CAHIERS DE
TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
CATÉGORIQUES

JEAN-MARC CORDIER

Espaces fonctionnels quasi-uniformes

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 12, n° 2 (1971), p. 113-136

<http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1971__12_2_113_0>

CAHIERS DE TOPOLOGIE
ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE

Vol. XII, 2

ESPACES FONCTIONNELS QUASI-UNIFORMES

par Jean-Marc CORDIER

Introduction.

Alors que la topologie d'un groupe topologique est sous-jacente à une structure uniforme, celle d'un groupoïde topologique peut ne pas être uniformisable. Toutefois un groupoïde topologique microtransitif vérifie «localement» les axiomes d'une structure uniforme. C'est ce qui a conduit à introduire dans [1] des structures quasi-uniformes (à ne pas confondre avec les structures quasi-uniformes au sens de [5]), dont les topologies et les structures uniformes sont des cas «limites». La catégorie des applications quasi-uniformes a été considérée dans [1] et [3]. Le présent article a pour but de construire diverses structures quasi-uniformes sur des espaces d'applications, généralisant les résultats connus sur les espaces fonctionnels uniformes.

Soient E un ensemble et u' une structure quasi-uniforme sur E', associée à une partition $(A'_i)_{i \in I}$ de E. L'ensemble M' des applications de E dans E' appliquant E tout entier dans l'un des A'_i est muni d'une structure quasi-uniforme. Celle-ci est utilisée pour définir la structure de pseudo-convergence quasi-uniforme $\mathcal{Q}(u', u)$ sur l'ensemble $M_q(u', u)$ des applications quasi-uniformes de u vers u', lorsque u est une structure quasi-uniforme sur E. On détermine ainsi une auto-domination [2] de la catégorie des applications quasi-uniformes. Une construction analogue permet d'obtenir la structure de σ-convergence quasi-uniforme $\mathcal{Q}_\sigma(u', u)$ associée à la donnée d'un ensemble σ de parties de E. Si u vérifie certaines conditions, la topologie de la convergence compacte est encadrée par les topologies sous-jacentes à $\mathcal{Q}(u', u)$ et à $\mathcal{Q}_c(u', u)$, où c est l'ensemble des compacts de la topologie sous-jacente à u. L'ensemble de toutes les applications de E dans E' est aussi muni d'une structure quasi-uniforme. Terminologie et notations sont celles de [1], [2] et [4].

1. Structures quasi-uniformes.

Soit E un ensemble. On désigne par $(E\times E)^{\circ}$ le groupoïde des couples associé à E. Si V est une partie de $E\times E$ et si $V=V^{-1}$ dans le groupoïde $(E\times E)^{\circ}$, nous dirons que V est une partie symétrique de $E\times E$.

DEFINITIONS.

I. On appelle *structure quasi-uniforme sur l'ensemble* E un couple $((A_i)_{i\in I}, \phi)$, où $(A_i)_{i\in I}$ est une partition de E et ϕ une application de I dans la classe des filtres sur $E\times E$ vérifiant les conditions suivantes:

1. Pour tout $i\in I$, le filtre $\phi(i)$ admet une base formée de parties symétriques V de $E\times E$ telles que la diagonale Δ_{A_i} de $A_i\times A_i$ soit contenue dans V.

2. Si $V_i\in\phi(i)$, il existe $V'_i\in\phi(i)$ tel que V'_i soit une partie symétrique de $E\times E$ et que les conditions $j\in I$ et $\Delta_{A_j}\cap V'_i\neq\emptyset$ entraînent l'existence d'un $V'_j\in\phi(j)$ pour lequel $V'_i\circ V'_j\subset V_i$.

II. Soient $u'=((A'_i)_{i\in I}, \phi')$ et $u=((A_j)_{j\in J}, \phi)$ deux structures quasi-uniformes sur E' et E respectivement. On dira que (u', f, u) est une *application quasi-uniforme* si (E', f, E) est une application telle que:

1. pour tout $j\in J$, il existe $i\in I$ tel que $f(A_j)\subset A'_i$.

2. si $i\in I$ et si $f(A_j)\subset A'_i$, pour tout $V'\in\phi'(i)$ il existe $V\in\phi(j)$ tel que $(f\times f)(V)\subset V'$.

III. Soit $u=((A_i)_{i\in I}, \phi)$ une structure quasi-uniforme sur l'ensemble E. On appelle *topologie sous-jacente à* u et l'on note $\mathcal{T}(u)$ la topologie sur E telle que [1], si $x\in A_i$, le filtre des voisinages de x soit engendré par l'ensemble des $V(x)$, où

$$V\in\phi(i) \quad \text{et} \quad V(x)=\{\,y\in E \mid (x,y)\in V\,\}.$$

On notera $\mathcal{Q}_0$ la classe des structures quasi-uniformes sur les ensembles appartenant à un univers $\mathfrak{U}$; c'est une classe d'objets de la catégorie $\mathcal{Q}^{\circ}$ des applications quasi-uniformes associée à l'univers $\mathfrak{U}$. Soit q le foncteur d'oubli canonique de $\mathcal{Q}^{\circ}$ vers la catégorie $\mathfrak{M}^{\circ}$ des applications associée à $\mathfrak{U}$. Le foncteur q est un foncteur d'homomorphismes saturé: Si $u=((A_i)_{i\in I}, \phi)$ est une structure quasi-uniforme sur E et si f est une bijection de E sur E', alors $((f(A_i))_{i\in I}, \phi')$ est une structure quasi-uniforme sur E', dite *image de u par f* et notée fu, où $\phi'(i) = (f\times f)\phi(i)$.

La catégorie $\mathcal{Q}^o$ est à $K^{\cdot}$-limites inductives et à $K^{\cdot}$-limites projectives pour toute catégorie $K^{\cdot}$ telle que $K\in\mathfrak{U}$. Le foncteur q est compatible avec les limites projectives et inductives. Il est aussi $\frown$-étalant: Si $u = ((A_i)_{i\in I}, \phi)$ est une structure quasi-uniforme sur $E\in\mathfrak{U}$ et si E' est une partie de E, il existe une q-sous-structure de u définie par E', à savoir la structure $u' = ((A'_j)_{j\in J}, \phi')$ telle que $J = \{ i\in I \mid A_i\cap E' \neq \emptyset \}$, que $A'_j = A_j\cap E'$ et que $\phi'(j)$ soit le filtre induit par $\phi(j)$ sur $E'\times E'$ pour $j\in J$. On appelle u' la structure quasi-uniforme induite par u sur E' et on la note u/E'.

EXEMPLES.

I. Soit T une topologie sur E. Pour chaque $x\in E$, soit $\phi(x)$ le filtre sur E admettant pour base l'ensemble des $V\times V$, où V est un voisinage de x. Alors $((\{x\})_{x\in E}, \phi)$ est une structure quasi-uniforme, dont la topologie sous-jacente est T. La catégorie $\mathcal{T}^o$ des applications continues associée à $\mathfrak{U}$ s'identifie à une sous-catégorie pleine de $\mathcal{Q}^o$.

II. Si Y est une structure uniforme sur E, alors $((E_1)_{1\in\{1\}}, \phi)$, où $E_1 = E$ et où $\phi(1) = Y$, est une structure quasi-uniforme. La catégorie $\mathcal{U}^o$ des applications uniformément continues associée à $\mathfrak{U}$ s'identifie à la sous-catégorie pleine de $\mathcal{Q}^o$ ayant pour objets les structures quasi-uniformes dont la partition est indexée par $\{1\}$.

III. On notera $(\mathcal{Q}_1)_o$ l'ensemble des structures quasi-uniformes $u = ((A_i)_{i\in I}, \phi)\in\mathcal{Q}_o$ telles que $A_i\times A_i\in\phi(i)$ pour tout $i\in I$, c'est-à-dire telles que A_i soit ouvert et fermé dans $\mathcal{T}(u)$ pour tout i. Soit $\mathcal{Q}^o_1$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{Q}^o$ dont $(\mathcal{Q}_1)_o$ est la classe d'objets. Parmi les éléments de $(\mathcal{Q}_1)_o$ figurent les structures *quasi-discrètes*, i.e. les structures quasi-uniformes $u = ((A_i)_{i\in I}, \phi)$ telles que la diagonale de A_i appartienne à $\phi(i)$ pour tout $i\in I$.

PROPOSITION. *Soit $u = ((A_i)_{i\in I}, \phi)$ une structure quasi-uniforme sur $E\in\mathfrak{U}$. Alors u appartient à $(\mathcal{Q}_1)_o$ si, et seulement si, u est somme dans $\mathcal{Q}^o$ de structures uniformes (resp. des structures uniformes $(u/A_i)_{i\in I}$).*

PREUVE. 1° Supposons $u \in (\mathcal{Q}_1)_0$. Pour tout $i \in I$ la structure quasi-uniforme $u_i = u / A_i$ induite par u sur A_i s'identifie à une structure uniforme. Notons v_i l'injection canonique de A_i dans E; on a $\hat{v}_i = (u, v_i, u_i) \in \mathcal{Q}$. Soit $(\hat{g}_i)_{i \in I}$ une famille d'applications quasi-uniformes, où

$$\hat{g}_i = (u', g_i, u_i) \in \mathcal{Q} \quad \text{et} \quad u' = ((A'_j)_{j \in J}, \phi').$$

Notons g l'application réunion des $(g_i)_{i \in I}$. Soit $i \in I$; il existe $j \in J$ tel que $g(A_i) \subset A'_j$. Si $V' \in \phi'(j)$, il existe $V \in \phi(i)$ vérifiant

$$g \times g(V \cap (A_i \times A_i)) = g_i \times g_i(V \cap (A_i \times A_i)) \subset V'.$$

car $\hat{g}_i \in \mathcal{Q}$. Puisque $A_i \times A_i$ appartient à $\phi(i)$, son intersection avec V y appartient aussi, de sorte que (u', g, u) est l'unique application quasi-uniforme $\hat{g}$ telle que $\hat{g} \circ \hat{v}_i = \hat{g}_i$ pour tout $i \in I$. Ainsi u est une somme de $(u_i)_{i \in I}$ dans $\mathcal{Q}^\circ$.

2° Inversement si $u_i \in \mathcal{Q}_0$ s'identifie à une structure uniforme Y_i sur A_i pour tout $i \in I$, la structure quasi-uniforme u sur $E = \bigcup_{i \in I} A_i$ somme de $(u_i)_{i \in I}$ est telle que $u = ((A_i)_{i \in I}, \phi)$, où $\phi(i)$ désigne le filtre sur $E \times E$ engendré par Y_i. Par suite $A_i \times A_i \in \phi(i)$, et $u \in (\mathcal{Q}_1)_0$.

COROLLAIRE. *Une structure quasi-uniforme* $u = ((A_i)_{i \in I}, \phi)$ *est quasi-discrète si et seulement si* u *est somme de structures uniformes discrètes (resp. des structures uniformes discrètes* u / A_i*).*

DEFINITIONS.

I. Une structure quasi-uniforme u sera dite *séparée* si sa topologie sous-jacente $\tau(u)$ est séparée.

II. Soit $u = ((A_j)_{j \in J}, \phi)$ une structure quasi-uniforme sur E. On dit que F *est un filtre de Cauchy pour* u *(relativement à* $\phi(j)$*)* si F est un filtre sur E et si pour tout $V \in \phi(j)$ il existe $E' \in F$ tel que $E' \times E' \subset V$.

III. Si tout filtre de Cauchy pour u converge dans la topologie $\tau(u)$, on dit que u est une *structure quasi-uniforme complète.*

STRUCTURES QUASI-METRIQUES.

Soit a un nombre réel strictement positif; $[0, a]$ désignera l'intervalle fermé des nombres réels compris entre 0 et a.

DEFINITION. On appelle *quasi-écart* sur un ensemble E une famille d'applications $(f_j)_{j\in J}$ telle qu'il existe une partition $(A_j)_{j\in J}$ de E vérifiant les conditions suivantes:

1. Pour tout $j \in J$, f_j est une application de $\alpha(f_j)$ dans $[0, +\infty]$, où $\alpha(f_j)$ est une partie symétrique de $E \times E$ contenant $A_j \times A_j$.

2. On a $f_j(x, x) = 0$ pour tout $x \in A_j$,

$$f_j(x, y) = f_j(y, x) \text{ si } (x, y) \in \alpha(f_j).$$

3. Il existe $a_j > 0$ tel que, pour tout $j' \in J$ pour lequel $\overset{-1}{f_j}([0, a_j])$ rencontre la diagonale de $A_{j'} \times A_{j'}$, il existe un $b_{j'} > 0$ vérifiant:

a) $\overset{-1}{f_j}([0, a_j]) \circ \overset{-1}{f_{j'}}([0, b_{j'}]) \subset \alpha(f_j)$;

b) $f_j(x, y) \leqslant f_j(x, z) + f_{j'}(z, y)$ si $f_j(x, z) \leqslant a_j$ et $f_{j'}(z, y) \leqslant b_{j'}$.

Si ces conditions sont remplies, on obtient une structure quasi-uniforme $g = ((A_j)_{j\in J}, \Phi)$, dite *sous-jacente au quasi-écart*, en prenant pour $\Phi(j)$, où $j \in J$, le filtre ayant pour base l'ensemble B_j formé des V_j^a où $V_j^a = \overset{-1}{f_j}([0, a])$ et $a > 0$.

Si $(f_j)_{j\in J}$ est un quasi-écart fini (i. e. f_j prend des valeurs finies seulement), vérifiant de plus la condition:

4. $f_j(x, y) = 0$ entraîne $x = y$,

alors on dit que $s = (A_j, f_j)_{j\in J}$ est une structure *quasi-métrique.*

DEFINITION. Soient $s' = (A'_i, d'_i)_{i\in I}$ et $s = (A_j, d_j)_{j\in J}$ deux structures quasi-métriques sur E' et E respectivement. Le triplet (s', f, s) est appelé *application k-quasi-métrique* si f est une application de E dans E' vérifiant la condition: Pour tout $j \in J$, il existe $i \in I$ tel que

$$f(A_j) \subset A'_i, \quad (f \times f)(\alpha(d_j)) \subset \alpha(d'_i),$$

$$d'_i(f(x), f(y)) \leqslant k\, d_j(x, y) \quad \text{pour } (x, y) \in \alpha(d_j).$$

Si $k = 1$, on appelle (s', f, s) *une application quasi-métrique,*

STRUCTURES QUASI-UNIFORMES STRICTES.

Rappelons [1] qu'une structure quasi-uniforme $u = ((A_i)_{i\in I}, \Phi)$ sur E est dite *stricte* si, pour tout $i \in I$, il existe une base $\overline{\Phi}(i)$ de $\Phi(i)$ telle que, si $V \in \overline{\Phi}(i)$, pour tout $(x, y) \in V$, il existe $x' \in A_i$ pour lequel $(x, x') \in V$ et $(y, x') \in V$. Une telle base est dite *base stricte.*

2. Structure de pseudo-convergence quasi-uniforme.

La catégorie $\mathcal{Q}^\circ$ des applications quasi-uniformes associée à l'univers $\mathcal{U}$ est à I-produits [1] pour tout $I \in \mathcal{U}$. Nous considérons toujours sur $\mathcal{Q}^\circ$ le foncteur I-produits appliqué par le foncteur q sur le foncteur I-produits canonique sur $\mathcal{M}^\circ$.

Soit E un ensemble appartenant à $\mathcal{U}$; on notera u_E la structure quasi-uniforme sur E qui s'identifie à la structure uniforme «discrète», par $\times_E$ le foncteur de $\mathcal{Q}^\circ$ vers $\mathcal{Q}^\circ$ qui, à tout $h \in \mathcal{Q}$, associe l'application quasi-uniforme produit $h \times i_{u_E}$, en notant i_u l'application quasi-uniforme «identité» de $u \in \mathcal{Q}_0$.

PROPOSITION. *Soient $E' \in \mathcal{U}$ et $u' = ((A'_i)_{i \in I}, \phi')$ une structure quasi-uniforme sur E'. Il existe une structure quasi-uniforme U' sur une partie M' de l'ensemble $\mathcal{M}(E', E)$ des applications de E dans E' telle que U' soit un $\times_E$-objet colibre associé à u'. Si u' est séparée (resp. stricte), U' est séparée (resp. stricte).*

PREUVE. 1° Pour chaque $i \in I$, posons

$$\mathcal{A}'_i = \{ f \in \mathcal{M}(E', E) \mid f(E) \subset A'_i \}, \quad \text{et} \quad M' = \bigcup_{i \in I} \mathcal{A}'_i .$$

On définit une structure quasi-uniforme $U' = ((\mathcal{A}'_i)_{i \in I}, \Phi')$ sur M' en notant $\Phi'(i)$, pour tout $i \in I$, le filtre engendré sur $M' \times M'$ par l'ensemble des $V' < E >$, où

$$V' < E > = \{ (f', f) \in M' \times M' \mid [f', f](E) \subset V' \},$$

V' parcourant la base formée des parties symétriques de $\phi'(i)$. En effet, si V' est symétrique, $V' < E >$ l'est aussi, et

$$V' < E > \cap V'' < E > = (V' \cap V'') < E >.$$

On a $\Delta_{\mathcal{A}'_i} \subset \cap \Phi'(i)$, car $f \in \mathcal{A}'_i$ et $x \in E$ entraînent

$$(f(x), f(x)) \in \Delta_{A'_i} \subset V'.$$

Soit $V < E > \in \Phi'(i)$; à $V \in \phi'(i)$ correspond un $V' \in \phi'(i)$ vérifiant l'axiome 2 des structures quasi-uniformes, et $V' < E >$ appartient à $\Phi'(i)$. Soit j tel que $V' < E > \cap \Delta_{\mathcal{A}'_j} \neq \emptyset$; ceci implique $V' \cap \Delta_{A_j} \neq \emptyset$, de sorte qu'il existe $W \in \phi'(j)$ tel que $V' \circ W \subset V$; il s'ensuit

$$W<E> \in \Phi'(j) \quad \text{et} \quad V'<E> \circ W<E> \subset V<E>.$$

2° Soit $U' \times u_E$ la structure quasi-uniforme produit de U' et de u_E et soit v l'application de $q(U' \times u_E) = M' \times E$ dans E' telle que

$$v((f,x)) = f(x), \quad \text{pour tout } (f,x) \in M' \times E.$$

v définit une application quasi-uniforme $\hat{v} = (u', v, U' \times u_E)$.

Soit $u'' = ((B_j)_{j\in J}, \phi'')$ une structure quasi-uniforme sur $E'' \in \mathfrak{U}$, et soit $\hat{g} = (u', g, u'' \times u_E)$ une application quasi-uniforme. Pour tout $j \in J$ il existe $i_j \in I$ tel que $g(B_j \times E) \subset A'_{i_j}$. Soient $x'' \in E''$ et $g_{x''}$ l'application de E dans E' définie par $g_{x''}(x) = g(x'', x)$; si $x'' \in B_j$, où $j \in J$, on a $g_{x''} \in \mathfrak{A}_{i_j}$. Soit g' l'application de E'' dans M' définie par $g'(x'') = g_{x''}$. Elle définit une application quasi-uniforme (U', g', u''), qui est l'unique $\hat{g}' \in \mathfrak{Q}$ vérifiant $\hat{v} \circ (\hat{g}' \times i_{u_E}) = \hat{g}$.

3° Supposons u' séparé; soient $f \in M'$ et $f' \in M'$ tels que $f(x) \in A'_i$, $f'(x) \in A'_j$ et $f(x) \neq f'(x)$ pour un certain $x \in E$. Il existe $V'_i \in \phi'(i)$ et $V'_j \in \phi'(j)$ tels que $V'_i(f(x)) \cap V'_j(f'(x)) = \emptyset$. Comme $V'_i<E> \in \Phi'(i)$ et $V'_j<E> \in \Phi'(j)$, on trouve

$$V'_i<E>(f) \cap V'_j<E>(f') = \emptyset.$$

En effet, si g appartenait à cette intersection, les relations

$$(f(x), g(x)) \in V'_i \quad \text{et} \quad (f'(x), g(x)) \in V'_j$$

entraîneraient $V'_i(f(x)) \cap V'_j(f'(x)) \neq \emptyset$. Donc U' est séparée.

3° Supposons u' stricte. Soient $i \in I$ et $B(i)$ une base stricte de $\phi'(i)$. L'ensemble $\mathfrak{B}(i)$ des $V_i<E>$, où $V_i \in B(i)$, est une base du filtre $\Phi'(i)$. Soient $V_i \in B(i)$ et $(f,g) \in V_i<E>$; pour tout $x \in E$, on a $(f(x), g(x)) \in V_i$, de sorte qu'il existe $y_x \in A'_i$ tel que $(f(x), y_x)$ et $(g(x), y_x)$ appartiennent à V_i. Soit h l'application de E dans E' définie par $h(x) = y_x$. On obtient

$$h \in \mathfrak{A}'_i, \quad (f,h) \in V_i<E>, \quad (g,h) \in V_i<E>.$$

Ceci prouve que U' est stricte.

COROLLAIRE. *U' est la moins fine des structures quasi-uniformes sur M' rendant l'application v quasi-uniforme de $U' \times u_E$ vers u'.*

DEFINITION. La structure quasi-uniforme U' définie dans la proposition précédente sera appelée *structure de pseudo-convergence quasi-uniforme associée à (u', E)* et notée $\mathfrak{Q}(u', E)$.

PROPOSITION. *Il existe un isomorphisme de u' sur une sous-structure quasi-uniforme U'_1 de U'. Si u' est séparée, $q(U'_1)$ est fermé dans la topologie $\mathcal{T}(U')$ sous-jacente à U'.*

PREUVE. Soit b l'application de E' dans M' associant à $y \in E'$ l'application constante $\tilde{y}$ (telle que $\tilde{y}(x) = y$ pour tout $x \in E$). On voit que b définit un isomorphisme de u' sur la structure quasi-uniforme U'_1 induite par U' sur $b(E')$, car, pour tout $V \in \phi(i)$, on a

$$(b \times b)(V) = V\langle E \rangle \cap (b(E') \times b(E')).$$

Supposons u' séparée et $f \in M'$ adhérent à $b(E')$. Soit $x \in E$ et posons $y = f(x)$. Si y appartient à A'_i, alors $f(E)$ est contenu dans A'_i, par définition de M'. Si $x' \in E$ et si $f(x') \neq y$, il existe $V \in \phi(i)$ tel que l'on ait $V(y) \cap V(f(x')) \neq \emptyset$, et il existe $V' \in \phi(i)$ vérifiant $V' \circ V' \subset V$. Comme f est adhérent à $b(E')$, il existe $z \in E'$ tel que $\tilde{z} \in V'\langle E \rangle(f)$. Il en résulte: $(f(x), z) \in V'$ et $(z, f(x')) \in V'$, d'où

$$(y, f(x')) = (f(x), z) \circ (z, f(x')) \in V' \circ V' \subset V.$$

Ceci étant impossible, $y = f(x')$ et par suite $f = \tilde{y} \in b(E')$.

PROPOSITION. *Supposons que u' soit séparée et vérifie la condition (C): On a $x \in A'_i$ si x est point limite dans $\mathcal{T}(u')$ d'un filtre de Cauchy pour u' relativement à $\phi'(i)$. Alors U' est complet ssi u' est complet. En particulier U' est complet si u' est complet et appartient à $(\mathfrak{Q}_1)_0$.*

PREUVE. 1° Comme u' est séparée, u' est isomorphe à U'_1 et $q(U'_1)$ est fermé dans $\mathcal{T}(U')$ (proposition précédente). Donc u' est complet si U' est complet.

2° Supposons u' complet et soit F un filtre de Cauchy pour U' relativement à $\Phi'(i)$. Pour tout $x \in E$, l'application $\bar{x}$ de M' dans E' définie par $g \to g(x)$ étant quasi-uniforme de U' vers u', le filtre $\bar{x}F$ image de F par $\bar{x}$ est un filtre de Cauchy relativement à $\Phi'(i)$ et $\bar{x}F$ converge vers un unique $f(x)$; d'après la condition (C), $f(x)$ appartient à A'_i. Par suite l'application $f: x \to f(x)$ de E dans E' appartient à $\mathfrak{A}'_i$. Soient V' un élément de $\Phi'(i)$ et V'' un élément associé à V' par l'axiome 2. Il existe $W \in \Phi'(i)$ tel que $V'' \circ W \subset V'$ et il existe $X \in F$ tel que $X \times X$ soit contenu dans $W < E >$. Montrons que X est contenu dans $V' < E >(f)$. En effet, soient $f' \in X$ et $x' \in E$ et considérons $(f(x'), f'(x'))$. Comme $\bar{x}' F$ converge vers $f(x')$ et que $V''(f(x'))$ est un voisinage de $f(x')$, on a $V''(f(x')) \cap \bar{x}'(X) \neq \emptyset$. Il existe donc $f'' \in X$ tel que $(f(x'), f''(x')) \in V''$ et, (f'', f') appartenant à $X \times X$, on trouve

$$(f(x'), f'(x')) = (f(x'), f''(x')) \circ (f''(x'), f'(x')) \in V'' \circ W \subset V'.$$

Par conséquent F converge vers f dans $\mathcal{T}(U')$, et U' est complet.

PROPOSITION. *Si T est une topologie sur E, l'ensemble M'_c des $f \in M'$ tels que $(\mathcal{T}(u'), f, T)$ soit continue est fermé dans $\mathcal{T}(U')$. Si u est une structure quasi-uniforme $((A_j)_{j \in J}, \Phi)$ sur E, l'ensemble M'_q des $f \in M'$ tels que (u', f, u) soit quasi-uniforme est fermé dans $\mathcal{T}(U')$.*

PREUVE. Soit T une topologie sur E et soit f un élément de $\mathfrak{A}'_i$ adhérent à M'_c. Soit $V \in \Phi'(i)$; il existe $V' \in \Phi'(i)$ symétrique tel que $V' \circ V'$ soit contenu dans V; soit V'' un élément de $\Phi'(i)$ associé à V' par l'axiome 2. Puisque $V' \cap V'' \in \Phi'(i)$, il existe W symétrique vérifiant

$$W \in \Phi'(i), \quad W \circ W \subset V' \cap V'' \quad \text{et} \quad W \subset V' \cap V''.$$

$W < E >(f)$ étant un voisinage de f dans $\mathcal{T}(U')$, il existe $g \in M'_c$ tel que $(f, g) \in W < E >$. Si $i' \in I$ est tel que $g \in \mathfrak{A}'_{i'}$, on a $V'' \cap \Delta_{A'_{i'}} \neq \emptyset$, car

$$(g(x), g(x)) = ((g(x), f(x)) \circ (f(x), g(x)) \in W \circ W \subset V'',$$

pour $x \in E$. Il existe donc $W' \in \Phi'(i')$ tel que $V'' \circ W' \subset V'$ et, $W'(g(x))$ étant un voisinage de $g(x)$, il existe un voisinage Y de x tel que $g(Y)$ soit contenu dans $W'(g(x))$. Pour $x' \in Y$, on trouve:

$$(f(x), f(x')) = (f(x), g(x)) \circ (g(x), g(x')) \circ (g(x'), f(x'))$$
$$\in W \circ W' \circ W \subset V'' \circ W' \circ V' \subset V' \circ V' \subset V.$$

Donc $f(Y) \subset V(f(x))$, c'est-à-dire $f \in M'_c$.

2° Si u est une structure quasi-uniforme sur E, on démontre de même que M'_q est fermé dans $\mathcal{T}(u)$.

EXEMPLES. 1° Si u' s'identifie à une topologie T', on a $U'_1 = U'$, de sorte que $\mathcal{Q}(u', E)$ est isomorphe à u'.

2° Si u' s'identifie à une structure uniforme, on a $M' = \mathfrak{M}(E', E)$ et la structure quasi-uniforme $U' = \mathcal{Q}(u', E)$ s'identifie à la structure uniforme de la convergence uniforme sur $\mathfrak{M}(E', E)$. Ainsi les propositions précédentes généralisent les résultats classiques sur cette structure.

3. Domination de la catégorie des applications quasi-uniformes.

Soient $u' = ((A'_i)_{i \in I}, \Phi')$ et $u = ((A_j)_{j \in J}, \Phi)$ deux structures quasi-uniformes sur E' et sur E respectivement, et soit $M_q(u', u)$ l'ensemble des applications quasi-uniformes $\bar{f} = (u', f, u)$.

PROPOSITION. *Il existe une structure quasi-uniforme sur $M_q(u', u)$, notée $\mathcal{Q}(u', u)$, isomorphe à une sous-structure quasi-uniforme du produit des structures quasi-uniformes $\mathcal{Q}(u', A_j)$, où $j \in J$, et telle que $\mathcal{Q}(u', u)$ soit isomorphe à $\mathcal{Q}(u', E)$ si $u = u_E$ (resp. à une sous-structure quasi-uniforme de $\mathcal{Q}(u', E)$ si u s'identifie à une structure uniforme). Si u' est séparée (resp. stricte), $\mathcal{Q}(u', u)$ est séparée (resp. stricte).*

PREUVE. Si $f \in \mathfrak{M}(E', E)$, notons f_j la restriction f / A_j de f à A_j. Soit

$$\mathfrak{A}'^j_i = \{ f_j \in \mathfrak{M}(E', A_j) \mid f_j(A_j) \subset A'_i \} \quad \text{et} \quad M'_j = \bigcup_{i \in I} \mathfrak{A}'^j_i .$$

Notons $U'_j = ((\mathfrak{A}'^j_i)_{i \in I}, \Omega'_j)$ la structure de pseudo-convergence $\mathcal{Q}(u', A_j)$. La structure quasi-uniforme $\hat{U}$ produit de $(U'_j)_{j \in J}$ est définie comme suit:

$$\hat{U} = ((\mathfrak{A}'_{\hat{i}})_{\hat{i} \in \hat{I}}, \hat{\Phi}), \text{ où } \hat{I} = I^J,$$
$$\mathfrak{A}'_{\hat{i}} = \prod_{j \in J} \mathfrak{A}'^j_{i_j} \quad \text{et} \quad \hat{\Phi}(\hat{i}) = \prod_{j \in J} \Omega'_j(i_j) \quad \text{si } \hat{i} = (i_j)_{j \in J} .$$

Il existe une application injective p' de $M_q(u', u)$ dans $\hat{M} = q(\hat{U})$, qui associe $(f_j)_{j \in J}$ à $\bar{f} = (u', f, u) \in M_q(u', u)$. En effet, pour tout $j \in J$, il existe $i_j \in I$ tel que $f(A_j)$ soit contenu dans A'_{i_j}, de sorte que $p'(\bar{f}) = (f_j)_{j \in J}$ appartient à $\mathfrak{A}'_{\hat{i}}$, où $\hat{i} = (i_j)_{j \in J}$. Soient $\hat{U}'$ la structure quasi-uniforme induite par $\hat{U}$ sur $p'(M_q(u', u)) = \mathfrak{S}'$ et $\mathcal{Q}(u', u)$ la structure quasi-uniforme image réciproque de $\hat{U}'$ par p'. On a:

$$\mathcal{Q}(u', u) = ((B_k)_{k\in K}, \psi), \quad \text{où} \quad K = \{ k \in \hat{I} \mid \mathfrak{A}'_k \cap \mathcal{E}' \neq \emptyset \}$$

et, si $k = (i_j)_{j\in J} \in K$,

$$B_k = \{ \bar{f} \in M_q(u', u) \mid \forall j \in J,\ f_j \in \mathfrak{A}'^j_{i_j} \}, \quad \psi(k) = (p' \times p')^{-1} \hat{\phi}'(k),$$

où $\hat{\phi}'(k)$ est le filtre induit par $\hat{\phi}(k)$ sur $\mathcal{E}' \times \mathcal{E}'$.

1° Supposons que u s'identifie à une structure uniforme, i. e. que $I = \{ 1 \}$, et soit M' l'ensemble (considéré dans le n° 1) des $f \in \mathfrak{M}(E', E)$ tels que $f(E)$ soit contenu dans l'un des A'_j. Alors $\mathcal{E}'$ s'identifie à l'ensemble des $f \in M'$ tels que $(u', f, u) \in \mathcal{Q}$, et p' définit un isomorphisme de $\mathcal{Q}(u', u)$ sur la sous-structure induite par $\mathcal{Q}(u', E)$ sur M'_q. Si u est la structure uniforme discrète u_E, on a $M'_q = M'$; donc $\mathcal{Q}(u', u)$ est isomorphe à $\mathcal{Q}(u', E)$.

2° Si u' est séparée (resp. stricte), U'_j est séparée (resp. stricte) pour tout $j \in J$, d'après le n° 2, donc $\hat{U} = \prod_{j\in J} U'_j$ est séparée (resp. stricte) de même que la structure induite $\hat{U}'$. A fortiori $\mathcal{Q}(u', u)$ est séparée (resp. stricte).

Nous conserverons les notations de la démonstration précédente. Pour tout $k = (i_j)_{j\in J} \in K$, nous posons

$$V'/A_j/ = \{ (\bar{f}', \bar{f}) \in M_q(u', u) \times M_q(u', u) \mid [\bar{f}', \bar{f}](A_j) \subset V' \},$$

pour tout $V' \in \phi'(i_j)$. Soit $\mathfrak{B}'(k)$ l'ensemble des $V'/A_j/$, où $j \in J$ et $V' \in \phi'(i_j)$. Les éléments de $\mathfrak{B}'(k)$ seront appelés *entourages élémentaires de* $\psi(k)$.

PROPOSITION. *On a* $\mathcal{Q}(u', u) = ((B_k)_{k\in K}, \psi)$, *où* $\psi(k)$ *admet pour base l'ensemble* $\mathfrak{B}(k)$ *des intersections finies d'éléments de* $\mathfrak{B}'(k)$.

PREUVE. Notons π la bijection qui associe $((f'_j)_{j\in J}, (f_j)_{j\in J})$ à la famille $((f'_j, f_j))_{j\in J}$. Soit $k = (i_j)_{j\in J} \in K$. Le filtre $\psi(k)$ a pour base l'ensemble des parties W de $M_q(u', u) \times M_q(u', u)$ telles que $(p' \times p')(W) = V \cap (\mathcal{E}' \times \mathcal{E}')$, où V est de la forme suivante: $V = \pi(\prod_{j\in J} W_j)$, où il existe une partie finie J' de J telle que:

$$W_j = V'_j \langle A_j \rangle, \text{ où } V'_j \in \phi'(i_j), \text{ si } j \in J', \quad W_j = M'_j \times M'_j \text{ si } j \notin J'.$$

Si $\bar{f} = (u', f, u) \in \mathfrak{Q}$ et $\bar{f}' = (u', f', u) \in \mathfrak{Q}$, alors $(\bar{f}', \bar{f})$ appartient à W ssi (f'_j, f_j) appartient à W_j pour tout $j \in J$, c'est-à-dire ssi

$$[\bar{f}', \bar{f}](A_j) = [f'_j, f_j](A_j) \subset V'_j \quad \text{pour tout } j \in J'.$$

Par conséquent $W = \bigcap_{j \in J'} V'_j / A_j /$ appartient à $\mathfrak{B}(k)$. Ainsi $\mathfrak{B}(k)$ est une base de $\psi(k)$.

PROPOSITION. *Il existe un isomorphisme b de u' sur une sous-structure quasi-uniforme de $\mathfrak{Q}(u', u)$. Si u' est séparée, $b(E')$ est fermé dans la topologie $\tau(\mathfrak{Q}(u', u))$.*

PREUVE. Si $x' \in E'$ soit $\bar{x}'$ (resp. $\bar{x}'_j$) l'application constante sur x' de E (resp. de A_j) dans E'. D'après le n° 2 l'application $b_j : x' \to \bar{x}'_j$ définit un isomorphisme de u' sur une sous-structure u'_j de U'_j, pour tout $j \in J$. Par suite l'application $b' : x' \to (\bar{x}'_j)_{j \in J}$ définit un isomorphisme de u' sur une sous-structure $\hat{u}'$ de $\hat{U}$. Comme $b'(E')$ est contenu dans $\mathcal{E}'$, l'application $p'^{-1} b'$ qui associe $\bar{x}'$ à x' définit un isomorphisme b de u' sur une sous-structure de $\mathfrak{Q}(u', u)$. Supposons u' séparée; $b_j(E')$ étant fermé dans $\tau(U'_j)$ pour tout $j \in J$ (n° 2), $b'(E')$ est fermé dans $\tau(\hat{U}) = \prod_{j \in J} \tau(U'_j)$. Il en résulte que $b(E')$ est fermé dans $\tau(\mathfrak{Q}(u', u))$.

PROPOSITION. *Supposons $u \in (\mathfrak{Q}_1)_0$. Alors $\mathcal{E}'$ est fermé dans la topologie $T = \tau(\prod_{j \in J} U'_j)$. Si u' est séparée, alors $\mathfrak{Q}(u', u)$ est complet si, et seulement si, u' est complet.*

PREUVE. 1° u est somme des structures uniformes induites u/A_j, où $j \in J$ (voir n° 1). Par suite $\mathcal{E}' = \prod_{j \in J} M'_j$, où $M'_j = q(\mathfrak{Q}(u', u/A_j))$. Vu le n° 2, M'_j est fermé dans $\tau(U'_j)$. Il s'ensuit que $\mathcal{E}'$ est fermé dans T.

2° Supposons u' séparée. D'après la proposition précédente, $b(E')$ est fermé dans $\tau(\mathfrak{Q}(u', u))$, de sorte que u' est complet si $\mathfrak{Q}(u', u)$ est complet. Inversement si u' est complet, U'_j est complet pour tout $j \in J$, d'après le n° 2; donc $\hat{U}$ est complet et, $\mathcal{E}'$ étant fermé, $\mathfrak{Q}(u', u)$ est aussi complet.

PROPOSITION. *Il existe une catégorie q-dominée $(\mathfrak{Q}^o, D)$ telle que l'on ait $D(u', u) = \mathfrak{Q}(u', u)$ pour tout couple (u', u) de structures quasi-uniformes. De plus $(\mathfrak{Q}^o, D)$ est tensoriellement q-dominée en u, pour toute* *structure quasi-discrète u.*

PREUVE. 1° Supposons que

$$u = ((A_j)_{j\in J}, \phi), \quad u' = ((A'_i)_{i\in I}, \phi') \quad \text{et} \quad u'' = ((A''_l)_{l\in L}, \phi'')$$

soient des structures quasi-uniformes sur E, sur E' et sur E'' respectivement. Conservons les notations précédentes pour $\mathcal{Q}(u', u)$ et posons $\mathcal{Q}(u'', u) = ((B'_k)_{k\in K'}, \psi')$. Si $\bar{f'} = (u'', f', u') \in \mathcal{Q}$, montrons que l'application d de $M_q(u', u)$ dans $M_q(u'', u)$ qui, à tout $\bar{h}$, associe $\bar{f'} \circ \bar{h}$ définit une application quasi-uniforme $D(\bar{f'}, u)$ de $\mathcal{Q}(u', u)$ vers $\mathcal{Q}(u'', u)$. En effet, pour tout $i \in I$ il existe $l_i \in L$ tel que $f'(A'_i) \subset A''_{l_i}$. Soit $k = (i_j)_{j\in J} \in K$. Si $k' = (l_{i_j})_{j\in J}$, on a $k' \in K'$ et $d(B_k) \subset B'_{k'}$. Soit $V''/A_j/$ un entourage élémentaire de $\psi'(k')$; pour tout $j \in J$, il existe $V'_j \in \phi'(i_j)$ tel que $(f' \times f')(V'_j) \subset V''$. On en déduit

$$V'_j / A_j / \in \psi(k) \quad \text{et} \quad (d \times d)(V'_j / A_j /) \subset V'' / A_j /,$$

ce qui prouve l'affirmation.

De même, soit $\bar{f} = (u', f, u) \in \mathcal{Q}$ et soit d' l'application de $M_q(u'', u')$ dans $M_q(u'', u)$ qui associe $\bar{h} \circ \bar{f}$ à $\bar{h}$. Montrons que d' définit une application quasi-uniforme $D(u'', \bar{f})$ de $\mathcal{Q}(u'', u')$ vers $\mathcal{Q}(u'', u)$. Pour tout $j \in J$, il existe $i_j \in I$ tel que $f(A_j) \subset A'_{i_j}$. Supposons

$$\mathcal{Q}(u'', u') = ((B''_k)_{k\in K''}, \psi'') \quad \text{et} \quad k'' = (l_i)_{i\in I} \in K''.$$

Nous avons

$$k' = (l_{i_j})_{j\in J} \in K' \quad \text{et} \quad d'(B_{k''}) \subset B_{k'}.$$

Soit $V''/A_j/$ un entourage élémentaire de $\psi'(k')$; on a

$$V''/A'_{i_j}/ \in \psi''(k'') \quad \text{et} \quad (d' \times d')(V''/A'_{i_j}/) \subset V''/A_j/.$$

Soient $\bar{f_1}$ et $\bar{f}$ des applications quasi-uniformes de u'' vers u'_1 et u vers u' respectivement. L'application de $M_q(u'', u')$ dans $M_q(u'_1, u)$ qui associe $\bar{f_1} \circ \bar{h} \circ \bar{f}$ à $\bar{h}$ définit l'application quasi-uniforme $D(\bar{f_1}, u) \circ D(u'', \bar{f})$ de $\mathcal{Q}(u'', u')$ vers $\mathcal{Q}(u'_1, u)$; on la notera $D(\bar{f_1}, \bar{f})$. Comme $M_q(u', u)$ appartient à l'univers $\mathfrak{U}$, l'application associant $D(\bar{f_1}, \bar{f})$ à $(\bar{f_1}, \bar{f}) \in \mathcal{Q} \times \mathcal{Q}$ définit un foncteur D de $\mathcal{Q}^\circ \times \mathcal{Q}^*$ vers $\mathcal{Q}^\circ$ tel que $q \circ D = Hom_{\mathcal{Q}}$. Autrement dit, $(\mathcal{Q}^\circ, D)$ est une catégorie q-dominée.

2° Soit $u = ((A_j)_{j\in J}, \phi)$ une structure quasi-discrète sur $E \in \mathfrak{U}$ et soit $\times_u$ le foncteur de $\mathcal{Q}^o$ vers $\mathcal{Q}^o$ associant $\bar{h}\times i_u$ à $\bar{h}$. Soit $u' = ((A'_i)_{i\in I}, \phi')$ une structure quasi-uniforme sur $E' \in \mathfrak{U}$; nous reprenons les notations du début du paragraphe. Montrons que $\mathcal{Q}(u', u) = ((B_k)_{k\in K}, \psi)$ est un $\times_u$-objet colibre associé à u'. En effet, soit v l'application de $M_q(u', u)\times E$ dans E' qui associe $f(x)$ à $(\bar{f}, x)$, où $\bar{f} = (u', f, u)$. Soit $k = (i_j)_{j\in J} \in K$; on a $v(B_k \times A_j) \subset A'_{i_j}$ et, si $V' \in \phi'(i_j)$, alors

$$v\times v(\pi(V'/A_j/\times \Delta_{A_j})) \subset V', \text{ où } \pi((\bar{f}', \bar{f}), (x, x)) = ((\bar{f}', x), (\bar{f}, x)).$$

Par conséquent v définit une application quasi-uniforme $\bar{v}$ de $\mathcal{Q}(u', u)\times u$ vers u'. Soient de plus $u'' = ((A''_l)_{l\in L}, \phi'')$ une structure quasi-uniforme sur $E'' \in \mathfrak{U}$ et $\bar{g}$ une application quasi-uniforme $(u', g, u''\times u)$. Pour tout couple $(l, j) \in L\times J$, il existe $i^l_j \in I$ tel que $g(A''_l \times A_j)$ soit contenu dans $A'_{i^l_j}$. Pour tout $x'' \in E''$, l'application associant $g(x'', x)$ à $x \in E$ définit une application quasi-uniforme $\bar{g}_{x''}$ de u vers u' (à savoir $\bar{g}\circ [\bar{x}'', i_u]$). Soit g' l'application de E'' dans $M_q(u', u)$ qui associe $\bar{g}_{x''}$ à $x'' \in E''$; elle définit une application quasi-uniforme $\bar{g}'$ de u'' vers $\mathcal{Q}(u', u)$. En effet, $g'(A''_l)$ est contenu dans B_k, où $k = (i^l_j)_{j\in J} \in K$. Soit $V'/A_j/$ un entourage élémentaire de $\psi(k)$; comme V' appartient à $\phi'(i^l_j)$, il existe $V_l \in \phi''(l)$ tel que

$$g\times g(\pi'(V_l \times \Delta_{A_j})) \subset V', \text{ où } \pi'((x'', y''), (x, y)) = ((x'', x), (y'', y)),$$

ce qui implique $g'\times g'(V_l) \subset V'/A_j/$. Ainsi

$$\bar{g}' = (\mathcal{Q}(u', u), g', u'') \in \mathcal{Q} \quad \text{et} \quad \bar{v}\circ(\bar{g}'\times i_u) = \bar{g},$$

car q est un foncteur fidèle. De plus $\bar{g}'$ est l'unique élément de $\mathcal{Q}$ vérifiant ces relations. Par suite $\times_u$ admet le foncteur

$$D(-, i_u) : \bar{h} \to D(\bar{h}, i_u) \;\; de \;\; \mathcal{Q}^o \text{ vers } \mathcal{Q}^o$$

pour coadjoint.

3° Conservons les notations de la partie 2; soit n la bijection de $M_q(u', u''\times u)$ dans $M_q(\mathcal{Q}(u', u), u'')$ qui associe à $\bar{g}$ l'unique $\bar{g}'$ tel que $\bar{v}\circ(\bar{g}'\times i_u) = \bar{g}$. Montrons que n définit un isomorphisme de

$$\mathcal{Q}(u', u''\times u) = ((\hat{B}_k)_{k\in\hat{K}}, \hat{\psi}) \text{ sur } \mathcal{Q}(\mathcal{Q}(u', u), u'') = ((\bar{B}_k)_{k\in\bar{K}}, \psi).$$

Soit $\hat{k} = (i_j^l)_{(l,j)\in L\times J} \in \hat{K}$. A tout $l \in L$, on associe

$$k_l = (i_j^l)_{j\in J} \in K \quad \text{et} \quad \bar{k} = (k_l)_{l\in L} \in \bar{K}.$$

Montrons que $n(\hat{B}_{\hat{k}}) = \bar{B}_{\bar{k}}$. En effet, si $\bar{g} = (u', g, u''\times u) \in \hat{B}_{\hat{k}}$, alors $g(A_l''\times A_j) \subset A'_{i_j^l}$ pour tout $(l,j)\in L\times J$, d'où $n(\bar{g})(A_l'') \subset B'_{k_l}$ pour tout $l\in L$, c'est-à-dire $n(\bar{g}) \in \bar{B}_{\bar{k}}$. Inversement si $\bar{g}' \in \bar{B}_{\bar{k}}$, l'élément $\bar{g} = n^{-1}(\bar{g}')$ vérifie, pour tout $(l,j)\in L\times J$,

$$\bar{g}(A_l''\times A_j) = v(\bar{g}'(A_l'')\times A_j) \subset v(B'_{k_l}\times A_j) \subset A'_{i_j^l}.$$

Donc $\bar{g}$ appartient à $\hat{B}_{\hat{k}}$. Soit $V/A_l/$ un entourage élémentaire de $\bar{\psi}(\bar{k})$; comme $V \in \psi(k_l)$, il existe une partie finie J' de J telle que

$$\bigcap_{j\in J'} V_j'/A_j/ \subset V, \quad \text{où} \quad V_j' \in \phi'(i_j^l);$$

alors $(\bigcap_{j\in J'} V_j'/A_j/)/A_l''/$ est contenu dans $V/A_l/$. Ainsi les intersections finies d'entourages élémentaires $(\bigcap_{j\in J'} V_j'/A_j/)/A_l''/$ forment une base de $\bar{\psi}(\bar{k})$, et les intersections finies d'entourages élémentaires de la forme $V''/A_l''\times A_j/$, où $V'' \in \phi'(i_j^l)$, constituent une base de $\hat{\psi}(\hat{k})$. Comme

$$n\times n(\bigcap_{(l,j)\in L'\times J'} V''_{l,j}/A_l''\times A_j/ = \bigcap_{l\in L'}(\bigcap_{j\in J'} V''_{l,j}/A_j/)/A_l''/,$$

si J' et L' sont des parties finies de J et L respectivement et si $V''_{l,j}$ appartient à $\phi'(i_j^l)$, la bijection n définit bien un isomorphisme.

DEFINITION. On appellera $\mathfrak{Q}(u', u)$ *la structure de pseudo-convergence quasi-uniforme relativement à* (u, u').

REMARQUE. Soit $u' = ((A_i')_{i\in I}, \phi')$ une structure quasi-uniforme sur E' et soit $P = (A_j)_{j\in J}$ un recouvrement d'un ensemble E tel qu'aucun des A_j ne soit vide. Notons $M(u', P)$ l'ensemble des applications f de E dans E' vérifiant la condition: Pour tout $j\in J$, il existe $i\in I$ tel que $f(A_j)$ soit contenu dans A_i'. Les démonstrations des premières propositions de ce paragraphe s'appliquent sans modification pour prouver qu'il existe une structure quasi-uniforme $\mathfrak{Q}(u', P)$ sur $M(U', P)$ isomorphe à une sous-structure du produit de $(\mathfrak{Q}(u', A_j))_{j\in J}$, et que cette structure quasi-uniforme $((B_k)_{k\in K}, \psi)$ est définie comme suit: $K = I^J$; si $k = (i_j)_{j\in J} \in K$, on a $B_k = \{ f\in M(u', P) \mid f(A_j) \subset A'_{i_j} \}$ et $\psi(k)$ admet pour base l'ensemble des intersections finies de $V'/A_j/$, où $V' \in \phi'(i_j)$ et

$$V'/A_j/ = \{(f, f') \in M(u', P)^2 \mid [f, f'](A_j) \subset V'\}.$$

Si P' est un recouvrement de E moins fin que P, l'injection canonique de $M(u', P')$ dans $M(u', P)$ définit une application quasi-uniforme de $\mathcal{Q}(u', P')$ vers $\mathcal{Q}(u', P)$. Si $u = (P, \phi)$ est une structure quasi-uniforme, $\mathcal{Q}(u', u)$ s'identifie à une sous-structure de $\mathcal{Q}(u', P)$.

Supposons encore que

$$u = ((A_j)_{j \in J}, \phi) \quad \text{et} \quad u' = ((A'_i)_{i \in I}, \phi')$$

sont des structures quasi-uniformes sur E et sur E'. Soit $c(\tau(u'), \tau(u))$ la topologie de la convergence compacte sur l'ensemble des applications f de E dans E' telles que $(\tau(u'), f, \tau(u))$ soit continu. Nous notons T_c la topologie image, par la bijection associant (u', f, u) à f, de la topologie induite par $c(\tau(u'), \tau(u))$ sur l'ensemble $q(M_q(u', u))$ des applications f telles que (u', f, u) soit une application quasi-uniforme.

PROPOSITION. *Soit σ un ensemble de parties S de E admettant E pour réunion. Il existe une structure quasi-uniforme $\mathcal{Q}_\sigma(u', u)$ sur $M_q(u', u)$, moins fine que $\mathcal{Q}(u', u)$, isomorphe à une sous-structure de $\mathcal{Q}(u', P)$, si P est le recouvrement de E formé des $A_j \cap S$ non vides, où $j \in J$ et $S \in \sigma$. Si u appartient à $(\mathcal{Q}_1)_0$ et si σ est l'ensemble c des compacts de $\tau(u)$, alors T_c est plus fine que $\tau(\mathcal{Q}_c(u', u))$ et moins fine que $\tau(\mathcal{Q}(u', u))$.*

PREUVE. Appliquons la remarque précédente au recouvrement $P = (P_z)_{z \in Z}$ de E, où

$$Z = \{(j, S) \in J \times \sigma \mid A_j \cap S \neq \emptyset\} \quad \text{et} \quad P_{(j,S)} = A_j \cap S.$$

Soit t la bijection de $M_q(u', u)$ sur une partie de $M(u', P)$ associant f à (u', f, u). Définissons $\mathcal{Q}_\sigma(u', u)$ comme étant la structure quasi-uniforme image par t^{-1} de la structure induite par $\mathcal{Q}(u', P)$ sur $t(M_q(u', u))$. Le recouvrement P étant plus fin que le recouvrement $(A_j)_{j \in J}$, la structure $\mathcal{Q}_\sigma(u', u)$ est moins fine que $\mathcal{Q}(u', u)$.

1° Posons $\mathcal{Q}_\sigma(u', u) = ((D_l)_{l \in L}, \Sigma)$. Par construction, L est l'ensemble des $l = (i_z)_{z \in Z} \in Z$ tels que

$$D_l = \{ f \in M_q(u', u) \mid f(P_z) \subset A_{i_z} \ \forall z \in Z \}$$

soit non vide; le filtre $\Sigma(l)$, pour $l = (i_z)_{z \in Z}$ admet pour base l'ensemble des intersections finies d'entourages élémentaires

$$V'/P_z/ = \{ (f', f) \in M_q(u', u) \times M_q(u', u) \mid [f', f](P_z) \subset V' \},$$

où $V' \in \Phi(i_z)$.

2° Supposons que u appartient à $(\mathcal{Q}_I)_0$ et soit $\bar{f} = (u', f, u)$ un élément de $\mathcal{Q}$. Si W' est un ouvert de $\mathcal{T}(u')$ et C un compact de $\mathcal{T}(u)$ tel que $f(C)$ soit contenu dans W', posons

$$< W', C > = \{ f' \in M_q(u', u) \mid f'(C) \subset W' \}.$$

Le filtre $\mathcal{V}(f)$ des voisinages de f dans T_c a pour base l'ensemble des intersections finies de tels $< W', C >$. Par hypothèse, A_j est ouvert et fermé dans $\mathcal{T}(u)$; l'ensemble J' des $j \in J$ tels que $A_j \cap C$ soit non vide est donc fini; de plus $A_j \cap C$ est un compact C_j de $\mathcal{T}(u)$ et

$$< W', C > = \bigcap_{j \in J'} < W', C_j > .$$

Ainsi $\mathcal{V}(f)$ a aussi pour base l'ensemble des intersections finies des $< W', C >$ tels que C soit contenu dans l'un des A_j et que $f(A_j) \subset W'$. Par ailleurs, si f appartient à B_k, où $k = (i_j)_{j \in J}$, le filtre des voisinages de f dans T_c a pour base l'ensemble des intersections finies de voisinages $W/A_j/(f)$, où $W/A_j/$ est un entourage élémentaire tel que $W \in \Phi'(i_j)$.
- Soit $< W', C >$ un voisinage élémentaire de f, où $C \subset A_j$. Il existe un $i \in I$ tel que $f(A_j)$ soit contenu dans A'_i. Pour tout $x \in C$, comme W' est un voisinage de $f(x)$, il existe $V'_x \in \Phi'(i)$ tel que $V'_x(f(x)) \subset W'$ et il existe un $V''_x \in \Phi'(i)$ symétrique vérifiant $V''_x \circ V''_x \subset V'_x$. Puisque $(W_x)_{x \in C}$, où W_x est l'intérieur de $\overset{-1}{f}(V''_x(f(x)))$, est un recouvrement ouvert du compact C, il existe une partie finie X de C telle que

$$C \subset \bigcup_{x \in X} W_x, \quad \text{et on a} \quad W_j = \bigcap_{x \in X} V''_x \in \Phi'(i).$$

Soit $x' \in C$; nous avons $W_j(f(x)) \subset W'$. En effet, il existe $x \in X$ tel que $x' \in W_x$ et alors $f(x') \in V''_x(f(x))$. Supposons $y \in W_j(f(x'))$. Comme

$$(f(x), y) = (f(x), f(x')) \circ (f(x'), y) \in V''_{x'} \circ V''_{x'} \subset V'_x,$$

y appartient à $V'_x(f(x)) \subset W'$. Par conséquent $W/A_j/(f) \subset < W', C >$, de sorte que T_c est moins fine que $\mathcal{T}(\mathcal{Q}(u', u))$.

3° Supposons toujours $u \in (\mathcal{Q}_I)_0$ et prenons pour σ l'ensemble c des compacts de $\mathcal{T}(u)$. Soit $\bar{f} = (u', f, u)$ une application quasi-uniforme appartenant à D_l, où $l = (i_z)_{z \in Z}$. Considérons l'entourage élémentaire $V'/P_z/$ de $\Sigma(l)$, où $z = (j, C) \in J \times c$. Soit V'' un élément symétrique de $\Phi'(i_z)$ tel que $V'' \circ V'' \subset V'$, où $V' \in \Phi'(i_z)$ est donné; soit $x \in P_z = A_j \cap C$; on note W'_x l'intérieur de $V''(f(x))$. Comme f est continue de $\mathcal{T}(u)$ dans $\mathcal{T}(u')$ et P_z compact, il existe un voisinage W_x de x dans $\mathcal{T}(u)$ tel que $f(W_x) \subset W'_x$, et il existe un voisinage compact V_x de x contenu dans $W_x \cap P_z$. Soit $\overset{\circ}{V}_x$ l'intérieur de V_x; l'ensemble des $\overset{\circ}{V}_x$ forme un recouvrement ouvert du compact P_z; il existe donc une partie finie X de P_z telle que $P_z \subset \bigcup_{x \in X} \overset{\circ}{V}_x$. L'ensemble $W = \bigcap_{x \in X} < W'_x, V_x >$ est un voisinage de f dans T_c. On obtient

$$W' \subset V'/P_z/(f), \quad \text{si} \quad W' = W \cap M_q(u', u).$$

En effet, si $\bar{f'} = (u', f', u)$ appartient à W' et x' à P_z, il existe $x \in X$ tel que $x' \in V_x$ et nous avons:

$$(f(x'), f'(x')) = (f(x'), f(x)) \circ (f(x), f'(x')) \in V'' \circ V'' \subset V'.$$

Par conséquent $\mathcal{T}(\mathcal{Q}_c(u', u))$ est moins fine que T_c.

6. Structure de convergence quasi-uniforme sur $\mathfrak{M}(E', E)$.

Etant donnés un ensemble E et une structure quasi-uniforme sur E', nous allons munir l'ensemble $\mathfrak{M}(E', E)$ de toutes les applications de E dans E' d'une structure quasi-uniforme.

Soient E' un ensemble et $u' = ((A'_i)_{i \in I}, \Phi')$ une structure quasi-uniforme sur E'.

PROPOSITION. *Soit E'' l'ensemble obtenu par adjonction à E' d'un élément $a \notin E'$. Il existe une structure quasi-uniforme u'' sur E'' qui est la moins fine telle que $u''/E' = u'$.*

PREUVE. Posons $I' = I \cup \{\hat{\imath}\}$, où $\hat{\imath} \notin I$. Soit $(A''_i)_{i \in I'}$ la partition de E'' telle que:

$$A''_{\hat{\imath}} = \{a\} \quad \text{et} \quad A''_i = A'_i \quad \text{si} \quad i \neq \hat{\imath}.$$

la structure quasi-uniforme u'' cherchée est définie par $u'' = ((A''_i)_{i\in I'}, \Phi'')$, où Φ'' associe à $\hat{\imath}$ le filtre $\{E''\times E''\}$ et à $i\in I$ le filtre sur $E''\times E''$ engendré par $\Phi'(i)$.

PROPOSITION. *Soient* E *un ensemble,* $u' = ((A'_i)_{i\in I}, \Phi')$ *une structure quasi-uniforme sur* E' *et* $C = \mathfrak{M}(E', E)$. *Si* $f\in C$, *on note* I_f *l'ensemble des* $i\in I$ *tels que* $\overset{-1}{f}(A'_i)\neq\emptyset$. *Alors il existe une structure quasi-uniforme,* $U = ((C_s)_{s\in S}, \psi)$ *sur* C, *définie comme suit:*

S *est l'ensemble des parties* $s\neq\emptyset$ *de* I *de cardinal* $\bar{\bar{s}}$ *inférieur ou égal au cardinal de* E. *Si* $s\in S$, *on a* $C_s = \{f\in C \mid I_f = s\}$ *et* $\psi(s)$ *a pour base l'ensemble des intersections finies des* $V'_i[E]$, *où* $i\in s$, $V'_i\in\Phi'(i)$ *et* $V'_i[E] = \{(f',f)\in C\times C \mid \overset{-1}{f}(A'_i) = \overset{-1}{f'}(A'_i)\neq\emptyset,\ [f',f](\overset{-1}{f}(A'_i))\subset V'_i\}$.

PREUVE. 1° A tout $i\in I$, on associe un a_i n'appartenant pas à E et tel que tous les a_i soient différents. On pose

$$\hat{A}'_i = A'_i \cup \{a_i\} \quad \text{et} \quad \hat{E}' = \bigcup_{i\in I}\hat{A}'_i.$$

On va définir une structure quasi-uniforme $((\hat{A}'_i)_{i\in I}, \hat{\Phi}')$ sur $\hat{E}'$ dont la restriction à E' soit u'. Soit $i\in I$. Posons

$$\hat{V}' = V' \cup \{(a_i, a_i)\}, \quad \text{pour tout } V'\in\Phi'(i);$$

les ensembles $\hat{V}'$ forment une base d'un filtre $\hat{\Phi}'(i)$. Soit $V'\in\Phi'(i)$; alors $\hat{V}'$ est symétrique et contient la diagonale de $\hat{A}'_i\times\hat{A}'_i$. Si V'' est un des éléments de $\Phi'(i)$ associés à V' par l'axiome 2 des structures quasi-uniformes, et si $\hat{V}''$ rencontre la diagonale de $\hat{A}'_j\times\hat{A}'_j$ pour un $j\in I$, on a $\Delta_{A'_j}\cap V''\neq\emptyset$, de sorte qu'il existe $W\in\Phi'(j)$ tel que $V''\circ W\subset V'$; à W correspond $\hat{W}\in\hat{\Phi}'(j)$, vérifiant $\hat{V}''\circ\hat{W}\subset\hat{V}'$. Par suite $((\hat{A}'_i)_{i\in I}, \hat{\Phi}')$ est une structure quasi-uniforme $\tilde{u}'$.

2° Soient E'' et J les ensembles obtenus en ajoutant à $\hat{E}'$ un $a\notin\hat{E}'$ et à I un $\hat{\jmath}\notin I$. Soit u'' la structure quasi-uniforme sur E'' déduite de u' (proposition précédente): $u'' = ((A''_j)_{j\in J}, \Phi'')$, où $A''_i = \hat{A}'_i$ si $i\in I$, où $A''_{\hat{\jmath}} = \{a\}$ et où $\Phi''(\hat{\jmath}) = \{E''\times E''\}$. Soit U'' la structure de pseudo-convergence $\mathcal{Q}(u'', E)$ sur l'ensemble M'' des applications g de E dans E'' telles que $g(E)$ soit contenu dans l'un des A''_j. On a $U'' = ((\mathfrak{A}''_j)_{j\in J}, \Phi'')$, où $\mathfrak{A}''_{\hat{\jmath}} = \{\tilde{a}\}$, en notant $\tilde{a}$ l'application constante sur a, et où

$$\mathfrak{A}''_i = \{ g \in M'' \mid g(E) \subset \hat{A}'_i \} \quad \text{si} \quad i \in I;$$

$\phi''(\hat{\jmath}) = \{ M'' \times M'' \}$ et, pour $i \in I$, le filtre $\phi''(i)$ a pour base l'ensemble des $\hat{V}'_i < E >$, où $V'_i \in \phi'(i)$.

3° Notons $Q = ((B_k)_{k \in K}, \Omega)$ la structure quasi-uniforme sur M''^I produit de la famille $(U''_i)_{i \in I}$ de structures quasi-uniformes telle que $U''_i = U''$ pour tout $i \in I$. Il existe une injection de C dans M''^I. En effet, soit $f \in C$. Pour tout $i \in I$, notons $\hat{f}_i$ l'application de E dans E'' définie comme suit:

si $i \in I_f$, $\hat{f}_i(x) = f(x)$ pour $x \in \overset{-1}{f}(A'_i)$,
$\hat{f}_i(x) = a_i$ pour $x \notin \overset{-1}{f}(A'_i)$;
si $i \notin I_f$, alors $\hat{f}_i = \tilde{a}$.

L'application associant $(\hat{f}_i)_{i \in I}$ à $f \in C$ est une bijection P de C sur une partie C' de M''^I. On a

$$\hat{f}_i \in \mathfrak{A}''_i \quad \text{si} \quad i \in I_f \quad \text{et} \quad \hat{f}_i \in \mathfrak{A}''_{\hat{\jmath}} \quad \text{si} \quad i \notin I_f.$$

Nous désignerons par $Q' = ((C'_l)_{l \in L}, \psi')$ la structure quasi-uniforme sur C image par P^{-1} de Q / C'.

4° Par construction du produit, $K = J^I$. Si $k = (j_i)_{i \in I} \in K$, posons $s_k = \{ i \in I \mid j_i \neq \hat{\jmath} \}$; comme $B_k = \prod_{i \in I} \mathfrak{A}''_{j_i}$, on voit que $P(f) \in B_k$, où $f \in C$, équivaut à $\hat{f}_i \in \mathfrak{A}''_{j_i}$ pour tout $i \in I$, c'est-à-dire à

$$s_k = I_f \quad \text{et} \quad j_i = i \quad \text{pour tout} \quad i \in s_k.$$

Ainsi L est formé des $k = (j_i)_{i \in I} \in K$ tels que $j_i = i$ pour $i \in s_k$ et qu'il existe une application f de E dans E' dont l'image $f(E)$ rencontre A'_i pour tout $i \in s_k$. Il existe une telle application ssi $s_k \neq \emptyset$ et si le cardinal de s_k est inférieur ou égal à celui de E. Si $k \in L$, on trouve

$$C'_k = P^{-1}(B_k \cap C') = \{ f \in C \mid I_f = s_k \}.$$

5° Notons t la bijection associant $((g'_i)_{i \in I}, (g_i)_{i \in I}) \in M''^I \times M''^I$ à $(g'_i, g_i)_{i \in I} \in (M'' \times M'')^I$. Soit $k = (j_i)_{i \in I} \in K$. Une base $\Omega'(k)$ du filtre $\Omega(k)$ est formée des $W = t(\prod_{i \in I} W_i)$, où il existe une partie finie I_W de I vérifiant les conditions:

s_k est contenu dans le complémentaire de I_W dans I,

$W_i = M'' \times M''$ pour $i \notin I_W$,

si $i \in I_W$, il existe $V'_i \in \phi(j_i)$ tel que $W_i = \hat{V}'_i < E >$.

Supposons $k \in L$; une base de $\psi'(k)$ est formée des $P^{-1}(W \cap C' \times C')$, où $W \in \Omega'(k)$. Puisque $W' = P^{-1}(W \cap C' \times C')$ est l'ensemble des couples $(f', f) \in C \times C$ tels que $(\hat{f}'_i, \hat{f}_i) \in \hat{V}'_j < E >$ pour tout $i \in I_W$, on obtient $W' = \bigcap_{i \in I_W} V'_i [E]$, en posant:

$V'_i [E] = \{(f', f) \in C \times C \mid \overset{-1}{f}(A'_i) = \overset{-1}{f'}(A'_i) = A \neq \emptyset, \ [f', f](A) \subset V'_i\}$.

Par suite $\psi'(k)$ est engendré par l'ensemble des $V'_i [E]$, où $i \in s_k$ et où $V'_i \in \phi(i)$. En associant s_k à $k \in L$, on définit une bijection d de L sur $S = \{ s \subset I \mid s \neq \emptyset, \ \bar{\bar{s}} \leq \bar{\bar{E}} \}$. Donc $((C_s)_{s \in S}, \psi)$, où

$$C_s = C'_l \quad \text{et} \quad \psi(s) = \psi'(l) \quad \text{si} \quad d^{-1}(s) = l,$$

est une structure quasi-uniforme isomorphe à Q'.

EXEMPLE. Si u' s'identifie à une structure uniforme, la structure quasi-uniforme U s'identifie à la structure uniforme de la convergence uniforme sur $\mathfrak{M}(E', E)$.

7. Espaces fonctionnels quasi-métriques.

Dans ce paragraphe, nous supposons que $s' = (A'_i, d'_i)_{i \in I}$ est une structure quasi-métrique sur E', dont la structure quasi-uniforme sous-jacente est notée $u' = ((A'_i)_{i \in I}, \phi')$. Si $i \in I$ et si $a > 0$ est un nombre réel, nous posons $V_i(a) = \overset{-1}{d'_i}([0, a])$; les $V_i(a)$ forment une base de $\phi'(i)$.

Soit E un ensemble; M' désigne encore l'ensemble des applications f de E dans E' telles que $f(E)$ soit contenu dans l'un des A'_i et la structure de pseudo-convergence quasi-uniforme sur M' est notée

$$\mathfrak{Q}(u', E) = ((\mathfrak{A}'_i)_{i \in I}, \Phi').$$

PROPOSITION. *Il existe un quasi-écart $(D'_i)_{i \in I}$ sur M' admettant $\mathfrak{Q}(u', E)$ pour structure quasi-uniforme sous-jacente.*

PREUVE. 1° Soit $i \in I$. Considérons l'application D'_i de $\alpha(D'_i)$ dans la demi-droite $[0, \infty]$ suivante: $\alpha(D'_i)$ est l'ensemble M_i des couples (f, g) tels que $(f, g) \in M' \times M'$ et $(f(x), g(x)) \in \alpha(d'_i)$ pour tout $i \in I$; on a

$$D'_i(f, g) = \sup_{x \in E} d'_i(f(x), g(x)), \text{ pour tout } i \in I.$$

M_i est une partie symétrique de $M' \times M'$ contenant $\mathfrak{A}'_i \times \mathfrak{A}'_i$. On a

$$D'_i(f,f) = 0 \quad \text{si} \quad f \in \mathfrak{A}'_i \quad \text{et} \quad D'_i(f,g) = D'_i(g,f).$$

Soit a_i un élément associé à d'_i par l'axiome 3 des quasi-écarts et soit $i' \in I$ tel qu'il existe $f \in \mathfrak{A}'_{i'}$ vérifiant $D'_i(f,f) \leq a_i$. Cette relation entraînant $f(x) \in A'_{i'}$ et $(f(x), f(x)) \in V_i(a_i)$, il existe d'après ce même axiome 3 un réel $b_{i'} > 0$ tel que

$$(x', y') \in \alpha(d'_i) \quad \text{et} \quad d'_i(x', y') \leq d'_i(x', z') + d'_{i'}(z', y'),$$

si $(x', z') \in V_i(a_i)$ et $(z', y') \in V_{i'}(b_{i'})$. Il en résulte

$$(f, g) \in M_i \quad \text{et} \quad D'_i(f, g) \leq D'_i(f, h) + D'_{i'}(h, g),$$

si $(f, h) \in \overset{-1}{D'_i}([0, a_i])$ et $(h, g) \in \overset{-1}{D'_{i'}}([0, b_{i'}])$.

2° Ceci prouve que $(D'_i)_{i \in I}$ est un quasi-écart sur M'; soit $U' = ((\mathfrak{A}'_i)_{i \in I}, \psi)$ la structure quasi-uniforme sous-jacente. Le filtre $\psi(i)$ admet pour base l'ensemble des $\mathcal{O}_i(a) = \overset{-1}{D'_i}([0, a])$, où $a > 0$. Nous avons $\mathcal{O}_i(a) = V_i(a) < E >$. Comme les $V_i(a)$, où $a > 0$, forment une base de $\phi'(i)$, les $\mathcal{O}_i(a)$ forment une base de $\Phi'(i)$. Donc $\Phi' = \psi$ et U' est identique à $\mathfrak{Q}(u', E)$.

Soit $t > 0$ un nombre réel. Nous dirons que la structure quasi-métrique s' est *t-régulière* si elle vérifie la condition:

3'° Si i et i' sont des éléments de I tels que $V_i(t)$ rencontre la diagonale de $A'_{i'} \times A'_{i'}$, on a $V_i(t) \circ V_{i'}(t) \subset \alpha(d'_i)$ et

$$d'_i(x', y') \leq d'_i(x', z') + d'_{i'}(z', y') \quad \text{lorsque} \quad (x', z') \in V_i(t) \quad \text{et} \quad (z', y') \in V_{i'}(t).$$

(Autrement dit, les a_i et $b_{i'}$ dont l'axiome 3 des quasi-écarts assurent l'existence peuvent être choisis égaux à t).

PROPOSITION. *Soit $s = (A_j, d_j)_{j \in J}$ une structure quasi-métrique sur E. Soit $t > 0$ un nombre réel tel que s' soit t-régulière et que d_j soit borné par t pour tout $j \in J$. Soit Q' l'ensemble des $f' \in M'$ tels que (s', f', s) soit une application 1/3-quasi-métrique. Si $f \in M'$ est adhérent à Q' dans $\tau(\mathfrak{Q}(u', E))$, alors (s', f, s) est une application quasi-métrique.*

PREUVE. Soient $j \in J$ et $(x, y) \in \alpha(d_j)$. Par définition de M' il existe un

$i \in I$ tel que $f(A_j) \subset f(E) \subset A'_i$. Comme s est une structure quasi-métrique, si $d_j(x, y) = 0$, on a $x = y$, d'où $d'_i(f(x), f(x)) = 0$. Supposons donc $d_j(x, y) = b > 0$; par hypothèse, $b \leq t$. Puisque f est adhérent à Q', il existe $g \in Q'$ tel que $D'_i(f, g) \leq b/3$ (avec les notations précédentes), d'où

$$(f(z), g(z)) \in V_i(b/3) \quad \text{poùr tout} \quad z \in E.$$

Il existe $\hat{i} \in I$ tel que $g(A_j)$ soit contenu dans $A'_{\hat{i}}$; la diagonale de $A'_{\hat{i}} \times A'_{\hat{i}}$ rencontre $V_i(t)$, car $g(x) \in A'_{\hat{i}}$ et les relations

$$(g(x), g(x)) = ((g(x), f(x)) \circ (f(x), g(x)),$$

$$d'_i(g(x), f(x)) = d'_i(f(x), g(x)) \leq b/3$$

entraînent $d'_i(g(x), g(x)) \leq 2b/3 \leq t$. Considérons

$$(f(x), f(y)) = (f(x), g(x)) \circ (g(x), g(y)) \circ (g(y), f(y)).$$

Nous avons

$$d'_i(g(y), f(y)) \leq b/3 \leq t/3$$

et, g appartenant à Q',

$$d'_i(g(x), g(y)) \leq b/3 \leq t/3,$$

donc

$$d'_i(g(x), f(y)) \leq 2b/3 \leq t;$$

de plus

$$d'_i(f(x), g(x)) \leq b/3 \leq t/3.$$

Il s'ensuit

$$d'_i(f(x), f(y)) \leq b = d_j(x, y).$$

Ainsi (s', f, s) est bien une application quasi-métrique.

Supposons que $s = (A_j, d_j)_{j \in J}$ soit une structure quasi-métrique sur E, dont la structure quasi-uniforme sous-jacente est $u = ((A_j)_{j \in J}, \phi)$. Désignons par $A(s', s)$ l'ensemble des applications f de E dans E' telles que, pour tout $j \in J$, il existe un $i_j \in I$ vérifiant $f(A_j) \subset A'_{i_j}$. Soient $M_q(u', u)$ l'ensemble des applications quasi-uniformes de u vers u' et M_q l'ensemble des $f \in A(s', s)$ telles que $(u', f, u) \in M_q(u', u)$.

PROPOSITION. *Si J est fini, il existe un quasi-écart sur $A(s', s)$ induisant sur M_q un quasi-écart dont la structure quasi-uniforme sous-jacente est isomorphe à $\mathfrak{Q}(u', u)$.*

PREUVE. Pour tout $j \in J$, considérons le quasi-écart $\mathfrak{D}_j = (D_i^j)_{i \in I}$ (construit ci-dessus) ayant $\mathfrak{Q}(u', \hat{A}_j)$ pour structure quasi-uniforme sous-jacente. Il existe [3] un quasi-écart $\hat{\mathfrak{D}}$ sur X, produit de la famille finie $(\mathfrak{D}_j)_{j \in J}$ de quasi-écarts. On définit une bijection p de $A(s', s)$ sur une partie X' de X en associant à $f \in A(s', s)$ la famille $(f_j)_{j \in J}$ des restrictions f_j de f à $\hat{A}_j$. Soit $\mathfrak{D}$ le quasi-écart sur $A(s', s)$ image par p^{-1} du quasi-écart induit par $\hat{\mathfrak{D}}$ sur X'. Posons $\mathfrak{D} = (D_k)_{k \in K}$ et notons $(B_k)_{k \in K}$ la partition de $A(s', s)$ associée. Nous avons $K \subset I^J$; si $k = (i_j)_{j \in J} \in K$, alors

$$B_k = \{ f \in A(s', s) \mid f(A_j) \subset A'_{i_j} \},$$

$\alpha(D_k)$ est l'ensemble des $(f, g) \in A(s', s) \times A(s', s)$ tels que

$$(f(x), g(x)) \in \alpha(d'_{i_j}) \text{ pour tout } x \in A_j$$

et, si $(f, g) \in \alpha(D_k)$,

$$D_k(f, g) = \sup_{j \in J} (\sup_{x \in A_j} d'_{i_j}(f(x), g(x))) .$$

L'axiome 3 des quasi-écarts est vérifié en prenant $a_k = \inf_{j \in J} a_{i_j}$, où a_{i_j} est un élément associé à i_j par cet axiome appliqué à s'. Puisque $\mathfrak{Q}(u', A_j)$ est sous-jacente à $\mathfrak{D}_j$ pour tout $j \in J$, la structure quasi-uniforme sous-jacente à $\hat{\mathfrak{D}}$ est la structure quasi-uniforme produit de $(\mathfrak{Q}(u', A_j))_{j \in J}$. Par suite la structure quasi-uniforme sous-jacente à $\mathfrak{D}$ induit sur M_q une structure quasi-uniforme qui, d'après la construction de $\mathfrak{Q}(u', u)$, est l'image de $\mathfrak{Q}(u', u)$ par la bijection associant f à $(u', f, u) \in M_q(u', u)$.

Bibliographie.

1. C. EHRESMANN, Catégories topologiques, *Indig. Math.* 28, n° 1 (1966).
2. A. BASTIANI, *Topologie, chap. IV (Espaces fonctionnels)*, Cours multigraphié, Amiens, 1969.
3. G. PALIAS, *Sur la catégorie des applications quasi-uniformes* (Thèse de troisième cycle, multigraphiée, Paris 1967).
4. C. EHRESMANN, *Algèbre, 1e partie*, C. D. U., Paris 1968.
5. COOK - FISCHER, Uniform convergence structures, *Math. Ann.* 173 (1967).

Département de Mathématiques,
Faculté des Sciences,
33 rue Saint-Leu, 80 - AMIENS.