Cahiers de
topologie et géométrie différentielle
catégoriques

Christian Lair

Foncteurs d'omission de structures algébriques

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 12, nº 2 (1971), p. 147-186

<http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1971__12_2_147_0>

CAHIERS DE TOPOLOGIE *Vol. XII, 2*
ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE

FONCTEURS D'OMISSION DE STRUCTURES ALGEBRIQUES

par Christian LAIR

INTRODUCTION

Le but essentiel de cet article est de trouver une condition nécessaire et suffisante pour qu'une catégorie donnée $L^{\cdot}$ soit une catégorie de «morphismes algébriques» au-dessus de la catégorie pleine d'applications $\mathfrak{M}$ entre ensembles d'un même univers $\mathfrak{M}_0$.

Il est, tout d'abord, nécessaire d'utiliser une définition précise de la notion (intuitive) de structure algébrique. Nous adoptons celle de C. Ehresmann [E.T.S.A.] : Une structure est algébrique lorsqu'on peut la décrire au moyen d'une esquisse, i. e. d'un graphe multiplicatif muni de certains cônes projectifs et inductifs. Cette notion diffère peu de celle de faisceau sur une catégorie marquée de C. Chevalley [C.M.F.] . Cependant, elle est plus générale, en ce sens que l'on accepte la donnée simultanée, dans l'esquisse, de cônes projectits et de cônes inductifs. Elle est plus précise, car on sait associer à une esquisse, sous certaines conditions, un «type». Enfin, elle englobe la notion d'algèbre associée à un triple dans $\mathfrak{M}$.

Dans une première partie, il nous a paru nécessaire d'étudier, aussi généralement que possible, l'existence de limites projectives ou inductives dans une catégorie $L^{\cdot}$ équivalente à une catégorie de réalisations d'une esquisse dans un type. Nous montrons, de plus, que l'on peut associer, à chaque unité du graphe multiplicatif sous-jacent à l'esquisse, un foncteur de $L^{\cdot}$ dans $\mathfrak{M}$, que l'on appelle foncteur d'omission. Ces foncteurs d'omission possèdent certaines propriétés de compatibilité avec les limites. On fait évidemment un usage abondant des théorèmes d'existence de structures libres, de structures quasi-quotients et de limites inductives pour parvenir à ces diverses propriétés [C.S.L.] . Nous appliquons ces résultats à de nombreux cas particuliers (aux catégories de structures algébriques usuelles), par exemple à la catégorie des homomorphismes entre corps associée à l'univers $\mathfrak{M}_0$.

Dans la deuxième partie, nous étudions les propriétés particulières du foncteur d'omission associé à l'une des unités u, pour certaines «positions» de u. Intuitivement, nous supposons que l'esquisse admet une idée (i. e. [I.M.S.A.] un système qui l'engendre par composition et limites) à laquelle appartient u et que la construction de l'esquisse à partir de l'idée «ordonne» les unités. Nous aboutissons ainsi, lorsque cet ordre admet u pour plus petit élément et lorsque les seules limites sont des produits, à un théorème de triplabilité de ce foncteur d'omission. Ce théorème explique en quoi la notion d'algèbre associée à un triple est très proche de celle de «structure algébrique dont les lois de composition sont partout définies», ce qui n'est pas fait pour surprendre.

Dans la troisième partie, nous montrons que, si $L^{\cdot}$ est une catégorie équivalente à une catégorie de réalisations d'une esquisse dans $\mathfrak{M}$, on peut prendre comme esquisse de ses structures (i. e. de ses unités) la catégorie $\mathfrak{N}(\mathfrak{M}, L^{\cdot})^{\square\square}$ des transformations naturelles entre foncteurs de $L^{\cdot}$ dans $\mathfrak{M}$, munie d'un choix convenable de limites projectives et inductives. En particulier, $\mathfrak{N}(\mathfrak{M}, L^{\cdot})^{\square\square}$ admet un système générateur ayant pour unités les foncteurs d'omission; ceci justifie l'intérêt qu'on leur a porté dans les parties I et II.

Enfin, dans la quatrième partie, nous considérons les esquisses n'ayant que des cônes projectifs. On montre alors que la sous-catégorie de $\mathfrak{N}(\mathfrak{M}, L^{\cdot})^{\square\square}$ ayant pour objets les foncteurs représentables suffit pour esquisser (à l'aide de limites projectives convenables) les structures de $L^{\cdot}$. En particulier les foncteurs d'omission sont représentables.

Signalons que ces derniers résultats peuvent être rapprochés des résultats récents de F. Ulmer [L.P.L.G.] . Plus précisément, les résultats de F. Ulmer fournissent des conditions suffisantes d'application du théorème 2-IV. Inversement, ce théorème explique le rôle du «système de générateurs» d'une catégorie «localement engendrée» ou «présentable».

Je remercie très vivement Madame A. Bastiani pour les très nombreuses améliorations qu'elle a apportées au texte initial.

0. HYPOTHESES. TERMINOLOGIE. NOTATIONS.

0.0. Nous nous plaçons dans un bon modèle de la Théorie des ensembles, vérifiant les axiomes des univers et de fondation [T.E.]. Nous supposons que $\mathfrak{M}_0$, $\hat{\mathfrak{M}}_0$ et $\hat{\hat{\mathfrak{M}}}_0$ sont des univers tels que:

$$\mathfrak{M}_0 \subset \hat{\mathfrak{M}}_0 \subset \hat{\hat{\mathfrak{M}}}_0 , \quad \mathfrak{M}_0 \in \hat{\mathfrak{M}}_0 , \quad \hat{\mathfrak{M}}_0 \in \hat{\hat{\mathfrak{M}}}_0 .$$

On note $\tilde{\mathfrak{M}}_0$ l'ensemble des éléments de $\hat{\mathfrak{M}}_0$ équipotents à un élément de $\mathfrak{M}_0$ et $\tilde{\hat{\mathfrak{M}}}_0$ l'ensemble des éléments de $\hat{\hat{\mathfrak{M}}}_0$ équipotents à un élément de $\hat{\mathfrak{M}}_0$. Si A est un ensemble, on représente par $\overline{A}$ son cardinal canonique c'est-à-dire l'ordinal initial équipotent à A.

0.1. Une structure de catégorie (resp. de graphe multiplicatif) sur un ensemble C, de loi de composition «.», est désignée par $C^\cdot$. Dans ce cas, $C_0^\cdot$ est l'ensemble des unités de $C^\cdot$, $\alpha^\cdot$ et $\beta^\cdot$ sont les applications source et but, et, pour tout couple (e', e) d'unités, on pose

$$hom_{C^\cdot}(e', e) = e' . C . e = \{ f \in C \mid \alpha^\cdot(f) = e,\ \beta^\cdot(f) = e' \}.$$

Enfin $C^{\cdot *}$ désigne la structure duale de $C^\cdot$ et $C_\gamma^\cdot$ l'ensemble des inversibles de $C^\cdot$. Dans certains cas où la loi de composition est définie canoniquement, la catégorie $C^\cdot$ est seulement désignée par C, ses applications source et but par α et β, sa duale par C^*.

Soient $C_1^\cdot$ et $C_2^\cdot$ deux catégories (resp. deux graphes multiplicatifs). Un foncteur (resp. néofoncteur) F de $C_1^\cdot$ dans $C_2^\cdot$ est noté sous la forme $F = (C_2^\cdot, \underline{F}, C_1^\cdot)$, où $\underline{F}$ est la surjection sous-jacente. Il lui correspond le foncteur dual $F^* = (C_2^{\cdot *}, \underline{F}, C_1^{\cdot *})$. Si e est une unité de $C_2^\cdot$, on note $\hat{e}$ (ou $e^\wedge$) le foncteur de $C_1^\cdot$ dans $C_2^\cdot$ «constant sur e».

Si F_1 et F_2 sont deux néofoncteurs de $C_1^\cdot$ dans $C_2^\cdot$, une transformation naturelle θ de F_1 vers F_2 est notée $(F_2, \underline{\theta}, F_1)$, où $\underline{\theta}$ est la surjection de $C_{1 0}^\cdot$ dans $C_2^\cdot$ qui la définit. Lorsque $C_2^\cdot$ est une catégorie, on désigne par $\mathfrak{N}(C_2^\cdot, C_1^\cdot)^{\square\square}$ (ou simplement $\mathfrak{N}(C_2^\cdot, C_1^\cdot)$) la catégorie (longitudinale) des transformations naturelles correspondante; ses unités sont identifiées aux foncteurs de $C_1^\cdot$ dans $C_2^\cdot$. Si $f \in C_2$, la transformation naturelle «constante sur f» est notée $\hat{f}$ (ou $f^\wedge$).

Si $e \in C^{\cdot}_{2\,0}$, une transformation naturelle de la forme $(F, \underline{\theta}, \hat{e})$ (resp. $(\hat{e}, \underline{\theta}, F)$) appartenant à $\mathfrak{N}(C^{\cdot}_2, C^{\cdot}_1)$ est appelée $C^{\cdot}_1$-cône projectif (resp. inductif) de base F, de sommet e; les limites projectives (resp. inductives) naturalisées sont des cônes projectifs (resp. inductifs) particuliers.

Supposons de plus que Δ soit un foncteur de $C^{\cdot}_2$ vers une catégorie $C^{\cdot}$. Si $\theta = (F_2, \underline{\theta}, F_1) \in \mathfrak{N}(C^{\cdot}_2, C^{\cdot}_1)$, on note $\Delta\,\theta$ la transformation naturelle $(\Delta . F_2, \underline{\Delta\,\theta}, \Delta . F_1)$. Si X est une classe de Δ-monomorphismes [C.S.] et si θ est telle que $\underline{\theta}(e) \in X$ pour tout $e \in C_{1\,0}$, on dit que F_1 est un (X, Δ)-sous-néofoncteur de F_2.

0.2. Soit $\mathcal{F}_0$ l'ensemble des catégories (resp. $\mathcal{N}'_0$ l'ensemble des graphes multiplicatifs) $C^{\cdot}$ tels que $C \in \mathfrak{M}_0$. Soit $\mathfrak{M}$ (resp. $\mathcal{F}$, $\mathcal{N}'$) la catégorie pleine d'applications (resp. de foncteurs, de néofoncteurs) entre éléments de $\mathfrak{M}_0$ (resp. de $\mathcal{F}_0$, de $\mathcal{N}'_0$); la classe de ses unités est identifiée à $\mathfrak{M}_0$ (resp. à $\mathcal{F}_0$, $\mathcal{N}'_0$). Nous notons $p_{\mathcal{F}}$ (resp. $p_{\mathcal{N}'}$) le foncteur d'oubli fidèle canonique de $\mathcal{F}$ (resp. de $\mathcal{N}'$) vers $\mathfrak{M}$; il associe à $(C^{\cdot}_2, \underline{F}, C^{\cdot}_1)$ l'application sous-jacente $(C_2, \underline{F}, C_1)$.

On utilise des notations analogues relativement aux univers $\hat{\mathfrak{M}}_0$ et $\hat{\hat{\mathfrak{M}}}_0$, en surmontant les lettres $\mathfrak{M}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{N}'$ de un ou deux «^» [M.M.A.].

La saturante $\tilde{\mathfrak{M}}$ de $\mathfrak{M}$ dans $\hat{\mathfrak{M}}$ [C.S.] est une catégorie équivalente à $\mathfrak{M}$. Soit $m = (\mathfrak{M}, \underline{m}, \tilde{\mathfrak{M}})$ un foncteur tel que $m . i_{\mathfrak{M}} = \mathfrak{M}$ et soit γ une équivalence naturelle

$$\gamma = (i_{\mathfrak{M}} . m, \underline{\gamma}, \tilde{\mathfrak{M}}) \in \mathfrak{N}(\tilde{\mathfrak{M}}, \tilde{\mathfrak{M}})_{\gamma}, \quad \text{où } i_{\mathfrak{M}} = (\tilde{\mathfrak{M}}, \underline{id}_{\mathfrak{M}}, \mathfrak{M})$$

est l'injection canonique. On dit qu'une catégorie $C^{\cdot} \in \hat{\mathcal{F}}_0$ est une $\tilde{\mathfrak{M}}_0$-catégorie si:

$$hom_{C^{\cdot}}(e', e) \in \tilde{\mathfrak{M}}_0 \quad \text{pour tout} \quad (e', e) \in C^{\cdot}_0 \times C^{\cdot}_0 .$$

On en déduit le foncteur (de Yoneda) $Y_{C^{\cdot}} = (\mathfrak{N}(\mathfrak{M}, C^{\cdot}), \underline{Y}_{C^{\cdot}}, C^{\cdot *})$, défini par:

$$\underline{Y}_{C^{\cdot}}(f) = m\, hom_{C^{\cdot}}(-, f) = Hom_{C^{\cdot}}(-, f).$$

Si $F = (\mathfrak{M}, \underline{F}, C^{\cdot}) \in \hat{\mathcal{F}}_0$ et si $C^{\cdot}$ est une $\tilde{\mathfrak{M}}_0$-catégorie, nous désignons par $H(F)^{\cdot}$ la catégorie des hypermorphismes associée à F, i. e.

$$H(F) = \{(f, x) \mid f \in C,\ x \in F(\alpha(f))\},$$

$(f', x').(f, x) = (f'.f, x)$ si et seulement si $\alpha^{\cdot}(f') = \beta^{\cdot}(f)$ et $F(f)(x) = x'$. Soit $P(F) = (C^{\cdot}, \underline{P(F)}, H(F)^{\cdot})$ le foncteur d'oubli défini par:

$$\underline{P(F)}(f, x) = f, \quad \text{si } (f, x) \in H(F).$$

On sait que F est limite inductive du foncteur $Y_{C^{\cdot}}.P(F)^*$, c'est-à-dire que, pour tout $e \in C_0^{\cdot}$, $F(e)$ est une limite inductive dans $\mathfrak{M}$ du foncteur $\Phi_{F,e}$, où $\Phi_{F,e} = (\mathfrak{M}, \underline{\Phi}_{F,e}, H(F)^*)$ est défini par

$$\underline{\Phi}_{F,e}(f, x) = Hom_{C^{\cdot}}(e, f), \text{ pour tout } (f, x) \in H(F).$$

0.3. On suppose données deux parties $\mathfrak{I}$ et $\mathfrak{I}'$ de $\hat{\mathfrak{F}}_0$.

Soit $U^{\cdot}$ un graphe multiplicatif; on appelle *application $\mathfrak{I}$-cône projectif* (resp. *$\mathfrak{I}'$-cône inductif) partiellement définie sur $U^{\cdot}$* une application associant à certains néofoncteurs $F = (U^{\cdot}, \underline{F}, I^{\cdot})$, où $I^{\cdot} \in \mathfrak{I}$ (resp. $\in \mathfrak{I}'$), un $I^{\cdot}$-cône projectif (resp. inductif) de base F.

Pour les définitions d'esquisse, de prototype, de type, nous renvoyons à [E.T.S.A.]. On note:

- $\mathfrak{S}_0^{\mathfrak{I}\mathfrak{I}'}$ l'ensemble des $(\mathfrak{I}, \mathfrak{I}')$-esquisses (non pointées) de la forme $\sigma = (U^{\cdot}, \mu_{U^{\cdot}}, \mu'_{U^{\cdot}})$, où $U^{\cdot} \in \hat{\mathfrak{N}}_0'$; en particulier $\mu_{U^{\cdot}}$ (resp. $\mu'_{U^{\cdot}}$) est une application $\mathfrak{I}$-cône projectif (resp. $\mathfrak{I}'$-cône inductif) partiellement définie sur $U^{\cdot}$.

- $'\mathfrak{F}_0^{\mathfrak{I}\mathfrak{I}'}$ (resp. $\mathfrak{F}_0^{\mathfrak{I}\mathfrak{I}'}$) la partie de $\mathfrak{S}_0^{\mathfrak{I}\mathfrak{I}'}$ constituée des $(\mathfrak{I}, \mathfrak{I}')$-prototypes (resp. des $(\mathfrak{I}, \mathfrak{I}')$-types) $\Sigma = (V^{\cdot}, \mu_{V^{\cdot}}, \mu'_{V^{\cdot}})$ tels que $V^{\cdot} \in \hat{\mathfrak{F}}_0$; donc $\mu_{V^{\cdot}}$ et $\mu'_{V^{\cdot}}$ sont des applications $\mathfrak{I}$-limites projectives et $\mathfrak{I}'$-limites inductives partiellement (resp. totalement) définies sur $V^{\cdot}$; si $\mu_{V^{\cdot}}(\phi)$, où ϕ est un néofoncteur de $I^{\cdot} \in \mathfrak{I}$ dans $V^{\cdot}$, est défini, son sommet est noté $\underleftarrow{Lim}\,\phi$; si $\mu'_{V^{\cdot}}(\phi)$ est défini, son sommet est noté $\underrightarrow{Lim}\,\phi$.

- $\mathfrak{L}_0^{\mathfrak{I}\mathfrak{I}'}$ la partie de $\hat{\mathfrak{F}}_0$ constituée des catégories $C^{\cdot}$ à $\mathfrak{I}$- (resp. à $\mathfrak{I}'$-) limites projectives (resp. inductives).

- $\mathfrak{S}^{\mathfrak{I}\mathfrak{I}'}$ (resp. $'\mathfrak{F}^{\mathfrak{I}\mathfrak{I}'}$, $\mathfrak{F}^{\mathfrak{I}\mathfrak{I}'}$) la catégorie pleine d'homomorphismes entre éléments de $\mathfrak{S}_0^{\mathfrak{I}\mathfrak{I}'}$ (resp. de $'\mathfrak{F}_0^{\mathfrak{I}\mathfrak{I}'}$, $\mathfrak{F}_0^{\mathfrak{I}\mathfrak{I}'}$). Ses éléments sont donc les triplets $\bar{F} = (\sigma_2, F, \sigma_1)$ tels que

$F = (U_2^{\cdot}, \underline{F}, U_1^{\cdot}) \in \hat{\mathfrak{N}}'$, $\sigma_s = (U^{\cdot}, \mu_{U_s^{\cdot}}, \mu'_{U_s^{\cdot}})$, $s = 1, 2$,

$\nu_2(F.\phi)$ est défini et égal à $F\nu_1(\phi)$ lorsque $\nu_1(\phi)$ est défini, où

$\phi \in U^\cdot . \hat{\mathfrak{N}}' . I^\cdot$ et $\nu_s = \mu_{U^\cdot_s}$ ou $\mu'_{U^\cdot_s}$ pour $s = 1, 2$.

- $\mathfrak{V}^{\mathfrak{I}\mathfrak{I}'}$ (resp. $\mathfrak{L}^{\mathfrak{I}\mathfrak{I}'}$) la sous-catégorie (non pleine) de $\hat{\mathfrak{F}}$ dont les éléments sont les foncteurs compatibles avec les $\mathfrak{I}$-limites projectives et $\mathfrak{I}'$-limites inductives entre éléments de $\hat{\mathfrak{F}}_0$ (resp. de $\mathfrak{L}^{\mathfrak{I}\mathfrak{I}'}_0$). Si $F \in \mathfrak{L}^{\mathfrak{I}\mathfrak{I}'}$, on dit que F est à $\mathfrak{I}$-limites projectives et $\mathfrak{I}'$-limites inductives [M.M.A.].

Si $\mathfrak{I} \cup \mathfrak{I}' \in \hat{\tilde{\mathfrak{M}}}_0$, on sait que $\mathfrak{S}^{\mathfrak{I}\mathfrak{I}'}$ est à $'\mathfrak{F}^{\mathfrak{I}\mathfrak{I}'}$- (resp. à $\mathfrak{F}^{\mathfrak{I}\mathfrak{I}'}$-)projections et l'on désigne par $'\mathbf{T}$ (resp. par $\mathbf{T}$) un adjoint (à gauche) du foncteur inclusion $i_{'\mathfrak{F}^{\mathfrak{I}\mathfrak{I}'}}$ (resp. $i_{\mathfrak{F}^{\mathfrak{I}\mathfrak{I}'}}$) de $'\mathfrak{F}^{\mathfrak{I}\mathfrak{I}'}$ (resp. de $\mathfrak{F}^{\mathfrak{I}\mathfrak{I}'}$) dans $\mathfrak{S}^{\mathfrak{I}\mathfrak{I}'}$ tel que

$$'\mathbf{T}_{|'\mathfrak{F}^{\mathfrak{I}\mathfrak{I}'}} = {'\mathfrak{F}^{\mathfrak{I}\mathfrak{I}'}} \quad \text{et} \quad \mathbf{T}_{|\mathfrak{F}^{\mathfrak{I}\mathfrak{I}'}} = \mathfrak{F}^{\mathfrak{I}\mathfrak{I}'}.$$

0.4. Soit $\sigma = (U^\cdot, \mu_{U^\cdot}, \mu'_{U^\cdot}) \in \mathfrak{S}^{\mathfrak{I}\mathfrak{I}'}_0$. Si $V^\cdot$ est une catégorie, on note $\mathfrak{V}(V^\cdot, \sigma)$ la sous-catégorie pleine de $\mathfrak{N}(V^\cdot, U^\cdot)$ ayant pour objets les *réalisations vagues* F de σ dans $V^\cdot$, c'est-à-dire les néofoncteurs $F = (V^\cdot, \underline{F}, U^\cdot)$ tels que $F\nu_{U^\cdot}(\phi)$ soit une limite projective (resp. inductive) naturalisée de $E.\phi$, lorsque $\phi \in U^\cdot . \hat{\mathfrak{N}}' . I^\cdot$ et que $\nu_{U^\cdot}(\phi)$ est défini, où $\nu_{U^\cdot} = \mu_{U^\cdot}$ (resp. $= \mu'_{U^\cdot}$).

Supposons de plus $\Sigma = (V^\cdot, \mu_{V^\cdot}, \mu'_{V^\cdot}) \in {'\mathfrak{F}^{\mathfrak{I}\mathfrak{I}'}_0}$. On désigne par $\mathfrak{S}(\Sigma, \sigma)$ la sous-catégorie pleine de $\mathfrak{N}(V^\cdot, U^\cdot)$ dont la classe $\mathfrak{S}(\Sigma, \sigma)_0$ des objets est formée des réalisations de σ dans Σ, i. e. des néofoncteurs $F = (V^\cdot, \underline{F}, U^\cdot)$ tels que $\bar{F} = (\Sigma, F, \sigma) \in \mathfrak{S}^{\mathfrak{I}\mathfrak{I}'}$.

On dit que σ est *Σ-régulière* si $\mathfrak{V}(V^\cdot, \sigma)$ est un élargissement de $\mathfrak{S}(\Sigma, \sigma)$ [C.S.].

Si $U'^\cdot$ est un sous-graphe multiplicatif de $U^\cdot$, on note $\sigma_{|U'^\cdot}$ la $(\mathfrak{I}, \mathfrak{I}')$-esquisse $(U'^\cdot, \mu_{U'^\cdot}, \mu'_{U'^\cdot})$ restriction de σ à $U'^\cdot$ [I.M.S.A.]. On dit que σ est *forte pour* $V^\cdot$ si:

$U^\cdot$ admet un sous-graphe multiplicatif $U'^\cdot$ tel que $U' \in \tilde{\mathfrak{M}}_0$

Si $F_s \in \mathfrak{V}(V^\cdot, \sigma)_0$, $s = 1, 2$, sont tels que $F_1|_{U'^\cdot} = F_2|_{U'^\cdot}$, alors F_1 et F_2 sont équivalents.

Si $T' = (F'_2, \underline{T}', F'_1) \in \mathfrak{V}(V^\cdot, \sigma_{|U'^\cdot})$ et s'il existe $F_s \in \mathfrak{V}(V^\cdot, \sigma)_0$ tels que $F'_s = F_s|_{U'^\cdot}$, $s = 1, 2$, alors il existe une unique transformation naturelle $T = (F_2, \underline{T}, F_1)$ telle que $T|_{U'^\cdot} = T'$ (donc T appartient à $\mathfrak{V}(V^\cdot, \sigma)$).

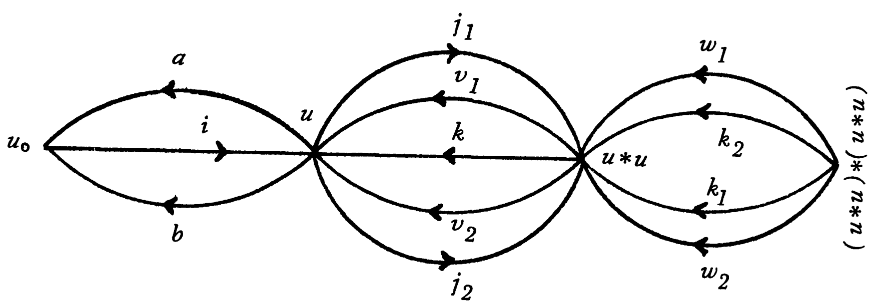
Si $V^\cdot \in \hat{\mathfrak{F}}_0$, on dira que $L^\cdot \in \hat{\mathfrak{F}}_0$ est une *catégorie $V^\cdot$-spécifiable* s'il existe $\sigma \in \mathcal{S}_0^{\mathfrak{I}\mathfrak{I}'}$ tel que $L^\cdot$ et $\mathfrak{V}(V^\cdot, \sigma)$ soient équivalentes.

Si $\Sigma = (V^\cdot, \mu_{V^\cdot}, \mu'_{V^\cdot}) \in {}'\mathcal{F}_0^{\mathfrak{I}\mathfrak{I}'}$, on dira que $L^\cdot \in \hat{\mathcal{F}}_0$ est une catégorie *fortement $V^\cdot$-spécifiable* s'il existe une $(\mathfrak{I}, \mathfrak{I}')$-esquisse $\sigma \in \mathcal{S}_0^{\mathfrak{I}\mathfrak{I}'}$, forte pour $V^\cdot$, telle que $L^\cdot$ et $\mathfrak{V}(V^\cdot, \sigma)$ soient équivalentes.

0.5. Si $\mathfrak{I}' = \emptyset$, on ne le fera figurer dans aucune des notations précédentes; de plus il nous arrivera d'identifier à $(U^\cdot, \mu_{U^\cdot})$ une esquisse projective, i.e. de la forme $(U^\cdot, \mu_{U^\cdot}, \emptyset)$.

On note $\Sigma^{\mathfrak{I}\mathfrak{I}'}(\mathfrak{M})$ le $(\mathfrak{I}, \mathfrak{I}')$-prototype canonique sur $\mathfrak{M}$.

On désigne par $\sigma_{\mathcal{F}}$ (resp. par $\sigma_{\mathcal{G}}$, par $\sigma_{\mathcal{C}}$) «l'esquisse d'une catégorie» (resp. d'un groupe, d'un corps, qu'il est facile de construire). Rappelons [E.T.S.A.] que le graphe sous-jacent à $\sigma_{\mathcal{F}}$ a la forme indiquée sur la figure ci-dessous; a, b, k, «représentent» respectivement les applications source, but et la loi de composition, v_s et w_s se réalisent comme projections canoniques de produits fibrés, i «est» l'injection canonique de la classe des unités dans la catégorie; les fléches j_s servent à écrire l'axiome des unités, et les k_s servent à écrire l'associativité: $k.k_1 = k.k_2$.



I. LIMITES DANS LES CATEGORIES SPECIFIABLES. ETUDE GLOBALE DES FONCTEURS D'OMISSION.

Dans ce qui suit, on donne une esquisse σ et un prototype Σ:

$$\sigma = (U^{\cdot}, \mu_{U^{\cdot}}, \mu'_{U^{\cdot}}) \in \mathcal{S}_0^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}, \quad \Sigma = (V^{\cdot}, \mu_{V^{\cdot}}, \mu'_{V^{\cdot}}) \in {}'\mathcal{F}_0^{\mathcal{J}\mathcal{J}'} .$$

Pour tout $u \in U_0^{\cdot}$, nous notons $\bar{p}_u^{V^{\cdot}} = (V^{\cdot}, \underline{\bar{p}}_u^{V^{\cdot}}, \mathfrak{R}(V^{\cdot}, U^{\cdot}))$ le foncteur défini par $\underline{\bar{p}}_u^{V^{\cdot}}(T) = T(u)$, lorsque $T \in \mathfrak{R}(V^{\cdot}, U^{\cdot})$; nous notons

$$\tilde{p}_u^{V^{\cdot}} = (V^{\cdot}, \underline{\tilde{p}}_u^{V^{\cdot}}, \mathcal{O}(V^{\cdot}, \sigma)) \quad \text{et} \quad p_u^{\Sigma} = (V^{\cdot}, \underline{p}_u^{\Sigma}, \mathcal{S}(\Sigma, \sigma))$$

ses restrictions,et nous les appelons *foncteurs d'omission pour* σ.

I.1. Cas projectif: existence de limites projectives.

Supposons que $\mathcal{J}' = \emptyset$ et $\mathcal{J} \subset \hat{\mathcal{F}}_0$.

PROPOSITION 1. *Si $V^{\cdot}$ est à $\mathcal{J}$-limites projectives, il en est de même pour $\mathcal{O}(V^{\cdot}, \sigma)$.*

Δ. Soient $J^{\cdot} \in \mathcal{J}$ et $\phi = (\mathcal{O}(V^{\cdot}, \sigma), \underline{\phi}, J^{\cdot})$ un foncteur; il en résulte un foncteur $j \cdot \phi$, où j est le foncteur d'inclusion de $\mathcal{O}(V^{\cdot}, \sigma)$ dans $\mathfrak{R}(V^{\cdot}, U^{\cdot})$. Comme $V^{\cdot}$ est à $J^{\cdot}$-limites projectives, $\mathfrak{R}(V^{\cdot}, U^{\cdot})$ l'est aussi. Désignons par F une limite projective de ϕ'. Il suffit de prouver que $F \in \mathcal{O}(V^{\cdot}, \sigma)_0$. Ceci s'établit sans difficulté en utilisant la propriété de commutation des $J^{\cdot}$-limites projectives avec les $I^{\cdot}$-limites projectives dans $V^{\cdot}$, lorsqu'elles existent et que $I^{\cdot} \in \mathcal{J}$. ∇

COROLLAIRE 1. *Si $L^{\cdot}$ est une catégorie équivalente à $\mathcal{O}(V^{\cdot}, \sigma)$ et si $V^{\cdot}$ est à $J^{\cdot}$-limites projectives, il en est de même pour $L^{\cdot}$. En particulier, il en est ainsi pour $\mathcal{S}(\Sigma, \sigma)$, lorsque σ est Σ-régulière.*

Par exemple, si $\mathcal{J} \subset \mathcal{F}_0$, comme $\mathfrak{M}$ est à $\mathcal{F}_0$-limites projectives, on en déduit que $\mathcal{O}(V^{\cdot}, \sigma)$ est à $\mathcal{F}_0$-limites projectives.

La démonstration de la proposition 1 permet d'énoncer:

PROPOSITION 2. *Pour tout $u \in U_0^{\cdot}$, si $V^{\cdot}$ est à $\mathcal{J}$-limites projectives, $\tilde{p}_u^{V^{\cdot}}$ est compatible avec les $\mathcal{J}$-limites projectives. Si de plus σ est Σ-régulière, il en est de même pour p_u^{Σ}.*

EXEMPLES. Ces résultats s'appliquent dans de nombreux cas, un choix convenable de la classe $\mathfrak{I}$ étant effectué:

- La catégorie $\mathcal{O}(\mathfrak{M}, \sigma\mathfrak{F})$, où $\sigma\mathfrak{F}$ est l'esquisse de catégorie, étant équivalente à $\mathcal{F}$, la catégorie $\mathcal{F}$ est à $\mathcal{F}_0$-limites projectives, et ses foncteurs d'omission (associés aux unités u, u_0, $u*u$,...) sont compatibles avec ces limites [E.T.S.A.].

- Il en est de même des catégories, associées à l'univers $\mathfrak{M}_0$, de foncteurs «compatibles» entre catégories à $I^{\cdot}$-limites projectives, catégories à $I^{\cdot}$-limites inductives, catégories pointées par une sous-classe de monomorphismes, d'épimorphismes, d'objets initiaux ou finals [T.N.G.], [E.Q.T.].

I.2. Cas projectif: existence de limites inductives.

Supposons encore $\mathfrak{I}' = \emptyset$. De plus:

1° $U \in \tilde{\mathfrak{M}}_0$, $\mathfrak{I} \subset \mathcal{F}_0$ et $\mathfrak{I} \in \tilde{\mathfrak{M}}_0$. On note $\hat{\lambda}$ l'ordinal régulier $\omega_{\tilde{\lambda}+1}$, d'indice $\tilde{\lambda}+1$, où $\tilde{\lambda}$ est l'ordinal borne supérieure des ordinaux $\overline{I}$, lorsque $I^{\cdot} \in \mathfrak{I}$; comme $\mathfrak{M}_0$ est un univers, on a $\hat{\lambda} \in \mathfrak{M}_0$ [T.E.].

2° $\Delta = (\hat{\mathfrak{M}}, \underline{\Delta}, \hat{V}^{\cdot})$ est un foncteur d'homomorphismes saturé.

3° $\delta = (\mathfrak{M}, \underline{\delta}, V^{\cdot})$ est un foncteur, restriction de Δ à la sous-catégorie pleine $V^{\cdot}$ de $\hat{V}^{\cdot}$.

4° Δ est à $\mathfrak{I}$-limites projectives et à $<\xi>$-limites inductives, pour tout ordinal $\xi \leqslant \hat{\lambda}$ (on note $<\xi>$ la catégorie de couples associée au bon ordre canonique sur l'ordinal ξ).

5° Δ est $(\mathfrak{M}, X . V_0^{\cdot})$-engendrant [C.S.L.], lorsque X est l'ensemble des Δ-monomorphismes.

La catégorie $\mathcal{O}(V^{\cdot}, \sigma)$ s'identifie alors à une sous-catégorie pleine de $\mathcal{O}(\hat{V}^{\cdot}, \sigma)$. Soit $\tilde{P}_\sigma^\Delta = (\hat{\mathfrak{M}}, \underline{\tilde{P}}_\sigma^\Delta, \mathcal{O}(\hat{V}^{\cdot}, \sigma))$ le foncteur défini par:

$$\underline{\tilde{P}}_\sigma^\Delta(\hat{F}) = \prod_{u \in U_0^{\cdot}} (\Delta . \hat{F}(u)), \quad \text{si } \hat{F} \in \mathcal{O}(\hat{V}^{\cdot}, \sigma)_0,$$

$$\underline{\tilde{P}}_\sigma^\Delta(\hat{T}) = \prod_{u \in U_0^{\cdot}} \underline{\Delta}\, \underline{\hat{T}}(u), \quad \text{si } \hat{T} \in \mathcal{O}(\hat{V}^{\cdot}, \sigma),$$

où $\prod_{u \in U_0^{\cdot}}$ désigne le foncteur $U_0^{\cdot}$-produits canonique dans $\hat{\mathfrak{M}}$ [M.M.A.]. De même on définit un foncteur $\tilde{p}_\sigma^\delta = (\tilde{\mathfrak{M}}, \underline{\tilde{p}}_\sigma^\delta, \mathcal{O}(V^{\cdot}, \sigma))$, qui s'identifie à une restriction de $\tilde{P}_\sigma^\Delta$.

Soit Y la partie de $\mathcal{O}(\hat{V}^{\cdot}, \sigma)$ dont les éléments sont les $\hat{T}$ tels que $\hat{T}(u) \in X$ pour tout $u \in U_0^\cdot$. On voit que Y est une classe de $\tilde{P}_\sigma^\Delta$-monomorphismes.

PROPOSITION 3. *$\tilde{P}_\sigma^\Delta$ est $(\mathfrak{M}, Y \boxminus \mho(V^\cdot, \sigma)_0)$-engendrant.*

$\Delta\Delta$. Supposons que $\hat{F} \in \mho(\hat{V}^\cdot, \sigma)_0$ et que $M \subset \tilde{P}_\sigma^\Delta(\hat{F})$, avec $M \in \tilde{\mathfrak{M}}_0$. La $\tilde{P}_\sigma^\Delta$-sous-structure de $\hat{F}$ engendrée par M étant aussi la $\tilde{P}_\sigma^\Delta$-sous-structure de $\hat{F}$ engendrée par l'ensemble $\cdot\prod_{u \in U_0^\cdot}(M(u))$, lorsque $M(u)$ désigne la projection de M dans $\underline{\Delta}\,\underline{\hat{F}}(u)$, on peut toujours supposer que:

$$M = \prod_{u \in U_0^\cdot}(M(u)), \text{ avec } M(u) \subset \underline{\Delta}\,\underline{\hat{F}}(u) \text{ et } M(u) \in \tilde{\mathfrak{M}}_0 \text{ pour tout } u \in U_0^\cdot.$$

Soit λ un ordinal, $\lambda \leqslant \hat{\lambda}$, et supposons définie, pour tout ordinal $\xi < \lambda$, une partie S_ξ de $\tilde{P}_\sigma^\Delta(\hat{F})$ telle que:

$$\begin{cases} S_\xi = \prod_{u \in U_0^\cdot}(S_\xi(u)), \text{ où } S_\xi(u) \subset \underline{\Delta}\,\underline{\hat{F}}(u), \\ S_\xi(u) \in \tilde{\mathfrak{M}}_0 \text{ et } S_\xi(u) \text{ définit une } \Delta\text{-sous-structure de } \hat{F}(u), \text{ si } \xi \neq 0, \\ S_0(u) = M(u), \quad S_\xi(u) \subset S_{\xi+1}(u), \text{ pour tout } u \in U_0^\cdot. \end{cases}$$

Nous allons définir un S_λ, de sorte que les conditions précédentes soient vérifiées pour tout ordinal $\xi \leqslant \lambda$.

Premier cas: l'ordinal λ admet un prédécesseur ξ. Soit F_λ le (X, Δ)-sous-néofoncteur de $\hat{F}$ engendré par $(S_\xi(u))_{u \in U_0^\cdot}$. Il est construit par récurrence comme suit: Supposons définie, pour tout entier i, où $0 \leqslant i \leqslant n$, une partie $S_\xi^i(u)$ de $\Delta\hat{F}(u)$ telle que:

$$\begin{cases} S_\xi^0(u) = S_\xi(u), \\ S_\xi^i(u) \subset S_\xi^{i+1}(u) \quad \text{si } 0 \leqslant i \leqslant n-1, \\ S_\xi^i(u) \in \tilde{\mathfrak{M}}_0 \text{ et } S_\xi^i(u) \text{ définit une } \Delta\text{-sous-structure } s_\xi^i(u) \text{ de } \underline{\Delta}\,\underline{\hat{F}}(u) \\ \qquad \text{si } i \neq 0, \end{cases}$$

et ce, pour tout $u \in U_0^\cdot$. Dans ces conditions,

$$\bigcup_{k \in u.U} \underline{\Delta}\,\underline{\hat{F}}(k)(S_\xi^n(\alpha(k))) \in \tilde{\mathfrak{M}}_0$$

engendre une Δ-sous-structure $s_\xi^{n+1}(u)$ de $\hat{F}(u)$, isomorphe à une unité de $V^\cdot$; nous posons

$$S_\xi^{n+1}(u) = \Delta(s_\xi^{n+1}(u)).$$

Par récurrence, nous obtenons ainsi une suite $(S^i_\xi(u))_{i\in\mathbf{N}}$ vérifiant les conditions précédentes. En vertu des hypothèses, $\bigcup_{i\in\mathbf{N}} S^i_\xi(u)$ engendre une Δ-sous-structure $F_\lambda(u)$ de $\hat{F}(u)$ isomorphe à un élément de $V^\cdot_0$ dans $\hat{V}^\cdot$ et telle que

$$\underline{\Delta}\,\underline{F}_\lambda(u) = \bigcup_{i\in\mathbf{N}} S^i_\xi(u) \in \tilde{\mathfrak{M}}_0 ,$$

car Δ est compatible avec les «réunions dénombrables filtrantes». On montre facilement que l'application de $U^\cdot_0$ dans $V^\cdot_0$ associant $F_\lambda(u)$ à $u \in U^\cdot_0$ se prolonge en un (X, Δ)-sous-néofoncteur $F_\lambda = (\hat{V}^\cdot, \underline{F}_\lambda, U^\cdot)$ de $\hat{F}$.

Pour tout $u \in U^\cdot_0$, soit Ξ_u l'ensemble des néofoncteurs ϕ tels que le cône $\mu_{U^\cdot}(\phi)$ soit défini et ait u pour sommet. On pose

$$S'_\lambda(u) = \underline{\Delta}\,\underline{F}_\lambda(u) \cup \Big(\bigcup_{\phi\in\Xi_u} \underset{\leftarrow}{Lim}\, F_\lambda . \phi\Big).$$

Comme $\Xi_u \in \tilde{\mathfrak{M}}_0$, on en déduit que $S'_\lambda(u) \in \tilde{\mathfrak{M}}_0$; en conséquence $S'_\lambda(u)$ engendre une Δ-sous-structure $s_\lambda(u)$ de $\hat{F}(u)$ telle que $\Delta(s_\lambda(u)) \in \tilde{\mathfrak{M}}_0$, isomorphe à une unité de $V^\cdot$. On pose

$$S_\lambda(u) = \Delta(s_\lambda(u)), \quad \text{pour tout } u \in U^\cdot_0 . \quad .$$

Deuxième cas: λ est un ordinal limite. On pose alors

$$S_\lambda(u) = \bigcup_{\xi<\lambda} S_\xi(u), \quad \text{pour tout } u \in U^\cdot_0 .$$

Il est clair que $S_\lambda(u) \in \tilde{\mathfrak{M}}_0$, puisque $\lambda \leqslant \hat{\lambda}$ entraîne $\lambda \in \mathfrak{M}_0$. En vertu des hypothèses, $S_\lambda(u)$ définit donc une Δ-sous-structure $s_\lambda(u)$ de $\hat{F}(u)$ telle que $\Delta(s_\lambda(u)) \Rightarrow S_\lambda(u)$, et isomorphe à une unité de $V^\cdot$.

On en déduit qu'il existe un sous-néofoncteur G de $\Delta . \hat{F}$ tel que:

$$G(u) = S_{\hat{\lambda}}(u), \quad \text{pour tout } u \in U^\cdot_0 .$$

Il en résulte un (X, Δ)-sous-néofoncteur $F = (\hat{V}^\cdot, \underline{F}, U^\cdot)$ de $\hat{F}$ tel que

$$\Delta . F = G \quad \text{et} \quad F(u) = s_\lambda(u) \quad \text{pour tout } u \in U^\cdot_0 .$$

De plus, $F(u)$ étant, par construction, isomorphe dans $\hat{V}^\cdot$ à une unité de $V^\cdot$, le néofoncteur F est équivalent à un $(X . V^\cdot_0, \Delta)$-sous-néofoncteur F' de $\hat{F}$.

En raison de la commutation dans $\mathfrak{M}$ des $\mathfrak{I}$-limites projectives et des $<\hat{\lambda}>$-limites inductives [E.Q.T.], G est une réalisation vague de σ dans $\hat{\mathfrak{M}}$. Pour montrer que F est une réalisation vague de σ dans $\hat{V}^{\cdot}$, et a fortiori que F' est une réalisation vague de σ dans $V^{\cdot}$, il suffit d'établir le lemme suivant, où Y' désigne la classe des $T \in \mathfrak{N}(\hat{V}^{\cdot}, U^{\cdot})$ tels que $T(u) \in X$ pour tout $u \in U_0^{\cdot}$.

LEMME 1. *Soient $\theta = (\phi, \underline{\theta}, \hat{e})$ une $I^{\cdot}$-limite projective dans $\hat{V}^{\cdot}$, où $I^{\cdot} \in \mathfrak{I}$, et $\theta' = (\phi', \underline{\theta}', \hat{e}')$ un $I^{\cdot}$-cône projectif dans $\hat{V}^{\cdot}$ tels que:*

$\Delta\, \theta'$ est une limite projective naturalisée dans $\hat{\mathfrak{M}}$,

$T = (\phi, \underline{T}, \phi') \in Y'$, $f \in e.\hat{V}.e'$ et $f \in X$,

$\theta \,\square\, \hat{f} = T \,\square\, \dot{\theta}'$ dans $\mathfrak{N}(\hat{V}^{\cdot}, U^{\cdot})$;

alors θ' est une limite projective naturalisée dans $\hat{V}^{\cdot}$.

Δ. Supposons que $\theta'' = (\phi', \underline{\theta}'', \hat{e}'')$ soit un $I^{\cdot}$-cône projectif. Il existe un unique $k \in \hat{\mathfrak{M}}$ tel que $\Delta\, \theta' \,\square\, \hat{k} = \Delta\, \theta''$. De plus il existe un unique $h \in \hat{V}$ tel que $\theta \,\square\, \hat{h} = T \,\square\, \theta''$. On en déduit que $\Delta(f).k = \Delta(h)$. Comme $f \in X$ est un Δ-monomorphisme, k se relève en un unique k' tel que

$$\Delta(k') = k \quad \text{et} \quad f.k' = h.$$

Il en résulte l'égalité $\theta' \,\square\, \hat{k}' = \theta''$, puisque T est un monomorphisme. D'où le lemme. ∇

On en déduit que $F' \in \mathfrak{V}(V^{\cdot}, \sigma)_0$ est la $(\tilde{P}_{\sigma}^{\Delta}, Y \,\square\, \mathfrak{V}(V^{\cdot}, \sigma)_0)$-sous-structure de $\hat{F}$ engendrée par M. Ceci prouve la proposition. $\nabla\nabla$

En vertu du théorème d'existence de limites inductives [C.S.L.], on obtient:

PROPOSITION 4. *Si, de plus, le foncteur inclusion de $V^{\cdot}$ dans $\hat{V}^{\cdot}$ est à noyaux (de couples) et si Δ est à $\hat{\mathfrak{F}}_0$-limites projectives, alors $\mathfrak{V}(V^{\cdot}, \sigma)$ est à $\mathfrak{F}_0$-limites inductives.*

Δ. $\tilde{P}_{\sigma}^{\Delta}$ est à $\hat{\mathfrak{M}}_0$-produits, puisque les $U_0^{\cdot}$-produits dans $\hat{\mathfrak{M}}$ commutent avec les $\hat{\mathfrak{M}}_0$-produits. De même $\tilde{p}_{\sigma}^{\delta}$ est à noyaux (de couples). Enfin, si T est un noyau dans $\tilde{p}_{\sigma}^{\delta}$ de deux morphismes de $\mathfrak{V}(V^{\cdot}, \sigma)$, on a $Y.T \subset Y$. Le théorème d'existence de limites inductives s'applique donc. ∇

COROLLAIRE 2. *Avec les hypothèses de la proposition 4 et si $L^{\cdot}$ est une* *catégorie équivalente à* $\mathcal{V}(V^\bullet, \sigma)$, *alors* $L^\bullet$ *est une catégorie à* $\mathcal{F}_0$*-limites inductives. En particulier, il en est ainsi pour* $\mathcal{S}(\Sigma, \sigma)$, *lorsque* σ *est* Σ*-régulière.*

REMARQUES. 1° Les propositions 3 et 4 s'appliquent également si l'on remplace partout $\mathfrak{M}_0$ par $\hat{\mathfrak{M}}_0$ et $\hat{\mathfrak{M}}_0$ par $\hat{\hat{\mathfrak{M}}}_0$. Dans ce cas, la condition 1 est vérifiée par exemple si $U \in \hat{\mathfrak{M}}_0$ et si $\mathcal{I} \subset \mathcal{F}_0$, puisque $\mathfrak{M}_0 \in \hat{\mathfrak{M}}_0$ par hypothèse (on peut alors prendre pour $\hat{\lambda}$ l'ordinal associé à l'univers $\mathfrak{M}_0$).

2° Ces deux propositions précisent les résultats de [S.S.A.]. De plus, elles généralisent un théorème connu (pour les catégories marquées, dans le cas où $V^\bullet = \mathfrak{M}$), obtenu à partir de l'existence d'un faisceau libre sur un préfaisceau [C.M.F.].

Notons qu'en général le foncteur d'omission $\tilde{p}_u^{V^\bullet}$ n'est pas compatible avec les limites inductives. Nous donnons dans le paragraphe I.3 une condition suffisante pour qu'il le soit.

Enfin, les foncteurs $\tilde{p}_u^{V^\bullet}$ engendrent des sous-morphismes, sous des conditions qui sont étudiées en I.4.

I.3. Existence de certaines limites dans le cas d'une esquisse mixte.

Nous ne supposons plus que $\mathcal{I}' = \emptyset$. Désignons par $\mathcal{J}$ et $\mathcal{J}'$ deux parties de $\hat{\mathcal{F}}_0$, par $V^\bullet$ une catégorie à $\mathcal{J}$-limites projectives et $\mathcal{J}'$-limites inductives.

PROPOSITION 5. *Si les* $J^\bullet$*-limites projectives dans* $V^\bullet$ *commutent avec celles des* $I'^\bullet$*-limites inductives qui existent dans* $V^\bullet$, *pour tout* $J^\bullet \in \mathcal{J}$ *et* $I'^\bullet \in \mathcal{I}'$, *alors* $\mathcal{V}(V^\bullet, \sigma)$ *est à* $\mathcal{J}$*-limites projectives et* $\tilde{p}_u^{V^\bullet}$ *est compatible avec ces limites, pour tout* $u \in U_0^\bullet$.

COROLLAIRE 3. *Si* $L^\bullet$ *est une catégorie équivalente à* $\mathcal{V}(V^\bullet, \sigma)$ *et si* $V^\bullet$ *vérifie les conditions de la proposition 5,* $L^\bullet$ *est à* $\mathcal{J}$*-limites projectives. En particulier, si* σ *est* Σ*-régulière, il en est ainsi pour* $\mathcal{S}(\Sigma, \sigma)$ *et le foncteur* p_u^Σ *est compatible avec ces limites, pour tout* $u \in U_0^\bullet$.

PROPOSITION 6. *Si les* $J'^\bullet$*-limites inductives dans* $V^\bullet$ *commutent avec celles des* $I^\bullet$*-limites projectives qui existent dans* $V^\bullet$, *pour tout* $J'^\bullet \in \mathcal{J}'$ *et* $I^\bullet \in \mathcal{I}$, *alors* $\mathcal{V}(V^\bullet, \sigma)$ *est à* $\mathcal{J}'$*-limites inductives et* $\tilde{p}_u^{V^\bullet}$ *est compatible* *avec ces limites, pour tout* $u \in U_0^{\bullet}$.

COROLLAIRE 4. *Si* $L^{\bullet}$ *est une catégorie équivalente à* $\mathcal{O}(V^{\bullet}, \sigma)$ *et si* $V^{\bullet}$ *vérifie les conditions de la proposition 6,* $L^{\bullet}$ *est à* $\mathcal{J}'$*-limites inductives. En particulier, si* σ *est* Σ*-régulière, il en est ainsi pour* $\mathcal{S}(\Sigma, \sigma)$ *et le foncteur* p_u^{Σ} *est compatible avec ces limites, pour tout* $u \in U_0^{\bullet}$.

Nous n'indiquerons pas les démonstrations, élémentaires, de ces propositions et corollaires. Par contre, nous allons en donner quelques applications dans des cas usuels.

PROPOSITION 7. *Le foncteur* $p\mathcal{F}$ *est compatible avec les* $J'^{\bullet}$*-limites inductives telles que:*

$J'^{\bullet} \in \mathcal{F}_0$; $J'^{\bullet}$ *est* Λ*-filtrante et* Λ'*-filtrante* [E.Q.T.].

Δ. $\sigma\mathcal{F}$ est une $\mathcal{J}$-esquisse projective, où $\mathcal{J}$ a pour seul élément la catégorie $I^{\bullet}$ possédant deux morphismes non triviaux et de même but. $\mathcal{F}$ s'identifie à une sous-catégorie pleine de $\mathcal{O}(\mathfrak{M}, \sigma\mathcal{F})$ ayant $\mathcal{O}(\mathfrak{M}, \sigma\mathcal{F})$ pour élargissement et $p\mathcal{F}$ à la restriction du foncteur d'omission $\tilde{p}_u^{\mathfrak{M}}$. Comme les $I^{\bullet}$-limites projectives (i. e. les $\{1, 2\}$-produits fibrés) commutent avec les $J'^{\bullet}$-limites inductives, si $J'^{\bullet}$ vérifie les conditions indiquées, dans $\mathfrak{M}$, le corollaire 4 s'applique. ∇

PROPOSITION 8. *Soient* $\mathcal{G}$ *la catégorie dont les morphismes sont les homomorphismes entre groupes sur des ensembles appartenant à* $\mathfrak{M}_0$ *et* $p\mathcal{G}$ *le foncteur d'oubli usuel de* $\mathcal{G}$ *dans* $\mathfrak{M}$*; alors* $p\mathcal{G}$ *est compatible avec les* $J'^{\bullet}$*-limites inductives telles que:*

$J'^{\bullet} \in \mathcal{F}_0$; $J'^{\bullet}$ *est filtrante,* Λ*-filtrante et* Λ'*-filtrante.*

Δ. $\mathcal{G}$ est équivalente à $\mathcal{O}(\mathfrak{M}, \sigma\mathcal{G})$, où $\sigma\mathcal{G}$ est l'esquisse de groupe qui est une esquisse $\mathcal{J}$-projective, avec $\mathcal{J} = \{\emptyset, \{1, 2\}\}$. En appliquant le théorème de commutation de limites inductives et projectives de [E.Q.T.] on voit que la condition «$J'^{\bullet}$ est filtrante» est nécessitée par le fait que la catégorie discrète $\{1, 2\}$ est non connexe. ∇

PROPOSITION 9. *Soient* $\mathcal{C}$ *la catégorie des homomorphismes entre corps sur des ensembles appartenant à* $\mathfrak{M}_0$ *et* $p\mathcal{C}$ *son foncteur d'oubli usuel vers* $\mathfrak{M}$*; alors* $p\mathcal{C}$ *est à* $J'^{\bullet}$*-limites inductives, lorsque*

$J'^{\cdot} \in \mathfrak{F}_0$; $J'^{\cdot}$ *est filtrante,* Λ*-filtrante et* Λ'*-filtrante.*

Δ. $\mathcal{C}$ est équivalente à $\mathcal{O}(\mathfrak{M}, \sigma_{\mathcal{C}})$, où $\sigma_{\mathcal{C}}$ est l'esquisse de corps, qui est une $(\mathfrak{I}, \mathfrak{I}')$-esquisse, où:

$$\mathfrak{I} = \{\emptyset, \{1, 2\}\} \quad \text{et} \quad \mathfrak{I}' = \{\{1, 2\}\}.$$

On déduit la proposition des théorèmes de commutation de [E.Q.T.]. ∇

De même on a la

PROPOSITION 10. *$\mathcal{C}$ est à $J^{\cdot}$-limites projectives, et $p_{\mathcal{C}}$ est compatible avec ces limites, lorsque:*

$J^{\cdot} \in \mathfrak{F}_0$ *et* $J^{\cdot}$ *est connexe.*

Δ. La catégorie discrète $\{1, 2\} \in \mathfrak{I}'$ est évidemment Λ-filtrante, Λ'-filtrante et $<\xi>$-filtrante, pour tout ordinal ξ; d'où la commutation de ces $\{1, 2\}$-limites inductives (i.e. de ces sommes) avec les $J^{\cdot}$-limites projectives, lorsque $J^{\cdot}$ est connexe. ∇

La proposition 7 a été démontrée directement dans [S.Q.Q.]. Les propositions 8, 9 et 10 sont évidemment démontrables par un procédé purement combinatoire...

I.4. Sous-morphismes engendrés par les foncteurs d'omission.

Soit $I'^{\cdot} \in \mathfrak{F}_0$. Nous désignons par $\hat{\mathfrak{C}}(I'^{\cdot})$ la sous-catégorie de la catégorie longitudinale des quatuors de $\mathfrak{N}(\hat{\mathfrak{M}}, I'^{\cdot})$ formée des quadruplets $(\theta_2, \hat{f}, \tau, \theta_1) \in \mathfrak{N}(\hat{\mathfrak{M}}, I'^{\cdot})^4$ tels que:

$$\begin{cases} \theta_1 \text{ et } \theta_2 \text{ sont des } I'^{\cdot}\text{-cônes inductifs dans } \hat{\mathfrak{M}}, \\ \hat{f} \text{ est une transformation naturelle constante sur } f \in \hat{\mathfrak{M}}, \\ \theta_2 \boxminus \tau = \hat{f} \boxminus \theta_1 . \end{cases}$$

On identifie les unités de $\hat{\mathfrak{C}}(I'^{\cdot})$ aux $I'^{\cdot}$-cônes inductifs dans $\hat{\mathfrak{M}}$.

On désigne par $\hat{\mathfrak{L}}(I'^{\cdot})$ la sous-catégorie pleine de $\hat{\mathfrak{C}}(I'^{\cdot})$ ayant pour objets les $I'^{\cdot}$-limites inductives naturalisées, par $\iota_{I'}$. le foncteur inclusion de $\hat{\mathfrak{L}}(I'^{\cdot})$ dans $\hat{\mathfrak{C}}(I'^{\cdot})$.

Remplaçant $\hat{\mathfrak{M}}$ par $\mathfrak{M}$, on définit de même deux catégories $\mathfrak{C}(I'^{\cdot})$ et $\mathfrak{L}(I'^{\cdot})$, qui s'identifient à des sous-catégories pleines de $\hat{\mathfrak{C}}(I'^{\cdot})$ et de $\hat{\mathfrak{L}}(I'^{\cdot})$ respectivement.

Notons $\hat{Z}(I'^{\cdot})$ la sous-classe de $\hat{\mathfrak{L}}(I'^{\cdot})$ constituée des quatuors $(\theta_2, \hat{f}, \tau, \theta_1) \in \hat{\mathfrak{L}}(I'^{\cdot})$ tels que f et $\underline{\tau}(i)$, pour tout $i \in I'^{\cdot}_0$, soient des injections canoniques.

DEFINITION. Une $I'^{\cdot}$-limite inductive naturalisée $\theta \in \hat{\mathfrak{L}}(I'^{\cdot})_0$ sera dite $\mathfrak{M}$-*engendrante* si le foncteur $\iota_{I'^{\cdot}}$ est $(\theta \,\square\, \hat{\mathfrak{S}}(I'^{\cdot}), \hat{Z}(I'^{\cdot}) \,\square\, \hat{\mathfrak{L}}(I'^{\cdot})_0)$-engendrant.

EXEMPLE. Soit $I'^{\cdot}$ la catégorie discrète sur $I' \in \hat{\mathfrak{M}}_0$; une $I'^{\cdot}$-limite inductive naturalisée (i.e. une I'-somme naturalisée) θ dans $\hat{\mathfrak{M}}$ est $\mathfrak{M}$-engendrante. En effet, si

$$q = (\theta, \hat{f}, \tau, \theta') \in \hat{\mathfrak{S}}(I'^{\cdot}) \quad \text{et} \quad \theta' = (\hat{E}', \underline{\theta}', \phi'),$$

alors q engendre la sous-somme naturalisée θ'' de θ telle que:

$$\theta'' = (\hat{E}, \underline{\theta}'', \phi), \text{ où } E = f(E') \text{ et } \phi(i) = \underline{\theta}(i)^{-1}(E), \text{ si } i \in I'.$$

Nous supposons maintenant que:

$$\mathcal{G} \subset \mathfrak{F}_0\,, \quad \mathcal{G} \in \tilde{\mathfrak{M}}_0\,, \quad \mathcal{G}' \subset \mathfrak{F}_0\,, \quad \sigma = (U^{\cdot}, \mu_{U^{\cdot}}, \mu'_{U^{\cdot}}) \in \mathfrak{S}_0^{\mathcal{G}\mathcal{G}'}, \quad U \in \tilde{\mathfrak{M}}_0\,.$$

Nous notons $\hat{\lambda}$ l'ordinal régulier $\omega_{\tilde{\lambda}+1}$, où $\tilde{\lambda}$ est l'ordinal borne supérieure des cardinaux $\bar{I}$, lorsque $I^{\cdot} \in \mathcal{G}$.

La catégorie $\mathcal{O}(\mathfrak{M}, \sigma)$ s'identifie à une sous-catégorie pleine de $\mathcal{O}(\hat{\mathfrak{M}}, \sigma)$. Si $u \in U^{\cdot}_0$, nous notons $\tilde{p}_u$ le foncteur d'omission $\tilde{p}_u^{\mathfrak{M}}$ associé à u, de $\mathcal{O}(\mathfrak{M}, \sigma)$ dans $\mathfrak{M}$, et nous notons $\tilde{P}_u$ le foncteur d'omission analogue, de $\mathcal{O}(\hat{\mathfrak{M}}, \sigma)$ dans $\hat{\mathfrak{M}}$.

Soit enfin Y la sous-classe de $\mathcal{O}(\hat{\mathfrak{M}}, \sigma)$ dont les éléments sont les $\hat{T}$ tels que $\underline{\hat{T}}(u)$ soit une injection pour tout $u \in U^{\cdot}_0$.

PROPOSITION 11. *$\tilde{P}_u$ est un foncteur $(\mathfrak{M}, Y \,\square\, \mathcal{O}(\mathfrak{M}, \sigma)_0)$-engendrant, lorsque les deux conditions suivantes sont vérifiées:*

1° Pour tout $u' \in U^{\cdot}_0$, notons $\Xi_{u'}$ (resp. $\Xi'_{u'}$) l'ensemble des bases ϕ des cônes $\mu_{U^{\cdot}}(\phi)$ (resp. $\mu'_{U^{\cdot}}(\phi)$) de sommet u'; on suppose que:

- si $\Xi_{u'} \neq \emptyset$, alors $\Xi'_{u'} = \emptyset$; si $\Xi'_{u'} \neq \emptyset$, il n'a qu'un seul élément.

2° Si $\hat{F} \in \mathcal{O}(\hat{\mathfrak{M}}, \sigma)_0$ et si $\mu'_{U^{\cdot}}(\phi)$ est défini, $\hat{F}\mu'_{U^{\cdot}}(\phi)$ est $\mathfrak{M}$-engendrante.

Δ. Supposons que $\hat{F} \in \mathcal{O}(\hat{\mathfrak{M}}, \sigma)_0$ et que $M \in \tilde{\mathfrak{M}}_0$ avec $M \subset \tilde{P}_u(\hat{F})$.

Soit λ un ordinal tel que $\lambda \leqslant \hat{\lambda}$ et supposons défini, pour tout ordinal $\xi < \lambda$ et tout $u' \in U_0^{\cdot}$, un ensemble $S_\xi(u') \subset \hat{F}(u')$ tel que

$$\begin{cases} S_\xi(u') \in \tilde{\mathfrak{M}}_0\,, \\ S_0(u) = M \text{ et } S_0(u') = \emptyset \text{ si } u' \neq u\,, \\ S_\xi(u') \subset S_{\xi+1}(u')\,, \text{ pour tout } u' \in U_0^{\cdot}\,. \end{cases}$$

Premier cas: l'ordinal λ *admet un prédécesseur* ξ. Il existe un sous-néofoncteur. F_λ de $\hat{F}$ engendré par $(S_\xi(u'))_{u' \in U_0^{\cdot}}$ (il est construit par récurrence, voir la preuve de la proposition 3, premier cas). On a

$$\Xi_{u'} \in \tilde{\mathfrak{M}}_0 \quad \text{et} \quad \Xi'_{u'} \in \tilde{\mathfrak{M}}_0\,.$$

Posons:

$$S_\lambda(u') = F_\lambda(u') \cup \Big(\bigcup_{\phi \in \Xi_{u'}} \underset{\leftarrow}{Lim}\, F_\lambda \cdot \phi\Big) \cup \Big(\bigcup_{\phi' \in \Xi'_{u'}} E_{\phi'}\Big)\,,$$

où $E_{\phi'}$ désigne une $I'^{\cdot}$-limite inductive $\mathfrak{M}$-engendrée par $F_\lambda \mu'_U \cdot (\phi)$. Les hypothèses entraînent $S_\lambda(u') \in \tilde{\mathfrak{M}}_0$ pour tout $u' \in U_0^{\cdot}$.

Deuxième cas: λ *est un ordinal limite.* Alors on pose

$$S_\lambda(u') = \bigcup_{\xi < \lambda} S_\xi(u')\,, \quad \text{pour tout} \quad u' \in U_0^{\cdot}\,.$$

Il en résulte $S_\lambda(u') \in \tilde{\mathfrak{M}}_0$, car $\tilde{\mathfrak{M}}_0$ est un univers et $\hat{\lambda} \in \tilde{\mathfrak{M}}_0$.

Par induction, on construit ainsi une partie $S_{\hat{\lambda}}(u')$ de $\hat{F}(u')$ pour tout $u' \in U_0^{\cdot}$, et l'on voit qu'il existe un sous-néofoncteur F de $\hat{F}$ tel que:

$$F(u') = S_{\hat{\lambda}}(u') \in \tilde{\mathfrak{M}}_0 \quad \text{pour tout} \quad u' \in U_0^{\cdot}\,.$$

On montre sans difficulté que F est une réalisation vague de σ dans $\hat{\mathfrak{M}}$, qui est équivalente à un $F' \in \mathcal{O}(\mathfrak{M}, \sigma)_0$; ce dernier est la sous-structure de $\hat{F}$ engendrée par M. ∇

Supposons de plus que les $I'^{\cdot}$-limites inductives, pour tout $I'^{\cdot} \in \mathfrak{I}'$, commutent avec les $\hat{\mathfrak{F}}_0$-limites projectives dans $\hat{\mathfrak{M}}$. On déduit de la proposition 11 et de [C.S.L.] le corollaire:

COROLLAIRE 5. *$\tilde{p}_u$ admet un adjoint pour tout $u \in U^{\cdot}$. Si σ est $\Sigma^{\mathfrak{I}\mathfrak{I}'}(\mathfrak{M})$-régulière, p_u admet aussi un adjoint.*

Δ. Le foncteur $\tilde{P}_u$ est à $\hat{\mathfrak{F}}_0$-limites projectives et $\tilde{p}_u$ est à noyaux (de couples). On peut alors appliquer le théorème d'existence d'un adjoint de [C.S.L.] en utilisant la proposition 11. ∇

REMARQUE. Supposons $\mathcal{J}' = \emptyset$. La proposition 11 et le corollaire 5 peuvent s'appliquer. La proposition 11 est d'ailleurs à rapprocher de la proposition 5. C'est le cas particulier de la démonstration de la proposition obtenu en prenant:

$$\Delta = \hat{\mathfrak{M}}, \quad V^{\cdot} = \mathfrak{M}, \quad M(u) = M, \quad M(u') = \emptyset \text{ si } u' \neq u.$$

Mais on ne peut pas déduire la proposition 11 directement de l'énoncé de la proposition 5, car ces conditions entraînent $\prod_{u \in U_0^{\cdot}} M(u) = \emptyset$. En fait, on aurait pu englober ce cas dans la proposition 5, en remplaçant dans celle-ci le foncteur $\tilde{P}_{\sigma}^{\Delta}$ par le foncteur de $\mathcal{O}(\hat{V}^{\cdot}, \sigma)$ dans $\mathfrak{M}^{U_0^{\cdot}}$ associant $(\underline{\Delta}\, \underline{\hat{T}}(u))_{u \in U_0^{\cdot}}$ à $\hat{T} \in \mathcal{O}(V^{\cdot}, \sigma)$.

Nous allons donner une application de la proposition 11.

COROLLAIRE 6. *Si C est un corps sur l'ensemble $\underline{C} \in \hat{\mathfrak{M}}_0$ et si $M \subset \underline{C}$ et $M \in \hat{\mathfrak{M}}_0$, alors M engendre un sous-corps C' de C tel que $\underline{C}' \in \hat{\mathfrak{M}}_0$.*

Δ. La proposition 11 et son corollaire s'appliquent, puisque les seuls cônes inductifs de l'esquisse $\sigma_{\mathcal{C}}$ des corps sont modelés sur la catégorie discrète $I'^{\cdot}$, où $I' = \{1, 2\}$; par suite ils correspondent à des sommes naturalisées. Or nous avons vu plus haut que les sommes dans $\hat{\mathfrak{M}}$ sont $\mathfrak{M}$-engendrantes. ∇

II. ETUDE PONCTUELLE DES FONCTEURS D'OMISSION

Dans le chapitre I nous avons étudié les propriétés simultanément vérifiées par tous les foncteurs d'omission. Nous nous proposons, maintenant, d'étudier les propriétés particulières à l'un d'entre eux, selon l'unité à laquelle il est associé.

Nous reprenons les hypothèses et les notations générales de I. Nous supposons de plus que σ est une $(\mathcal{I},\mathcal{I}')$-maquette de $(\mathcal{I},\mathcal{I}')$-idée $\sigma_0 = ([M], \emptyset, \emptyset)$, que σ est $\Sigma^{\mathcal{I}\mathcal{I}'}(\mathfrak{M})$-régulière et que $\mathcal{I} \cup \mathcal{I}' \in \tilde{\mathfrak{M}}_0$.

Rappelons que, si $\hat{\lambda}$ est l'ordinal régulier $\omega_{\tilde{\lambda}+1}$, où $\tilde{\lambda}$ est l'ordinal borne supérieure des cardinaux $\bar{I}$ lorsque $I^{\cdot} \in \mathcal{I} \cup \mathcal{I}'$, on peut «approcher» σ à l'aide d'une famille, construite explicitement dans [I.M.S.A.], par complétions successives de σ_0 dans σ par cônes projectifs et cônes inductifs.

Avec des notations analogues à celles de la proposition 11, nous posons:

$$W = \{ u \in M_0^{\cdot} \mid \Xi_u \cup \Xi'_u = \emptyset \}.$$

Par récurrence, nous définissons une partie W_ξ de $U_0^{\cdot}$ pour tout ordinal $\xi \leqslant \hat{\lambda}$ comme suit:

- $W_0 = W$,
- Si $\xi < \hat{\lambda}$, si $\xi = \xi' + 1$ et si $W_{\xi'}$ est défini, soit W'_ξ (resp. W''_ξ) l'ensemble des $u' \in M_0^{\cdot}$ tels que $\Xi_{u'} \neq \emptyset$ (resp. $\Xi'_{u'} \neq \emptyset$) et que

$$\phi(I_0^{\cdot}) \subset W_{\xi'} \quad \text{si } \phi = (U^{\cdot}, \underline{\phi}, I^{\cdot}) \in \Xi_{u'} \text{ (resp. } \in \Xi'_{u'});$$

alors on pose $W_\xi = W'_\xi \cup W''_\xi$.
- Si $\xi \leqslant \hat{\lambda}$ est un ordinal limite et si $W_{\xi'}$ est défini pour tout $\xi' < \xi$, alors $W_\xi = \bigcup_{\xi' < \xi} W_{\xi'}$.

Dans tout ce qui suit, nous supposons que $W_{\hat{\lambda}} = M_0^{\cdot}$.

Enfin, nous désignons par

$$\mathbf{T}(\sigma) = (\bar{U}^{\cdot}, \mu_{\bar{U}^{\cdot}}, \mu'_{\bar{U}^{\cdot}}) \in \mathcal{F}_0^{\mathcal{I}\mathcal{I}'}$$

le $(\mathcal{I},\mathcal{I}')$-type de σ.

II.1. Fidélité et $\tilde{p}_u$-monomorphismes.

Soit u une unité donnée de $U^{\cdot}$. Nous désignons encore par

$$\tilde{p}_u = (\mathfrak{M}, \underline{\tilde{p}}_u, \mathfrak{V}(\mathfrak{M}, \sigma)) \quad \text{et} \quad p_u = (\mathfrak{M}, \underline{p}_u, \mathcal{S}(\Sigma^{\mathfrak{J}\mathfrak{J}'}(\mathfrak{M}), \sigma))$$

les foncteurs d'omission associés à u.

PROPOSITION 1. *Le foncteur $\tilde{p}_u$ est saturé, i.e. si $F \in \mathfrak{V}(\mathfrak{M}, \sigma)_0$ et si $h \in \mathfrak{M}_\gamma . F(u)$, il existe au moins un $T \in \mathfrak{V}(\mathfrak{M}, \sigma)_\gamma \square\square F$ tel que $\tilde{p}_u(T) = h$.*

Δ. La surjection $\underline{T}$ de $U_0^{\cdot}$ dans $\mathfrak{M}$ telle que

$$\underline{T}(u) = h, \quad \underline{T}(u') = F(u') \text{ si } u' \neq u,$$

définit une équivalence naturelle T de F vers un néofoncteur F' qui, étant équivalent à F, est aussi une réalisation vague de σ dans $\mathfrak{M}$. D'où

$$T \in \mathfrak{V}(\mathfrak{M}, \sigma)_\gamma \quad \text{et} \quad \tilde{p}_u(T) = h. \quad \nabla$$

PROPOSITION 2. *Si $u \in W$ et si, pour tout $u' \in W$, il existe $f \in u . \bar{U} . u'$ et $g \in u' . \bar{U} . u$ tels que $g . f = u'$, alors $\tilde{p}_u$ et p_u sont fidèles.*

Δ. Comme σ est $\Sigma^{\mathfrak{J}\mathfrak{J}'}(\mathfrak{M})$-régulière, $\mathfrak{V}(\mathfrak{M}, \sigma)$ est un élargissement de $\mathcal{S}(\Sigma^{\mathfrak{J}\mathfrak{J}'}(\mathfrak{M}), \sigma)$; il suffit donc de raisonner sur le foncteur p_u. Supposons que

$$T_s = (F_2, \underline{T}_s, F_1) \in \mathcal{S}(\Sigma^{\mathfrak{J}\mathfrak{J}'}(\mathfrak{M}), \sigma), \quad s = 1, 2,$$

soient tels que $p_u(T_1) = p_u(T_2)$, c'est-à-dire que $\underline{T}_1(u) = \underline{T}_2(u)$. Il en résulte que, si $\bar{T}_s = (\bar{F}_2, \underline{\bar{T}}_s, \bar{F}_1)$ est la transformation naturelle prolongeant T_s au type $\mathbf{T}(\sigma)$ (qui existe, car T_s «est» une réalisation de σ dans le type canonique sur la catégorie des quatuors $\boxminus\mathfrak{M}$), on a

$$\underline{\bar{T}}_1(u) = \underline{T}_s(u) = \underline{\bar{T}}_2(u), \quad s = 1, 2.$$

Si $u' \in W$ et si $g . f = u'$ dans $\bar{U}^{\cdot}$, on trouve:

$$\underline{\bar{T}}_1(u') . \bar{F}_1(g) = \bar{F}_2(g) . \underline{\bar{T}}_1(u) = \bar{F}_2(g) . \underline{\bar{T}}_2(u) = \underline{\bar{T}}_2(u') . \bar{F}_1(g).$$

On en déduit $\underline{\bar{T}}_1(u') = \underline{\bar{T}}_2(u')$ et a fortiori $\underline{T}_1(u') = \underline{T}_2(u')$. Par conséquent $\underline{T}_1|_W = \underline{T}_2|_W$. Il s'ensuit $\underline{T}_1|_{M_0^{\cdot}} = \underline{T}_2|_{M_0^{\cdot}}$, en raisonnant par récurrence sur la famille $(W_\xi)_{\xi < \hat{\lambda}}$. La construction par récurrence transfinie de σ à partir de σ_0 [I.M.S.A.] montre alors que $T_1 = T_2$. ∇

Désignons par Y la classe des $T \in \mathfrak{V}(\mathfrak{M}, \sigma)$ tels que $T(u')$ soit une injection pour tout $u' \in U_0^{\bullet}$.

PROPOSITION 3. *Sous les hypothèses de la proposition 2, Y est une classe de $\tilde{p}_u$-monomorphismes.*

Δ. Supposons que

$$T = (F_2, \underline{T}, F_1) \in Y, \quad T' = (F_2, \underline{T}', F'_1) \in \mho(\mathfrak{M}, \sigma)$$

et $h \in F_1(u).\mathfrak{M}.F'_1(u)$ soient tels que $T(u).h = T'(u)$. Nous avons à montrer qu'il existe un et un seul $T'' = (F_1, \underline{T}'', F'_1) \in \mho(\mathfrak{M}, \sigma)$ vérifiant

$$T \boxminus T'' = T' \quad \text{et} \quad T''(u) = h.$$

Si $u' \in W$, nous posons $\underline{T}''(u') = F_1(g).h.F'_1(f)$, lorsque (f, g) est un des couples tels que $g.f = u'$. Comme

$$\underline{T}(u').\underline{T}''(u') = \underline{T}(u').F_1(g).h.F'_1(f),$$

il vient

$$\underline{T}(u').\underline{T}''(u') = F_2(g).\underline{T}(u).h.F'_1(f) = F_2(g).\underline{T}'(u).F'_1(f).$$

Il en résulte

$$\underline{T}(u').\underline{T}''(u') = \underline{T}'(u').F'_1(g).F'_1(f) = \underline{T}'(u'),$$

ce qui montre que $\underline{T}''(u')$ est indépendant du couple (f, g) choisi, puisque $\underline{T}(u')$ est un monomorphisme.

Par récurrence sur la famille $(W_\xi)_{\xi \leq \hat{\lambda}}$ on étend de même T'' en une surjection de $M_0^{\bullet}$ dans $\mathfrak{M}$. La construction de σ à partir de σ_0 par récurrence transfinie permet de conclure. ∇

COROLLAIRE 2. *Si les hypothèses de la proposition 2 sont vérifiées ainsi que celles de la proposition 11, I. 4, $\tilde{p}_u$ est un foncteur à structures quasi-quotients.*

Δ. Le théorème d'existence de structures quasi-quotients de [C.S.L.] s'applique, puisque Y est également une classe de $\tilde{P}_u$-monomorphismes (d'après la proposition 3, où l'on remplace $\mathfrak{M}$ par $\hat{\mathfrak{M}}$). ∇

EXEMPLES. Toutes les esquisses citées précédemment vérifient les conditions de la proposition 2. On retrouve ainsi les nombreuses propriétés des foncteurs d'oubli usuellement étudiées.

II.2. Triplabilité du foncteur $\tilde{p}_u$.

u désigne encore une unité particulière de $U^{\cdot}$, appartenant à W. Dans tout ce qui suit, nous supposons que les hypothèses de la proposition 11 et celles du corollaire 5 de I.4 sont vérifiées. On sait qu'alors $\tilde{p}_{u'}$, pour tout $u' \in U^{\cdot}_0$, admet un adjoint. Nous allons donner une condition suffisante pour que $\tilde{p}_u$ soit triplable.

PROPOSITION 4. *Avec les hypothèses précédentes, $\tilde{p}_u$ est triplable lorsque les deux conditions suivantes sont vérifiées:*

- $W = \{ u \}$,
- $\mathcal{I}' = \emptyset$ *et* $I^{\cdot} \in \mathcal{I}$ *implique que* $I^{\cdot}$ *est une catégorie discrète.*

Δ. En vertu du critère de triplabilité de Beck [T.C.A.], il suffit de montrer que $\tilde{p}_u$ «crée les conoyaux de couples $\tilde{p}_u$-contractiles». Supposons, pour ce faire, que (T_1, T_2) soit un couple $\tilde{p}_u$-contractile tel que:

- $T_s = (F_2, \underline{T}_s, F_1) \in \mathcal{O}(\mathcal{M}, \sigma)$, $s = 1, 2$,
- $h_s = \tilde{p}_u(T_s) = \underline{T}_s(u)$, $s = 1, 2$,
- $h_1 . d = \beta(h_1)$, $h_2 . d . h_1 = h_2 . d . h_2$, où $d \in \alpha(h_1) . \mathcal{M} . \beta(h_1)$.

(On appelle *d le morphisme canonique* pour le couple contractile (h_1, h_2).) Désignons par k un conoyau, dans $\mathcal{M}$, de (h_1, h_2). Il existe un unique

$$k' \in \beta(h_2) . \mathcal{M} . \beta(k) \quad \text{tel que} \quad k' . k = h_2 . d.$$

Posons

$$F''(u) = \beta(k), \quad T''(u) = k, \quad D''(u) = d, \quad S''(u) = k'.$$

Soit ξ un ordinal tel que $\xi \leqslant \hat{\lambda}$ et supposons définis, pour tout $u'' \in W_{\xi''}$ et tout $\xi'' < \xi$, des éléments

$$F''(u'') \in \mathcal{M}_0, \quad T''(u'') \in F''(u'') . \mathcal{M} . F_2(u''),$$
$$D''(u'') \in F_1(u'') . \mathcal{M} . F_2(u''), \quad S''(u'') \in F_2(u'') . \mathcal{M} . F''(u''),$$

de sorte que $(\underline{T}_1(u''), \underline{T}_2(u''))$ soit un couple contractile, de morphisme canonique $D''(u'')$, de conoyau $T''(u'')$ et que

$$S''(u'') . T''(u'') = \underline{T}_2(u'') . D''(u'').$$

a) Si $\xi = \xi' + 1$, $u' \in W_\xi$ et $u' \notin W_{\xi'}$: choisissons un

$$\phi_{u'} = (U^{\cdot}, \underline{\phi}_{u'}, I^{\cdot}_{u'}) \in \Xi_{u'} \quad \text{tel que} \quad \underline{\phi}_{u'}(I_{u'}) \subset W_{\xi'}$$

(ceci est possible en vertu des hypothèses). Soit $\Phi_{u'} = (\mathfrak{M}, \underline{\Phi}_{u'}, I^{\cdot}_{u'})$ le foncteur défini par:

$$\underline{\Phi}_{u'}(i) = F''(\phi_{u'}(i)) \quad \text{pour tout} \quad i \in I_{u'},$$

et $\mu_{\mathfrak{M}}(\Phi_{u'})$ sa limite projective naturalisée canonique dans $\mathfrak{M}$. On note $F''(u')$ le sommet de $\mu_{\mathfrak{M}}(\Phi_{u'})$ (c'est-à-dire le produit canonique de la famille $(\underline{F}''\phi_{u'}(i))_{i\in I_{u'}}$); de plus on désigne par $T''(u')$, $D''(u')$ et $S''(u')$ les produits déterminés d'une manière unique par les égalités:

$$\begin{cases} T''_{\xi'}\phi_{u'} \boxminus F_2\mu_{U^{\cdot}}(\phi_{u'}) = \mu_{\mathfrak{M}}(\Phi_{u'}) \boxminus T''(u')^{\wedge}, \\ D''_{\xi'}\phi_{u'} \boxminus F_2\mu_{U^{\cdot}}(\phi_{u'}) = F_1\mu_{U^{\cdot}}(\phi_{u'}) \boxminus D''(u')^{\wedge}, \\ S''_{\xi'}\phi_{u'} \boxminus \mu_{\mathfrak{M}}(\Phi_{u'}) = F_2\mu_{U^{\cdot}}(\phi_{u'}) \boxminus S''(u')^{\wedge}, \end{cases}$$

$T''_{\xi'}\phi_{u'}$ étant la transformation naturelle de $F_2 . \phi_{u'}$ vers $\Phi_{u'}$ telle que

$$T''_{\xi'}\phi_{u'}(i) = T''(\phi_{u'}(i)) \quad \text{pour tout} \quad i \in I_{u'},$$

$D''_{\xi'}\phi_{u'}$ et $S''_{\xi'}\phi_{u'}$ étant définis d'une façon analogue. Tout foncteur étant compatible avec les conoyaux de couples contractiles, $(\underline{T}_1(u'), \underline{T}_2(u'))$ est un couple contractile, de morphisme canonique $D''(u')$, de conoyau $T''(u')$ et l'on a

$$S''(u').T''(u') = \underline{T}_2(u').D''(u').$$

b) Si ξ est un ordinal limite et si $u' \in W_\xi$, il existe $\xi' < \xi$ tel que $u' \in W_{\xi'}$, de sorte que $F''(u')$, $T''(u')$, $D''(u')$ et $S''(u')$ sont définis.

Par récurrence transfinie, on obtient ainsi des surjections F'', T'', D'' et S'' de $W^{\wedge}_{\lambda} = M^{\cdot}_0$ dans $\mathfrak{M}$; posons de plus

$$F'_s = F_s \,|\, U^{\cdot}_0 \quad \text{et} \quad T'_s = \underline{T}_s |U^{\cdot}_0, \quad \text{pour} \quad s = 1, 2.$$

Utilisant la construction par récurrence transfinie de σ à partir de σ_0, on étend facilement ces surjections respectivement en un foncteur F' de la catégorie discrète $U^{\cdot}_0$ dans $\mathfrak{M}$ et en des transformations naturelles

$$T' = (F', \underline{T}', F'_2), \quad D' = (F'_1, \underline{D}', F'_2) \quad \text{et} \quad S' = (F'_2, \underline{S}', F'),$$

telles que (T'_1, T'_2) soit un couple contractile dans $\mathfrak{N}(\mathfrak{M}, U^{\cdot}_0)$, de morphisme canonique D', de conoyau T', et que $S' \boxminus T' = T'_2 \boxminus D'$.

Si $z \in u'. U. u''$, nous posons alors

$$\underline{F}(z) = \underline{T}'(u').F_2(z).\underline{S}'(u'').$$

On constate que

$$\underline{F}(z) : \underline{T}'(u'') = \underline{T}'(u').\, F_2(z).$$

Comme $\underline{T}'(u'')$ est un conoyau pour tout $u'' \in U_0^{\cdot}$, ceci suffit à prouver que la surjection $\underline{F}$ définit un néofoncteur $F = (\mathfrak{M}, \underline{F}, U^{\cdot})$ prolongeant F' et que $T = (F, \underline{T}', F_2)$ est un conoyau de (T_1, T_2) dans $\mathfrak{N}(\mathfrak{M}, U^{\cdot})$.

Montrons que F est une réalisation vague de σ dans $\mathfrak{M}$. Pour cela, supposons $\mu_{U^{\cdot}}(\phi) = (\phi, \underline{T}, \hat{u}')$ défini, où $\phi \in U^{\cdot}.\hat{\mathfrak{N}}'.I^{\cdot}$. Utilisant le foncteur de $\mathfrak{N}(\mathfrak{M}, U^{\cdot})$ vers $\mathfrak{N}(\mathfrak{M}, I^{\cdot})$ associant

$$\theta\phi = (G'.\phi, \underline{\theta}\phi_0, G.\phi) \text{ à } \theta = (G', \underline{\theta}, G), \text{ où } \phi_0 = \underline{\phi} \mid I_0^{\cdot},$$

on voit que $(T_1\phi, T_2\phi)$ est un couple contractile dans $\mathfrak{N}(\mathfrak{M}, I^{\cdot})$, de morphisme canonique $D\phi$ et qui admet $T\phi$ pour conoyau. Il en résulte que l'unique application (produit) $f \in F(u').\mathfrak{M}.F_2(u')$ telle que

$$T\,\phi \boxminus F_2 \mu_{U^{\cdot}}(\phi) = \mu_{\mathfrak{M}}(F.\phi) \boxminus \hat{f}$$

est un conoyau dans $\mathfrak{M}$ du couple contractile $(\underline{T}_1(u'), \underline{T}_2(u'))$. Puisqu'il en est de même de $\underline{T}'(u')$, on en déduit une bijection g telle que $f = g.\underline{T}'(u')$; il s'ensuit que $F\mu_{U^{\cdot}}(\phi) = \mu_{\mathfrak{M}}(F.\phi) \boxminus \hat{g}$ est une limite projective naturalisée. Donc $F \in \mho(\mathfrak{M}, \sigma)_0$, et T est un conoyau dans $\mho(\mathfrak{M}, \sigma)$ de la paire contractile (T_1, T_2).

Si $\overline{T} = (\overline{F}, \underline{\overline{T}}, F_2) \in \mho(\mathfrak{M}, \sigma)$ vérifie les conditions $\overline{T} \boxminus T_1 = \overline{T} \boxminus T_2$ et $\overline{T}(u) = k$, on montre par récurrence qu'il existe une équivalence naturelle B telle que $B \boxminus \overline{T} = T$, car F est une réalisation vague de σ. Ceci achève la démonstration. ∇

REMARQUES. Cette proposition s'applique à tous les cas usuels de «structures algébriques» (dans un sens intuitif), i.e. aux ensembles munis de lois de composition partout définies. Ceci n'est bien entendu pas étranger à la conception naturelle que l'on peut avoir d'une algèbre associée à un triple.

Remarquons cependant que beaucoup d'autres structures tout aussi intuitivement algébriques ne peuvent s'interpréter comme des algèbres associées à un triple dans $\mathfrak{M}$, même lorsque leurs esquisses sont projectives.

Enfin, on peut obtenir certaines structures esquissées comme des algèbres sur un triple sans qu'elles vérifient les hypothèses de la proposition 4. La triplabilité devrait alors être démontrée directement.

III. CONDITION NECESSAIRE ET SUFFISANTE DE $\mathfrak{M}$-SPECIFIABILITE

Dans ce qui suit, $\mathfrak{F}_0$ et $\mathfrak{J}'$ sont deux parties de $\hat{\mathfrak{F}}_0$, $L^{\cdot} \in \hat{\mathfrak{F}}_0$ est une $\tilde{\mathfrak{M}}_0$-catégorie et $\mathcal{H}_{L^{\cdot}} = \{ H(F)^* \mid F \in \mathfrak{M}.\hat{\mathfrak{F}}.L^{\cdot} \}$, où $H(F)$ désigne la source du foncteur d'hypermorphismes associé à F. On pose:

$$\mathfrak{I}' = \{ I^{\cdot} \times \{1\} \mid I^{\cdot} \in \mathfrak{J}' \} \cup \{ H(F)^* \times \{2\} \mid H(F)^* \in \mathcal{H}_{L^{\cdot}} \}.$$

Il est clair que $\mathfrak{I}' \subset \hat{\mathfrak{F}}_0$.

Nous reprenons les notations de 0.2; en particulier, m est un foncteur de $\tilde{\mathfrak{M}}$ dans $\mathfrak{M}$ et γ une équivalence de $\tilde{\mathfrak{M}}$ vers $i_{\mathfrak{M}}.m$. Si $C^{\cdot}$ est une $\tilde{\mathfrak{M}}_0$-catégorie, on note $Hom_{C^{\cdot}}$ le foncteur $m.hom_{C^{\cdot}}$; on a $Hom_{\mathfrak{M}} = hom_{\mathfrak{M}}$.

Soit $\Sigma(\mathfrak{M}) = (\mathfrak{M}, \mu_{\mathfrak{M}}, \mu''_{\mathfrak{M}})$ le $(\mathfrak{F}_0, \mathfrak{I}')$-prototype sur $\mathfrak{M}$ tel que:

$\mu''_{\mathfrak{M}}(\phi)$ est défini si, et seulement si, $\phi \in \mathfrak{M}.\hat{\mathfrak{F}}.H(F)^* \times \{2\}$ et $\phi = \Phi_{F,e}$ pour $e \in L^{\cdot}_0$; dans ce cas, $\mu''_{\mathfrak{M}}(\phi) = (F(e)^{\wedge}, \underline{\theta}, \Phi_{F,e})$ (notations de 0.2).

Soit q_e, pour tout $e \in L^{\cdot}_0$, le foncteur de $\mathfrak{N}(\mathfrak{M}, L^{\cdot})$ vers $\mathfrak{M}$ associant $T(e)$ à $T \in \mathfrak{N}(\mathfrak{M}, L^{\cdot})$. Nous désignons par

$$\Sigma(\mathfrak{N}(\mathfrak{M}, L^{\cdot})) = (\mathfrak{N}(\mathfrak{M}, L^{\cdot}), \mu_{\mathfrak{N}}, \mu''_{\mathfrak{N}})$$

le $(\mathfrak{F}_0, \mathfrak{I}')$-prototype défini comme suit:

Soit $\phi \in \mathfrak{N}(\mathfrak{M}, L^{\cdot}).\hat{\mathfrak{F}}.I^{\cdot}$, $\nu = \mu$ (resp. $= \mu''$). Si $I^{\cdot} \in \mathfrak{F}_0$ (resp. $\in \mathfrak{I}'$) alors $\nu_{\mathfrak{N}}(\phi)$ est défini si, et seulement si, $\nu_{\mathfrak{M}}(q_e.\phi)$ est défini pour tout $e \in L^{\cdot}_0$, et c'est l'unique [F.C.T.N.] élément de $\mathfrak{N}(\mathfrak{N}(\mathfrak{M}, L^{\cdot}), I^{\cdot})$ qui soit un cône projectif (resp. inductif) de base ϕ tel que

$$q_e \nu_{\mathfrak{N}}(\phi) = \nu_{\mathfrak{M}}(q_e.\phi) \quad \text{pour tout } e \in L^{\cdot}_0.$$

Nous allons étudier une condition nécessaire et suffisante pour que $L^{\cdot}$ soit une catégorie fortement $\mathfrak{M}$-spécifiable; nous l'énonçons ainsi:

THEOREME 1. *Pour que $L^{\cdot}$ soit fortement $\mathfrak{M}$-spécifiable, il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient vérifiées:*

(i) $\Sigma(\mathfrak{N}(\mathfrak{M}, L^{\cdot}))$ est une $(\mathfrak{F}_0, \mathfrak{I}')$-esquisse forte pour $\mathfrak{M}$.

(ii) $L^{\cdot}$ est équivalente à $\mathcal{O}(\mathfrak{M}, \Sigma(\mathfrak{N}(\mathfrak{M}, L^{\cdot})))$.

Il est clair que ces conditions sont suffisantes en vertu des définitions données en 0.4. Nous allons montrer la nécessité en plusieurs étapes.

Pour ce faire, dans toute la suite nous supposons que

$$\sigma = (U^\cdot , \mu_{U^\cdot}, \mu'_{U^\cdot}) \in \mathcal{S}_o^{\mathcal{F}_o \mathcal{I}'}$$

est une $(\mathcal{F}_o , \mathcal{I}')$-esquisse forte pour $\mathfrak{M}$ et reprenons les notations de 0.4 pour l'exprimer. Nous supposons que

$$l' = (L^\cdot , \underline{l}', \mathcal{O}(\mathfrak{M}, \sigma)) \quad \text{et} \quad l = (\mathcal{O}(\mathfrak{M}, \sigma), \underline{l}, L^\cdot)$$

sont deux foncteurs définissant $L^\cdot$ comme catégorie équivalente à $\mathcal{O}(\mathfrak{M}, \sigma)$ c'est-à-dire tels qu'il existe

$$w = (l'. l, \underline{w}, L^\cdot) \in \mathfrak{N}(L^\cdot , L^\cdot)_\gamma$$

et

$$w' = (l. l', \underline{w}', \mathcal{O}(\mathfrak{M}, \sigma)) \in \mathfrak{N}(\mathcal{O}(\mathfrak{M}, \sigma), \mathcal{O}(\mathfrak{M}, \sigma))_\gamma .$$

Enfin, nous posons $\Sigma = \Sigma(\mathfrak{N}(\mathfrak{M}, L^\cdot))$.

III.1. Construction d'un foncteur R de $L^\cdot$ dans $\mathcal{O}(\mathfrak{M}, \Sigma)$.

Au foncteur identité de $\mathfrak{N}(\mathfrak{M}, L^\cdot)$ correspond, par l'isomorphisme canonique de

$$\mathfrak{N}(\mathfrak{N}(\mathfrak{M}, L^\cdot), \mathfrak{N}(\mathfrak{M}, L^\cdot)) \quad \text{sur} \quad \mathfrak{N}(\mathfrak{N}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}(\mathfrak{M}, L^\cdot)), L^\cdot),$$

le foncteur q de $L^\cdot$ dans $\mathfrak{N}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}(\mathfrak{M}, L^\cdot))$ associant à $f \in e'. L. e$ la transformation naturelle

$$q(f) = (q_{e'}, \underline{q}_f, q_e), \quad \text{où} \quad \underline{q}_f(F) = F(f) \quad \text{si} \quad F \in \mathfrak{M}. \hat{\mathcal{F}}. L^\cdot .$$

D'après la définition même de Σ, le foncteur q_e, pour tout $e \in L_o^\cdot$, est une réalisation de Σ dans $\Sigma(\mathfrak{M})$. Donc q prend ses valeurs dans la sous-catégorie pleine $\mathcal{O}(\mathfrak{M}, \sigma)$. Il s'ensuit que q admet pour restriction un foncteur R de $L^\cdot$ dans $\mathcal{O}(\mathfrak{M}, \Sigma)$.

Remarquons que nous n'avons pas utilisé la spécifiabilité de $L^\cdot$

III.2. Construction d'un foncteur N de $\mathcal{O}(\mathfrak{M}, \Sigma)$ dans $L^\cdot$.

On associe de même au foncteur identité de $\mathfrak{N}(\mathfrak{M}, U^\cdot)$ un néofoncteur $\tilde{p}$ de $U^\cdot$ dans $\mathfrak{N}(\mathfrak{M} , \mathcal{O}(\mathfrak{M}, \sigma))$ tel que, si $z \in u'. U. u$, on ait

$$\tilde{p}(z) = (\tilde{p}_{u'}, \underline{\tilde{p}}_z, \tilde{p}_u), \quad \text{où} \quad \underline{\tilde{p}}_z(F) = F(z) \text{ si } F \in \mathfrak{M}.\hat{\mathfrak{N}}'.U^{\cdot}$$

et où $\tilde{p}_u$ est le foncteur d'omission associé à u. On pose $\tilde{p}_z = \tilde{p}(z)$.

La surjection associant Tl à $T \in \mathfrak{N}(\mathfrak{M}, \mathcal{O}(\mathfrak{M}, \sigma))$ définit un foncteur $\bar{l}$ de $\mathfrak{N}(\mathfrak{M}, \mathcal{O}(\mathfrak{M}, \sigma))$ dans $\mathfrak{N}(\mathfrak{M}, L^{\cdot})$. Soit

$$N'' = (\mathfrak{N}(\mathfrak{M}, U^{\cdot}), \underline{N}'', \mathfrak{N}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}(\mathfrak{M}, L^{\cdot})))$$

associant

$$T'(\bar{l}.\tilde{p}) \quad \text{à} \quad T' \in \mathfrak{N}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}(\mathfrak{M}, L^{\cdot})).$$

Montrons que N'' admet pour restriction un foncteur N' de $\mathcal{O}(\mathfrak{M}, \Sigma)$ dans $\mathcal{O}(\mathfrak{M}, \sigma)$. Pour cela, il suffit de montrer que, si $Z \in \mathcal{O}(\mathfrak{M}, \Sigma)_0$, alors on a $N''(Z) \in \mathcal{O}(\mathfrak{M}, \sigma)_0$. Par définition $N''(Z) = Z.\bar{l}.\tilde{p}$ associe $Z(\tilde{p}_z l)$ à $z \in U$. Pour tout $e \in L^{\cdot}_0$, on trouve

$$q_e.\bar{l}.\tilde{p} = l(e) \in \mathcal{O}(\mathfrak{M}, \sigma)_0 ;$$

il s'ensuit que $\bar{l}.\tilde{p}$ est une réalisation vague de σ dans $\mathfrak{N}(\mathfrak{M}, L^{\cdot})$, par construction des limites dans cette catégorie. Comme Z est une réalisation vague de σ dans $\mathfrak{M}$, il est compatible avec les $\mathfrak{F}_0$-limites projectives et les $\mathfrak{I}'$-limites inductives, car, par définition du prototype Σ, toute limite de ce genre est équivalente à une limite canonique dans Σ.

Il en résulte que $N''(Z) = Z.\bar{l}.\tilde{p}$ est une réalisation vague de σ dans $\mathfrak{M}$, ce qui prouve l'existence d'une restriction N' de N''.

On notera N le foncteur $l'.N'$ de $\mathcal{O}(\mathfrak{M}, \Sigma)$ dans $L^{\cdot}$.

III.3. Calcul du foncteur $N.R$.

$N.R$ est un foncteur de $L^{\cdot}$ dans $L^{\cdot}$.

Si $e \in L^{\cdot}_0$, on a:

$$N'.R(e) = N'.q_e = q_e.\bar{l}.\tilde{p} = l(e).$$

Si $f \in e'.L.e$, alors

$$N'.R(f) = q(f)(\bar{l}.\tilde{p}) = (l(e'), \underline{\tau}, l(e)),$$

où

$$\underline{\tau}(u) = \tilde{p}_u l(f) = l(f)(u) \quad \text{pour tout} \quad u \in U^{\cdot}_0,$$

c'est-à-dire $N'.R(f) = l(f)$.

En conséquence $N'.R = l$, d'où $N.R = l'.l$.

III.4. Détermination d'un élément de $\mathfrak{N}(\mathfrak{M}, L^{\cdot})$ par les $Hom_{L^{\cdot}}(-, e)$.

Supposons que $F \in \mathfrak{M}.\hat{\mathfrak{F}}.L^{\cdot}$.

Pour simplifier, le couple $((f, x), 2) \in H(F) \times \{2\}$ sera noté $(f; x)$. Soit

$$\Phi_F = (\mathfrak{N}(\mathfrak{M}, L^{\cdot}), \underline{\Phi}_F, H(F)^* \times \{2\})$$

le foncteur défini par

$$\Phi_F(f; x) = Hom_{L^{\cdot}}(-, f) = m\,hom_{L^{\cdot}}(-, f),$$

si $(f, x) \in H(F)$. Alors $\mu''_{\mathfrak{N}}(\Phi_F)$ est défini, et

$$\mu''_{\mathfrak{N}}(\Phi_F) = (\hat{F}, \underline{\tau}_F, \Phi_F),$$

lorsque $\underline{\tau}_F$ est la surjection qui, à $(e; x) \in H(F)^* \times \{2\}_0$, associe la transformation naturelle $\underline{\tau}_F(e; x)$ de $Hom_{L^{\cdot}}(-, e)$ vers F telle que

$$\tau_F(e; x)(e') = (F(e'), \underline{t}, Hom_{L^{\cdot}}(e', e)),$$

pour tout $e' \in L^{\cdot}_0$, soit l'application définie par:

$$\underline{t}(h) = F(\gamma(e'.L.e)^{-1}(h))(x), \quad \text{pour tout } h \in Hom_{L^{\cdot}}(e', e).$$

Désignons par $\mathfrak{L}$ la sous-catégorie pleine de $\mathfrak{N}(\mathfrak{M}, L^{\cdot})$ dont les unités sont les foncteurs $Hom_{L^{\cdot}}(-, e)$, où $e \in L^{\cdot}_0$. En utilisant les résultats qui précèdent, on obtient:

PROPOSITION 1. *Si* $Z_s = (\mathfrak{M}, \underline{Z}_s, \mathfrak{N}(\mathfrak{M}, L^{\cdot}))$, $s = 1, 2$, *sont deux foncteurs compatibles avec les* $\mathcal{H}_{L^{\cdot}}$*-limites inductives, si* $Z'_s = Z_s|_{\mathfrak{L}}$, $s = 1, 2$, *et s'il existe* $Q' = (Z'_2, \underline{Q}', Z'_1) \in \mathfrak{N}(\mathfrak{M}, \mathfrak{L})$, *alors il existe une unique transformation naturelle* Q *telle que:*

$$Q = (Z_2, \underline{Q}, Z_1) \in \mathfrak{N}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}(\mathfrak{M}, L^{\cdot})) \quad et \quad Q|_{\mathfrak{L}} = Q'.$$

Cette proposition n'est évidemment qu'une forme modifiée (relative aux foncteurs $Hom_{L^{\cdot}}(-, e) = m.\,hom_{L^{\cdot}}(-, e)$, et non aux $hom_{L^{\cdot}}(-, e)$) d'un résultat bien connu.

III.5. Détermination d'un élément de $\mathfrak{L}$ par les foncteurs d'omission.

Soit $\mathfrak{D}$ la sous-catégorie pleine de $\mathfrak{N}(\mathfrak{M}, U'^{\cdot})$ dont les unités sont les foncteurs $F' = (\mathfrak{M}, \underline{F}', U'^{\cdot})$ tels qu'il existe $F \in \mathcal{O}(\mathfrak{M}, \sigma)_0$ vérifiant $F|_{U'^{\cdot}} = F'$. (Rappelons que $U'^{\cdot}$ est un sous-graphe multiplicatif de $U^{\cdot}$

qui vérifie les conditions de 0.4).

$\mathfrak{D}$ est équivalente à $\mho(\mathfrak{M}, \sigma)$. En effet, soit d le foncteur «restriction à $U'^{\cdot}$ », de $\mho(\mathfrak{M}, \sigma)$ dans $\mathfrak{D}$, défini par:

$$d(T) = T|_{U'^{\cdot}} \quad \text{si} \quad T \in \mho(\mathfrak{M}, \sigma).$$

Par ailleurs, choisissons pour tout $F' \in \mathfrak{D}_0$ un $d'_0(F') \in \mho(\mathfrak{M}, \sigma)_0$ tel que $d'_0(F')|_{U'^{\cdot}} = F'$. En vertu des hypothèses, il existe un unique foncteur $d' = (\mho(\mathfrak{M}, \sigma), \underline{d'}, \mathfrak{D})$ prolongeant d'_0, et une équivalence naturelle

$$r = (d'.d, \underline{r}, \mho(\mathfrak{M}, \sigma)).$$

Comme $d.d' = \mathfrak{D}$, les catégories $\mathfrak{D}$ et $\mho(\mathfrak{M}, \sigma)$ sont équivalentes. A fortiori, $d.l$ définit une équivalence de $L^{\cdot}$ vers $\mathfrak{D}$.

Pour tout $z \in U$, posons $p'_z = \tilde{p}_z d'$. Si $z \in U'$, on a $p'_z d = \tilde{p}_z$, car

$$p'_z\, d(F) = \tilde{p}_z(d'.d(F)) = d'.d(F)(z) = \tilde{p}_z(F).$$

Désignons par $\mathbf{I}^{\cdot}$ la catégorie des couples définissant l'ordre sur U' tel que:

$$z < z, \quad \alpha(z) < z \quad \text{et} \quad \beta(z) < z.$$

Ainsi $\mathbf{I}$ a pour seuls éléments les couples (z, z), $(z, \alpha(z))$, $(z, \beta(z))$, où $z \in U'$; de plus

$$\alpha(z, z') = (z', z') \quad \text{et} \quad \beta(z, z') = (z, z), \text{ pour } (z, z') \in \mathbf{I}.$$

Supposons que $F' \in \mathfrak{D}_0$. Nous allons montrer que $Hom_{\mathfrak{D}}(-, F')$ est $\mathbf{I}^{\cdot}$-limite projective dans $\mathfrak{N}(\mathfrak{M}, \mathfrak{D})$ d'un foncteur $\zeta_{F'}$ que nous allons construire explicitement.

Si $G' \in \mathfrak{D}_0$, soit $\zeta'_{F',G'} = (\mathfrak{M}, \underline{\zeta'}_{F',G'}, \mathbf{I}^{\cdot})$ le foncteur défini par:

$$\begin{cases} \zeta'_{F',G'}(z, z) = Hom_{\mathfrak{M}}(G'(\beta(z)), F'(\alpha(z))), \\ \zeta'_{F',G'}(z, \alpha(z)) = Hom_{\mathfrak{M}}(G'(z), F'(\alpha(z))), \\ \zeta'_{F',G'}(z, \beta(z)) = Hom_{\mathfrak{M}}(G'(\beta(z)), F'(z)), \end{cases}$$

pour tout $z \in U'$. On constate l'existence d'une limite projective naturalisée

$$\nu'_{F',G'} = (\zeta'_{F',G'}, \underline{\nu}'_{F',G'}, Hom_{\mathfrak{D}}(G', F')^{\wedge}),$$

où

$$\underline{\nu}'_{F',G'}(z, z)(h) = G'(z).T(u), \text{ si } h = \gamma(G' \boxminus \mathfrak{D} \boxminus F')(T),$$
$$T \in G' \boxminus \mathfrak{D} \boxminus F', \quad u = \alpha(z).$$

Si $T' = (G'', \underline{T}', G') \in \mathfrak{D}$, on lui associe une transformation naturelle $\zeta'_{F',T'} = (\zeta'_{F',G''}, \underline{\zeta}'_{F',T'}, \zeta'_{F',G'})$ définie par

$$\underline{\zeta}'_{F',T'}(z, z) = Hom_{\mathfrak{M}}(T'(\beta(z)), F'(\alpha(z))) \text{ si } z \in U',$$

et on montre que $Hom_{\mathfrak{D}}(T', F')$ est l'unique application telle que

$$\nu'_{F',G''} \square Hom_{\mathfrak{D}}(T', F')^{\wedge} = \zeta'_{F',T'} \square \nu'_{F',G'}.$$

D'où il résulte qu'il existe une $\mathbf{I}^{\cdot}$-limite projective naturalisée

$$\nu'_{F'} = (\zeta'_{F'}, \underline{\nu}'_{F'}, Hom_{\mathfrak{D}}(-, F')^{\wedge})$$

dans $\mathfrak{N}(\mathfrak{M}, \mathfrak{D})$, définie comme suit:

$\underline{\nu}'_{F'}(z, z)(G') = \underline{\nu}'_{F',G'}(z, z)$, si $z \in U'$ et $G' \in \mathfrak{D}_0$,

$\zeta'_{F'}$ est le foncteur de $\mathbf{I}^{\cdot}$ dans $\mathfrak{N}(\mathfrak{M}, \mathfrak{D})$ canoniquement associé au foncteur de $\mathfrak{D}$ dans $\mathfrak{N}(\mathfrak{M}, \mathbf{I}^{\cdot})$ associant $\zeta'_{F',T'}$ à $T' \in \mathfrak{D}$.

Il existe une équivalence naturelle $\theta'_{F'}$ de $\zeta'_{F'}$ vers le foncteur $\zeta_{F'} = (\mathfrak{N}(\mathfrak{M}, \mathfrak{D}), \underline{\zeta}_{F'}, \mathbf{I}^{\cdot})$ tel que, si $z \in u'. U'. u$, on ait:

$$\zeta_{F'}(z, z) = (p'_{u'})^{F'(u)}, \quad \zeta_{F'}(z, \alpha(z)) = (p'_z)^{F'(u)},$$
$$\zeta_{F'}(z, \beta(z)) = (p'_{u'})^{F'(z)}$$

(si K est un foncteur de $C^{\cdot}$ dans $\mathfrak{M}$ et $h \in \mathfrak{M}$, on note K^h la transformation naturelle «crochet» du foncteur produit $K^{\beta(h)}$ vers $K^{\alpha(h)}$ telle que

$$K^h(e)((x_i)_{i \in \beta(h)}) = (x_{h(j)})_{j \in \alpha(h)}, \text{ si } e \in C^{\cdot}_0 \text{ et } x_i \in K(e)).$$

Il en résulte:

PROPOSITION 2. *Avec les notations précédentes,*

$$\nu_{F'} = \theta_{F'} \square \nu'_{F'} = (\zeta_{F'}, \underline{\nu}_{F'}, Hom_{\mathfrak{D}}(-, F')^{\wedge})$$

est une limite projective naturalisée dans $\mathfrak{N}(\mathfrak{M}, \mathfrak{D})$.

Le foncteur n associant $T(d.l)$ à $T \in \mathfrak{N}(\mathfrak{M}, \mathfrak{D})$ définit une équivalence de $\mathfrak{N}(\mathfrak{M}, \mathfrak{D})$ dans $\mathfrak{N}(\mathfrak{M}, L^{\cdot})$. En particulier, il est compatible avec les limites projectives, de sorte qu'il transforme $\nu_{F'}$ en la limite projective naturalisée

$$\overline{\nu}_{F'} = (\overline{\zeta}_{F'}, \overline{\underline{\nu}}_{F'}, Hom_{\mathfrak{D}}(-, F')(d.l)^{\wedge}).$$

Considérons le cas où

$$e \in L_0^{\cdot} \quad \text{et} \quad F' = d(l(e)) = l(e)|_{U'}.\ .$$

Alors $Hom_{\mathfrak{D}}(-, F').d.l$ est équivalent au foncteur $Hom_{L^{\cdot}}(-, e)$, de sorte que ce dernier est aussi une limite projective dans $\mathfrak{N}(\mathfrak{M}, L^{\cdot})$ du foncteur $\bar{\zeta}_{d(l(e))}$. De plus, si $z \in u'.U'.u$, on obtient

$$\bar{\zeta}_{F'}(z, z) = \zeta_{F'}(z, z).d.l = (p'_{u'}.d.l)^{l(e)(u)} = (\tilde{p}_{u'}.l)^{l(e)(u)},$$

$$\bar{\zeta}_{F'}(z, \alpha(z)) = (\tilde{p}_z l)^{l(e)(u)}, \quad \bar{\zeta}_{F'}(z, \beta(z)) = (\tilde{p}_{u'}.l)^{l(e)(z)}.$$

On en déduit:

PROPOSITION 3. *Soit $\mathfrak{L}'$ la sous-catégorie de $\mathfrak{N}(\mathfrak{M}, L^{\cdot})$ engendrée par les éléments $\tilde{p}_z l$, où $z \in U'$. On a $\mathfrak{L}' \in \tilde{\mathfrak{M}}_0$ et Σ est forte pour $\mathfrak{M}$.*

Δ. Soient Z et Z' deux réalisations vagues de Σ dans $\mathfrak{M}$ telles que $Z|_{\mathfrak{L}'} = Z'|_{\mathfrak{L}'}$. Soit $e \in L_0^{\cdot}$. D'après ce qui précède, $Hom_{L^{\cdot}}(-, e)$ est limite projective du foncteur $\bar{\zeta}_{d(l(e))}$. Or, par construction, ce foncteur prend ses valeurs dans la sous-catégorie de $\mathfrak{N}(\mathfrak{M}, L^{\cdot})$ stable par $\mathfrak{M}_0$-produits engendrée par $\mathfrak{L}'$; il en résulte, Z et Z' étant compatibles avec les $\mathfrak{M}_0$-produits, que les foncteurs $Z\bar{\zeta}_{d(l(e))}$ et $Z'\bar{\zeta}_{d(l(e))}$ sont équivalents. Par suite, Z et Z' étant compatibles avec les $\mathbf{I}^{\cdot}$-limites projectives (car $\mathbf{I} \in \tilde{\mathfrak{M}}_0$ «s'identifie» à la catégorie image $m(\mathbf{I})^{\cdot} \in \mathfrak{F}_0$), les ensembles

$$Z(Hom_{L^{\cdot}}(-, e)) \quad \text{et} \quad Z'(Hom_{L^{\cdot}}(-, e))$$

sont équipotents. Ceci montre que $Z|_{\mathfrak{L}}$ et $Z'|_{\mathfrak{L}}$ sont des foncteurs équivalents.

Un foncteur F de $L^{\cdot}$ dans $\mathfrak{M}$ étant limite inductive d'un foncteur de source $H(F)^{*} \times \{2\} \in \mathfrak{I}'$ à valeurs dans $\mathfrak{L}$, les foncteurs Z et Z', qui sont compatibles avec les $\mathfrak{I}'$-limites inductives, sont aussi équivalents.

Soient $Z_s = (\mathfrak{M}, \underline{Z}_s, \mathfrak{N}(\mathfrak{M}, L^{\cdot}))$, $s = 1, 2$, deux foncteurs compatibles avec les $\mathcal{H}_L$.-limites inductives et les $\mathfrak{F}_0$-limites projectives (par exemple deux réalisations vagues de Σ dans $\mathfrak{M}$). Soit

$$Q'' = (Z''_2, \underline{Q}'', Z''_1) \in \mathfrak{N}(\mathfrak{M}, \mathfrak{L}'), \quad \text{où } Z''_s = Z_s|_{\mathfrak{L}'}, \ s = 1, 2.$$

Puisque toute unité de $\mathfrak{L}$ est limite projective d'un foncteur à valeurs dans $\mathfrak{L}'$, il existe une unique transformation naturelle

$$Q' = (Z'_2, \underline{Q}', Z'_1) \in \mathfrak{N}(\mathfrak{M}, \mathfrak{L}),$$

telle que $Z'_s = Z_s|_{\mathfrak{L}}$, $s = 1, 2$, et $Q'|_{\mathfrak{L}'} = Q''$.

En utilisant la proposition 1, on étend Q' en une unique transformation naturelle $Q = (Z_2, \underline{Q}, Z_1)$ telle que $Q|_{\mathfrak{L}} = Q'$. Donc Q est la seule transformation naturelle de Z_1 vers Z_2 prolongeant Q''. ∇

III.6. Conclusion.

Calculons enfin le foncteur $R.N$ de $\mathfrak{O}(\mathfrak{M}, \Sigma)$ dans $\mathfrak{O}(\mathfrak{M}, \Sigma)$.

Supposons que $Z \in \mathfrak{O}(\mathfrak{M}, \Sigma)_0$. Alors $R.N(Z) \in \mathfrak{O}(\mathfrak{M}, \Sigma)_0$ est compatible avec les $\mathfrak{F}_0$-limites projectives et les $\mathfrak{I}'$-limites inductives. Pour tout $z \in U'$, on a

$$R.N(Z)(\tilde{p}_z l) = \tilde{p}_z l(N(Z)) = \tilde{p}_z l.\, l'(N'(Z)) = l.\, l'.\, N'(Z)(z);$$

Ceci s'écrit

$$R.N(Z)(\tilde{p}_z l) = l.\, l'(Z)(\tilde{p}_z l).$$

En conséquence

$$R.N(Z)|_{\mathfrak{L}'} = l.\, l'(Z)|_{\mathfrak{L}'}.$$

Appliquant la proposition 3, il existe une unique transformation naturelle

$$\underline{\xi}(Z) = (R.N(Z), \underline{\xi(Z)}, l.\, l'(Z)) \in \mathfrak{N}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}(\mathfrak{M}, L^{\cdot}))$$

telle que $\xi(Z)|_{\mathfrak{L}'} = \mathfrak{L}'$. De plus $\underline{\xi}(Z)$ est une équivalence.

Si $Q = (Z_2, \underline{Q}, Z_1) \in \mathfrak{O}(\mathfrak{M}, \Sigma)$, pour tout $u \in U_0^{\prime\cdot}$, on a

$$R.N(Q)(\tilde{p}_u.\, l) = \tilde{p}_u.\, l(N(Q)) = \tilde{p}_u.\, l.\, l'(N'(Q)) = l.\, l'.\, N'(Q)(u),$$

ce qui s'écrit

$$R.N(Q)(\tilde{p}_u.\, l) = l.\, l'(Q)(\tilde{p}_u.\, l).$$

On en déduit

$$\underline{\xi}(Z_2) l.\, l'(Q)(\tilde{p}_u.\, l) = \underline{R}\underline{N}(Q)\underline{\xi}(Z_1)(\tilde{p}_u.\, l),$$

d'où, d'après la proposition 3,

$$\underline{\xi}(Z_2) \boxminus l.\, l'(Q) = R.N(Q) \boxminus \underline{\xi}(Z_1).$$

En conséquence $\xi = (R.N, \underline{\xi}, l.\, l')$ est une transformation naturelle; en fait, c'est une équivalence naturelle, $\underline{\xi}(Z)$ étant une équivalence pour tout $Z \in \mathfrak{O}(\mathfrak{M}, \Sigma)_0$. Il en résulte que $R.N$ est équivalent à $\mathfrak{O}(\mathfrak{M}, \Sigma)$.

Donc $L^{\cdot}$ est équivalente à $\mathfrak{O}(\mathfrak{M}, \Sigma)$, ce qui établit le point *(ii)* du théorème et achève la démonstration de ce théorème. ∇

III.7. Remarques.

Le théorème 1 résoud le problème de la spécifiabilité d'une catégorie donnée par une esquisse «pas trop grosse», i. e. possédant un sous-graphe multiplicatif «petit» qui peut être considéré comme un système générateur de l'esquisse [I.M.S.A.].

Nous étudierons ultérieurement des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un sous-graphe multiplicatif de $\mathfrak{N}(\mathfrak{M}, L^{\cdot})$ soit un système générateur, dans ce sens, pour $\mathfrak{N}(\mathfrak{M}, L^{\cdot})$, ce qui fournira des critères immédiats d'application du théorème 1.

Le théorème 1 montre, de plus, l'importance des foncteurs d'omission $\tilde{p}_u$. On peut d'ailleurs considérer ce résultat comme étant l'analogue du lemme de Yoneda pour les catégories spécifiables.

Nous montrerons dans la partie IV la parenté de ces deux résultats dans le cas purement projectif.

IV. CRITERE DE $\mathfrak{M}$-SPECIFIABILITE PROJECTIVE

Le théorème 1 montre que, si $L^{\bullet}$ est équivalente à une catégorie de la forme $\mho(\mathfrak{M}, \sigma)$, où $\sigma \in \mathfrak{S}_0^{\mathfrak{F}_0 \mathfrak{I}'}$, elle est équivalente à la catégorie $\mho(\mathfrak{M}, \Sigma(\mathfrak{N}(\mathfrak{M}, L^{\bullet})))$; ceci signifie que $\Sigma(\mathfrak{N}(\mathfrak{M}, L^{\bullet}))$ est une esquisse des structures (i.e. des unités) et des morphismes de $L^{\bullet}$.

Nous allons préciser ce théorème en supposant que σ est un type particulier (très fortement projectif). On pourra alors considérer une sous-catégorie de $\mathfrak{N}(\mathfrak{M}, L^{\bullet})$, équivalente à la duale L^* de $L^{\bullet}$, comme l'esquisse projective des structures et des morphismes de $L^{\bullet}$. Pour ce faire, nous posons tout d'abord les définitions suivantes.

DEFINITION 1. On dit que $K^{\bullet} \in \mathfrak{L}_0^{\mathfrak{F}_0}$ (resp. $K^{\bullet} \in \mathfrak{L}_0^{\emptyset \mathfrak{F}_0}$) est une *catégorie très fortement projective* (resp. *inductive*) si, $\Sigma(K^{\bullet})$ désignant une structure de $\mathfrak{F}_0$-type (resp. de $(\emptyset, \mathfrak{F}_0)$-type) sur $K^{\bullet}$ correspondant à un choix de limites, $\Sigma(K^{\bullet})$ est forte pour tout $V^{\bullet} \in \mathfrak{L}_0^{\mathfrak{F}_0}$ (resp. $\in \mathfrak{L}_0^{\emptyset \mathfrak{F}_0}$).

DEFINITION 2. Soit $V^{\bullet} \in \mathfrak{L}_0^{\mathfrak{F}_0}$; on dit que $L^{\bullet}$ est *très fortement $V^{\bullet}$-spécifiable* s'il existe un $\mathfrak{F}_0$-type projectif $\Sigma(K^{\bullet})$ sur une $\tilde{\mathfrak{M}}_0$-catégorie $K^{\bullet}$ très fortement projective tel que $L^{\bullet}$ soit équivalente à $\mho(V^{\bullet}, \Sigma(K^{\bullet}))$.

REMARQUE. Ces deux définitions dépendent de $K^{\bullet}$, non du choix particulier du type $\Sigma(K^{\bullet})$.

Soit $\Sigma(\mathfrak{M}) = (\mathfrak{M}, \mu_{\mathfrak{M}})$ le $\mathfrak{F}_0$-type canonique sur $\mathfrak{M}$. Si $L^{\bullet} \in \hat{\mathfrak{F}}_0$ est une $\tilde{\mathfrak{M}}_0$-catégorie, on désigne par $\Sigma(\mathfrak{N}(\mathfrak{M}, L^{\bullet}))$ le $\mathfrak{F}_0$-type canonique sur $\mathfrak{N}(\mathfrak{M}, L^{\bullet})$, déduit de $\Sigma(\mathfrak{M})$ comme en III. Soit $\bar{L}^*$ la sous-catégorie pleine de $\mathfrak{N}(\mathfrak{M}, L^{\bullet})$ dont les objets sont tous les foncteurs représentables (i.e. les foncteurs équivalents aux foncteurs de la forme $Hom_{L^{\bullet}}(-, e)$, où $e \in L_0^{\bullet}$). On désigne par $\Sigma(\bar{L}^*) = (\bar{L}^*, \mu_{\bar{L}^*})$ la $\mathfrak{F}_0$-sous-esquisse de $\Sigma(\mathfrak{N}(\mathfrak{M}, L^{\bullet}))$ restriction de $\Sigma(\mathfrak{N}(\mathfrak{M}, L^{\bullet}))$ à $\bar{L}^*$.

PROPOSITION 1. *Lorsque $L^{\bullet} \in \mathfrak{L}_0^{\emptyset \mathfrak{F}_0}$ est une $\tilde{\mathfrak{M}}_0$-catégorie très fortement inductive, $\Sigma(\bar{L}^*)$ est un $\mathfrak{F}_0$-type projectif et $\bar{L}^*$ est une catégorie très fortement projective.*

Δ. A l'aide du plongement de Yoneda, L^* s'identifie à une sous-catégorie de $\mathfrak{N}(\tilde{\mathfrak{M}}, L^\cdot)$. Comme $\mathfrak{N}(\mathfrak{M}, L^\cdot)$ s'identifie à une sous-catégorie pleine de $\mathfrak{N}(\tilde{\mathfrak{M}}, L^\cdot)$, la catégorie $\overline{L}^*$ est équivalente à L^*. Puisque $L^\cdot$ est une $\tilde{\mathfrak{M}}_0$-catégorie très fortement inductive, L^* est une $\tilde{\mathfrak{M}}_0$-catégorie très fortement projective, ainsi que la catégorie équivalente $\overline{L}^*$; on en déduit que $\Sigma(\overline{L}^*)$ est un $\mathfrak{F}_0$-type projectif. ∇

Avec ces définitions et notations, nous énonçons:

THEOREME 2. *Soit* $L^\cdot \in \mathfrak{F}_0$ *une* $\tilde{\mathfrak{M}}_0$*-catégorie à* $\mathfrak{F}_0$*-limites inductives. Pour que* $L^\cdot$ *soit très fortement* $\mathfrak{M}$*-spécifiable, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient vérifiées:*

(i) $L^\cdot$ *est très fortement inductive.*

(ii) $L^\cdot$ *est équivalente à* $\mathfrak{O}(\mathfrak{M}, \Sigma(\overline{L}^*))$.

Les conditions *(i)* et *(ii)* sont suffisantes, car elles entraînent que $\overline{L}^*$ est très fortement projective d'après la proposition 1, de sorte que $\Sigma(\overline{L}^*)$ est forte pour $\mathfrak{M}$.

Nous allons montrer qu'elles sont nécessaires en supposant que $\sigma = (K^\cdot, \mu_{K^\cdot}) \in \mathfrak{F}_0^{\mathfrak{F}_0}$ est une $\mathfrak{F}_0$-esquisse forte pour $\mathfrak{M}$ et que

$$l = (\mathfrak{O}(\mathfrak{M}, \sigma), \underline{l}, L^\cdot) \quad \text{et} \quad l' = (L^\cdot, \underline{l'}, \mathfrak{O}(\mathfrak{M}, \sigma))$$

sont deux foncteurs tels que

$$w = (l'.\, l, \underline{w}, L^\cdot) \quad \text{et} \quad w' = (l.\, l', \underline{w'}, \mathfrak{O}(\mathfrak{M}, \sigma))$$

soient des équivalences. $L^\cdot$ étant à $\mathfrak{F}_0$-limites inductives par hypothèse, $\Sigma(\overline{L}^*)$ est un $\mathfrak{F}_0$-type projectif.

La catégorie L^* étant équivalente à $\overline{L}^*$, la catégorie $\mathfrak{O}(\mathfrak{M}, \Sigma(\overline{L}^*))$ est équivalente à $\mathfrak{O}(\mathfrak{M}, \Sigma)$, si $\Sigma = (L^*, \mu_{L^*})$ est un $\mathfrak{F}_0$-type projectif sur L^*. Pour montrer que *(ii)* est vérifiée, il suffit de voir que $L^\cdot$ est équivalente à $\mathfrak{O}(\mathfrak{M}, \sigma)$.

IV.1. Construction d'un foncteur N de $\mathfrak{O}(\mathfrak{M}, \sigma)$ dans $\mathfrak{O}(\mathfrak{M}, \Sigma)$.

Soit Y_{L^*} le foncteur de Yoneda de $L^\cdot$ vers $\mathfrak{N}(\mathfrak{M}, L^*)$. Pour tout $e \in L^\cdot$, le foncteur $Y_{L^*}(e) = Hom_{L^*}(\cdot, e)$ est compatible avec les limites projectives, de sorte que Y_{L^*} prend ses valeurs dans la sous-catégorie pleine $\mathcal{O}(\mathfrak{M},\Sigma)$. Le foncteur $Y_{L^*}.\, l'$ admet donc pour restriction le foncteur

$$N = (\mathcal{O}(\mathfrak{M},\Sigma), \underline{N}, \mathcal{O}(\mathfrak{M},\sigma)),$$

défini par

$$\underline{N}(T) = Hom_{L^*}(-, l'(T)), \quad \text{pour tout} \quad T \in \mathcal{O}(\mathfrak{M},\sigma).$$

IV.1. Construction d'un foncteur R de $\mathcal{O}(\mathfrak{M},\Sigma)$ dans $\mathcal{O}(\mathfrak{M},\sigma)$.

Le foncteur Y_{K^*} de K^* vers $\mathfrak{N}(\mathfrak{M}, K^{\cdot})$ admet pour restriction un foncteur r'^* de K^* vers $\mathcal{O}(\mathfrak{M},\sigma)$; nous désignons son dual par

$$r' = (\mathcal{O}(\mathfrak{M},\sigma)^*, \underline{r}', K^{\cdot}).$$

Posons $r = l'^*.\, r'$; on a

$$r(z) = l'(Hom_{K^*}(-, z)) \quad \text{pour tout} \quad z \in K.$$

Soit $\bar{r} = (\mathfrak{N}(\mathfrak{M}, K^{\cdot}), \underline{\bar{r}}, \mathfrak{N}(\mathfrak{M}, L^*))$ le foncteur défini par

$$\underline{\bar{r}}(T) = T\, r = T(l'^*.\, r'), \quad \text{pour tout} \quad T \in \mathfrak{N}(\mathfrak{M}, L^*).$$

Nous allons montrer que $\bar{r}$ admet pour restriction un foncteur R de $\mathcal{O}(\mathfrak{M},\Sigma)$ vers $\mathcal{O}(\mathfrak{M},\sigma)$. Pour cela, il suffit de voir que, si $F \in \mathcal{O}(\mathfrak{M},\Sigma)_0$,

$$\bar{r}(F) = F.\, r = F.\, l'^*.\, r' \in \mathcal{O}(\mathfrak{M},\sigma)_0 .$$

Comme F et l'^* sont compatibles avec les limites projectives, ceci revient à montrer que r' est compatible avec les $\mathcal{F}_0$-limites projectives, ou encore que r'^* est compatible avec les $\mathcal{F}_0$-limites inductives. Or ceci est un résultat connu [C.C.], car $\mathcal{O}(\mathfrak{M},\sigma)$ n'est autre que la sous-catégorie pleine de $\mathfrak{N}(\mathfrak{M}, K^{\cdot\cdot})$ ayant pour objets les foncteurs compatibles avec les $\mathcal{F}_0$-limites projectives.

Il existe donc un foncteur

$$R = (\mathcal{O}(\mathfrak{M},\sigma), \underline{R}, \mathcal{O}(\mathfrak{M},\Sigma))$$

défini par

$$\underline{R}(T) = T(l'^*.\, r') \quad \text{pour tout} \quad T \in \mathcal{O}(\mathfrak{M},\Sigma).$$

IV.3. Calcul de $R.N$.

$R.N$ est un foncteur de $\mathcal{O}(\mathfrak{M},\sigma)$ vers $\mathcal{O}(\mathfrak{M},\sigma)$.

Soit $F \in \mathcal{O}(\mathfrak{M},\sigma)_0$. Par construction

$$R.N(F) = Hom_{L^*}(-, l'(F)).\, l'^*.\, r' = Hom_{L^*}(l'^*.\, r'(-), l'(F)).$$

l' définissant une équivalence de $\mathcal{O}(\mathfrak{M}, \sigma)$ vers $L^{\cdot}$, le dernier foncteur est équivalent à

$$Hom_{\mathcal{O}(\mathfrak{M}, \sigma)^*}(r'(-), F) = Hom_{\mathcal{O}(\mathfrak{M}, \sigma)}(F, Y_{K^*}(-)) =$$
$$= Hom_{\mathfrak{N}(\mathfrak{M}, K^{\cdot})}(F, Y_{K^*}(-)).$$

Or celui-ci, d'après le lemme de Yoneda, est équivalent à F. Ainsi les foncteurs $R.N(F)$ et F sont équivalents.

Comme

$$R.N(T)(u) = Hom_{L^*}(l'(r'(u)), l'(T)),$$

si $T \in \mathcal{O}(\mathfrak{M}, \sigma)$ et $u \in K_0^{\cdot}$, on en déduit facilement que le foncteur $R.N$ est équivalent au foncteur identité de $\mathcal{O}(\mathfrak{M}, \sigma)$.

IV.4. $L^{\cdot}$ **est une catégorie très fortement inductive.**

Pour montrer que $L^{\cdot}$ est très fortement inductive, il suffit de montrer que L^* est très fortement projective, ou encore que la catégorie équivalente $\mathcal{O}(\mathfrak{M}, \sigma)^*$ est très fortement projective.

Puisque σ est forte pour $\mathfrak{M}$, il existe un sous-graphe multiplicatif $K'^{\cdot}$ de $K^{\cdot}$ tel que $K' \in \tilde{\mathfrak{M}}_0$ et vérifiant les conditions de la définition d'une esquisse forte. A fortiori la sous-catégorie pleine $K''^{\cdot}$ de $K^{\cdot}$ ayant $K_0'^{\cdot}$ pour classe de ses unités vérifie aussi ces conditions. $K^{\cdot}$ étant une $\tilde{\mathfrak{M}}_0$-catégorie, $K'' \in \tilde{\mathfrak{M}}_0$. Puisque r' est injectif, on a aussi $r'(K'') \in \tilde{\mathfrak{M}}_0$.

Posons $\mathfrak{B} = r'(K'')$ et montrons que $\mathfrak{B}$ vérifie les conditions d'une esquisse forte relativement à un $\mathfrak{F}_0$-type sur $\mathcal{O}(\mathfrak{M}, \sigma)^*$. Soit

$$\underline{j} = (\mathfrak{N}(\mathfrak{M}, K''^{\cdot}), j, \mathcal{O}(\mathfrak{M}, \sigma))$$

le foncteur défini par:

$$\underline{j}(T) = T|_{K''^{\cdot}} \text{ pour tout } T \in \mathcal{O}(\mathfrak{M}, \sigma).$$

Ce foncteur détermine une équivalence de $\mathcal{O}(\mathfrak{M}, \sigma)$ sur une sous-catégorie pleine $\mathfrak{D}$ de $\mathfrak{N}(\mathfrak{M}, K''^{\cdot})$. Puisque $K''^{\cdot}$ est une sous-catégorie pleine de $K^{\cdot}$, l'ensemble $\mathfrak{B}$ définit aussi une sous-catégorie pleine de $\mathcal{O}(\mathfrak{M}, \sigma)$, et l'on a $j(\mathfrak{B}) = j(r'(K'')) = Y_{K^*}(K'')$, car

$$j(r'(z)) = Hom_{K^*}(-, z)|_{K''^{\cdot}} = Hom_{K''^*}(-, z) = Y_{K''^*}(z)$$

pour tout $z \in K''$.

Comme $\mathfrak{D}$ est une sous-catégorie pleine de $\mathfrak{N}(\mathfrak{M}, K''^{\cdot})$ contenant $j(\mathfrak{B})$ et que $\mathfrak{N}(\mathfrak{M}, K''^{\cdot})$ est la sous-catégorie de $\mathfrak{N}(\mathfrak{M}, K''^{\cdot})$ saturée par $\mathfrak{F}_0$-limites inductives engendrée par $Y_{K''*}(K'') = j(\mathfrak{B})$, la sous-catégorie de $\mathfrak{D}$ saturée par $\mathfrak{F}_0$-limites inductives engendrée par $j(\mathfrak{B}) \in \tilde{\mathfrak{M}}_0$ est identique à $\mathfrak{D}$. Par conséquent $\mathfrak{D}$ est très fortement inductive, de même que la catégorie équivalente $\mathfrak{V}(\mathfrak{M}, \sigma)$.

A fortiori $\mathfrak{V}(\mathfrak{M}, \sigma)^*$ est très fortement projective.

IV.5. $N.R$ est équivalent à l'identité.

$N.R$ est un foncteur de $\mathfrak{V}(\mathfrak{M}, \Sigma)$ vers $\mathfrak{V}(\mathfrak{M}, \Sigma)$.

Soit $Z \in \mathfrak{V}(\mathfrak{M}, \Sigma)_0$ et posons:

$$Z' = N.R(Z) = N(Z.r) = Hom_{L^*}(-, l'(Z.l'^*.r')).$$

Montrons que les foncteurs Z et Z' sont équivalents, c'est-à-dire que les foncteurs $Z.l'^*$ et $Z'.l'^*$ le sont. D'après IV.4 il suffit de voir que leurs restrictions à $\mathfrak{B}$ sont équivalentes.

Puisque l' détermine une équivalence, le foncteur

$$Z'.l'^*.r' = Hom_{L^*}(l'^*.r'(-), l'(Z.l'^*.r'))$$

est équivalent au foncteur

$$Hom_{\mathfrak{V}(\mathfrak{M}, \sigma)^*}(r'(-), Z.l'^*.r') = Hom_{\mathfrak{N}(\mathfrak{M}, K^{\cdot})}(Z.l'^*.r', Y_{K^*}(-))$$

qui, d'après le lemme de Yoneda, est équivalent à $Z.l'^*.r'$. Il en résulte que les restrictions à $r'(K'')$ des foncteurs $Z.l'^*$ et $Z'.l'^*$ sont équivalentes, r' étant injectif.

On en déduit comme dans III que $N.R$ est équivalent au foncteur identité de $\mathfrak{V}(\mathfrak{M}, \Sigma)$. Donc $\mathfrak{V}(\mathfrak{M}, \sigma)$ et $\mathfrak{V}(\mathfrak{M}, \Sigma)$ sont équivalentes.

Ceci achève la démonstration du théorème 2.

IV.6. Remarques.

Les foncteurs d'omission de $\mathfrak{V}(\mathfrak{M}, \Sigma(\bar{L}^*))$ dans $\mathfrak{M}$ sont des foncteurs représentables, ce qui explique la parenté annoncée plus haut entre ces foncteurs et les foncteurs $Hom_{L^{\cdot}}(-, e)$, où $e \in L^{\cdot}_0$.

Remarquons d'autre part que les résultats de [L.P.L.G.], trouvés indépendamment et par des méthodes différentes, sont assez proches du théorème 2. Cependant ce dernier théorème semble plus général, puisqu'il suppose seulement que $K^{\cdot}$ admet un système générateur « assez petit », alors que les résultats de [L.P.L.G.] supposent que $K = K''$. Il n'en demeure pas moins que les conditions (K_1) et (K_2) de [L.P.L.G.] fournissent des conditions suffisantes d'application du théorème 2.

Université Paris 7
Département de Mathématiques, Tours 45-55
2, Place Jussieu
PARIS (5^e).

BIBLIOGRAPHIE

[T.E.] A. BASTIANI, *Théorie des Ensembles*, C.D.U., Paris, 1970.

[C.S.] C. EHRESMANN, *Catégories et Structures*, Dunod, Paris, 1965.

[M.M.A.] C. EHRESMANN, *Maîtrise de Mathématiques: Algèbre*, C.D.U. Paris, 1968.

[E.T.S.A.] C. EHRESMANN, Esquisses et Types des structures algébriques, *Bul. Inst. Politeh. Iaşi*, XIV, 1-2 (1968).

[C.S.L.] C. EHRESMANN, *Construction de structures libres*, Lecture Notes in Math. 92, Springer (1969).

[S.S.A.] C. EHRESMANN, Sur les structures algébriques, *C.R.A.S.* 264 Paris (1967), p. 840.

[S.Q.Q.] C. EHRESMANN, Structures quasi-quotients, *Math. Annalen* 171 (1967), p. 293-363.

[C.M.F.] G. JACOB, *Catégories marquées et faisceaux. Théorème de l'objet libre. Problèmes de limites projectives finies.* Thèse 3^{e} cycle, multigraphié, Paris.

[E.Q.T.] A. BURRONI, *Esquisses des catégories à limites et des quasi-topologies*, Esquisses Mathématiques n° 5, Paris (1970).

[F.C.T.N.] C. LEGRAND, *Foncteurs entre catégories de transformations naturelles*, Travaux Séminaire Ehresmann, Paris (1968).

[T.N.G.] CH. LAIR, *Constructions d'esquisses. Transformations naturelles généralisées*, Esquisses Mathématiques n° 2, Paris (1970).

[I.M.S.A.] CH. LAIR, Idées et maquettes des structures algébriques, *Cahiers Topo. et Géo. dif.* XII, 1, Dunod, Paris (1971).

[T.C.A.] E. MANES, *A triple theoretic construction of compact algebras*, Lecture Notes in Math. 80, Springer (1969).

[L.P.L.G.] F. ULMER, *Locally α-presentable and locally α-generated categories*, Lecture Notes in Math. 195, Springer (1971).

[C.C.] J. LAMBEK, *Completions of Categories*, Lecture Notes in Math. 24, Springer (1966).