaux commutent avec les adjoints et avec les fibrations définies dans la proposition I.5.6. Les adjoints (des foncteurs horizontaux) présentent également les mêmes phénomènes de fibrations. Tout ceci apparaîtra clairement dans la construction du *triple des arbres*, noté $\mathbf{N}' = (N', I', K')$, qui est le triple sur $Gr(\mathbf{N})$ déduit du foncteur triplable $Cat(\mathbf{N}) \to Gr(\mathbf{N})$. Nous utiliserons le scolie (III.2) dans cette construction.

Soit $\mathfrak{A}^\circ = (b^\circ, a^\circ)$ un graphe. Un $\mathbf{N}$-graphe $\mathfrak{A} = (b, a)$ sur $\mathfrak{A}^\circ$ est donné par un diagramme dans Gr:

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] N\mathfrak{A}^{\circ} & \\ & \pi \arrow[ul, "a"'] \arrow[dl, "b"] \\ \mathfrak{A}^{\circ} & \end{tikzcd}$$

Il se projette par le foncteur d'oubli $Gr \to Ens$ sur un graphe qui sera noté $\mathfrak{A}^{\cdot} = (b^{\cdot}, a^{\cdot})$, en posant

$$b^{\cdot} = |b|, \quad a^{\cdot} = |a|, \quad |\mathfrak{A}| = |\mathfrak{A}^{\circ}| = |\mathfrak{A}^{\cdot}|$$

$$\begin{tikzcd} |\mathfrak{A}| & |\pi| \arrow[l, bend right, "a^{\cdot}"'] \arrow[l, bend left, "b^{\cdot}"] \end{tikzcd}$$

et cet ensemble sera appelé *ensemble des objets de* $\mathfrak{A}$. Les morphismes de $\mathfrak{A}^{\cdot}$ et de $\mathfrak{A}^{\circ}$ sont respectivement appelés les *morphismes* et les *nœuds* (ou flèches, ou promorphismes) de $\mathfrak{A}$. Les objets du graphe $\pi = (b_{\pi}, a_{\pi})$ ne sont autres que les morphismes de $\mathfrak{A}$ et ses morphismes sont appelés les *branches* (ou multimorphismes) de $\mathfrak{A}$. On dit que $\alpha : F \to G$ est un *arbre de hauteur* $q \geqslant 1$ si

$$F = (f_1, \dots, f_q) \quad \text{et} \quad G = (g_1, \dots, g_q)$$

sont des chemins de longueur q de $\mathfrak{A}^{\cdot}$ et si $\alpha = (\beta, \gamma_2, \dots, \gamma_q)$ est une suite, où $\beta : f_1 \to g_1$ est une branche de $\mathfrak{A}$, qu'on appelle le *tronc* de l'arbre α, et où $\gamma_h : f_h \to g_h$, pour tout $2 \leqslant h \leqslant q$, est un chemin de π, de sorte que, pour tout $2 \leqslant h \leqslant q-1$, on ait

$$K\mathfrak{A}^{\circ}(N a(\gamma_h)) = N b(\gamma_{h+1}) \quad \text{et de plus} \quad a(\beta) = N b(\gamma_1).$$

On prolonge cette définition, pour $q = 0$, de la manière suivante: à tout nœud $j : e \to e'$ de $\mathfrak{A}$, on associe un arbre de hauteur nulle, qu'on note $id^j : id_e \to id_{e'}$, où id_e et $id_{e'}$ sont des chemins de longueur nulle.

Les arbres forment donc les morphismes d'un graphe $\hat{\pi} = (b_{\hat{\pi}}, a_{\hat{\pi}})$ dont les objets sont les chemins de $\mathfrak{A}^{\cdot}$ et on a un morphisme $I' : \pi \to \hat{\pi}$ de Gr, qui laisse invariants les objets et transforme les branches de $\mathfrak{A}$ en arbres qui se réduisent à leur tronc: on identifie ainsi les branches à des arbres particuliers. On a donc, dans Gr, un diagramme commutatif:

$$\begin{tikzcd}
N\mathfrak{A}^\circ & & \\
& \pi \arrow[ul, "a"'] \arrow[dl, "b"] \arrow[r, "l'"] & \hat{\pi} \arrow[ull, bend right, "\hat{a}"'] \arrow[dll, bend left, "\hat{b}"] \\
\mathfrak{A}^\circ & &
\end{tikzcd}$$

qui se projette dans *Ens* sur un diagramme

$$\begin{tikzcd}
{|\mathfrak{A}|} & {|\pi|} \arrow[l, bend right, "\dot{a}"'] \arrow[l, bend left, "\dot{b}"] \arrow[r, "{|l'|}"] & {|\hat{\pi}|} \arrow[ll, bend right=40, "{|\hat{a}|}"'] \arrow[ll, bend left=40, "{|\hat{b}|}"]
\end{tikzcd}$$

qui représente le morphisme d'adjonction $I\mathfrak{A}^\cdot : \mathfrak{A}^\cdot \to N\mathfrak{A}^\cdot$ dans Gr. Notons $N'\mathfrak{A}$ le **N**-graphe $(\hat{b}, \hat{a})$ ainsi obtenu:

$$\begin{cases}
\hat{b}(\beta, \gamma_2, \dots, \gamma_q) = b(\beta) \quad \text{et} \quad \hat{a}(\beta, \gamma_2, \dots, \gamma_q) = K\mathfrak{A}^\circ(N\,a(\gamma_q)) \\
\text{pour tout arbre de hauteur } q \geqslant 2, \text{ noté en abrégé } (\beta, \gamma_2, \dots, \gamma_q); \\
\hat{b}(\beta) = b(\beta), \quad \hat{a}(\beta) = a(\beta) \quad \text{pour tout arbre de hauteur } 1; \\
\hat{b}(id^j) = j = \hat{a}(id^j) \quad \text{pour tout noeud } j \text{ de } \mathfrak{A}.
\end{cases}$$

Nous reconnaissons là la construction du **N**-graphe sous-jacent à la **N**-catégorie libre engendrée par le **N**-graphe $\mathfrak{A}$, en suivant la méthode du scolie de la proposition III.2.21. Ce que nous avons appelé «arbre» ne mérite guère ce nom mais plutôt celui de «fagot»: c'est le scolie qui nous a permis de débiter en morceaux les morphismes, assez compliqués à décrire, du graphe qui est l'objet des morphismes du **N**-graphe des chemins de longueur $q \geqslant 0$ de $\mathfrak{A}$ (voir III.2); de tels morphismes seraient surtout difficiles à manier, comme on peut s'en rendre compte en essayant de refaire la description ci-dessous de la **N**-catégorie libre $(\hat{b}, \hat{a}, \hat{\iota}, \hat{k})$ engendrée par (b, a) en utilisant une définition plus directe des arbres (par exemple: vérification de l'associativité de la composition des arbres).

Pour tout noeud $j: e \to e'$ de $\mathfrak{A}$ (les noeuds de $\mathfrak{A}$ sont les mêmes que ceux de $N'\mathfrak{A}$), on a défini un arbre de hauteur nulle $id^j: id_e \to id_e$; on définit par cette correspondance le morphisme $\hat{\iota}: \mathfrak{A}^\circ \to \hat{\pi}$ de Gr. Le morphisme $\hat{k}: \hat{\pi}_2 \to \hat{\pi}$ laisse invariants les objets et transforme un arbre

$$(\alpha, (\alpha_1, \dots, \alpha_n)) : (F, F') \to (G, G')$$

de $N'\mathfrak{A} = (\hat{b}, \hat{a})$ de hauteur 2 en un arbre de $\mathfrak{A}$ qu'on notera

$$\alpha.(\alpha_1, \dots, \alpha_n) : F.F' \to G.G',$$

où $\alpha.(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ est appelé *composé de* $(\alpha, (\alpha_1, \dots, \alpha_n))$ et est l'arbre de $\mathfrak{A}$ défini par $(\beta, \gamma_1, \dots, \gamma_{q+q'})$ si

$$\alpha = (\beta, \gamma_1, \dots, \gamma_q) \quad \text{et} \quad \alpha_i = (\beta_i, \gamma_{i1}, \dots, \gamma_{iq'})$$

pour $1 \leqslant i \leqslant q'$ (où q' est la hauteur commune des arbres α_i) lorsque $q \geqslant 1$ et $q' \geqslant 1$. (Il est facile de préciser la composition avec les arbres de hauteur nulle en tenant compte des conditions de neutralité.) Il est inutile de vérifier que le quadruplet $(\hat{b}, \hat{a}, \hat{\imath}, \hat{k})$, qu'on vient de définir, est une **N**-catégorie; nous n'avons fait qu'appliquer les propositions générales de III.1 et donner une description à l'aide du scolie. Nous laissons au lecteur le soin de préciser la construction de $K'\mathfrak{A}$ (qui serait vraiment impraticable sans le scolie).

Cette description va nous servir dans la définition «locale» qui suit, en l'appliquant à un cas particulier (ce phénomène est en réalité très général. Par exemple la définition «locale» d'une catégorie $\mathcal{C}$ en I.1 utilise tacitement une catégorie sous la version «globale»: le «groupoïde des couples» $|\mathcal{C}| \times |\mathcal{C}|$ qui joue le même rôle que, ci-dessous, la «multicatégorie des n-enveloppes ($n \in \mathbf{N}$)»). Nous admettrons ensuite comme évident l'équivalence des définitions «locales» et «globales».

Une *multicatégorie* est un quintuplet $\mathfrak{A} = (\mathfrak{A}^\circ, \mathfrak{A}^\cdot, Hom_{\mathfrak{A}}, \iota, \kappa)$ vérifiant les conditions 1 à 6 ci-dessous:

1° $\mathfrak{A}^o$ et $\mathfrak{A}^\cdot$ sont deux graphes tels que $|\mathfrak{A}^\circ| = |\mathfrak{A}^\cdot|$ (on supposera, pour simplifier les notations, qu'ils n'ont pas de morphisme en commun). On dit que

$$(j, (j_1, \dots, j_n)) : f \to f'$$

est une *enveloppe de* $\mathfrak{A}$ (ou simplement de $(\mathfrak{A}^\circ, \mathfrak{A}^\cdot)$), si $f : \bar{e} \to e$ et $f' : \bar{e}' \to e'$ sont des morphismes de $\mathfrak{A}^\cdot$ et si $j_i : e_{i-1} \to e_i$, pour $1 \leqslant i \leqslant n$, sont des morphismes de $\mathfrak{A}^\circ$ tels que $e_0 = e$, $e_n = e'$. On notera aussi par $(f', (j, (j_1, \ldots, j_n)), f)$ l'enveloppe précédente. On notera par $\square\mathcal{A}$ l'ensemble des enveloppes de $\mathcal{A}$.

$$\begin{tikzcd}
\bar{e}' \arrow[d, "f'"'] & e_{n-1} \cdots\cdots e_1 \arrow[l, "j_n"'] & \bar{e} \arrow[l, "j_1"'] \arrow[d, "f"] \\
e' & & e \arrow[ll, "j"']
\end{tikzcd}$$

On définit un $\mathbf{N}$-graphe (b, a) sur $\mathcal{A}^\circ$, de façon évidente, ayant $\square\mathcal{A}$ pour objet des morphismes, en associant à l'enveloppe précédente j et $(j_1, \ldots, j_n)$ comme source et but respectivement. On désignera par $\boxminus\mathcal{A}$ l'objet des morphismes du $\mathbf{N}$-graphe libre $N(b, a)$. $\boxminus\mathcal{A}$ est un graphe; ses morphismes sont des arbres de (b, a); une n-enveloppe sera un arbre de hauteur n de (b, a).

2° $Hom_{\mathcal{A}}$ est une famille d'ensembles indexée par $\square\mathcal{A}$. La relation

$$\alpha \in Hom_{\mathcal{A}}(f', (j, (j_1, \ldots, j_n)), f)$$

s'écrit encore: $\alpha : (j_1, \ldots, j_n) \to j : f \to f'$ est un multimorphisme (ou une branche) de $\mathcal{A}$.

3° ι est une famille d'applications, indexée par l'ensemble des morphismes de $\mathcal{A}^\circ$, de la forme: $\{\emptyset\} \to Hom(id^j)$ pour tout morphisme $j : e \to e'$ de $\mathcal{A}^\circ$, où id^j est l'enveloppe $(id_{e'}, (j, j), id_e)$. On notera encore par id^j, malgré les risques de confusion, l'image de $\emptyset$ par $\iota(j)$.

4° κ est une famille d'applications, indexée par l'ensemble des 2-enveloppes de $\mathcal{A}$, de la forme:

$$Hom_{\mathcal{A}}(E) \times Hom_{\mathcal{A}}(E_1, \ldots, E_n) \to Hom_{\mathcal{A}}(E, (E_1, \ldots, E_n)),$$

où $(E, (E_1, \ldots, E_n))$ est une 2-enveloppe de $\mathcal{A}$ et où on a posé:

$$Hom_{\mathcal{A}}(E_1, \ldots, E_n) = Hom_{\mathcal{A}}(E_1) \times \ldots \times Hom_{\mathcal{A}}(E_n).$$

L'image d'un élément $(\alpha, (\alpha_1, \ldots, \alpha_n))$ par cette application s'appellera *composé de* $(\alpha, (\alpha_1, \ldots, \alpha_n))$ dans $\mathcal{A}$, et se notera $\alpha.(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.

5° (Neutralité) Pour tout morphisme $\alpha : (j_1, \ldots, j_n) \to j : f \to f'$ de $\mathcal{A}$, on a:

$$id^j . \alpha = \alpha = \alpha . (id^{j_1}, \ldots, id^{j_n}).$$

6° (Associativité) Soit

$$(E,(E_1,\dots,E_n)) \quad \text{et} \quad (E_i,(E_{i1},\dots,E_{ip_i})),$$

pour $1 \leqslant i \leqslant n$, des 2-enveloppes de $\mathfrak{A}$; si

$$\alpha \in Hom_{\mathfrak{A}}(E), \quad \beta_i \in Hom_{\mathfrak{A}}(E_i) \quad \text{et} \quad \gamma_{ik} \in Hom_{\mathfrak{A}}(E_{ik})$$

pour $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant k \leqslant p_i$, on a la formule:

$$\alpha.(\beta_1.(\gamma_{11},\dots,\gamma_{1p_1}),\dots,\beta_n.(\gamma_{n1},\dots,\gamma_{np_n})) =$$
$$(\alpha.(\beta_1,\dots,\beta_n)).(\gamma_{11},\dots,\gamma_{1p_1},\gamma_{21},\dots,\gamma_{2p_2},\dots,\gamma_{n1},\dots,\gamma_{np_n}).$$

Un triplet $(\mathfrak{A}^\circ, \mathfrak{A}^\bullet, Hom_{\mathfrak{A}})$ vérifiant les conditions 1 et 2 est appelé un *multigraphe.*

Nous allons montrer comment cette structure généralise celle définie par Lambek [La] sous le même nom et qui en détient les idées essentielles. Nous appellerons *multicatégorie de Lambek* un quadruplet $\mathfrak{L} = (\mathfrak{L}^\circ, Hom_{\mathfrak{L}}, id, \perp)$ tel que:

1'° $\mathfrak{L}^\circ$ est un graphe. On dit que $(j,(j_1,\dots,j_n)): e \to e'$ est une *enveloppe de* $\mathfrak{L}$ si $j: e \to e'$ est un morphisme de $\mathfrak{L}^\circ$ si $(j_1,\dots,j_n): e \to e'$ un chemin de $\mathfrak{L}^\circ$; l'entier $n \in \mathbf{N}$ s'appelle la *longueur* de l'enveloppe. On note $\Delta_n\mathfrak{L}$ l'ensemble des enveloppes de longueur n de $\mathfrak{L}$ et $\Delta\mathfrak{L}$ l'ensemble de toutes les enveloppes de $\mathfrak{L}$.

2'° $Hom_{\mathfrak{L}}$ est une famille d'ensembles, indexée par $\Delta\mathfrak{L}$. La relation $\alpha \in Hom_{\mathfrak{L}}(j,(j_1,\dots,j_n))$ s'énonce encore en disant que

$\alpha: (j_1,\dots,j_n) \to j$ est un multimorphisme de $\mathfrak{L}$.

3'° id est une famille qui, à tout morphisme $j: e \to e'$ de $\mathfrak{L}^\circ$, associe un multimorphisme de la forme $id^j: j \to j$.

4'° $\perp = (\perp_n^i \mid 1 \leqslant i,\ n \in \mathbf{N})$, où $\perp_n^i$ est une famille d'applications, indexée par l'ensemble des couples d'enveloppes (E, E'), tels que, si

$$E = (j,(j_1,\dots,j_n)) \quad \text{et} \quad E' = (j',(j'_1,\dots,j'_{n'})),$$

on ait $j_i = j'$ (donc $n \geqslant 1$), ces applications étant de la forme

$$\perp_n^i(E',E): Hom_{\mathfrak{L}}(E) \times Hom_{\mathfrak{L}}(E') \to Hom_{\mathfrak{L}}(E \perp E')$$

en notant

$$E \perp E' = (j,(j_1,\dots,j_{i-1},j'_1,\dots,j'_{n'},j_{i+1},\dots,j_n)).$$

Nous constatons ici encore que la définition «locale» d'une structure utilise la définition préalable d'une structure particulière - la loi $\perp$ sur les enveloppes - ce qui, dans le travail de Lambek, n'apparaît pas grâce à un abus de langage judicieux qui lui fait noter par un même symbole $\perp$ toutes les lois de composition $\perp^i_n$, ce que nous faisons nous-mêmes en employant la notations $E \perp E'$, et ce que nous ferons dans la suite de ce texte, même pour $\mathfrak{L}$. Donc, nous posons abusivement $\perp = \perp^i_n(E, E')$.

5'° On a

$$id^j \perp \alpha = \alpha = \alpha \perp id^{j_i}$$

pour tout multimorphisme $\alpha : (j_1, \dots, j_n) \to j$ et tout entier $1 \leqslant i \leqslant n$.

6'° On a $\alpha \perp (\beta \perp \gamma) = (\alpha \perp \beta) \perp \gamma$ pour tout triplet de multimorphismes (α, β, γ) de la forme

$$\begin{aligned} &\alpha : (j_1, \dots, j_n) \to j, \\ &\beta : (j'_1, \dots, j'_{n'}) \to j_i, \quad \text{où} \quad 1 \leqslant i \leqslant n-1, \\ &\gamma : (j''_1, \dots, j''_{n''}) \to j'_{i'}, \quad \text{où} \quad 1 \leqslant i' \leqslant n'-1. \end{aligned}$$

7'° On a $(\alpha \perp \beta) \perp \beta' = (\alpha \perp \beta') \perp \beta$ pour tout triplet de multimorphismes (α, β, β') de la forme

$$\begin{aligned} &\alpha : (j_1, \dots, j_n) \to j, \\ &\beta : (j'_1, \dots, j'_{n'}) \to j_i, \quad \text{où} \quad 1 \leqslant i \leqslant n-1, \\ &\beta' : (j''_1, \dots, j''_{n''}) \to j_{i'}, \quad \text{où} \quad 1 \leqslant i' \leqslant n'-1 \text{ et } i < i'. \end{aligned}$$

PROPOSITION III.3.23. *La donnée d'une multicatégorie de Lambek est équivalente à celle d'une multicatégorie $\mathfrak{A}$ telle que $\mathfrak{A}^{\cdot}$ soit une catégorie dicrète.*

PREUVE. Soit $\mathfrak{L}$ une multicatégorie de Lambek; on lui associe une multicatégorie $\mathfrak{A}$ définie de la manière suivante: $\mathfrak{A}^{\circ} = \mathfrak{L}^{\circ}$, $\mathfrak{A}^{\cdot} = |\mathfrak{L}^{\circ}|$ (en identifiant tout ensemble à une catégorie discrète), $Hom_{\mathfrak{A}} = Hom_{\mathfrak{L}}$, en identifiant de façon évidente les enveloppes de $\mathfrak{L}$ à des enveloppes de $(\mathfrak{A}^{\circ}, \mathfrak{A}^{\cdot})$. Si $(\alpha, (\beta_1, \dots, \beta_n))$ est un arbre de hauteur 2 du multigraphe $(\mathfrak{A}^{\circ}, \mathfrak{A}^{\cdot}, Hom_{\mathfrak{A}})$ ainsi défini, on définit la composition de $\mathfrak{A}$ par:

$$\alpha . (\beta_1, \dots, \beta_n) = \bar{\beta}_n \quad \text{si} \quad \bar{\beta}_0 = \alpha$$

et, par récurrence sur i,

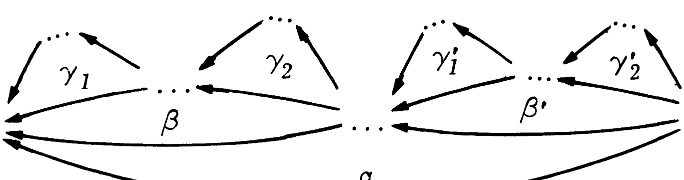
$$\bar{\beta}_{i+1} = \bar{\beta}_i \perp \beta_i \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant i \leqslant n-1.$$

L'axiome 5 est évidemment conséquence de 5'. L'axiome 6 est conséquence des axiomes 6' et 7'. La formule de 6 est difficile à écrire, c'est pourquoi nous la démontrerons seulement dans le cas particulier suivant:

$$\alpha.(\beta.(\gamma_1, \gamma_2), \beta'.(\gamma'_1, \gamma'_2)) = (\alpha.(\beta, \beta')).(\gamma_1, \gamma_2, \gamma'_1, \gamma'_2);$$

la formule générale et sa démonstration ne seraient différentes, d'ailleurs, que par l'introduction d'une certaine quantité de pointillés, ceux qu'on a indiqués sur la figure ci-dessous.

$$\begin{aligned}
&\alpha.(\beta.(\gamma_1, \gamma_2), \beta'.(\gamma'_1, \gamma'_2)) = \text{(par définition)}\\
&(\alpha \perp ((\beta \perp \gamma_1) \perp \gamma_2)) \perp ((\beta' \perp \gamma'_1) \perp \gamma'_2) = \text{(d'après 6')}\\
&((\alpha \perp ((\beta \perp \gamma_1) \perp \gamma_2)) \perp (\beta' \perp \gamma'_1)) \perp \gamma'_2 = \text{(d'après 6')}\\
&(((\alpha \perp ((\beta \perp \gamma_1) \perp \gamma_2)) \perp \beta') \perp \gamma'_1) \perp \gamma'_2 = \text{(d'après 7')}\\
&(((\alpha \perp \beta') \perp ((\beta \perp \gamma_1) \perp \gamma_2)) \perp \gamma'_1) \perp \gamma'_2 = \text{(d'après 6')}\\
&((((\alpha \perp \beta') \perp (\beta \perp \gamma_1)) \perp \gamma_2) \perp \gamma'_1) \perp \gamma'_2 = \text{(d'après 6')}\\
&(((((\alpha \perp \beta') \perp \beta) \perp \gamma_1) \perp \gamma_2) \perp \gamma'_1) \perp \gamma'_2 = \text{(d'après 7')}\\
&(((((\alpha \perp \beta) \perp \beta') \perp \gamma_1) \perp \gamma_2) \perp \gamma'_1) \perp \gamma'_2 = \text{(par définition)}\\
&(\alpha.(\beta, \beta')).(\gamma_1, \gamma_2, \gamma'_1, \gamma'_2).
\end{aligned}$$



On a donc défini une multicatégorie $\mathfrak{A}$.

Inversement, soit $\mathfrak{A}$ une multicatégorie telle que $\mathfrak{A}^{\cdot}$ soit une catégorie discrète; on lui associe une multicatégorie de Lambek de la manière suivante: $\mathfrak{L}^{\circ} = \mathfrak{A}^{\circ}$, $Hom_{\mathfrak{L}} = Hom_{\mathfrak{A}}$ et on pose

$$\alpha \perp_n^i \beta = \alpha \perp \beta = \alpha.(id^{j_1}, \ldots, id^{j_{i-1}}, \beta, id^{j_{i+1}}, \ldots, id^{j_n}),$$

si

$$\alpha : (j_1, \ldots, j_n) \to j : id_e \to id_{e'} \quad \text{et} \quad \beta : (j'_1, \ldots, j'_n) \to j_i : id_{\bar{e}} \to id_{\bar{e}'},$$

où $1 \leqslant i \leqslant n$, sont des multimorphismes de $\mathfrak{A}$. Les axiomes 5', 6', 7' sont des conséquences faciles de 5 et 6. On a ainsi défini l'équivalence annoncée. ■

Les «multicatégories» au sens de [La] ne sont autres, aux détails de terminologie près, que les multicatégories de Lambek $\mathcal{L}$, ci-dessus, telles que $|\mathcal{L}| = 1$.

EXEMPLES. 1° Les catégories sont des cas particuliers de multicatégories de Lambek. Si $(j_1, \dots, j_n): e \to e'$ est un chemin de la catégorie $\mathcal{C}$ et si $j: e \to e'$ est un morphisme de $\mathcal{C}$, $Hom_{\mathcal{C}}(j, (j_1, \dots, j_n))$ prend la valeur 1 ou 0 selon que $j = j_1 \cdot j_2 \cdot \dots \cdot j_n$ ou non.

2° Les catégories doubles de [Eh] (qui sont dans la terminologie de III.2 des Cat-catégories) sont des cas particuliers de multicatégories: un multimorphisme $\alpha: (j_1, \dots, j_n) \to j: f \to f'$ consiste en la donnée d'un «morphisme double» α, de bord figuré ci-dessous:

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[d, "f'"'] \arrow[dr, phantom, "\alpha"] & {} \arrow[l, "j_1 \cdot j_2 \cdot \dots \cdot j_n"'] \arrow[d, "f"] \\ {} & {} \arrow[l, "j"] \end{tikzcd}$$

ce qui entraîne des conditions sur les deux sortes de morphismes qui y figurent, et dont la signification est claire.

3° Les pseudo-catégories sont également des cas particuliers de multicatégories de Lambek. Mais nous nous limiterons ici à une conjecture, car il y a un travail délicat à faire sur les «cohérences», ce qui nous conduirait à trop de développement: nous y reviendrons dans un autre travail.

4° Soit $\mathcal{E}$ une catégorie. Nous allons définir une *multicatégorie des spans de* $\mathcal{E}$ qui, du point de vue de l'exemple 3, généralise la pseudo-catégorie des spans de $\mathcal{E}$ définie en II.2. Soit $\mathcal{L}^\circ$ le graphe ayant pour objets ceux de $\mathcal{E}$ et pour morphismes les spans $(b, a): e \to e'$ de $\mathcal{E}$, i.e. les couples de deux morphismes de la forme $b: \pi \to e'$ et $a: \pi \to e$ de $\mathcal{E}$. Soit

$$((b_1, a_1), \dots, (b_n, a_n)): e \to e'$$

un chemin de $\mathcal{L}^\circ$; la donnée d'un multimorphisme revient alors à celle d'un diagramme commutatif de la forme:

$$
\begin{tikzcd}
 & & & \pi \arrow[dll, "f_1"'] \arrow[drr, "f_n"] \arrow[ddlll, bend right, "b"'] \arrow[ddrrr, bend left, "a"] & & & \\
 & \pi_1 \arrow[dl, "b_1"'] \arrow[dr, "a_1"] & & & & \pi_n \arrow[dl, "b_n"'] \arrow[dr, "a_n"] & \\
e' & & \cdot & \cdots\cdots & \cdot & & e
\end{tikzcd}
$$

La suite de la construction de la multicatégorie $\mathfrak{L}$ est alors évidente.

5° Les foncteurs et les «profoncteurs» de Bénabou (relatifs à un univers) forment les morphismes de deux graphes différents sur le même ensemble d'objets, $|Cat|$. Ce sont respectivement le graphe des morphismes et le graphe des noeuds (ou promorphismes) d'une multicatégorie; les multimorphismes de cette multicatégorie correspondent justement à ce qu'on appelle, dans des cas particuliers, des «multimorphismes»; ceci justifie, si besoin était, la terminologie introduite ici.

Les trois premiers exemples nous suggèrent la définition générale suivante: Si $\mathbf{T}$ est un triple quelconque sur une catégorie $\mathcal{E}$ admettant des produits fibrés, on appelle (b, a, i, k, t, d) une **T**-*catégorie prétensorielle* si (b, a, i, k) est une **T**-catégorie sur un objet e et, en adoptant les notations de I.3 (figure 1), si $t: Te \to \pi$ et $d: \pi \to \pi_2$ sont des morphismes de $\mathcal{E}$ vérifiant les axiomes:

$$ (1) \qquad a.t = id_{Te}, $$

$$ (2) \qquad v_2.d = I\pi.t.a, \quad k.d = id_\pi . $$

Les trois premiers exemples sont, de façon évidente, des multicatégories prétensorielles. Nous reviendrons sur ces détails. Noter que toute $\mathcal{E}$-catégorie est prétensorielle de façon triviale.

Nous montrerons plus tard, grâce à la construction de «modèles», que la catégorie $Cat(\mathbf{N})$ est «cartésienne fermée» (i.e. elle admet des produits qui sont des produits tensoriels). Ce résultat est-il vrai pour tout triple cartésien ?

III.4. Catégories d'opérateurs.

On appelle *catégorie d'opérateurs*, ou *action de catégorie*, la donnée d'un triplet $\Phi = (\mathcal{C}, hom_\Phi, \kappa)$ satisfaisant les conditions suivantes:

1° $\mathcal{C}$ est une catégorie.

2° hom_Φ est une famille d'ensembles indexée par $|\mathcal{C}|$.

3° κ est une famille d'applications, indexée par $|\mathcal{C}|^2$, de la forme

$$\kappa(e', e): Hom_{\mathcal{C}}(e', e) \times hom_\Phi(e) \to hom_\Phi(e').$$

On notera par $f.x$ l'image par cette application d'un couple (f, x), où $f: e \to e'$ est un morphisme de $\mathcal{C}$ et $x \in hom_\Phi(e)$. (On suppose quelquefois que la famille hom_Φ prend des valeurs disjointes entre elles, disjointes des valeurs prises par $Hom_{\mathcal{C}}$ *et disjointes* de $|\mathcal{C}|$).

4° Si $e \in |\mathcal{C}|$ et $x \in hom_\Phi(e)$, on a $id_e . x = x$.

5° Si $f: e \to e'$, $g: e' \to e''$ et $x \in hom_\Phi(e)$, on a $g.(f.x) = (g.f).x$.

Cette définition «locale» est visiblement équivalente à celle de préfaisceau d'ensembles.

Si $\Phi' = (\mathcal{C}', hom_{\Phi'}, \kappa')$ est une deuxième catégorie d'opérateurs, un morphisme $\varphi: \Phi \to \Phi'$ est défini par un foncteur $F: \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ et par une famille d'applications hom_φ, indexée par $|\mathcal{C}|$, de la forme

$$hom_\varphi(e): hom_\Phi(e) \to hom_{\Phi'}(\varphi(e))$$

et telle que $\varphi(f.x) = \varphi(f).\varphi(x)$, en écrivant $\varphi(e)$, $\varphi(f)$ et $\varphi(x)$ au lieu de, respectivement, $F(e)$, $F(f)$ et $hom_\varphi(e)(x)$.

La définition «globale» de catégorie d'opérateurs coïncide avec celle de *foncteur coétale* (appelé foncteur d'hypermorphismes dans la terminologie de [Eh] - voir, par exemple, l'«esquisse» de cette structure dans [Bu]). On dit qu'un foncteur $\tilde{\Phi}: \overline{\mathcal{C}} \to \mathcal{C}$ est coétale si, pour tout $\overline{e} \in |\overline{\mathcal{C}}|$ et tout morphisme de $\mathcal{C}$ de la forme $f: \tilde{\Phi}(\overline{e}) \to e'$, il existe un et un seul morphisme de $\mathcal{C}$ de la forme $\overline{f}: \overline{e} \to \overline{e}'$ tel que $\tilde{\Phi}(\overline{f}) = f$. Plus généralement, supposons que $\mathcal{E}$ soit une catégorie admettant des produits fibrés finis; alors on dit qu'un $\mathcal{E}$-foncteur $(f_0, f): (\overline{b}, \overline{a}, \overline{i}, \overline{k}) \to (b, a, i, k)$ est *coétale* si $(f, \overline{a})$ est un produit fibré de (a, f_0) (voir des généralisations de cette notion au chapitre IV). On notera $Op(\mathcal{E})$ la sous-catégorie pleine de $Cat(\mathcal{E})^2$ ayant pour objets les $\mathcal{E}$-foncteurs coétales.

Supposons que $\mathcal{E}$ admette des limites projectives finies et des limites inductives finies et soit munie d'un choix canonique de ces limites; en particulier, on a un objet initial et un objet final, qu'on notera respectivement 0 et 1. On notera additivement les sommes finies dans $\mathcal{E}$. De façon évidente, $(\mathcal{E}, 0, +)$ est une catégorie monoïdale dans laquelle on a la monade suivante:

$$0 \xrightarrow{\ \varepsilon\ } 1 \xleftarrow{\ \delta\ } 1+1$$

où ε est déterminé de façon unique et où δ est une «codiagonale» de la somme de $(1, 1)$. Ceci détermine sur $\mathcal{E}$ - selon un procédé généralisable à la donnée d'une monade quelconque - un triple qu'on notera

$$\mathbf{T}_{+1} = (T_{+1}, I, K), \quad \text{où } T_{+1}e = e+1, \quad Ie = e+\varepsilon \text{ et } Ke = e+\delta$$

pour tout $e \in |\mathcal{E}|$, à des isomorphismes près.

PROPOSITION III.4.24. *Si dans $\mathcal{E}$ les sommes finies sont universelles, les catégories $Op(\mathcal{E})$ et $Cat(\mathbf{T}_{+1})$ sont équivalentes.*

PREUVE. Appelons *$\mathcal{E}$-graphe d'opérateurs sur* $e \in |\mathcal{E}|$ la donnée d'un triplet (b, a, f_0), où (b, a) est un $\mathcal{E}$-graphe sur e et $f_0 : \bar{e} \to e$ un morphisme de $\mathcal{E}$ de but e. On va d'abord montrer que la catégorie $Gr(\mathbf{T}_{+1})$ est équivalente à la catégorie ayant pour objets les $\mathcal{E}$-graphes d'opérateurs et dont les morphismes sont déterminés par des triplets

$$(m_0, m, \bar{m}) : (b, a, f_0) \to (b', a', f_0')$$

tels que

$$m_0 . a' = a . m, \quad m_0 . b' = b . m \quad \text{et} \quad m_0 . f_0' = f_0 . \bar{m}.$$

Considérons un morphisme de $\mathcal{E}$ de la forme $a' : \pi' \to e+1$; formons les produits fibrés (I', a) et (j', c) respectivement de (a', Ie) et de (a', j), où $j : 1 \to e+1$ et $Ie : e \to e+1$ sont les injections canoniques de la somme $e+1$. Par hypothèse $j' : \bar{e} \to \pi'$ et $I' : \pi \to \pi'$ forment un système d'injections canoniques d'une somme (non canonique). Inversement la donnée de deux morphismes de la forme $a : \pi \to e$ et $c : \bar{e} \to 1$ (la donnée de ce dernier se résume à celle de $\bar{e}$) permet de construire le morphisme somme $a+c : \pi + \bar{e} \to e+1$, c'est-à-dire a' à un isomorphisme près. Par hypothèse, les sommes dans $\mathcal{E}$ sont cartésiennes (voir lemme de la proposition III.1.20), ce qui entraîne que la donnée de a' équivaut à celle du couple (a, c) de façon évidente.

Maintenant, si (b', a') est un $\mathbf{T}_{+1}$-graphe, sa donnée est équivalente à celle d'un $\mathcal{E}$-graphe d'opérateurs (b, a, f_0), où $b = b'.I'$ et $f_0 = b'.j'$; autrement dit b' est le crochet de (b, f_0) confronté à la somme (I', j'). Il en résulte que $Gr(\mathbf{T}_{+1})$ est équivalente à la catégorie des $\mathcal{E}$-graphes d'opérateurs définie ci-dessus.

Soit (b', a') un $\mathbf{T}_{+1}$-graphe sur e; construisons les morphismes a, c, j, I', j', b, f_0 comme ci-dessus et formons les produits fibrés (v'_1, v'_2), (v_1, v_2) et $(f, \bar{a})$ respectivement de $(a', b'+1)$, (a, b) et (a, f_0) respectivement, de sources respectives π'_2, π_2 et $\bar{\pi}$. Il existe des morphismes $I'' : \pi_2 \to \pi'_2$ et $\bar{I} : \bar{\pi} \to \pi'_2$ caractérisés par les relations:

$$v'_1 . I'' = I' . v_1, \quad v'_2 . I'' = I\pi' . I' . v_2,$$

$$v'_1 . \bar{I} = I' . f \quad \text{et} \quad v'_2 . \bar{I} = I\pi' . j' . \bar{a}.$$

Supposons donnée de plus une «multiplication» sur le $\mathbf{T}_{+1}$-graphe (b', a'), c'est-à-dire un morphisme $k' : \pi'_2 \to \pi'$ tel que

$$b' . k' = b' . v'_1 \quad \text{et} \quad a' . k' = Ke . (a' + 1) . v'_2;$$

on en tire la donnée d'une «multiplication» $k : \pi_2 \to \pi'$ sur le $\mathcal{E}$-graphe (b, a), c'est-à-dire un morphisme k tel que

$$b . k = b . v_1 \quad \text{et} \quad a . k = a . v_2,$$

et la donnée d'un morphisme $\bar{b} : \bar{\pi} \to \bar{e}$ tel que $f_0 . \bar{b} = b . f$. Ces deux morphismes k et $\bar{b}$ apparaissent, en effet, comme crochets de produits fibrés caractérisés par les relations

$$I' . k = k' . I'', \quad a . k = a . v_2, \quad j' . \bar{b} = k' . \bar{I} \quad \text{et} \quad c . \bar{b} = c . \bar{a}$$

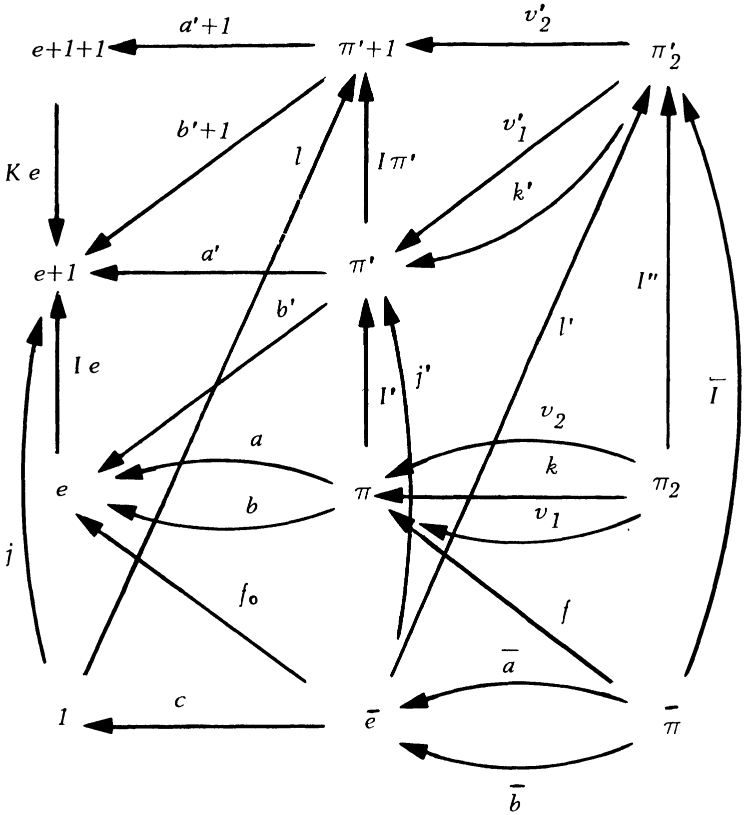
(la dernière relation étant triviale). On notera que la construction de k peut servir à décrire un foncteur, pour lequel $Cat(\mathbf{I})$[†] serait un sous-foncteur, et que $(f_0, f) : (\bar{b}, \bar{a}) \to (b, a)$ est un morphisme de $\mathcal{E}$-graphes. Inversement la donnée de k et $\bar{b}$ vérifiant les conditions ci-dessus, c'est-à-dire

$$b . k = b . v_1, \quad a . k = a . v_2 \quad \text{et} \quad f_0 . \bar{b} = b . f$$

[†] Voir page 55 la définition de $\mathbf{I}$.

permet de construire une multiplication k' sur (b', a'), comme crochet de somme de la manière suivante: Soit $l : 1 \to \pi' + 1$ l'injection canonique de la somme de $(\pi', 1)$; si (j', c) et (v'_1, v'_2) sont des produits fibrés respectivement de (a', j) et de $(a', b' + 1)$, on en déduit la donnée d'un crochet $l' : \bar{e} \to \pi'_2$ tel que

$$v'_1 . l' = j', \quad v'_2 . l' = l . c,$$



et (l', c) est un produit fibré de (v'_2, l). Remarquons encore que $(\bar{l}, \bar{a})$ et (l'', v_2) sont des produits fibrés respectivement de $(v'_2, l\pi' . j')$ et $(v'_2, l\pi' . l')$, de sorte que, par universalité des sommes, les trois morphismes l'', $\bar{l}$ et l' forment le système d'injections canoniques d'une somme de $(\pi_2, \bar{\pi}, \bar{e})$ et k' est le crochet de somme caractérisé par:

$$k' . l'' = l' . k, \quad k' . \bar{l} = j' . \bar{b} \quad \text{et} \quad k' . l' = j' .$$

On montre alors facilement que la donnée de la «multiplication» k' est équivalente à celle de la «multiplication» k et de $\bar{b}$ tel que

$$(f_0, f) : (\bar{b}, \bar{a}) \to (b, a)$$

soit un morphisme de $\mathfrak{S}$-graphes.

Le reste de la démonstration se fait sur ce modèle; nous nous limiterons à indiquer ce qui peut encore être construit à partir de la seule «multiplication» k' sur (b', a'). Soit $(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$ le produit fibré canonique de $(\bar{b}, \bar{a})$ de source $\bar{\pi}_2$; on a un morphisme f_2 caractérisé par

$$v_1 . f_2 = f . \bar{v}_1 \quad \text{et} \quad v_2 . f_2 = f . \bar{v}_2 .$$

Les relations

$$a . k . f_2 = a . v_2 . f_2 = a . f . \bar{v}_2 = f_0 . \bar{a} . \bar{v}_2$$

entraînent l'existence d'un crochet $\bar{k}$ caractérisé par

$$f . \bar{k} = k . f_2 \quad \text{et} \quad \bar{a} . \bar{k} = \bar{a} . \bar{v}_2 . \quad \blacksquare$$

On remarquera que $\mathbf{T}_{+1}$ est cartésien mais non fortement cartésien.

III. 5. Hypertopologies.

Nous appelons ainsi les $\mathbf{T}_{\mathfrak{U}}$-catégories, où $\mathbf{T}_{\mathfrak{U}} = (\mathfrak{U}, I, K)$ est le *triple des ultrafiltres* sur *Ens* (défini avec des notations différentes dans [Ma]). Pour tout ensemble E, $\mathfrak{U}E$ est l'ensemble des ultrafiltres sur E.

La structure d'hypertopologie semble totalement inconnue en dehors des deux exemples suivants:

1° $Ord(\mathbf{T}_{\mathfrak{U}})$ est isomorphe à la catégorie des topologies d'après [Ba] et la proposition I.4.4. (Nous en avons donné une autre démonstration inspirée par le travail de [Bu] et rédigée par D. Tanré.)

2° Les hypertopologies dans les ensembles finis ne sont autres que les catégories n'ayant qu'un nombre fini d'objets (ce qui montre en particulier que les topologies finies ne sont autres que des préordres finis).

On peut en déduire de nouveaux exemples triviaux en formant par exemple le produit dans $Cat(\mathbf{T}_{\mathfrak{U}})$ d'un monoïde et d'une topologie. Nous espérons montrer dans un prochain article qu'on peut munir *Top* d'une structure d'hypertopologie ayant une signification analogue à la structure de 2-catégorie de *Cat*.

$\mathbf{T}_{\mathfrak{U}}$ n'est pas cartésien: En effet, si $\mathbf{T} = (T, I, K)$ est un triple cartésien sur une catégorie $\mathcal{E}$ admettant un objet final 1, il est facile de constater que la relation $T1 = 1$ entraîne que $\mathbf{T}$ est le triple identité sur $\mathcal{E}$ (il suffit même que I soit une transformation naturelle cartésienne).

De plus, $\mathbf{T}_{\mathfrak{U}}$ n'est pas un triple *borné*, c'est-à-dire le foncteur $\mathfrak{U}: Ens \to Ens$ n'est pas borné. Ceci signifie que ce foncteur ne peut pas être obtenu comme limite inductive, indexée par un objet de *Cat*, de foncteurs représentables (définition citée de mémoire, d'après un exposé oral de Bénabou). Par exemple, les triples suivants sur *Ens*:

le triple identité, le triple des chemins et $\mathbf{T}_{+1}$

sont des triples bornés.

IV. T-FONCTEURS

IV.1. Terminologie.

Dans tout ce chapitre, $\mathcal{E}$ désigne une catégorie admettant des produits fibrés finis et un objet final. Ceci entraîne que $\mathcal{E}$ admet des limites projectives finies; on suppose que $\mathcal{E}$ est munie d'un choix de limites projectives finies.

On dit que (b', F, f, b) est un *carré* de $\mathcal{E}$ si $(f, F): b \to b'$ est un morphisme de $\mathcal{E}^2$, c'est-à-dire si b', F, f et b sont des morphismes de $\mathcal{E}$ tels que $b'.F = f.b$. Soit (v_1, v_2) le produit fibré canonique de (b', f); on appelle *indicatrice* de (b', F, f, b) le crochet j rendant le diagramme suivant commutatif:

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[dd, "b'"'] & & \bullet \arrow[ll, "F"'] \arrow[dl, "j"'] \arrow[dd, dash, "b"] \\
& \bullet \arrow[ul, "v_1"] \arrow[dr, "v_2"] & \\
\bullet & & \bullet \arrow[ll, "f"]
\end{tikzcd}$$

Soit $\mathfrak{R}$ une sous-catégorie de $\mathcal{E}$; on dit que $\mathfrak{R}$ est *stabilisée* si elle vérifie les trois propriétés suivantes:

(i) Tout morphisme inversible de $\mathcal{E}$ est un morphisme de $\mathfrak{R}$, ce qui entraîne la relation $|\mathfrak{R}| = |\mathcal{E}|$.

(ii) Si f et f' sont des morphismes de $\mathfrak{R}$ et si f'' est un morphisme de $\mathcal{E}$ tel que $f'.f'' = f$ dans $\mathcal{E}$, alors f'' est un morphisme de $\mathfrak{R}$.

(iii) Si (b', F, f, b) est un carré cartésien de $\mathcal{E}$ et si b' est un morphisme de $\mathfrak{R}$, alors b est aussi un morphisme de $\mathfrak{R}$.

EXEMPLES. 1° $\mathfrak{R}$ a pour morphismes les morphismes inversibles de $\mathcal{E}$.

2° $\mathfrak{R}$ a pour morphismes les monomorphismes de $\mathcal{E}$.

3° $\mathfrak{R}$ a pour morphismes les rétractions de $\mathcal{E}$.

4° $\mathfrak{R} = \mathcal{E}$.

Si $\mathfrak{R}$ est une sous-catégorie de $\mathcal{E}$ et $C = (b', F, f, b)$ un carré de $\mathcal{E}$, on dit que C est un $\mathfrak{R}$-*carré* si F et f sont des morphismes de $\mathfrak{R}$;

on dit que C est un *carré-*$\mathfrak{R}$ si b et b' sont des morphismes de $\mathfrak{R}$ et on dit que C est un *carré* $\mathfrak{R}$*-cartésien* si son indicatrice j est un morphisme de $\mathfrak{R}$. Les $\mathfrak{R}$-carrés et les carrés-$\mathfrak{R}$ définissent toujours des sous-catégories de $\mathcal{E}^2$; la seconde est une sous-catégorie pleine. Si $\mathfrak{R}$ vérifie la propriété (iii), il est immédiat que les carrés $\mathfrak{R}$-cartésiens définissent une sous-catégorie de $\mathcal{E}^2$.

LEMME. *Si* $\mathfrak{R}$ *est une sous-catégorie stabilisée de* $\mathcal{E}$ *et si on a un diagramme commutatif de la forme*

$$\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[d, "b''"'] & \cdot \arrow[l, "F'"'] \arrow[d, "b'"] & \cdot \arrow[l, "F"'] \arrow[d, "b"] \\
\cdot \arrow[d, "\bar{b}''"'] & \cdot \arrow[l, "f'"] \arrow[d, "\bar{b}'"] & \cdot \arrow[l, "f"] \arrow[d, "\bar{b}"] \\
\cdot & \cdot \arrow[l, "\bar{f}'"] & \cdot \arrow[l, "\bar{f}"]
\end{tikzcd}$$

tel que les quatre carrés suivants:

(b'', F', f', b'), $(\bar{b}'', f', \bar{f}', \bar{b}')$, $(\bar{b}', f, \bar{f}, \bar{b})$ *et* $(\bar{b}''.b'', F', F, \bar{f}'.\bar{f}, \bar{b}.b)$

soient $\mathfrak{R}$*-cartésiens, alors le cinquième* (b', F, f, b) *l'est aussi.*

PREUVE. Constatons d'abord que les propriétés (ii) et (iii) entraînent la propriété suivante:

(iv) *Si* (C_1, C'_1, C_2, C'_2) *est un carré cartésien de* $\mathcal{E}^2$ *et si* C_1 *et* C_2 *sont des carrés-*$\mathfrak{R}$*, alors* C'_1, C'_2 *et* $C_1 . C'_1$ *sont des carrés-*$\mathfrak{R}$.

C'est un exercice facile sur les indicatrices. Le lemme se démontre alors en utilisant les quatre propriétés (i), (ii), (iii) et (iv). ∎

Soit Λ la catégorie réduite à trois objets, notés 0, 1, $1'$, et deux morphismes, autres que les morphismes identités, notés

$$\beta : 0 \to 1 \quad \text{et} \quad \alpha : 0 \to 1'.$$

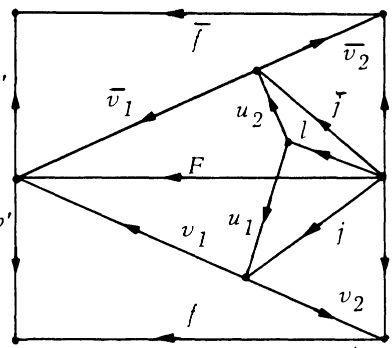
Un objet de $\mathcal{E}^\Lambda$ est identifié à un couple (b, a) de deux morphismes de $\mathcal{E}$ de même source, c'est-à-dire à un span de $\mathcal{E}$. On appelle *indicatrice* de (b, a) le crochet du cône projectif défini par (b, a), i.e. l'unique morphisme c tel que

$$b_0 . c = b \quad \text{et} \quad a_0 . c = a,$$

où (b_0, a_0) est le produit canonique de $(e, \bar{e})$, si $b: \pi \to e$ et $a: \pi \to \bar{e}$. Un morphisme de $\mathfrak{S}^\Lambda$ peut être identifié à un couple $(C, \bar{C})$ de carrés de $\mathfrak{S}$ tels que, si

$$C = (b', F, f, b) \quad \text{et} \quad \bar{C} = (a', \bar{F}, \bar{f}, a),$$

on ait $F = \bar{F}$. On appelle *indicatrice source* et *indicatrice but* de $(C, \bar{C})$ les indicatrices $\bar{j}$ et j, respectivement, des carrés $\bar{C}$ et C. Soit (v_1, v_2) le produit fibré canonique de (b', f) et $(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$ le produit fibré canonique de $(a', \bar{f})$; on appelle *indicatrice centrale de* $(C, \bar{C})$ l'indicatrice du carré $(v_1, j, \bar{v}_1, \bar{j})$. Si (u_1, u_2) est le produit fibré canonique de $(v_1, \bar{v}_1)$ et si l est l'indicatrice centrale, le diagramme suivant est commutatif:



On dit que $(C, \bar{C})$ est un morphisme $\mathfrak{R}$-*induit* de $\mathfrak{S}^\Lambda$ si l est un morphisme de $\mathfrak{R}$.

PROPOSITION IV.1.25. *Si $\mathfrak{R}$ est une sous-catégorie stabilisée de $\mathfrak{S}$, les morphismes de $\mathfrak{S}^\Lambda$ dont l'indicatrice but (resp. source, centrale) est un morphisme de $\mathfrak{R}$ définissent une sous-catégorie stabilisée de $\mathfrak{S}^\Lambda$.*

PREUVE. Dans les cas «source» et «but», c'est une conséquence de ce que les carrés de $\mathfrak{S}$ dont l'indicatrice est dans $\mathfrak{R}$ définissent une sous-catégorie stabilisée de $\mathfrak{S}^{\mathbf{2}}$. Dans le cas «central», c'est une conséquence immédiate du lemme, puisque tout carré cartésien est $\mathfrak{R}$-cartésien, d'après (i). ■

REMARQUE. Les morphismes de la catégorie $\mathfrak{S}^\Lambda$ sont identifiables aux morphismes de la pseudo-catégorie $Sp(\mathcal{E}^2)$. Cette dernière est en réalité une structure «double» qui est un nouvel exemple de multicatégorie (III. 3) qui ne soit pas une multicatégorie de Lambek.

IV.2. **$(\mathbf{T}, \hat{\mathcal{S}})$-foncteurs.**

On suppose la catégorie $\mathcal{E}$ munie d'un triple $\mathbf{T} = (T, I, K)$; soit $\hat{\mathcal{S}}$ une sous-catégorie de $\mathcal{E}^\Lambda$; on en déduit une sous-catégorie $Gr(\mathbf{T})/\hat{\mathcal{S}}$ de $Gr(\mathbf{T})$ et une sous-catégorie $Cat(\mathbf{T})/\hat{\mathcal{S}}$ de $Cat(\mathbf{T})$ en formant les produits fibrés (non nécessairement canoniques) de foncteurs:

$$\begin{tikzcd}
Cat(\mathbf{T}) \arrow[d] & Cat(\mathbf{T})/\hat{\mathcal{S}} \arrow[l] \arrow[d] \\
Gr(\mathbf{T}) \arrow[d] & Gr(\mathbf{T})/\hat{\mathcal{S}} \arrow[l] \arrow[d] \\
\mathcal{E}^\Lambda & \hat{\mathcal{S}} \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

L'étude de sous-catégories de $Cat(\mathbf{T})$ nous amène donc à décrire diverses sous-catégories de $\mathcal{E}^\Lambda$. La nomenclature qui suit n'a rien de systématique; elle correspond aux divers exemples que nous avons en vue. $\mathcal{R}$ désigne dans tout le reste de ce paragraphe une sous-catégorie stabilisée de $\mathcal{E}$.

- $\hat{\mathcal{S}}_1$ est la sous-catégorie pleine de $\mathcal{E}^\Lambda$ ayant pour objets les spans (b, a) dont l'indicatrice est dans $\mathcal{R}$.
- $\hat{\mathcal{S}}_2$ est la sous-catégorie pleine de $\mathcal{E}^\Lambda$ ayant pour objets les spans (b, a) tels que a soit un morphisme de $\mathcal{R}$.

PROPOSITION IV.2.26. *$\hat{\mathcal{S}}_1$ et $\hat{\mathcal{S}}_2$ sont des sous-catégories pleines de $\mathcal{E}^\Lambda$ stables pour les limites projectives finies.*

PREUVE. $\mathcal{E}^\Lambda$ est une catégorie de préfaisceaux: ses limites peuvent se calculer terme à terme. Si 1 est l'objet final canonique de $\mathcal{E}$, (id_1, id_1) est l'objet final de $\mathcal{E}^\Lambda$ et d'après (i) il appartient à $\hat{\mathcal{S}}_1$ et à $\hat{\mathcal{S}}_2$. Il suffit donc de prouver que $\hat{\mathcal{S}}_1$ et $\hat{\mathcal{S}}_2$ sont stables pour les produits fibrés finis. Dans les deux cas, ceci se ramène à montrer que la sous-catégorie pleine des carrés-$\mathcal{R}$ est stable pour les produits fibrés finis (dans le cas de $\hat{\mathcal{S}}_1$, on utilise le fait que les limites projectives commutent entre elles). Ce n'est alors rien d'autre que la propriété (iv). ∎

Il ne semble pas qu'il soit suffisant de supposer que $\mathfrak{R}$ est stabilisée pour obtenir une stabilité par limites projectives non finies.

- $\hat{\mathcal{S}}_3$ est la sous-catégorie de $\mathcal{E}^\Lambda$ définie par les morphismes formés d'un couple $(C, \bar{C})$, où C est un $\mathfrak{R}$-carré. C'est évidemment une sous-catégorie stabilisée de $\mathcal{E}^\Lambda$.
- $\hat{\mathcal{S}}_4$, $\hat{\mathcal{S}}_5$, $\hat{\mathcal{S}}_6$ sont les sous-catégories de $\mathcal{E}^\Lambda$, respectivement définies par les morphismes dont l'indicatrice centrale, but, sourçe, est un morphisme de $\mathfrak{R}$. Les morphismes de $\hat{\mathcal{S}}_5$ et $\hat{\mathcal{S}}_6$ s'appellent respectivement *$\mathfrak{R}$-étales* et *$\mathfrak{R}$-coétales.*

Nous avons déjà montré que $\hat{\mathcal{S}}_4$, $\hat{\mathcal{S}}_5$ et $\hat{\mathcal{S}}_6$ sont des sous-catégories stabilisées de $\mathcal{E}^\Lambda$.

Le foncteur $Gr(\mathbf{T}) \to \mathcal{E}^\Lambda$ est injectif mais, si T n'est pas cartésien, il ne commute pas avec les produits fibrés; il commute cependant avec les objets finals. On dit qu'un foncteur $T : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ est *$\mathfrak{R}$-cartésien* s'il transforme tout carré $\mathfrak{R}$-cartésien en un carré $\mathfrak{R}$-cartésien, i.e. s'il transforme tout carré cartésien en un morphisme $\mathfrak{R}$-cartésien et tout morphisme de $\mathfrak{R}$ en un morphisme de $\mathfrak{R}$.

PROPOSITION IV.2.27. *Si T est $\mathfrak{R}$-cartésien, $Gr(\mathbf{T})/\hat{\mathcal{S}}$, pour $\hat{\mathcal{S}} = \hat{\mathcal{S}}_1$ et $\hat{\mathcal{S}}_2$, est une sous-catégorie pleine de $Gr(\mathbf{T})$ stable pour les limites projectives finies; pour $\hat{\mathcal{S}} = \hat{\mathcal{S}}_3$, $\hat{\mathcal{S}}_4$, $\hat{\mathcal{S}}_5$ et $\hat{\mathcal{S}}_6$, c'est une sous-catégorie stabilisée de $Gr(\mathbf{T})$. On a des résultats analogues en remplaçant $Gr(\mathbf{T})$ par $Cat(\mathbf{T})$.*

PREUVE. Soit L le foncteur injectif $Gr(\mathbf{T}) \to \mathcal{E}^\Lambda$; la construction des limites projectives dans $Gr(\mathbf{T})$ (proposition I.5.5) montre qu'un carré cartésien (C, D, C', D') de $Gr(\mathbf{T})$ est transformé par L en un carré qui est $\hat{\mathcal{S}}$-cartésien, où $\hat{\mathcal{S}} = \hat{\mathcal{S}}_1$ ou $\hat{\mathcal{S}}_2$ suivant que $L(C)$ et $L(D)$ sont des morphismes de $\hat{\mathcal{S}}_1$ ou de $\hat{\mathcal{S}}_2$. Ceci démontre la première partie de la proposition. Si $L(C)$ est un morphisme de $\hat{\mathcal{S}}$, où $\hat{\mathcal{S}}$ est l'une des catégories $\hat{\mathcal{S}}_3$, $\hat{\mathcal{S}}_4$, $\hat{\mathcal{S}}_5$ ou $\hat{\mathcal{S}}_6$, alors $L(D')$ est aussi un morphisme de $\hat{\mathcal{S}}$ d'après la proposition IV.1.25 et

$$(L(C), L(D), L(C'), L(D'))$$

est un carré $\hat{\mathcal{S}}$-cartésien, ce qui démontre (iii) pour $Gr(\mathbf{T})/\hat{\mathcal{S}}$. Le reste de la proposition est conséquence directe de la proposition IV.1.25. ∎

Soit $\hat{\mathcal{S}}_p$ et $\hat{\mathcal{S}}_q$ deux sous-catégories de $\mathcal{E}^\Lambda$, où $1 \leqslant p < q \leqslant 6$; on notera $\hat{\mathcal{S}}_{pq}$ la sous-catégorie de $\mathcal{E}^\Lambda$ ayant pour ensemble d'objets l'ensemble $|\hat{\mathcal{S}}_p| \cap |\hat{\mathcal{S}}_q|$ et pour morphismes les morphismes communs à $\hat{\mathcal{S}}_p$ et $\hat{\mathcal{S}}_q$. On obtient ainsi d'autres catégories $Cat(\mathbf{T})/\hat{\mathcal{S}}$, en prenant $\hat{\mathcal{S}} = \hat{\mathcal{S}}_{pq}$.

EXEMPLES.

Sauf indication ultérieure, on reprend les notations générales du paragraphe précédent. Les égalités de catégories proposées le sont à des équivalences près; elles deviennent des égalités strictes si l'on remplace la condition (i) par la condition plus faible:

(i') $$|\mathcal{E}| = |\mathcal{R}|.$$

Ord($\mathbf{T}$) et *Alg*($\mathbf{T}$) sont des catégories de la forme $Cat(\mathbf{T})/\hat{\mathcal{S}}$; elles correspondent respectivement au cas où $\hat{\mathcal{S}} = \hat{\mathcal{S}}_1$ et où $\mathcal{R}$ est la sous-catégorie de $\mathcal{E}$ formée des monomorphismes et au cas où $\hat{\mathcal{S}} = \hat{\mathcal{S}}_2$ et où $\mathcal{R}$ est formé des inversibles.

Un objet de $Cat(\mathbf{T})/\hat{\mathcal{S}}_2$, lorsque $\mathcal{R}$ est la sous-catégorie de $\mathcal{E}$ formée des monomorphismes (resp. des rétractions) s'appelle une **T**-*catégorie séparée* (resp. une **T**-*catégorie quasi-compacte*). Une **T**-catégorie séparée est toujours un **T**-préordre. Cette terminologie est suggérée par l'exemple suivant: Si $\mathcal{E} = Ens$ et si $\mathbf{T}$ est le triple $\mathbf{T}_{\mathfrak{U}}$ des ultrafiltres (voir III.5), un $\mathbf{T}_{\mathfrak{U}}$-préordre séparé et un $\mathbf{T}_{\mathfrak{U}}$-préordre quasi-compact se réduisent, respectivement, à une topologie séparée et à une topologie quasi-compacte.

On dit qu'un **T**-foncteur est, respectivement, *ouvert* ou *propre* si c'est un morphisme de $Cat(\mathbf{T})/\hat{\mathcal{S}}$ pour $\hat{\mathcal{S}} = \hat{\mathcal{S}}_5$ ou $\hat{\mathcal{S}}_6$ et si $\mathcal{R}$ est la sous-catégorie des rétractions de $\mathcal{E}$. Si $\mathbf{T} = \mathbf{T}_{\mathfrak{U}}$, on retrouve la terminologie habituelle pour les applications ouvertes ou propres. Si $\mathcal{R}$ est la sous-catégorie des inversibles de $\mathcal{E}$, un **T**-foncteur pour $\hat{\mathcal{S}} = \hat{\mathcal{S}}_5$ ou $\hat{\mathcal{S}}_6$ est appelé respectivement *foncteur étale* ou *coétale*.

IV.3. T-profoncteurs et T-transformations naturelles.

Dans les sections précédentes, nous avons analysé diverses sous-catégories de $Cat(\mathbf{T})$; ici, au contraire, nous allons chercher à « élargir » $Cat(\mathbf{T})$. Nous supposerons cependant que $\mathbf{T}$ est un triple cartésien, c'est-à-dire que $Sp(\mathbf{T})$ est une bicatégorie (II.2). Nous allons d'abord étudier quelques faits généraux sur une bicatégorie quelconque $\mathfrak{D}$; la terminologie qui suit est inspirée par la catégorie monoïdale traditionnelle des groupes abéliens, $(Ab, \mathbf{Z}, \otimes)$. Pour simplifier les notations, nous noterons uniquement par les symboles $1, 1', \ldots$ les objets de $\mathfrak{D}$ et nous omettrons le symbole des variables dans la notation des morphismes $r(\theta)$, $l(\theta)$ et $s(\theta'', \theta', \theta)$, qui seront donc notés simplement r, l, s.

Rappelons qu'une *monade de* $\mathfrak{D}$ est un triplet (θ, i, k), où θ est un morphisme de $\mathfrak{D}$ et $i: id_1 \to \theta$, $k: \theta \circ \theta \to \theta$ deux 2-morphismes de $\mathfrak{D}$ rendant le diagramme suivant commutatif:

$$\begin{tikzcd}
(\theta\circ\theta)\circ\theta \arrow[rr, "s"] \arrow[d, "k\circ\theta"'] & & \theta\circ(\theta\circ\theta) \arrow[d, "\theta\circ k"] \\
\theta\circ\theta \arrow[r, "k"] & \theta & \theta\circ\theta \arrow[l, "k"'] \\
1\circ\theta \arrow[u, "i\circ\theta"] & \theta \arrow[l, "l"'] \arrow[r, "r"] \arrow[u, "id_\theta"'] & \theta\circ 1 \arrow[u, "\theta\circ i"']
\end{tikzcd}$$

On dit que $(\mu, m): (\theta, i, k) \to (\theta', i', k')$ est un *morphisme de monades de* $\mathfrak{D}$ si (θ, i, k) et (θ', i', k') sont des monades de $\mathfrak{D}$, si $\mu: 1 \to 1'$ est un morphisme de $\mathfrak{D}$ et $m: \mu\circ\theta \to \theta'\circ\mu$ un 2-morphisme rendant commutatif le diagramme (où s^{-1} est l'isomorphisme réciproque de s):

$$\begin{tikzcd}
\theta'\circ(\theta'\circ\mu) \arrow[d, "s^{-1}"'] & \theta'\circ(\mu\circ\theta) \arrow[l, "\theta'\circ m"'] & (\theta'\circ\mu)\circ\theta \arrow[l, "s"'] & (\mu\circ\theta)\circ\theta \arrow[l, "m\circ\theta"'] \arrow[d, "s"] \\
(\theta'\circ\theta')\circ\mu \arrow[d, "k'\circ\mu"'] & & & \mu\circ(\theta\circ\theta) \arrow[d, "\mu\circ k"] \\
\theta'\circ\mu & & & \mu\circ\theta \arrow[lll, "m"'] \\
1'\circ\mu \arrow[u, "i'\circ\mu"] & \mu \arrow[l, "l"'] \arrow[rr, "r"] & & \mu\circ 1 \arrow[u, "\mu\circ i"']
\end{tikzcd}$$

On dit que $(\sigma, h', h): (\theta, i, k) \to (\theta', i', k')$ est un *bimodule de* $\mathfrak{D}$ si (θ, i, k) et (θ', i', k') sont des monades, si $\sigma: 1 \to 1'$ est un morphisme de $\mathfrak{D}$ et si $h': \theta' \circ \sigma \to \sigma$ et $h: \sigma \circ \theta \to \sigma$ sont des 2-morphismes rendant les diagrammes suivants commutatifs:

$$\begin{tikzcd}
\theta' \circ (\theta' \circ \sigma) \arrow[rr, "\theta' \circ h'"] & & \theta' \circ \sigma \arrow[dd, "h'"] \\
(\theta' \circ \theta') \circ \sigma \arrow[u, "s"] \arrow[d, "k' \circ \sigma"'] & & \\
\theta' \circ \sigma \arrow[rr, "h'"] & & \sigma \\
1' \circ \sigma \arrow[u, "i' \circ \sigma"] & & \sigma \arrow[ll, "l"'] \arrow[u, "id_\sigma"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(\sigma \circ \theta) \circ \theta \arrow[rr, "h \circ \theta"] \arrow[d, "s"'] & & \sigma \circ \theta \arrow[dd, "h"] \\
\sigma \circ (\theta \circ \theta) \arrow[d, "\sigma \circ k"'] & & \\
\sigma \circ \theta \arrow[rr, "h"] & & \sigma \\
\sigma \circ 1 \arrow[u, "\sigma \circ i"] & & \sigma \arrow[ll, "r"'] \arrow[u, "id_\sigma"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(\theta' \circ \sigma) \circ \theta \arrow[r, "s"] \arrow[d, "h' \circ \theta"'] & \theta' \circ (\sigma \circ \theta) \arrow[r, "\theta' \circ h"] & \theta' \circ \sigma \arrow[d, "h'"] \\
\sigma \circ \theta \arrow[rr, "h"] & & \sigma
\end{tikzcd}$$

PROPOSITION IV.3.28. *A tout morphisme de monades*

$$(\mu, m): (\theta, i, k) \to (\theta', i', k')$$

on peut associer un bimodule $(\sigma, h', h): (\theta, i, k) \to (\theta', i', k')$, *où*

$$\sigma = \theta' \circ \mu, \quad h' = (k' \circ \mu).s^{-1} \quad \text{et} \quad h = (k' \circ \mu).s^{-1}.(\theta' \circ m).s.$$

PREUVE. Il s'agit de vérifier la commutativité de trois diagrammes, ce qui est facile. Par exemple, la commutativité du diagramme de gauche ci-dessous résulte de celle du diagramme de droite:

$$\begin{tikzcd}
\theta' \circ (\theta' \circ (\theta' \circ \mu)) \arrow[rr, "(\theta' \circ h').(\theta' \circ s^{-1})"] & & \theta' \circ (\theta' \circ \mu) \arrow[dd, "(k' \circ \mu).s^{-1}"'] \\
(\theta' \circ \theta') \circ (\theta' \circ \mu) \arrow[u, "s"] \arrow[d, "k' \circ (\theta' \circ \mu)"'] & & \\
\theta' \circ (\theta' \circ \mu) \arrow[rr, "(k' \circ \mu).s^{-1}"] & & \theta' \circ \mu
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\theta' \circ (\theta' \circ \theta') \arrow[r, "\theta' \circ k'"] & \theta' \circ \theta' \arrow[dd, "k'"] \\
(\theta' \circ \theta') \circ \theta' \arrow[u, "s"] \arrow[d, "k' \circ \theta'"'] & \\
\theta' \circ \theta' \arrow[r, "k'"] & \theta'
\end{tikzcd}$$

Si (σ, h', h) et $(\bar{\sigma}, \bar{h}', \bar{h}): (\theta, i, k) \to (\theta', i', k')$ sont deux bimodules entre les mêmes monades, on dit que $g: (\sigma, h', h) \to (\bar{\sigma}, \bar{h}', \bar{h})$

est une *application linéaire* si $g : \sigma \to \sigma$ est un 2-morphisme de $\mathfrak{D}$ rendant le diagramme suivant commutatif:

$$\begin{tikzcd}
\theta' \circ \sigma \arrow[r, "h'"] \arrow[d, "\theta' \circ g"'] & \sigma \arrow[d, "g"'] & \sigma \circ \theta \arrow[l, "h"'] \arrow[d, "g \circ \theta"] \\
\theta' \circ \bar{\sigma} \arrow[r, "\bar{h}'"] & \bar{\sigma} & \bar{\sigma} \circ \theta \arrow[l, "\bar{h}"']
\end{tikzcd}$$

REMARQUES. 1° Une monade, comme nous l'avons déjà remarqué, peut être identifiée à un pseudo-foncteur de la forme $\mathbf{1} \to \mathfrak{D}$. Un bimodule peut être identifié à un pseudo-foncteur de la forme $\mathbf{2} \to \mathfrak{D}$, et on peut appeler *application semi-linéaire* une «pseudo-transformation naturelle» entre bimodules, ce qui donne une application linéaire comme cas particulier. Un morphisme de monades peut être défini comme une monade dans la bicatégorie des «carrés» de $\mathfrak{D}$ (appelés «squares» dans [Be] et «quintettes» dans la terminologie de [Eh]). Une application semi-linéaire est alors un bimodule de cette bicatégorie des «carrés» (remarque qui permettra plus loin d'associer un morphisme de profoncteurs à toute transformation naturelle en appliquant la proposition IV.4.28).

2° On peut appeler *bimorphisme* un pseudo-foncteur de la forme $\mathbf{3} \to \mathfrak{D}$ et définir le produit tensoriel de deux bimodules comme étant un bimorphisme «universel», comme on le fait classiquement dans $(Ab, \mathbf{Z}, \otimes)$; on pourrait ainsi définir une bicatégorie $Bim(\mathfrak{D})$ ayant pour objets les monades de $\mathfrak{D}$, pour morphismes les bimodules et pour composition le produit tensoriel défini ci-dessus. L'existence de ce produit est liée à l'existence de conoyaux dans les catégories $Hom_{\mathfrak{D}}(1', 1)$ et à la commutation des foncteurs $\kappa(e'', e', e)$ avec les conoyaux. On pourrait enfin prolonger $Bim(\mathfrak{D})$ en une multicatégorie, mais nous réservons ces questions pour un prochain travail.

Nous allons maintenant interpréter ces notions dans le cas particulier où $\mathfrak{D} = Sp(\mathbf{T})$, où $\mathbf{T} = (T, I, K)$ est un triple cartésien.

D'après la proposition II.3.15, les monades de $Sp(\mathbf{T})$ sont les $\mathbf{T}$-catégories; on les notera de la même façon et on commettra l'abus de langage qui consiste à désigner un morphisme de spans $m : \theta \to \theta'$ par la seule lettre m. Sur les morphismes entre monades on a le résultat partiel suivant:

PROPOSITION IV.3.29. *Tout* **T**-*foncteur* $(f,\overline{f}):(\theta,i,k)\to(\theta',i',k')$ *détermine un morphisme entre monades* $(\mu,m):(\theta,i,k)\to(\theta',i',k')$, *où* $\mu=(I\,e'.f,\ id_e)$ *et où* m *est le crochet caractérisé par les relations:*

$$p_1.m=f \quad \text{et} \quad p_2.m=b,$$

(si $\theta'=(a',b')$, $\theta=(a,b)$, e *et* e' *étant respectivement les buts de* b *et* b' *et* (p_1,p_2) *le produit fibré de* (b',f)*).*

PREUVE. On montre facilement que

$$\theta'\circ\mu=(a'.p_1,p_2) \text{ et } \quad \mu\circ\theta=(Tf.a,\ b).$$

Pour mieux dégager les idées essentielles de la démonstration, nous supposerons que $Sp(\mathbf{T})$ est une 2-catégorie, ce qui revient à supposer que tous les produits fibrés rencontrés sont canoniques; la démonstration dans le cas général n'est pas plus difficile, si ce n'est du point de vue des notations. Nous allons d'abord déterminer les éléments du diagramme suivant dans $Sp(\mathbf{T})$:

$$\begin{tikzcd}
\theta'\circ\theta'\circ\mu \arrow[d, "k'\circ\mu"'] & \theta'\circ\mu\circ\theta \arrow[l, "\theta'\circ m"'] & \mu\circ\theta\circ\theta \arrow[l, "m\circ\theta"'] \arrow[d, "\mu\circ k"] \\
\theta'\circ\mu & & \mu\circ\theta \arrow[ll, "m"'] \\
\mu \arrow[u, "i'\circ\mu"] & & \mu \arrow[ll, "id_\mu"'] \arrow[u, "\mu\circ i"']
\end{tikzcd}$$

- $\mu\circ i$ est égal à $i:(I\,e'.f,\ id_e)\to(Tf.a,b)$,
- $i'\circ\mu$ est égal à $i'':(I\,e'.f,\ id_e)\to(a'.p_1,p_2)$, où i'' est le crochet caractérisé par les relations

$$p_1.i''=i'.f,\quad p_2.i''=id_e\,.$$

et dont l'existence est déduite de l'égalité $b'.i'.f=f.id_e$.

- $m:(Tf.a,b)\to(a'.p_1,p_2)$ est un 2-morphisme de $Sp(\mathbf{T})$ et la commutativité de la partie inférieure du diagramme ci-dessus s'exprime par la relation $m.i=i''$, qui résulte des égalités suivantes:

$$p_1.m.i=p_1.i'',\quad p_2.m.i=p_2.i''.$$

- $\mu \circ k$ est égal à $k: (Ke'.TTf.Ta.v_2, b.v_1) \to (Tf.a, b)$, où (v_1, v_2) est le produit fibré de (a, Tb).

- $k' \circ \mu$ est égal à $k'': (Ke'.Ta'.v'_2.q_1, p_2.q_2) \to (a'.p_1, p_2)$, où (v'_1, v'_2) est le produit fibré de (a', Tb') et (q_1, q_2) celui de (v'_1, p_1) et où k'' est le crochet caractérisé par

$$p_1.k'' = k'.q_1, \quad p_2.k'' = p_2.q_2$$

et dont l'existence est déduite de l'égalité $b'.k'.q_1 = f.p_2.q_2$.

- $\theta' \circ m$ est égal à

$$m': (Ke'.Ta'.Tp_1.p'_1, b.p'_2) \to (Ke'.Ta'.v'_2.q_1, p_2.q_2),$$

où (p'_1, p'_2) est le produit fibré de (Tp_2, a) et où m' est le crochet caractérisé par les relations

$$v'_2.q_1.m' = Tp_1.p'_1, \quad q_2.m' = m.p'_2$$

et dont l'existence est déduite de l'égalité $Tb'.Tp_1.p'_1 = a'.p_1.m.p'_2$.

- $m \circ \theta$ est égal à

$$m'': (Ke'.TTf.Ta.v_2, b.v_1) \to (Ke'.Ta'.Tp_1.p'_1, b.p'_2),$$

où m'' est le crochet caractérisé par les relations

$$p'_1.m'' = Tm.v_2, \quad p'_2.m'' = v_1$$

et dont l'existence est déduite de l'égalité $Tp_2.Tm.v_2 = a.v_1$.

La commutativité de la partie supérieure du diagramme s'exprime par la relation $m.k = k''.m'.m''$, qui résulte des égalités:

$$p_1.m.k = p_1.k''.m'.m'', \quad p_2.m.k = p_2.k''.m'.m''.$$

La réciproque de cette proposition est fausse. Par exemple, si $\mathbf{T}$ est le triple identité (III.2) sur $\mathcal{E}$, un morphisme entre monades dans $Sp(\mathcal{E})$ coïncide avec un span de $\mathcal{E}$-foncteurs (F', F), où F' est un foncteur coétale (IV.2) (spans que Lawvere a appelés «foncteurs partiels» dans une conférence récente).

Les bimodules de $Sp(\mathcal{E})$ ne sont autres que les profoncteurs de Bénabou; nous appellerons $\mathbf{T}$-*profoncteurs* les bimodules de $Sp(\mathbf{T})$. D'après les propositions IV.4.28 et 29 ci-dessus, un $\mathbf{T}$-foncteur détermine un **T**-profoncteur (de même sens), ce qui suggère d'appeler **T**-*transformation naturelle* une application linéaire entre deux **T**-profoncteurs associés par la méthode précédente à deux **T**-foncteurs. On peut d'ailleurs vérifier sans peine qu'une application linéaire dans $Sp(\mathcal{E})$ entre deux $\mathcal{E}$-foncteurs est une $\mathcal{E}$-transformation naturelle (on le constate encore plus facilement pour $\mathcal{E} = Ens$). On cherchera, plus tard, à construire une bicatégorie $Procat(\mathbf{T}) = Bim(Sp(\mathbf{T}))$.

REMARQUES. 1° L'hypothèse que **T** soit cartésien n'est pas nécessaire pour définir les **T**-profoncteurs, mais elle semble indispensable pour appliquer les propositions IV.4.28 et 29. Si $\mathfrak{D}$ est seulement une pseudo-catégorie, on ne peut pas définir facilement une composition dans les «carrés» de $\mathfrak{D}$ et même sur des exemples particuliers, comme celui de $\mathbf{T} = \mathbf{T}_{\mathfrak{U}}$ (III.5), tout ce qui touche à la notion de **T**-transformation naturelle semble être difficile.

2° On peut également, à partir d'un **T**-foncteur, obtenir un morphisme de sens inverse à celui construit dans la proposition 29; il est alors probable que ces deux morphismes sont «adjoints» l'un de l'autre comme dans le cas des foncteurs ordinaires.

APPENDICE

Le résultat essentiel de cet appendice est la proposition A.2, mais le seul résultat utilisé dans l'article est la proposition A.1, qui sert de lemme à la proposition III.1.19.

1. Monades libres dans les catégories monoïdales dénombrablement distributives.

Comme cela a été convenu (II.4), nous noterons sous forme de triplet une catégorie pseudo-monoïdale $\bar{\mathfrak{D}} = (\mathfrak{D}, 1, \circ)$. Soit $Mon(\bar{\mathfrak{D}})$ la catégorie des monades de $\bar{\mathfrak{D}}$ (II.3); ses objets sont les triplets (θ, i, k), où $i : 1 \to \theta$ et $k : \theta \circ \theta \to \theta$ sont deux morphismes de $\mathfrak{D}$ tels que

$$(1) \qquad \begin{aligned} k.(i \circ \theta).l(\theta) &= \theta = k.(\theta \circ i).r(\theta), \\ k.(k \circ \theta) &= k.(\theta \circ k).s(\theta, \theta, \theta). \end{aligned}$$

$m : (\theta, i, k) \to (\theta', i', k')$ est un morphisme de $Mon(\bar{\mathfrak{D}})$ si $m : \theta \to \theta'$ est un morphisme de $\mathfrak{D}$ tel que

$$(2) \qquad m.i = i', \quad m.k = k'.(m \circ m).$$

On a un foncteur d'oubli $Mon(\bar{\mathfrak{D}}) \to \mathfrak{D}$ évident qui associe l'objet θ à la monade (θ, i, k). Nous allons ajouter une hypothèse (D) assez forte sur $\bar{\mathfrak{D}}$, ce qui assurera que ce foncteur d'oubli est triplable lorsque $\bar{\mathfrak{D}}$ est monoïdale et qui, de plus, nous permettra de construire des monades libres en imitant exactement la construction d'un monoïde libre engendré par un ensemble.

LEMME 1. *Si le foncteur d'oubli $Mon(\bar{\mathfrak{D}}) \to \mathfrak{D}$ admet un adjoint, il est triplable.*

PREUVE. Soit $\mathbf{T} = (T, I, K)$ le triple sur $\mathfrak{D}$ déduit du foncteur d'oubli $U : Mon(\bar{\mathfrak{D}}) \to \mathfrak{D}$ et de son adjoint $F : \mathfrak{D} \to Mon(\bar{\mathfrak{D}})$, et soit

$$E : Mon(\bar{\mathfrak{D}}) \to Alg(\mathbf{T})$$

le foncteur d'Eilenberg-Moore associé; on va construire un inverse E' de E.

Soit $b : T\theta \to \theta$ une $\mathbf{T}$-algèbre sur θ et posons

$$F\theta = (\hat{\theta}, \hat{\imath}, \hat{k}), \quad F\hat{\theta} = (\hat{\hat{\theta}}, \hat{\hat{\imath}}, \hat{\hat{k}}).$$

Remarquons que $Tb: F\hat{\theta} \to F\theta$ est un morphisme de $Mon(\bar{\mathfrak{D}})$, puisque $T = UF$. On va montrer que (θ, i, k), où

$$i = b.\hat{\imath}, \quad k = b.\hat{k}.(I\theta \circ I\theta),$$

est une monade. Le principe étant chaque fois le même, limitons-nous à montrer la dernière relation (1), en posant

$$\tilde{I} = (I\theta \circ I\theta) \circ I\theta \quad \text{et} \quad \tilde{I}' = I\theta \circ (I\theta \circ I\theta).$$

On obtient:

$$\begin{gathered}
k.(k \circ \theta) = b.\hat{k}.(I\theta \circ I\theta).(b \circ b).(\hat{k} \circ \theta).\tilde{I} = \\
b.\hat{k}.(Tb \circ Tb).(IT\theta \circ IT\theta).(\hat{k} \circ \theta).\tilde{I} = \\
b.Tb.\hat{\hat{k}}.(IT\theta \circ IT\theta).(\hat{k} \circ \theta).\tilde{I} = b.K\theta.\hat{\hat{k}}.(IT\theta \circ IT\theta).(\hat{k} \circ \theta).\tilde{I} = \\
b.\hat{k}.(K\theta \circ K\theta).(IT\theta \circ IT\theta).(\hat{k} \circ \theta).\tilde{I} = b.\hat{k}.(\hat{k} \circ \theta).\tilde{I} = \\
b.\hat{k}.(\theta \circ \hat{k}).s(\theta, \theta, \theta).\tilde{I} = b.\hat{k}.(\theta \circ \hat{k}).\tilde{I}'.s(\theta, \theta, \theta) = \\
k.(\theta \circ k).s(\theta, \theta, \theta).
\end{gathered}$$

On définit ainsi $|E'|$ et, en passant des objets aux morphismes, un raisonnement analogue permet de définir le foncteur E'. On vérifie sans peine que E' est un inverse de E, ce qui, pour l'essentiel, se ramène à vérifier, ci-dessus, les deux relations

$$i = b.\hat{\imath} \quad \text{et} \quad b.\hat{k} = k.(b \circ b);$$

cette dernière se vérifie en composant les deux membres par le monomorphisme $I\theta \circ I\theta$. ∎

REMARQUE. Ce lemme est un cas particulier d'un fait plus général et qui a lieu pour toutes les structures «algébriques», à condition de bien choisir leur foncteur d'oubli. Nous en verrons plus loin (proposition A.2) une autre application, dans un cas un peu moins particulier.

Pour tout $\theta \in |\mathfrak{D}|$, on peut définir deux foncteurs Y_θ et $Y'_\theta: \mathfrak{D} \to \mathfrak{D}$ qui, à tout morphisme $m: \theta_1 \to \theta_2$ de $\mathfrak{D}$, associent respectivement les morphismes

$$\theta \circ m: \theta \circ \theta_1 \to \theta \circ \theta_2 \quad \text{et} \quad m \circ \theta: \theta_1 \circ \theta \to \theta_2 \circ \theta.$$

On dit que $\overline{\mathfrak{D}}$ est *dénombrablement distributive* si elle vérifie l'axiome:

(D) *Pour tout* $\theta \in |\mathfrak{D}|$, *les foncteurs* Y_θ *et* Y'_θ *commutent avec les sommes et* $\mathfrak{D}$ *admet des sommes finies et dénombrables.*

LEMME 2. *Si* $\overline{\mathfrak{D}}$ *est une pseudo-catégorie dénombrablement distributive et si* $j_u : \theta_u \to \hat{\theta}$ $(u \in N)$ *et* $j_v : \theta'_v \to \hat{\theta}'$ $(v \in N')$ *forment deux systèmes d'injections canoniques de sommes dans* $\mathfrak{D}$, *où* N *et* N' *sont des ensembles au plus dénombrables, alors*

$$j_u \circ j'_v : \theta_u \circ \theta'_v \to \hat{\theta} \circ \hat{\theta}' \quad ((u, v) \in N \times N')$$

forme un système d'injections canoniques de somme. Cette affirmation s'étend à la compostion d'une suite finie de sommes dans $\overline{\mathfrak{D}}$.

PREUVE. C'est une conséquence immédiate de l'axiome (D), puisque

$$j_u \circ j'_v = (j_u \circ \hat{\theta}').(\theta_u \circ j'_v),$$

et puisque les sommes dans une catégorie sont associatives (associativité infinie). ■

Soit $\overline{\mathfrak{D}}$ une catégorie monoïdale. Nous utiliserons pleinement les résultats de la «théorie des cohérences» développée par Mac-Lane depuis longtemps. En particulier, $r(1) = s(1)$. Le lemme ci-dessous ne sera donc pas démontré.

Soit $\theta \in |\mathfrak{D}|$; on posera:

$$\left\{\begin{array}{l}
\overset{0}{\bigcirc}\theta = 1,\ \overset{1}{\bigcirc}\theta = \theta, \text{ et par récurrence } \overset{u+1}{\bigcirc}\theta = \theta \circ (\overset{u}{\bigcirc}\theta) \text{ pour tout } u \geqslant 1;\\
s_{u,0}\theta = r(\overset{u}{\bigcirc}\theta)^{-1},\quad s_{0,v}\theta = l(\overset{v}{\bigcirc}\theta)^{-1} \text{ pour tout } u \geqslant 0,\ v \geqslant 0, \text{ en particulier } s_{0,0}\theta = r(1)^{-1} = l(1)^{-1};\\
s_{1,v}\theta = \theta \circ (\overset{v}{\bigcirc}\theta) \text{ pour } v \geqslant 1, \text{ et par récurrence, pour } v \geqslant 1 \text{ et } u \geqslant 1,\\
\qquad s_{u+1,v}\theta = (\theta \circ s_{u,v}\theta).\, s(\theta, \overset{u}{\bigcirc}\theta, \overset{v}{\bigcirc}\theta).
\end{array}\right.$$

LEMME 3. *Si* $\overline{\mathfrak{D}}$ *est une catégorie monoïdale dénombrablement distributive, on a la formule:*

$$s_{u+v,w}\theta.((s_{u,v}\theta) \circ (\overset{w}{\bigcirc}\theta)) = s_{u,v+w}\theta.((\overset{u}{\bigcirc}\theta) \circ (s_{v,w}\theta)).\, s(\overset{u}{\bigcirc}\theta, \overset{v}{\bigcirc}\theta, \overset{w}{\bigcirc}\theta),$$

pour tout $u, v, w \geqslant 0$.

Soit (θ, i, k) une monade dans $\bar{\mathfrak{D}}$; on posera

$$\begin{cases} k_0 = i,\ k_1 = \theta,\ k_2 = k, \text{ et par récurrence, pour tout entier } u \geqslant 1: \\ k_{u+1} = k.(\theta \circ k_u). \end{cases}$$

LEMME 4. *Pour tout couple d'entiers u et $v \geqslant 0$, on a la relation:*

$$k_{u+v} \cdot s_{u,v}\theta = k.(k_u \circ k_v).$$

PREUVE. Une monade est un bifoncteur de la forme $\mathbf{1} \to \bar{\mathfrak{D}}$; le lemme est donc un résultat de la «théorie des cohérences», mais nous allons en donner une démonstration directe.

Pour $u = 1$, c'est la définition de k_{1+v}:

$$k_{1+v} = k.(\theta \circ k_v) \quad \text{pour} \quad v \geqslant 1,$$

puisque $s_{1,v}\theta$ est une identité. L'égalité reste vraie pour $v = 0$, car dans ce cas elle s'écrit $r(\theta)^{-1} = k.(\theta \circ i)$.

Supposons maintenant $v \geqslant 1$ fixé et supposons la formule démontrée pour un entier $u \geqslant 1$; nous allons montrer qu'elle est alors vraie pour l'entier $u+1$.

$$k_{1+u+v} \cdot s_{1+u,v}\theta = k.(\theta \circ k_{u+v}).(\theta \circ s_{u,v}\theta).\, s(\theta, \overset{u}{\bigcirc}\theta, \overset{v}{\bigcirc}\theta) =$$

$$k.(\theta \circ k).\,(\theta \circ (k_u \circ k_v)).\, s(\theta, \overset{u}{\bigcirc}\theta, \overset{v}{\bigcirc}\theta) =$$

$$k.(\theta \circ k).\, s(\theta, \theta, \theta).((\theta \circ k_u) \circ k_v) = k.(k \circ \theta).((\theta \circ k_u) \circ k_v)) =$$

$$k.(k_{u+1} \circ k_v).$$

La formule est donc démontrée dans les cas $u \geqslant 1$, $v \geqslant 0$ et $u = 1$, $v = 0$. Pour u quelconque et $v = 0$, on se ramène à démontrer que

$$k_u = k.(k_u \circ i).\, r(\overset{u}{\bigcirc}\theta).$$

Pour $u = 1$, ceci est vrai, par définition d'une monade. Supposons-le prouvé pour un $u \geqslant 1$ et démontrons que c'est encore vrai pour $u+1$. On a

$$k_{1+u} = k.(\theta \circ k_u) = k.(\vartheta \circ k).(\theta \circ (k_u \circ i)).(\theta \circ r(\overset{u}{\bigcirc}\theta)) =$$

$$k.(\theta \circ k).(\theta \circ (k_u \circ i)).\, s(\theta, \overset{u}{\bigcirc}\theta, 1).\, r(\overset{1+u}{\bigcirc}\theta) =$$

$$k.(\theta \circ k).\, s(\theta, \theta, \theta).((\theta \circ k_u) \circ i).\, r(\overset{1+u}{\bigcirc}\theta) =$$

$$k.(k \circ \theta).((\theta \circ k_u) \circ i).\, r(\overset{1+u}{\bigcirc}\theta) = k.(k_{1+u} \circ i).\, r(\overset{1+u}{\bigcirc}\theta).$$

On remarquera que l'on a utilisé la formule du lemme 3 dans le cas particulier $u = 1$, $v = u$ et $w = 0$ (notations u, v, w de lemme) qui s'écrit:

$$r(\overset{1+u}{\bigcirc}\theta)^{-1} = (\theta \circ r(\overset{u}{\bigcirc}\theta)^{-1}) . s(\theta, \overset{u}{\bigcirc}\theta, 1).$$

La formule est donc démontrée pour $u \geqslant 1$ et $v \geqslant 0$. Le cas $u = 0$, $v = 0$, est alors facile à montrer. ∎

PROPOSITION A.1. *Si $\bar{\mathfrak{D}}$ est une catégorie monoïdale dénombrablement distributive, le foncteur d'oubli $Mon(\bar{\mathfrak{D}}) \to \mathfrak{D}$ est triplable.*†

PREUVE. Soit $\hat{\theta}$ une somme de la famille $(\overset{u}{\bigcirc}\theta \mid u \in \mathbf{N})$ pour un objet θ de $\mathfrak{D}$, et soit $j_u : \overset{u}{\bigcirc}\theta \to \hat{\theta}$ $(u \in \mathbf{N})$ un système d'injections canoniques de cette somme. D'après le lemme 2, il existe un crochet (de somme indexée par $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$) caractérisé par les relations

(3) $$\hat{k}.(j_u \circ j_v) = j_{u+v} . s_{u,v}\theta \quad (u \geqslant 0,\ v \geqslant 0).$$

On va montrer que $(\theta, \hat{\imath}, \hat{k})$, où $\hat{\imath} = j_0$, est une monade. On a

$$\hat{k}.(\hat{k} \circ \hat{\theta}).((j_u \circ j_v) \circ j_w) = \text{(d'après (3))}$$
$$\hat{k}.(j_{u+v} \circ j_w).(s_{u,v}\theta \circ (\overset{w}{\bigcirc}\theta)) =$$
$$j_{u+v+w} . s_{u+v,w}\theta.(s_{u,v}\theta \circ (\overset{w}{\bigcirc}\theta)) = \text{(lemme 3)}$$
$$j_{u+v+w} . s_{u,v+w}\theta.((\overset{u}{\bigcirc}\theta) \circ s_{v,w}\theta). s(\overset{u}{\bigcirc}\theta, \overset{v}{\bigcirc}\theta, \overset{w}{\bigcirc}\theta) =$$
$$\hat{k}.(\hat{\theta} \circ \hat{k}). s(\hat{\theta}, \hat{\theta}, \hat{\theta}).((j_u \circ j_v) \circ j_w).$$

De même pour la «neutralité», on a

$$\hat{k}.(\hat{\theta} \circ \hat{\imath}). r(\hat{\theta}). j_u = \hat{k}.(\hat{\theta} \circ \hat{\imath}).(j_u \circ 1). r(\overset{u}{\bigcirc}\theta) =$$
$$\hat{k}.(j_u \circ j_0). s_{u,0}\theta^{-1} = j_u.$$

En simplifiant respectivement par $((j_u \circ j_v) \circ j_w)$ et j_u, on obtient les relations (1). En effet, $(j_u \circ j_v) \circ j_w$ forme un système d'injections canoniques d'une somme, comme on le voit en utilisant deux fois le lemme 2.

On va montrer, maintenant, que $(\hat{\theta}, \hat{\imath}, \hat{k})$ est une monade libre engendrée par θ admettant $j_1 : \theta \to \hat{\theta}$ pour morphisme d'adjonction. Soit $j' : \theta \to \theta'$ un morphisme de $\mathfrak{D}$ et (θ', i', k') une monade de $\bar{\mathfrak{D}}$. Soit m le crochet de somme $m : \hat{\theta} \to \theta'$ caractérisé par les relations:

(4) $$m . j_u = k'_u . \overset{u}{\bigcirc} j' \quad (u \geqslant 0),$$

† Ce résultat figure aussi dans l'article «Cohomology in tensored Categories» de M.Barr, Proc. of the Conference on Categorical Algebra, La Jolla (1965), Springer.

où k'_u a été défini au lemme 4, relativement à la monade (θ', i', k'). Montrons que $m : (\hat\theta, \hat\imath, \hat k) \to (\theta', i', k')$ est un morphisme de monades. D'abord, (4) appliqué pour $u = 0$ donne la première relation (2): $m.\hat\imath = i'$. On a

$$m.\hat k.(j_u \circ j_v) = m.j_{u+v}.s_{u,v}\theta \underset{\text{d'après (4)}}{=} k'_{u+v}.\overset{u+v}{\bigcirc} j'.s_{u,v}\theta =$$

$$k'_{u+v}.s_{u,v}\theta'.((\overset{u}{\bigcirc} j')\circ(\overset{v}{\bigcirc} j')) = \text{(lemme 4)}$$

$$k'.(k'_u \circ k'_v).((\overset{u}{\bigcirc} j')\circ(\overset{v}{\bigcirc} j')) \underset{\text{d'après (4)}}{=} k'.(m\circ m).(j_u \circ j_v)$$

et, en simplifiant par $j_u \circ j_v$, on achève de montrer les relations (2).

La relation (4) pour $u = 1$ devient $m.j_1 = j'$. Montrons que le morphisme m vérifiant cette dernière relation et définissant un morphisme de monades est unique. Il suffit par exemple de montrer que ces conditions entraînent que m satisfait les conditions (4). Pour cela, nous allons d'abord montrer les deux formules suivantes:

$$\text{(5)} \qquad k'_u.\overset{u}{\bigcirc} m = m.\hat k_u, \quad j_u = \hat k_u.\overset{u}{\bigcirc} j_1 \quad (u \geqslant 0).$$

La première de ces relations est évidente pour $u = 0$, 1 et 2; supposons-la vraie pour $u \geqslant 2$; on a

$$k'_{1+u}.\overset{1+u}{\bigcirc} m = k'.(\theta' \circ k'_u).\overset{1+u}{\bigcirc} m = k'.(m\circ m).(\theta \circ \hat k_u) =$$

$$m.\hat k.(\theta \circ \hat k_u) = m.\hat k_{1+u},$$

ce qui démontre la première relation (5) pour tout $u \geqslant 0$. La seconde est évidente pour $u = 0$, 1 et 2; supposons-la vraie pour $u \geqslant 2$; on a

$$j_{1+u} = \hat k.(j_1 \circ j_u) = \hat k.(\theta \circ \hat k_u).\overset{1+u}{\bigcirc} j_1 = \hat k_{1+u}.\overset{1+u}{\bigcirc} j_1,$$

ce qui achève de démontrer (5).

On peut alors démontrer (4) en utilisant les formules (5):

$$m.j_u = m.\hat k_u.\overset{u}{\bigcirc} j_1 = k'_u.\overset{u}{\bigcirc} m.\overset{u}{\bigcirc} j_1 = k'_u.\overset{u}{\bigcirc} j'.$$

Ceci achève de montrer que $(\hat\theta, \hat\imath, \hat k)$ est la monade libre engendrée par θ.

Le foncteur $Mon(\bar{\mathfrak{D}}) \to \mathfrak{D}$ admet donc un adjoint et il est triplable d'après le lemme 1. ■

REMARQUES. L'auteur de ce travail ne sait pas si on peut adapter une telle construction à une catégorie pseudo-monoïdale $\bar{\mathfrak{D}}$ dénombrablement distributive. Toutefois, on peut construire des «monades non unitaires» (couples (θ, k), où $k: \theta \circ \theta \to \theta$ vérifie la deuxième relation (1)) libres, en utilisant le lemme 3 pour $u, v, w \geqslant 1$ et en remplaçant dans la démonstration $\hat{\theta}$ par la somme des $\overset{n}{\circ}\theta$ pour $n \geqslant 1$.

2° Ce résultat, utilisé en III. 1, montre en particulier que *l'existence d'une $\mathfrak{S}$-catégorie libre engendrée par un $\mathfrak{S}$-graphe dans une catégorie $\mathfrak{S}$ est assurée si $\mathfrak{S}$ admet des produits fibrés (finis), des sommes dénombrables, si ces sommes sont universelles et commutent avec les produits fibrés*. Ces conditions ne sont évidemment pas nécessaires, mais suffisantes. On peut aussi appliquer cette proposition à $\bar{\mathfrak{D}} = (Mod(A), A, \otimes_A)$, où A est un anneau commutatif et $Mod(A)$ la catégorie des A-modules; on obtient la construction des «algèbres tensorielles». D'une façon générale $\bar{\mathfrak{D}}$ est monoïdale dénombrablement distributive chaque fois que $\mathfrak{D}$ admet des sommes finies et dénombrables et que $\circ : \mathfrak{D} \times \mathfrak{D} \to \mathfrak{D}$ est un foncteur «produit tensoriel», c'est-à-dire un adjoint à un foncteur «*hom* interne» (si ce produit tensoriel est symétrique).

3° Si $\bar{\mathfrak{D}}$ n'est pas dénombrablement distributive, le foncteur d'oubli $Mon(\bar{\mathfrak{D}}) \to \mathfrak{D}$ peut admettre un adjoint qui ne soit pas de la forme obtenue dans la proposition A. 1. Par exemple, si on prend $\bar{\mathfrak{D}} = Gr(\mathbf{T}_0)/e$, où $\mathbf{T}_0 = (T_0, I_0, K_0)$ est le triple évident sur $\mathfrak{S}$ tel que, pour tout $e' \in |\mathfrak{S}|$, $T_0 e'$ soit égal à un objet final de $\mathfrak{S}$, le morphisme d'adjonction dans la proposition A. 1 serait une injection canonique $j_1 : \theta \to \theta + 1$.

2. Généralisation à certaines structures algébriques.

Lorsque la catégorie monoïdale $\bar{\mathfrak{D}} = (\mathfrak{D}, 1, \times)$ est *cartésienne*; c'est-à-dire lorsque $\times : \mathfrak{D} \times \mathfrak{D} \to \mathfrak{D}$ est l'adjoint du foncteur «diagonal»: $\mathfrak{D} \to \mathfrak{D} \times \mathfrak{D}$, la notion de monade de $\bar{\mathfrak{D}}$ coïncide avec celle de *monoïde* de $\mathfrak{D}$, ou $\mathfrak{D}$-monoïde. Les exemples de monades qui ne sont pas des monoïdes sont très nombreux (anneaux, triples, $\mathbf{T}$-catégories,...). On peut se poser les questions suivantes·

1° Quelles sont les structures algébriques qui, comme celle de monoïde, peuvent être définies plus généralement dans des catégories monoïdales non cartésiennes (structures algébriques au sens de Birkhoff-Lawvere) ?

2° Le résultat de la proposition A.1 est-il vrai pour de telles structures ?

Notons qu'on ne peut pas espérer que toutes les structures algébriques répondent à la question 1; par exemple, si on veut définir des monades «commutatives», il faut le faire dans une catégorie monoïdale «commutative». La définition ci-dessous de «théorie monoïdale» répond à ces questions lorsque $\bar{\mathfrak{D}}$ est monoïdale et dénombrablement distributive. Mais, pour simplifier, nous nous limiterons à des catégories monoïdales *strictes*, c'est-à-dire telles que les transformations naturelles r, l, s soient des identités.

Soit $\bar{\Delta} = (\Delta, 0, +)$ une catégorie monoïdale stricte. On dit que $\bar{\Delta}$ est une *théorie monoïdale stricte* si elle satisfait la condition suivante dans laquelle Δ_0 désigne l'ensemble des morphismes de but 1:

(T) $|\Delta|$ *muni de la restriction de la première loi* $+: \Delta \times \Delta \to \Delta$ *est identique (ou isomorphe) à l'ensemble* $\mathbf{N}$ *des entiers positifs ou nuls muni de l'addition ordinaire. Tout morphisme* $\varepsilon: n \to n'$ *de* Δ *s'écrit d'une et une seule façon sous la forme:*

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_{n'}, \quad \text{où } (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{n'}) \in \Delta_0^{n'}.$$

On dit de plus que Δ est *dénombrable* si Δ_0 est fini ou dénombrable (voir en 3 une interprétation des théories en terme de multicatégorie).

Si $\bar{\mathfrak{D}} = (\mathfrak{D}, 1, \circ)$ et $\bar{\Delta} = (\Delta, 0, +)$ sont des catégories monoïdales strictes, on note $Str_{\bar{\Delta}}(\bar{\mathfrak{D}})$ la catégorie dont les objets sont les foncteurs $F: \Delta \to \mathfrak{D}$ qui commutent avec les premières lois, ou ce qui revient au même les bifoncteurs $\bar{\Delta} \to \bar{\mathfrak{D}}$; on appelle $\bar{\Delta}$*-structure* un tel foncteur. On dit que $m: F \to F'$ est un *morphisme de* $Str_{\bar{\Delta}}(\bar{\mathfrak{D}})$ si F et F' sont des $\bar{\Delta}$-structures et si $m: F1 \to F'1$ est un morphisme de $\mathfrak{D}$ tel que

$$(\overset{u}{\bigcirc} m \mid u \in \mathbf{N}): F \to F'$$

soit une transformation naturelle. On a un foncteur d'oubli $Str_{\bar{\Delta}}(\bar{\mathfrak{D}}) \to \mathfrak{D}$ qui à toute $\bar{\Delta}$-structure F associe l'objet $F1$ de $\mathfrak{D}$.

PROPOSITION A.2. *Si* $\bar{\mathfrak{D}} = (\mathfrak{D}, 1, \circ)$ *est une catégorie monoïdale stricte et dénombrablement distributive et si* $\bar{\Delta} = (\Delta, 0, +)$ *est une théorie dé-*

nombrable, alors le foncteur d'oubli $Str_{\overline{\Delta}}(\bar{\mathfrak{D}}) \to \mathfrak{D}$ *est triplable.*

PREUVE. On procédera par étapes:

1° *$\bar{\Delta}$-structure $F_\theta : \Delta \to \mathfrak{D}$ associée à un objet* $\theta \in |\mathfrak{D}|$. Soit $\hat{\theta}$ une somme dans $\mathfrak{D}$ de la famille d'objets $(\overset{n}{\circ}\theta \mid \varepsilon \in \Delta_0)$, où n désigne la source de ε et Δ_0 l'ensemble des morphismes de Δ de but 1. Soit

$$j_\varepsilon : \overset{n}{\circ}\theta \to \hat{\theta}, \quad \varepsilon \in \Delta_0,$$

un système d'injections canoniques pour cette somme. Soit $F_{\hat{\theta}}\varepsilon : \overset{n}{\circ}\hat{\theta} \to \hat{\theta}$ le crochet (de somme) caractérisé par les relations:

$$(1) \qquad F_\theta \varepsilon . (j_{\nu_1} \circ \dots \circ j_{\nu_n}) = j_{\varepsilon . (\nu_1 + \dots + \nu_n)}$$

pour tout $(\nu_1, \dots, \nu_n) \in \Delta_0^n$. Si $\varepsilon : n \to n'$ est un morphisme quelconque de Δ_0, où maintenant n' peut être différent de 1, on a une décomposition unique $\varepsilon = \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_{n'}$, où $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n'}) \in \Delta_0^{n'}$, ce qui permet de poser sans ambiguïté

$$F_\theta \varepsilon = F_\theta \varepsilon_1 \circ \dots \circ F_\theta \varepsilon_{n'} .$$

On a alors la relation

$$(2) \qquad F_\theta(\varepsilon + \varepsilon') = F_\theta \varepsilon \circ F_\theta \varepsilon'$$

pour tout couple $(\varepsilon, \varepsilon')$ de morphismes de Δ.

Maintenant, on va montrer que, si $\varepsilon : n \to n'$ et $\tau : n' \to n''$ sont deux morphismes «consécutifs» de $\dot{\Delta}$, on a

$$(3) \qquad F_\theta(\tau . \varepsilon) = F_\theta \tau . F_\theta \varepsilon .$$

On a des décompositions

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_{n'}, \quad \tau = \tau_1 + \dots + \tau_{n''},$$

où

$$\varepsilon_i : p_i \to 1 \ (1 \leqslant i \leqslant n'), \quad \tau_{i'} : p'_{i'} \to 1 \ (1 \leqslant i' \leqslant n''),$$

$$p_1 + \dots + p_{n'} = n, \quad p'_1 + \dots + p'_{n''} = n' .$$

La seconde de ces deux sommes étant «plus fine» que la première, on peut grouper les termes de cette seconde somme et écrire

$$(p_1 + \dots + p_{p'_1}) + (p_{p'_1 + 1} + \dots + p_{p'_1 + p'_2}) + \dots = n;$$

on a

$$\tau.\,\varepsilon = \tau_1 . \sigma_1 + \ldots + \tau_{n''} . \sigma_{n''},$$

où

$$\sigma_1 = \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_{p'_1}, \quad \sigma_2 = \varepsilon_{p'_1+1} + \ldots + \varepsilon_{p'_1+p'_2}, \; \ldots\ldots .$$

Cette formule donne la décomposition (unique) de $\tau.\,\varepsilon$, donc

$$F_\theta(\tau.\,\varepsilon) = F_\theta(\tau_1 . \sigma_1) \circ F_\theta(\tau_2 . \sigma_2) \circ \ldots \circ F_\theta(\tau_{n''} . \sigma_{n''}).$$

Supposons démontrée la formule (3) dans le cas $n'' = 1$; alors

$$F_\theta(\tau.\,\varepsilon) = (F_\theta \tau_1 . F_\theta \sigma_1) \circ \ldots \circ (F_\theta \tau_{n''} . F_\theta \sigma_{n''}) = \quad (\circ \text{ fonctoriel})$$

$$(F_\theta \tau_1 \circ \ldots \circ F_\theta \tau_{n''}).(F_\theta \sigma_1 \circ \ldots \circ F_\theta \sigma_{n''}) = \quad ((2) \text{ itéré})$$

$$F_\theta(\tau_1 + \ldots + \tau_{n''}) . F_\theta(\sigma_1 + \ldots + \sigma_{n''}) = F_\theta \tau . F_\theta \varepsilon,$$

car $\sigma_1 + \ldots + \sigma_{n''} = \varepsilon$. Montrons maintenant que la formule (3) est vraie pour $n'' = 1$. Soit $(\nu_1, \ldots, \nu_n) \in \Delta_0^n$; on a

$$F_\theta(\tau.\,\varepsilon).(j_{\nu_1} \circ \ldots \circ j_{\nu_n}) \underset{\text{d'après (1)}}{=} j_{\tau.\,\varepsilon.(\nu_1 + \ldots + \nu_n)} =$$

$$j_{\tau.(\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_{n'}).(\nu_1 + \ldots + \nu_n)};$$

comme, en regroupant les termes, on a $\nu_1 + \ldots + \nu_n = \mu_1 + \ldots + \mu_{n'}$, avec

$$\mu_1 = \nu_1 + \ldots + \nu_{p_1}, \quad \mu_2 = \nu_{p_1+1} + \ldots + \nu_{p_1+p_2}, \quad \ldots$$

on obtient

$$j_{\tau.(\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_{n'}).(\nu_1 + \ldots + \nu_n)} = j_{\tau.(\varepsilon_1 . \mu_1 + \ldots + \varepsilon_{n'} . \mu_{n'})} =$$

$$F_\theta \tau . (j_{\varepsilon_1 . \mu_1} \circ \ldots \circ j_{\varepsilon_{n'} . \mu_{n'}}) =$$

$$F_\theta \tau . ((F_\theta \varepsilon_1 . (j_{\nu_1} \circ \ldots \circ j_{\nu_{p_1}})) \circ (F_\theta \varepsilon_2 . (j_{\nu_{p_1+1}} \circ \ldots)) \circ \ldots) =$$

$$F_\theta \tau . (F_\theta \varepsilon_1 \circ F_\theta \varepsilon_2 \circ \ldots \circ F_\theta \varepsilon_{n'}) . (j_{\nu_1} \circ j_{\nu_2} \circ \ldots \circ j_{\nu_n}) =$$

$$F_\theta \tau . F_\theta \varepsilon . (j_{\nu_1} \circ \ldots \circ j_{\nu_n})$$

et, puisque les $j_1 \circ \ldots \circ j_{\nu_n}$ parcourent un système d'injections canoniques de la somme $\overset{n}{\bigcirc}\hat\theta$ (lemme 2), on peut simplifier les termes extrêmes de cette suite d'égalités et obtenir (3). En résumé, $F_\theta : \bar\Delta \to \mathfrak{D}$ est une $\bar\Delta$-structure.

2° F_θ est la *$\bar\Delta$-structure libre engendrée par* θ et admettant $I : \theta \to \hat\theta$

pour morphisme d'adjonction, en posant $I = j_1$. Autrement dit, on va montrer que, pour toute $\bar{\Delta}$-structure F' et tout morphisme $I' : \theta \to \theta'$ de $\mathfrak{D}$ tel que $\theta' = F'1$, il existe un et un seul morphisme $m : \theta \to \hat{\theta}$ tel que

$$m . I = I' \quad \text{et que} \quad (\overset{n}{\bigcirc} m \mid \tau \in \Delta_0) : F_\theta \to F'$$

soit une transformation naturelle, en notant n la source de τ, ce qui signifie que, pour tout $\varepsilon : n \to n'$, on a

$$(\overset{n'}{\bigcirc} m) . F_\theta \varepsilon = F' \varepsilon . (\overset{n}{\bigcirc} m). \tag{4}$$

Soit $m : \hat{\theta} \to \theta'$ le crochet (de somme) caractérisé par les relations:

$$m . j_\tau = F' \tau . (\overset{n}{\bigcirc} I'), \tag{5}$$

pour tout morphisme $\tau : n \to 1$. On va démontrer la relation (4). Ecrivons

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_{n'}, \quad \text{où } \varepsilon_{i'} : p_{i'} \to 1 \quad (1 \leqslant i' \leqslant n'),$$

et soit

$$(\nu_1, \ldots, \nu_n) \in \Delta_0^n, \quad \text{où } \nu_i : q_i \to 1 \quad (1 \leqslant i \leqslant n).$$

On a

$$(\overset{n'}{\bigcirc} m) . F_\theta \varepsilon . (j_{\nu_1} \circ \ldots \circ j_{\nu_n}) = \text{(par regroupement)}$$

$$(\overset{n'}{\bigcirc} m) . ((F_\theta \varepsilon_1 . (j_{\nu_1} \circ \ldots \circ j_{\nu_{p_1}})) \circ (F_\theta \varepsilon_2 . (j_{\nu_{p_1+1}} \circ \ldots)) \circ \ldots) =$$

$$(m . F_\theta \varepsilon_1 . (j_{\nu_1} \circ \ldots \circ j_{\nu_{p_1}})) \circ (m . F_\theta \varepsilon_2 . (j_{\nu_{p_1+1}} \circ \ldots)) \circ \ldots)$$

et, si (4) est supposée vraie pour $n' = 1$, cette dernière expression est égale à

$$(F' \varepsilon_1 . (\overset{p_1}{\bigcirc} m) . (j_{\nu_1} \circ \ldots \circ j_{\nu_{p_1}})) \circ (F' \varepsilon_2 . (\overset{p_2}{\bigcirc} m) . j_{\nu_{p_1+1}} \circ \ldots)) \circ \ldots =$$

$$(F' \varepsilon_1 \circ F' \varepsilon_2 \circ \ldots) . (\overset{p_1 + \ldots + p_n}{\bigcirc} m) . (j_{\nu_1} \circ j_{\nu_2} \circ \ldots) =$$

$$F' \varepsilon . (\overset{n}{\bigcirc} m) . (j_{\nu_1} \circ \ldots \circ j_{\nu_n});$$

alors, en simplifiant par $j_{\nu_1} \circ \ldots \circ j_{\nu_n}$ on obtient (4). Démontrons la relation (4) pour $n' = 1$. On a

$$m . F_\theta \varepsilon . (j_{\nu_1} \circ \ldots \circ j_{\nu_n}) = m . j_{\varepsilon . (\nu_1 + \ldots + \nu_n)} = \text{(d'après (5))}$$

$$F'(\varepsilon . (\nu_1 + \ldots \nu_n)) . (\overset{q_1 + \ldots + q_n}{\bigcirc} I') =$$

$$F' \varepsilon . (F \nu_1 \circ \ldots \circ F \nu_n) . ((\overset{q_1}{\bigcirc} I') \circ \ldots \circ (\overset{q_n}{\bigcirc} I')) =$$

$$F'\varepsilon.((F\nu_1.(\overset{q_1}{\bigcirc} I'))\circ\ldots\circ(F\nu_n.(\overset{q_n}{\bigcirc} I'))) = \text{(d'après (5))}$$

$$F'\varepsilon.((m.j_{\nu_1})\circ\ldots\circ(m.j_{\nu_n})) = F'\varepsilon.(\overset{n}{\bigcirc} m).(j_{\nu_1}\circ\ldots\circ j_{\nu_n}),$$

ce qui, après simplification par $j_{\nu_1}\circ\ldots\circ j_{\nu_n}$, achève de montrer l'existence du morphisme $m: F_\theta \to F'$ de $Str_{\overline{\Delta}}(\overline{\mathfrak{D}})$, puisque pour $\tau = 1$ dans (5) on obtient $m.I = I'$.

Ce morphisme est unique. En effet, soit $m': F_\theta \to F'$ tel que l'on ait $m'.I = I'$. En appliquant (1) au cas particulier $\nu_1 = \nu_2 = \ldots = \nu_n = 1$, on obtient

$$F_\theta\tau.(\overset{n}{\bigcirc} I) = j_{\tau.n} = j_\tau$$

et donc

$$m'.j_\tau = m'.F_\theta\tau.(\overset{n}{\bigcirc} I) = \text{(par définition de } m')$$

$$F'\tau.(\overset{n}{\bigcirc} m').(\overset{n}{\bigcirc} I) = F'\tau.(\overset{n}{\bigcirc} I') \underset{\text{d'après (5)}}{=} m.j_\tau.$$

En simplifiant par j_τ, on obtient $m = m'$.

3° Une telle correspondance (qui associe une $\overline{\Delta}$-structure F_θ à tout objet θ) se prolonge en un foncteur adjoint $\mathfrak{D} \to Str_{\overline{\Delta}}(\overline{\mathfrak{D}})$ du foncteur d'oubli $Str_{\overline{\Delta}}(\overline{\mathfrak{D}}) \to \mathfrak{D}$. De ce couple d'adjoints, on déduit un triple qu'on notera $\mathbf{T}_{\overline{\Delta}}(\overline{\mathfrak{D}}) = (T, I, K)$. Le morphisme qui était noté j_1 sera noté maintenant $I\theta$. On va construire un foncteur

$$E': Alg(\mathbf{T}_{\overline{\Delta}}(\overline{\mathfrak{D}})) \to Str_{\overline{\Delta}}(\overline{\mathfrak{D}}).$$

Soit $b: T\theta \to \theta$ une $\mathbf{T}_{\overline{\Delta}}(\overline{\mathfrak{D}})$-algèbre et posons, pour tout $\varepsilon: n \to n'$,

$$F\varepsilon = (\overset{n'}{\bigcirc} b).F_\theta\varepsilon.(\overset{n}{\bigcirc} I\theta).$$

On va montrer que cette formule définit une $\overline{\Delta}$-structure F sur θ. D'abord F commute avec les premières lois; ceci se vérifie en montrant que, si $\varepsilon = \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_{n'}$ est la décomposition unique de ε, on a

$$F\varepsilon = F\varepsilon_1 \circ F\varepsilon_2 \circ \ldots \circ F\varepsilon_{n'}.$$

Montrons que $F: \Delta \to \mathfrak{D}$ est un foncteur. Pour tout entier n, on a $Fn = \overset{n}{\bigcirc}(F1)$. Si $\varepsilon: n \to n'$ et $\varepsilon': n' \to n''$ sont deux morphismes «consécutifs» de Δ, on trouve

$$F\,\varepsilon'.\,F\,\varepsilon = (\overset{n''}{\bigcirc} b).\,F_\theta\,\varepsilon'.(\overset{n'}{\bigcirc} T\,b).(\overset{n'}{\bigcirc} I\,T\,\theta).\,F_\theta\,\varepsilon.(\overset{n}{\bigcirc} I\,\theta) =$$

$$(\overset{n''}{\bigcirc} b).(\overset{n''}{\bigcirc} T\,b).\,F_{T\theta}\,\varepsilon'.(\overset{n'}{\bigcirc} I\,T\,\theta).\,F_\theta\,\varepsilon.(\overset{n}{\bigcirc} I\,\theta) =$$

$$(\overset{n''}{\bigcirc}(b.\,T\,b)).F_{T\theta}\,\varepsilon'.(\overset{n'}{\bigcirc} I\,T\,\theta).\,F_\theta\,\varepsilon.(\overset{n}{\bigcirc} I\,\theta) =$$

$$(\overset{n''}{\bigcirc}(b.\,K\,\theta)).\,F_{T\theta}\,\varepsilon'.(\overset{n'}{\bigcirc} I\,T\,\theta).\,F_\theta\,\varepsilon.(\overset{n}{\bigcirc} I\,\theta) =$$

$$(\overset{n''}{\bigcirc} b).(\overset{n''}{\bigcirc} K\,\theta).\,F_{T\theta}\,\varepsilon'.(\overset{n'}{\bigcirc} I\,T\,\theta).\,F_\theta\,\varepsilon.(\overset{n}{\bigcirc} I\,\theta) =$$

$$(\overset{n''}{\bigcirc} b).\,F_\theta\,\varepsilon'.(\overset{n'}{\bigcirc} K\,\theta).(\overset{n'}{\bigcirc} I\,T\,\theta).\,F_\theta\,\varepsilon.(\overset{n}{\bigcirc} I\,\theta) =$$

$$(\overset{n''}{\bigcirc} b).\,F_\theta\,\varepsilon'.\,F_\theta\,\varepsilon.(\overset{n}{\bigcirc} I\,\theta) =$$

$$(\overset{n''}{\bigcirc} b).\,F_\theta(\varepsilon'.\,\varepsilon).(\overset{n}{\bigcirc} I\,\theta) = F(\varepsilon'.\,\varepsilon).$$

Donc F est une $\overline{\Delta}$-structure. Posons $E'(b) = F$; on peut prolonger sans difficulté E' aux morphismes en remarquant qu'un morphisme de $\mathbf{T}_{\overline{\Delta}}(\overline{\overline{\mathfrak{D}}})$ est une $\mathbf{T}_{\overline{\Delta}}(\overline{\overline{\mathfrak{D}}})^{2}$-algèbre.

On vérifie facilement que E' est l'inverse du foncteur d'Eilenberg-Moore par un raisonnement analogue à celui du lemme 1. ■

PROPOSITION A.3. *A tout pseudo-foncteur (II.1)*

$$(F, u, c) : (\mathfrak{D}, 1, \circ) \to (\mathfrak{D}', 1, \circ)$$

entre catégories monoïdales strictes dénombrablement distributives, on peut associer un morphisme de triples $\mathbf{T}_{\overline{\Delta}}(\overline{\overline{\mathfrak{D}}}) \to \mathbf{T}_{\overline{\Delta}}(\overline{\overline{\mathfrak{D}}}')$.

PREUVE. Si $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n, \dots$ sont des objets de $\mathfrak{D}$, posons:

$$\begin{cases} c_0(0) = u \text{ (où } 0 \text{ désigne l'unique morphisme de } \mathbf{1}), \\ c_1(\theta_1) = id_{F\theta_1}, \quad c_2(\theta_1, \theta_2) = c(\theta_1, \theta_2), \quad \text{et par récurrence} \\ c_{n+1}(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n, \theta_{n+1}) = \\ c_n(\theta_1, \dots, \theta_n \circ \theta_{n+1}).(F(\theta_1) \circ \dots \circ F(\theta_{n-1}) \circ c(\theta_n, \theta_{n+1})). \end{cases}$$

pour tout entier $n \geqslant 3$. De façon analogue, posons

$$\bigcirc_0 0 = 1, \quad \bigcirc_1 \theta_1 = \theta_1, \quad \bigcirc_2(\theta_1, \theta_2) = \theta_1 \circ \theta_2$$

et par récurrence

$$\bigcirc_{n+1}(\theta_1, \dots, \theta_n, \theta_{n+1}) = (\bigcirc_n(\theta_1, \dots, \theta_n)) \circ \theta_{n+1}.$$

On définit ainsi, pour tout $n \geqslant 0$, un foncteur $\bigcirc_n : \mathfrak{D}^n \to \mathfrak{D}$ et une transformation naturelle $c_n : \bigcirc_n F^n \to F\bigcirc_n$ dite de «$n^{\text{ième}}$ cohérence». Nous admettrons la formule suivante de la «théorie des cohérences», pour tout $\theta \in |\mathfrak{D}|$ et $(p_1, p_2, \dots, p_n) \in \mathbf{N}^n$, où $n \in \mathbf{N}$,

$$(5) \qquad c_n(\overset{p_1}{\bigcirc}\theta, \dots, \overset{p_n}{\bigcirc}\theta).(d_{p_1}\theta \circ \dots \circ d_{p_n}\theta) = d_{p_1+\dots+p_n}\theta,$$

en posant $d_n\theta = c_n(\theta, \theta, \dots, \theta)$; on définit ainsi une transformation naturelle $d_n : \bigcirc_n F \to F\bigcirc_n$. (Indiquons simplement que cette formule se déduit facilement du lemme 4 qui correspond au cas où $\mathfrak{D} = \mathbf{1}$).

Pour tout $\theta \in |\mathfrak{D}|$, soit $j_\varepsilon\theta : \overset{n}{\bigcirc}\theta \to T\theta$ le morphisme noté j_ε dans la proposition A.1. On définit des transformations naturelles $j_\varepsilon : \bigcirc_n \to T$; soit $d : TF \to FT$ la transformation naturelle telle que $d\theta : TF\theta \to FT\theta$ soit, pour tout $\theta \in |\mathfrak{D}|$, le crochet (de somme) caractérisé par:

$$(6) \qquad d\theta . j_\varepsilon F\theta = Fj_\varepsilon\theta . d_n\theta$$

pour tout $\varepsilon : n \to 1$. On a $d . j_\varepsilon F = Fj_\varepsilon . d_n$.

Démontrons maintenant que $(F, d) : \mathbf{T}_{\bar{\Delta}}(\bar{\mathfrak{D}}) \to \mathbf{T}_{\bar{\Delta}}(\bar{\mathfrak{D}}')$ est un morphisme de triples. On a $d\theta . IF\theta = FI\theta$ en prenant $\varepsilon = 1$ dans (6), d'où la première des relations (2) de 0.2. Pour tout

$$(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \Delta_0^n, \quad \varepsilon_i : p_i \to 1 \ (1 \leqslant i \leqslant n) \quad \text{et} \quad \tau : n \to 1,$$

on a, par définition de K,

$$d\theta . KF\theta . j_\tau TF\theta . (j_{\varepsilon_1}F\theta \circ \dots \circ j_{\varepsilon_n}F\theta) =$$

$$d\theta . j_{\tau.(\varepsilon_1+\dots+\varepsilon_n)}F\theta \underset{\text{d'après (6)}}{=} Fj_{\tau.(\varepsilon_1+\dots+\varepsilon_n)}\theta . d_{p_1+\dots+p_n}\theta =$$

$$F(K\theta . j_\tau T\theta . (j_{\varepsilon_1}\theta \circ \dots \circ j_{\varepsilon_n}\theta)) . d_{p_1+\dots+p_n}\theta =$$

$$FK\theta . Fj_\tau T\theta . F(j_{\varepsilon_1}\theta \circ \dots \circ j_{\varepsilon_n}\theta) . d_{p_1+\dots+p_n}\theta \underset{\text{d'après (5)}}{=}$$

$$FK\theta . Fj_\tau T\theta . F(j_{\varepsilon_1}\theta \circ \dots \circ j_{\varepsilon_n}\theta) . c_n(\overset{p_1}{\bigcirc}\theta, \dots, \overset{p_n}{\bigcirc}\theta) . (d_{p_1}\theta \circ \dots \circ d_{p_n}\theta) =$$

$$FK\theta . Fj_\tau T\theta . d_n T\theta . (Fj_{\varepsilon_1}\theta \circ \dots \circ Fj_{\varepsilon_n}\theta) . (d_{p_1}\theta \circ \dots \circ d_{p_n}\theta) =$$

$$FK\theta . Fj_\tau T\theta . d_n T\theta . \overset{n}{\bigcirc} d\theta . (j_{\varepsilon_1}F\theta \circ \dots \circ j_{\varepsilon_n}F\theta) \underset{\text{d'après (6)}}{=}$$

$$FK\theta . dT\theta . j_\tau FT\theta . \overset{n}{\bigcirc} d\theta . (j_{\varepsilon_1} F\theta \circ \ldots \circ j_{\varepsilon_n} F\theta) =$$

$$FK\theta . dT\theta . Td\theta . \; j_\tau TF\theta . (j_{\varepsilon_1} F\theta \circ \ldots \circ j_{\varepsilon_n} F\theta) .$$

En simplifiant par les $j_{\varepsilon_1} F\theta \circ \ldots \circ j_{\varepsilon_n} F\theta$ puis par les $j_\tau F\theta$, on obtient la seconde des relations (2) de 0.2, c'est-à-dire

$$d\theta . KF\theta = FK\theta . dT\theta . Td\theta . \quad \blacksquare$$

Voici un cas où $\mathbf{T}_\Delta^-(\overline{\mathfrak{D}})$ est fortement cartésien (voir III.1). Supposons que $\overline{\mathfrak{D}}$ soit dénombrablement distributive et vérifie de plus les conditions:

(D') $\mathfrak{D}$ admet des produits fibrés (finis); les foncteurs Y_θ et Y'_θ de l'axiome (T) commutent avec les produits fibrés (finis).

(D") Les sommes dans $\mathfrak{D}$ commutent avec les produits fibrés (finis), elles sont universelles (et par suite les injections canoniques de sommes sont des monomorphismes d'après le lemme de la proposition III.1.20).

PROPOSITION A.1. *Si ces conditions sont vérifiées, alors* $\mathbf{T}_\Delta^-(\overline{\mathfrak{D}})$ *est fortement cartésien.*

PREUVE. T commute avec les produits fibrés d'après (D') et la commutation des sommes et des produits fibrés. La dernière condition de (D") entraîne que, si une somme (dans $\mathfrak{D}^2$) est un épimorphisme (resp. un monomorphisme), alors chacun de ses termes est un épimorphisme (resp. un monomorphisme); puisque les sommes sont universelles, on en déduit que I est cartésienne (II.2). On montre ensuite que K est cartésienne: plus généralement tout crochet de somme dans $\mathfrak{D}^2$ est cartésien; on le constate en prouvant d'abord que tout crochet de la forme «codiagonale» est cartésien (effectuer un produit fibré avec une codiagonale). $\blacksquare$

Notons en passant le fait suivant: si $\mathfrak{D}$ est une catégorie quelconque, le «but» d'une limite inductive dans $\mathfrak{D}^2$ est toujours une limite inductive; la «source» aussi, lorsque $\mathfrak{D}$ admet un objet final.

3. Théories et multicatégories.

Nous allons montrer qu'il y a équivalence entre la donnée d'une théorie monoïdale stricte (A.2) et celle d'une multicatégorie au sens de

[La]. La proposition III.2.21 peut se compléter ($Kl(\mathbf{T})$ est défini en 0.2):

PROPOSITION A.5. *Soit* $\mathbf{T}$ *un triple cartésien sur la catégorie* $\mathcal{E}$ *et soit* $\theta = (b, a, i, k)$ *une* $\mathbf{T}$*-catégorie sur* $e \in |\mathcal{E}|$*; on a une* $Kl(\mathbf{T})$*-catégorie sur* $e \in |Kl(\mathbf{T})|$ *qui se projette sur la* $\mathcal{E}$*-catégorie* $(Tb, Ke.Ta, Ti, Tk)$ *de la proposition III.2.21 par le foncteur d'oubli* $Kl(\mathbf{T}) \to \mathcal{E}$.

PREUVE. T commute avec les produits fibrés finis, donc transforme toute $\mathcal{E}$-catégorie en une $\mathcal{E}$-catégorie, et il est évident que

$(Ke, K\pi): (TTb, T(Ke.Ta), TTi, TTk) \to (Tb, Ke.Ta, Ti, Tk)$

est un $\mathcal{E}$-foncteur, et par suite définit sur $e \in |Kl(\mathbf{T})|$ une $Kl(\mathbf{T})$-catégorie. En effet,

$$Ke.T(Ke.Ta) = Ke.TKe.TTa =$$
$$Ke.KTe.TTa = Ke.Ta.K\pi. \quad \blacksquare$$

L'intérêt de cette proposition est de préciser certains aspects de la structure de $\mathbf{T}$-catégorie pour un triple cartésien. En particulier, si $\mathbf{T}$ est le triple $\mathbf{N}$ des chemins de III.3, nous allons voir que cela correspond à l'axiome (T) de A.2.

On a un isomorphisme évident $Ens \to Gr/1$ qui à tout ensemble E associe $\vec{E}$, unique graphe sur 1 dont E soit l'ensemble des morphismes. $\vec{N1}$ muni de sa structure de monoïde libre est isomorphe à l'ensemble des entiers positifs ou nuls muni de l'addition ordinaire; on identifie ces deux structures. Alors 0 note à la fois l'objet de $\vec{N1}$ et le morphisme identique id_0, ce qui revient à la convention habituelle.

PROPOSITION A.6. *Il y a équivalence entre la donnée d'une multicatégorie de Lambek sur* 1 *et celle d'une théorie monoïdale stricte. L'unique* $\mathbf{N}$*-algèbre sur* 1 *correspond à la «théorie des monades» (c'est aussi la* $\mathbf{N}$*-multicatégorie grossière sur* 1 *!).*

PREUVE. Soit $\theta = (b, a, i, k)$ une multicatégorie de Lambek sur 1. Soit $\vec{\Delta}_0$ l'objet (qui est un graphe sur 1 ayant Δ_0 pour ensemble de morphismes) des morphismes de cette multicatégorie. La proposition III.2.21 nous indique comment construire une $Gr/1$-catégorie et donc, par l'isomorphisme $Gr/1 \to Ens$, une catégorie ayant pour objets les entiers $\geqslant 0$ et pour morphismes ceux de $N\vec{\Delta}_0$. La proposition A.5 nous montre comment on peut compléter cette donnée en une catégorie monoïdale $\overline{\Delta}$, les structures de monoïdes sur les objets et sur les flèches de Δ étant, de plus, libres, ce qui exprime l'axiome (T).

Inversement, si $\overline{\Delta} = (\Delta_0, 1, +)$ est une théorie monoïdale stricte, la construction d'une multicatégorie au sens de [La] est immédiate et la correspondance ainsi obtenue est une bijection. ■

Ce résultat suggère qu'il y a beaucoup de théories et peut servir de guide dans leur construction. On constate donc que la notion de **T**-catégorie n'est qu'une «**T**-structure» parmi d'autres. La structure de **T**-graphe en est un autre exemple.

EXEMPLES DE THEORIES MONOÏDALES STRICTES. (Nous laissons au lecteur le soin de définir la composition dans chaque cas).

1° *Objet pointé*: Δ_0 se réduit à deux éléments:

$$id_1 : 1 \to 1 \quad \text{et} \quad \iota : 0 \to 1.$$

2° *Monade non unitaire*: Δ_0 se réduit à deux éléments:

$$id_1 : 1 \to 1 \quad \text{et} \quad \kappa : 2 \to 1.$$

3° *Modules*: Δ_0 est un ensemble de morphismes de la forme $\lambda : 1 \to 1$ et cet ensemble est muni d'une structure de monoïde, d'unité $id_1 : 1 \to 1$.

BIBLIOGRAPHIE

[Ba] M. BARR, Relationnal algebras, *Lecture Notes 137*, Springer (1969).

[Be] J. BENABOU, Introduction to bicategories, *Lecture Notes 47*, Springer (1967).

[Bu] A. BURRONI, Esquisse des catégories à limites et des quasi-topologies, *Esquisses Mathématiques 5*, Université Paris 7 (1970).

[Eh] C. EHRESMANN, Catégories structurées généralisées, *Cahiers Top. et Géom. dif. X-1*, Dunod, Paris (1968).

[La] J. LAMBEK, Deductive systems and categories, *Lecture Notes 86*, Springer (1969).

[Ma] E. MANES, A triple theoretic construction, *Lecture Notes 80*, Springer (1969).

(Cette bibliographie est limitée aux articles qui ont directement inspiré ce travail - d'autres références figurent dans le texte).

Département de Mathématiques, Tour 55
Université Paris 7
2, Place Jussieu
PARIS (5^e)