CAHIERS DE
TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
CATÉGORIQUES

FRANÇOIS FOLTZ

Sur la domination des catégories

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 12, n° 1 (1971), p. 93-110

<http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1971__12_1_93_0>

CAHIERS DE TOPOLOGIE
ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE

Vol. XII, 1

SUR LA DOMINATION DES CATEGORIES

par François FOLTZ

Introduction.

Le texte suivant constitue la première partie d'un travail sur «la fermeture des catégories dominées».

Soient q un foncteur (pas nécessairement fidèle) vers la catégorie des applications associée à un univers et R un ensemble de q-multimorphismes. On définit les catégories (R, q)-dominées, dont à la fois les catégories q-dominées et les catégories fortement q-dominées sont des cas particuliers. On relie cette notion à celle de (R, q)-produit tensoriel, qui généralise et affine les q-produits tensoriels considérés dans [4]. Le principal résultat est le suivant: Soient ${}^R\mathfrak{F}$ la catégorie des foncteurs (R, q)-dominés et $\bar{R}$ une partie «stable» de R. Si q est saturé, si sa source est à limites inductives et s'il existe des foncteurs (R, q)-produit tensoriel et $(\bar{R}, q)$-produit tensoriel compatibles avec «assez» de limites, le foncteur injection de ${}^{\bar{R}}\mathfrak{F}$ vers ${}^R\mathfrak{F}$ admet un adjoint. Autrement dit, toute catégorie (R, q)-dominée E peut être «universellement» plongée dans une catégorie $(\bar{R}, q)$-dominée $\bar{E}$. Si de plus q est compatible avec les limites inductives, E et $\bar{E}$ ont les mêmes catégories sous-jacentes. Ce résultat permet par exemple d'associer canoniquement à une catégorie q-dominée une catégorie fortement q-dominée.

Ces théorèmes seront utilisés dans la suite du travail: On y montrera que ${}^R\mathfrak{F}$ est ${}^Rt$-hyperdominée [7], où ${}^Rt$ associe à un foncteur (R, q)-dominé sa restriction aux unités. On indiquera ensuite des conditions pour que ${}^R\mathfrak{F}$ soit tensoriellement ${}^Rt$-dominée [7], un produit tensoriel (au sens de la domination) s'identifiant à un $(\delta(R), {}^Rt)$-produit tensoriel, pour une certaine classe $\delta(R)$; si $\bar{R} \subset R$, un $(\delta(\bar{R}), {}^{\bar{R}}t)$-produit tensoriel «est» une $({}^{\bar{R}}\mathfrak{F}, {}^R\mathfrak{F})$-projection. Enfin, sous des hypothèses un peu plus fortes la catégorie ${}^R\mathfrak{F}$ est monoïdale fermée [8].

Notations.

Nous utilisons les notations de [1], [2] et [5]. En particulier une catégorie est souvent notée $C^\cdot$, où C est l'ensemble sous-jacent; $C_0^\cdot$ est l'ensemble de ses unités; l'application source est notée α, l'application but β; la duale de $C^\cdot$ est C^*. Un foncteur constant sur une unité e est représenté par le même symbole e, une transformation naturelle constante sur un élément x est aussi notée x.

On suppose que $\mathfrak{U}$ est un univers contenu dans un univers $\hat{\mathfrak{U}}$ et appartenant à $\hat{\mathfrak{U}}$. Soient $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{F}$ (resp. $\hat{\mathfrak{M}}$ et $\hat{\mathfrak{F}}$) la catégorie pleine des applications et celle des foncteurs associées à $\mathfrak{U}$ (resp. à $\hat{\mathfrak{U}}$). Π et $\amalg$ (resp. $\hat{\Pi}$ et $\hat{\amalg}$) désignent à la fois les foncteurs produit canonique et somme canonique sur $\mathfrak{M}$ et sur $\mathfrak{F}$ (resp. sur $\hat{\mathfrak{M}}$ et sur $\hat{\mathfrak{F}}$).

On suppose donné un foncteur $q = (\mathfrak{M}, \underline{q}, K^\cdot)$ de $K^\cdot$ vers $\mathfrak{M}$, où K appartient à $\hat{\mathfrak{U}}$.

Rappelons qu'une catégorie q-dominée ([1], [5]) est un couple $E = (\varepsilon, C^\cdot)$ d'une catégorie $C^\cdot$ et d'un foncteur ε de $C^\cdot \times C^*$ vers $K^\cdot$ tel que $q.\varepsilon$ soit le foncteur $Hom_{C^\cdot}$. On désigne par $[E]$ le graphe q-dominé sous-jacent à E, c'est-à-dire le couple $(\varepsilon_0, [C^\cdot])$, où $[C^\cdot]$ est le graphe orienté sous-jacent à $C^\cdot$ et ε_0 la restriction de ε à $C_0^\cdot \times C_0^\cdot$.

Si $E = (\varepsilon, C^\cdot)$ et $\bar{E} = (\bar{\varepsilon}, \bar{C}^\cdot)$ sont des catégories q-dominées, on appelle *foncteur q-dominé de E vers $\bar{E}$* un triplet $\bar{v} = (\bar{E}, (\tau, v), E)$, où $v = (\bar{C}^\cdot, \underline{v}, C^\cdot)$ est un foncteur, dit *foncteur sous-jacent à $\bar{v}$*, et où $(\bar{\varepsilon}.(v \Pi v^*), \tau, \varepsilon)$ est une transformation naturelle se projetant par q sur la transformation naturelle canonique de $Hom_{C^\cdot}$ vers $Hom_{\bar{C}^\cdot}.(v \Pi v^*)$ (telle que $q(\tau(e', e))$ soit une restriction de v). Pour simplifier, on pose

$$\bar{v}(e', e) = \tau((e', e)), \quad \text{pour tout } (e', e) \in C_0^\cdot \times C_0^\cdot .$$

Si q est fidèle, $\bar{v}$ est entièrement déterminé par le triplet $(\bar{E}, \underline{v}, E)$, ce qui justifie la notation utilisée dans [5].

On généralise d'une manière analogue la définition des homomorphismes entre graphes orientés q-dominés (donnée dans [5] pour q fidèle). En particulier l'homomorphisme sous-jacent au foncteur q-dominé v est $[\bar{v}] = ([\bar{E}], (\tau, \underline{v}), [E])$.

1. q- multimorphismes.

Soient e une unité de $K^{\cdot}$ et $(e_\nu)_{\nu \in N}$ une famille d'unités de $K^{\cdot}$, où $N \in \mathfrak{U}$. Posons

$$E_\nu = \prod_{\mu \in N - \{\nu\}} \underline{q}(e_\mu) \quad \text{et} \quad \bar{E} = \coprod_{\nu \in N} E_\nu .$$

DEFINITION 1. On appelle *q-multimorphisme de $(e_\nu)_{\nu \in N}$ vers e* une famille $f = (f_y)_{y \in \bar{E}}$ (notée aussi (f_y)) d'éléments de K vérifiant:

1. $\beta(f_y) = e$, pour tout y de $\bar{E}$ et $\alpha(f_{(v,\nu)}) = e_\nu$, pour tout v de E_ν.

2. Si $E = \prod_{\nu \in N} \underline{q}(e_\nu)$, il existe une application $\underline{Q}(f) = (\underline{q}(e), \underline{f}, E)$ telle que, pour tout $(x_\nu)_{\nu \in N}$ et tout ν de N, l'on ait:

$$\underline{f}((x_\nu)_{\nu \in N}) = \underline{q}(f_y)(x_\nu), \quad \text{où } y = ((x_\mu)_{\mu \in N - \{\nu\}}, \nu).$$

On pose $e = \beta(f)$ et $(e_\nu)_{\nu \in N} = \alpha(f)$. Si q est fidèle, f est entièrement déterminé par le triplet $(e, \underline{f}, (e_\nu)_{\nu \in N})$ et $\underline{Q}(f)$ est q-concordante pour $(e, (e_\nu)_{\nu \in N})$ [4]. L'ensemble N est dit *l'ensemble des indices de f*, $\alpha(f)$ la *source de* f et $\beta(f)$ son *but*.

Soient $(N_\mu)_{\mu \in M}$ une partition de N et $\bar{e} = (e_\mu)_{\mu \in M}$ (resp. $\bar{e}_\mu = (e_{\nu_\mu})_{\nu_\mu \in N_\mu}$) une famille d'unités de $K^{\cdot}$. La donnée d'un q-multimorphisme h de source $\bar{e}$ et d'une famille de q-multimorphismes $(g^\mu)_{\mu \in M}$, où $\alpha(g^\mu) = \bar{e}_\mu$ et $\beta(g^\mu) = e_\mu$, permet de définir un q-multimorphisme

$$f = (f_y) = h \cdot (g^\mu)_{\mu \in M}$$

de source $(e_\nu)_{\nu \in N}$, de but $\beta(h)$ et tel que $f_y = h_z \cdot g_t^{\bar{\mu}}$, où

$$t = ((x_{\nu_{\bar{\mu}}})_{\nu_{\bar{\mu}} \in N_{\bar{\mu}} - \{\bar{\nu}\}}, \bar{\nu}) \quad \text{et} \quad z = ((z_\mu)_{\mu \in M - \{\bar{\mu}\}}, \bar{\mu}),$$

si $\bar{\nu} \in N_{\bar{\mu}}$, si $y = ((x_\nu)_{\nu \in N - \{\bar{\nu}\}}, \bar{\nu})$ et si $z_\mu = \underline{Q}(g^\mu)((x_{\nu_\mu})_{\nu_\mu \in N_\mu})$.

Soit $\mathfrak{J}$ un sous-ensemble de $\mathfrak{U}$, contenant un ensemble réduit à un élément et contenant avec un ensemble toutes ses parties. Un ensemble R de q-multimorphismes dont les ensembles d'indices appartiennent à $\mathfrak{J}$ est dit *stable* s'il est stable pour la loi de composition précédente et si la famille à un seul élément (e) appartient à R pour tout $e \in K_0^{\cdot}$. Si $\mathfrak{U} = R$ et si R contient tous les q-multimorphismes, on pose $R = S(q)$.

2. (R, q)-produit tensoriel.

La notion de q-produit tensoriel définie dans [3] et [4] s'étend au cas d'un foncteur q non fidèle. Soit R un ensemble stable de q-multimorphismes. Les catégories $K^{\cdot}$ et $\hat{\coprod}_{N \in \mathcal{J}} (\hat{\prod}_{\nu \in N} K^{\cdot})$ opèrent à droite et à gauche respectivement sur R. Désignons par $T(R)$ (ou $T(q)$, si $R = S(q)$) la catégorie joint par R des deux catégories précédentes. L'application $f \to \underline{Q}(f)$ se prolonge en un foncteur $Q = (\mathfrak{M}, \underline{Q}, T(R))$ admettant q et $\prod_{\nu \in N} . (\hat{\prod}_{\nu \in N} q)$ pour restrictions.

DEFINITION 2. Un *foncteur (R, q)-produits tensoriels* est un adjoint $\otimes$ du foncteur $j = (T(R), \underline{\iota}, K^{\cdot})$. Un j-projecteur (resp. une j-structure libre) associé(e) à $\bar{e}$ est appelé(e) un *(R, q)-produit tensoriel naturalisé* (resp. tensoriel) de $\bar{e}$.

Si R n'est pas précisé, c'est que $R = S(q)$; si R est l'ensemble des q-multimorphismes d'ensembles d'indices finis, on dira que $\otimes$ est un foncteur q-produits tensoriels finis.

PROPOSITION 1. *Si $K^{\cdot}$ est à $\mathfrak{M}_0$-sommes et si q est à structures quasi-quotients, il existe un foncteur q-produits tensoriels.*

PREUVE. Ne faisant pas intervenir la fidélité du foncteur q, la démonstration du théorème d'existence de [4] reste valable. ∇

On dira que $\otimes$ est *associatif* si, pour toute famille de (R, q)-produits tensoriels naturalisés $(g^{\mu})_{\mu \in M}$, où $M \in \mathcal{J}$, et tout (R, q)-produit tensoriel naturalisé h tel que $\alpha(h) = (\beta(g^{\mu}))_{\mu \in M}$, le composé $h . (g^{\mu})_{\mu \in M}$ est encore un (R, q)-produit tensoriel naturalisé.

Soit $\mathcal{J}$ un sous-ensemble de $\mathcal{F}_0$. On dira que $\otimes$ est *compatible avec* les $\mathcal{J}$-limites inductives si sa restriction à $\hat{\prod}_{\nu \in N} K^{\cdot}$ est compatible avec les $\mathcal{J}$-limites inductives pour tout N de $\mathcal{J}$.

REMARQUE. Dans le cas d'un foncteur q non fidèle, les propositions 4 et 3 de [4] ne sont plus valables.

EXEMPLES D'ENSEMBLES R.

a. Supposons que q est à atomes (i.e. si (a, a') est un couple d'unités de $K^{\cdot}$, toute application constante de $\underline{q}(a)$ vers $\underline{q}(a')$ se relève dans $a'.K.a$ de manière unique) et admet un foncteur produits finis Π. A toute famille $a = (a_\nu)_{\nu \leqslant n}$ d'unités de $K^{\cdot}$ est associé un unique q-multimorphisme f^a de source a, de but $\prod_{\nu \leqslant n} a_\nu$ et se projetant sur $\prod_{\nu \leqslant n} \underline{q}(a_\nu)$. Soit R l'ensemble des q-multimorphismes g, d'ensembles d'indices finis, vérifiant $g = k.f^{\alpha(g)}$, avec k appartenant à K. Quand cette décomposition est unique pour tout g de R, le foncteur Π est aussi un foncteur (R, q)-produits tensoriels. C'est le cas par exemple quand q est fidèle.

b. On suppose que R est l'ensemble choisi dans l'exemple précédent et qu'il existe un foncteur $q' = (K^{\cdot}, \underline{q}', K'^{\cdot})$. A un $q.q'$-multimorphisme $g' = (g'_y)$ est associé un q-multimorphisme $\underline{Q}'(g') = (g_y)$, où $g_y = \underline{q}'(g'_y)$. On pourra considérer l'ensemble R' formé des $q.q'$-multimorphismes g' vérifiant $\underline{Q}'(g') \in R$. Par exemple, q (resp. q') pourra être le foncteur qui associe à une application continue (resp. linéaire continue entre espaces vectoriels topologiques de différents types) l'application (resp. continue) sous-jacente.

3. Catégories (R, q)-dominées.

Dans ce paragraphe, nous supposons que $\mathcal{J}$ est l'ensemble des parties finies de l'ensemble des entiers naturels, que $E_0 = (\varepsilon_0, [C])$ est un graphe q-dominé et Σ l'ensemble des suites finies $s = (e_\nu)_{\nu \leqslant n+1}$ de sommets de $[C]$ à plus d'un élément; on pose $a(s) = (\varepsilon_0(e_{\nu+1}, e_\nu))_{\nu \leqslant n}$. Si $E = (\varepsilon, C^{\cdot})$ est une catégorie q-dominée et si $[E] = E_0$, pour tout $s = (e_\nu)_{\nu \leqslant n+1} \in \Sigma$, $n > 1$, notons $\varepsilon^s = (\eta^s_y)$ le q-multimorphisme de source $a(s)$, de but $\varepsilon(e_{n+1}, e_1)$, défini par:

$$\eta^s_y = \varepsilon(x_n. \dots .x_2, e_1), \qquad \text{si } y = ((x_\nu)_{1<\nu \leqslant n}, 1),$$

$$\eta^s_y = \varepsilon(e_{n+1}, x_{n-1}. \dots .x_1), \qquad \text{si } y = ((x_\nu)_{\nu < n}, n),$$

$$\eta^s_y = \varepsilon(x_n. \dots .x_{\mu+1}, x_{\mu-1}. \dots .x_1), \qquad \text{si } y = ((x_\nu)_{\nu<\mu,\ \mu<\nu \leqslant n}, \mu).$$

DEFINITION 3. On dit que la catégorie q-dominée E est *(R, q)-dominée* si ε^s appartient à R pour tout s de Σ.

DEFINITION 4. Supposons que q admet un foncteur produits finis Π s'identifiant à un foncteur (R, q)-produits tensoriels et que les projections dans $\mathfrak{M}$ des (R, q)-produits tensoriels naturalisés correspondants soient des unités. Une catégorie (R, q)-dominée est alors appelée *catégorie fortement q-dominée* [6].

Désignons par Σ' le sous-ensemble de Σ formé des suites à deux ou trois éléments. Si $s = (e_\nu)_{\nu \leqslant n+1}$ appartient à Σ, posons:

$$\alpha(s) = e_1 \quad \text{et} \quad \beta(s) = e_{n+1}.$$

Si $s' = (e'_\nu)_{\nu \leqslant m+1}$ est une autre suite vérifiant $\alpha(s') = \beta(s)$, notons (s', s) la suite $(\beta(s'), \beta(s), \alpha(s))$ et $s' + s$ la suite $(e''_\mu)_{\mu \leqslant n+m+1}$ définie par:

$$e''_\nu = e_\nu \ \text{pour} \ \nu \leqslant n+1 \quad \text{et} \quad e''_{\nu+n} = e'_\nu \ \text{pour} \ \nu \leqslant m+1.$$

Supposons qu'il existe un foncteur (R, q)-produits tensoriels $\otimes$; pour $s \in \Sigma$ notons f^s le (R, q)-produit tensoriel naturalisé canonique de source $a(s)$.

Si $E = (\varepsilon, C^\cdot)$ est une catégorie q-dominée et $[E] = E_0$, définissons k^s par: $\varepsilon^s = k^s . f^s$ si s a plus de deux éléments, $k^s = \varepsilon(e', e)$ si $s = (e', e)$. La famille $(k^s)_{s \in \Sigma}$ vérifie les conditions suivantes:

(1) $k^s \in \varepsilon_0(e_{n+1}, e_1) . K . \bigotimes\limits_{\nu \leqslant n} \varepsilon_0(e_{\nu+1}, e_\nu)$, si $s = (e_\nu)_{\nu \leqslant n+1}$.

(2) $k^{(e,e)} \in K_0^\cdot$ et k^s a f^s_y pour inverse à droite si $s = (e', e', e)$ et si $y = (e', 2)$ (resp. si $s = (e', e, e)$ et $y = (e, 1)$).

(3) $k^{(s_3, s_1)} . (k^{s_3} \otimes k^{s_1}) . \gamma^{(s_3, s_1)} = k^{(s_4, s_2)} . (k^{s_4} \otimes k^{s_2}) . \gamma^{(s_4, s_2)}$,

où $s_4 + s_2 = s_3 + s_1$ et où $\gamma^{(s', s)}$ désigne le morphisme canonique de $\beta(f^{s+s'})$ vers $\beta(f^s) \otimes \beta(f^{s'})$.

Les deux membres de (3) sont égaux à $k^{s_3 + s_1}$; la famille $(k^s)_{s \in \Sigma'}$ vérifie la condition (3'), à savoir la condition (3) dans le cas où s_1 et s_4 (resp. s_3 et s_2) ont trois éléments (resp. deux éléments).

Soient $\bar{v}$ un foncteur q-dominé de E vers une catégorie (R, q)-dominée $\bar{E} = (\bar{\varepsilon}, \bar{C}^\cdot)$ et $(\bar{k}_{\bar{s}})_{\bar{s} \in \bar{\Sigma}}$ la famille de morphismes associée à $\bar{E}$. Si $\bar{v}_0 = [\bar{v}]$ et si $\underline{v}$ est la surjection sous-jacente à $\bar{v}$, on a la relation:

(4) $\bar{k}^{\bar{s}} . \bigotimes\limits_{\nu \leqslant n} \bar{v}_0(e_{\nu+1}, e_\nu) = \bar{v}_0(e_{n+1}, e_1) . k^s$, où $\bar{s} = (\underline{v}(e_\nu))_{\nu \leqslant n+1}$.

Inversement, soit $\bar{v}_0$ un homomorphisme de graphes orientés q-dominés de $E_0 = (\varepsilon_0, [C])$ vers $[\bar{E}]$, où $\bar{E}$ est une catégorie (R, q)-dominée. C_0 désigne l'ensemble des sommets de $[C]$.

PROPOSITION 2. *Une famille* $(k^s)_{s\in\Sigma'}$ *de morphismes de* K *vérifiant les conditions* (1), (2) *et* (3') *détermine une catégorie* (R, q)*-dominée* $E = (\varepsilon, C^\cdot)$ *telle que* $[E] = E_0$. *Si la condition* (4) *est vérifiée, il existe un unique foncteur q-dominé* $\bar{v}$ *de* E *vers* $\bar{E}$ *tel que* $[\bar{v}] = \bar{v}_0$.

PREUVE. Il existe un système multiplicatif $C^\cdot$ défini par:

$$x_2 . x_1 \text{ est défini et égal à } \underline{Q}(k^s . f^s)(x_2, x_1) \text{ si et seulement si}$$
$$\alpha(x_2) = \beta(x_1) \text{ et si } s = (\beta(x_2), \beta(x_1), \alpha(x_1)).$$

On a alors

$$\beta(x_2 . x_1) = \beta(x_2) \quad \text{et} \quad \alpha(x_2 . x_1) = \alpha(x_1).$$

La condition (2) assure que C_0 est formé d'unités, tandis que (3') assure que $C^\cdot$ est associatif. Ainsi $C^\cdot$ est une catégorie.

A tout sommet e de $[C]$ est associé l'homomorphisme de graphes orientés $([K^\cdot], \underline{\varepsilon}_e, [C])$ (resp. $([K^\cdot], {}_e\underline{\varepsilon}, [C])$) défini par:

$$\underline{\varepsilon}_e(x) = \eta^s_{(x,1)} \quad \text{si} \quad s = (\beta(x), \alpha(x), e)$$
$$(\text{resp. } {}_e\underline{\varepsilon}(x) = \eta^s_{(x,2)} \quad \text{si} \quad s = (e, \beta(x), \alpha(x))).$$

Posons:

$$s_1 = (e_3, e_2, e_1), \quad s_4 = (e_4, e_3, e_2), \quad s_3 = (e_4, e_3) \text{ et } s_2 = (e_2, e_1)$$

et multiplions chaque membre de (3') par $f^{s_3+s_1}_{((y,x),1)}$. On obtient

$$\eta^{(s_3,s_1)}_{(y,1)} . \eta^{s_1}_{(x,1)} = \eta^{(s_4,s_2)}_{(u,1)}, \text{ où } \eta^s = k^s . f^s \text{ et } u = \underline{Q}(\eta^{s_4})((y,x)).$$

De plus la condition (2) entraîne que $\underline{\varepsilon}_e(\alpha(x))$ (resp. $\underline{\varepsilon}_e(\beta(x))$) est égal à $\varepsilon_0(\alpha(x), e)$ (resp. $\varepsilon_0(\beta(x), e)$). Ainsi $\varepsilon_e = (K^\cdot, \underline{\varepsilon}_e, C^\cdot)$ est un foncteur. De même ${}_e\varepsilon = (K^\cdot, {}_e\underline{\varepsilon}, C^*)$ est un foncteur. Enfin le composé de ces foncteurs avec q est une restriction du foncteur $Hom_{C^\cdot}$.

Multiplions les deux membres de (3') par $f^{s_3+s_1}_{((y,z),2)}$. On trouve

$$\eta^{(s_3,s_1)}_{(y,1)} . \eta^{s_1}_{(z,2)} = \eta^{(s_4,s_2)}_{(z,2)} . \eta^{s_4}_{(y,1)},$$

c'est-à-dire

$$\underline{\varepsilon}_{e_1}(y) . {}_{e_3}\underline{\varepsilon}(z) = {}_{e_4}\underline{\varepsilon}(z) . \underline{\varepsilon}_{e_2}(y) = \varepsilon(y, z).$$

On a donc un foncteur $(K^{\cdot}, \varepsilon, C^{\cdot} \times C^{*})$. Ainsi $E = (\varepsilon, C^{\cdot})$ est une catégorie (R, q)-dominée.

Si la relation (4) est vérifiée, la surjection $\underline{v}$ définit un foncteur $(\bar{C}^{\cdot}, \underline{v}, C^{\cdot})$. De plus

$$\bar{v}_0(e_4, e_1).k^{(s_3, s_1)}.(k^{s_3} \otimes k^{s_1}).\gamma^{(s_3, s_1)} =$$

$$\bar{k}^{(\bar{s}_3, \bar{s}_1)}.(\bar{v}_0(e_4, e_3) \otimes \bar{v}_0(e_3, e_1)).(k^{s_3} \otimes k^{s_1}).\gamma^{(s_3, s_1)} =$$

$$\bar{k}^{(\bar{s}_3, \bar{s}_1)}.(\bar{v}_0(e_4, e_3) \otimes \bar{k}^{\bar{s}_1}.\underset{\nu < 3}{\otimes} \bar{v}_0(e_{\nu+1}, e_\nu))).\gamma^{(s_3, s_1)} =$$

$$\bar{k}^{(\bar{s}_3, \bar{s}_1)}.(\bar{k}^{\bar{s}_3} \otimes \bar{k}^{\bar{s}_1}).\bar{\gamma}^{(\bar{s}_3, \bar{s}_1)}.\underset{\nu \leq 3}{\otimes} \bar{v}_0(e_{\nu+1}, e_\nu),$$

où l'indice «-» indique qu'il s'agit d'éléments analogues à ceux définis pour E, mais relatifs à $\bar{E}$. En multipliant par $f^{s_3+s_1}_{((y,z),2)}$, l'on a

$$\bar{\varepsilon}(\underline{v}(y), \underline{v}(z)).\bar{v}_0(e_3, e_2) = \bar{v}_0(e_4, e_1).\varepsilon(y, z).$$

Ainsi la famille $(\bar{v}_0(e', e))_{(e', e) \in C_0 \times C_0}$ définit un foncteur q-dominé de E vers $\bar{E}$. ∇

REMARQUE. Si $E = (\varepsilon, \langle C \rangle)$ est une quasi-catégorie q-dominée, on définit comme précédemment une famille de q-multimorphismes $(\varepsilon^s)_{s \in \Sigma}$; E est (R, q)-dominée si ε^s appartient à R pour tout s. Si l'on a un foncteur (R, q)-produits tensoriels, la famille $k = (k^s)_{s \in \Sigma}$ vérifie les conditions (1) et (3), et un quasi-foncteur q-dominé vers une autre quasi-catégorie q-dominée vérifie la condition (4). De plus la proposition 2, où la condition (2) est supprimée, reste valable pour les quasi-foncteurs. Par suite, le théorème 2 de [5] est encore exact quand il s'agit de quasi-catégories (R, q)-dominées, même si q n'est pas fidèle.

4. $({}^{\bar{R}}\mathcal{F}, {}^{R}\mathcal{F})$-projections.

Désignons par ${}^{R}\mathcal{F}$ la sous-catégorie pleine de ${}^{q}\mathcal{F}$ ayant pour objets les catégories (R, q)-dominées; un élément de ${}^{R}\mathcal{F}$ est dit *foncteur (R, q)-dominé*.

Soit $\bar{R}$ un sous-ensemble de R, qui soit un ensemble stable de q-multimorphismes. La catégorie ${}^{\bar{R}}\mathcal{F}$ est une sous-catégorie pleine de ${}^{R}\mathcal{F}$; nous allons donner des conditions pour que ${}^{R}\mathcal{F}$ soit à ${}^{\bar{R}}\mathcal{F}$-projections.

Soit $E = (\varepsilon, C^{\cdot})$ une catégorie (R, q)-dominée.

PROPOSITION 3. *Supposons que q est saturé, que $K^{\cdot}$ est à $\mathcal{F}_0$-limites inductives, qu'il existe un foncteur (R, q)- (resp. $(\bar{R}, q)$-) produits tensoriels associatif $\otimes$ (resp. $\bar{\otimes}$) et que $\otimes$ est compatible avec les limites inductives. Il existe un foncteur (R, q)-dominé $\bar{v}$ de source E vérifiant:*

1. *Pour toute suite $s = (e_\nu)_{\nu \leqslant n+1}$ de Σ, le q-multimorphisme $\bar{v}(e_{n+1}, e_1) . \varepsilon^s$ appartient à $\bar{R}$.*

2. *Tout foncteur (R, q)-dominé $\bar{w}$ de source E et de but une catégorie $(\bar{R}, q)$-dominée s'écrit de manière unique sous la forme $\bar{w} = \bar{w}' . \bar{v}$.*

PREUVE. Si $a = (a_\nu)_{\nu \leqslant n}$ est une famille d'unités de $K^{\cdot}$, désignons par f^a (resp. $\bar{f}^a$) le (R, q)- (resp. $(\bar{R}, q)$-) produit tensoriel naturalisé canonique de source a et par j_a l'unique morphisme vérifiant $j^a . f^a = \bar{f}^a$. Il est clair que j^a est un épimorphisme. Si $a_\nu = \varepsilon(e_{\nu+1}, e_\nu)$ et si $s = (e_\nu)_{\nu \leqslant n+1}$, posons $f^a = f^s$ (resp. $\bar{f}^a = \bar{f}^s$ et $j^a = j^s$). Soit $\Sigma(e', e)$ l'ensemble des suites s de Σ telles que $\alpha(s) = e$ et $\beta(s) = e'$. On définit une catégorie $I^{\cdot}(e', e)$ comme suit:

a. $I(e', e) - (I(e', e))_0^{\cdot} = \coprod_{i=1,2} (\Sigma(e', e) - \{(e', e)\})$.

b. $(s, 3) = \alpha((s, 1)) = \alpha((s, 2))$, pour $s \in \Sigma(e', e) - \{(e', e)\}$ et $(e', e) = \beta((s, 1)) = \beta((s', 1))$, pour tout couple de suites de $\Sigma(e', e)$. Posons $\beta((s, 2)) = s$.

Il existe un foncteur $\phi_{(e', e)}$ de $I^{\cdot}(e', e)$ vers $K^{\cdot}$ tel que

$$\underline{\phi}_{(e', e)}((s, 1)) = k^s, \quad \underline{\phi}_{(e', e)}((s, 2)) = j^s.$$

Soit $\psi_{(e', e)} = (\bar{\varepsilon}(e', e), \tau, \phi_{(e', e)})$ une limite inductive naturalisée dans $K^{\cdot}$. Comme q est saturé, on peut toujours supposer que

$$\underline{q}(\bar{\varepsilon}(e', e)) \cap \underline{q}(\bar{\varepsilon}(e'_1, e_1)) = \emptyset, \quad \text{si } (e', e) \neq (e'_1, e_1),$$
$$\underline{q}(\tau((e, e)))(e) = e.$$

Il existe alors sur $\bar{C} = \bigcup_{(e', e) \in C_0^{\cdot} \times C_0^{\cdot}} \underline{q}(\bar{\varepsilon}(e', e))$ une structure de graphe orienté q-dominé $(\bar{\varepsilon}, [\bar{C}])$, où $\alpha(x) = e$ et $\beta(x) = e'$ pour tout x de $\underline{q}(\bar{\varepsilon}(e', e))$. On a $C_0 = C_0^{\cdot}$.

Montrons qu'à toute suite s est associé un morphisme $\bar{k}^s$ de source

$\underset{\nu\leqslant n}{\otimes}\ \bar{\varepsilon}(e_{\nu+1}, e_\nu)$ et de but $\bar{\varepsilon}(e_{n+1}, e_1)$. Le foncteur $\otimes$ étant compatible avec les limites inductives, la transformation naturelle

$$\Psi = \underset{\nu\leqslant n}{\otimes} \cdot \underset{\nu\leqslant n}{\hat{\Pi}}\ \psi_{(e_{\nu+1}, e_\nu)}$$

est une limite inductive naturalisée dans $K^{\cdot}$ du foncteur

$$\Phi = \underset{\nu\leqslant n}{\otimes} \cdot \underset{\nu\leqslant n}{\hat{\Pi}}\ \phi_{(e_{\nu+1}, e_\nu)} \cdot$$

Définissons une transformation naturelle $\bar{\Psi} = (\bar{\varepsilon}(e', e), \sigma, \Phi)$, dont le but est un foncteur constant. Soit $s_\nu = (e^\nu_\mu)_{\mu\leqslant m(\nu)+1}$ une suite élément de $\Sigma(e_{\nu+1}, e_\nu)$, et soit $\bar{s} = (e_\delta)_{\delta\leqslant m+1}$ la somme des suites s_ν, où $\nu \leqslant n$. Posons

$$a^\nu_\mu = \varepsilon(e^\nu_{\mu+1}, e^\nu_\mu) \quad \text{et} \quad a_\delta = \varepsilon(e_{\delta+1}, e_\delta).$$

Il existe des isomorphismes canoniques

$$\gamma \text{ de } \underset{\nu\leqslant n}{\otimes}\Big(\underset{\mu\leqslant m(\nu)}{\otimes} a^\nu_\mu\Big) \text{ vers } \underset{\delta\leqslant m}{\otimes} a_\delta\,,$$

$$\bar{\gamma} \text{ de } \underset{\nu\leqslant n}{\bar{\otimes}}\Big(\underset{\mu\leqslant m(\nu)}{\bar{\otimes}} a^\nu_\mu\Big) \text{ vers } \underset{\delta\leqslant m}{\bar{\otimes}} a_\delta\,.$$

Si $\bar{a} = (\underset{\mu\leqslant m(\nu)}{\bar{\otimes}} a^\nu_\mu)_{\nu\leqslant n}$, posons $g^{\bar{a}} = \bar{\gamma}\cdot j^{\bar{a}}$. Les hypothèses entraînent l'égalité

$$j^{\bar{s}}\cdot\gamma = g^{\bar{a}}\cdot \underset{\nu\leqslant n}{\otimes} j^{s_\nu}\,.$$

Comme E est une catégorie (R, q)-dominée, on a la relation :

$$k^{\bar{s}}\cdot\gamma = k^s\cdot \underset{\nu\leqslant n}{\otimes} k^{s_\nu}\,.$$

Si $t = \tau(e', e)$, on a aussi $t\cdot k^{\bar{s}} = \tau(\bar{s})\cdot j^{\bar{s}}$, c'est-à-dire

$$(t\cdot k^s)\cdot \underset{\nu\leqslant n}{\otimes} k^{s_\nu} = (\tau(\bar{s})\cdot g^{\bar{a}})\cdot \underset{\nu\leqslant n}{\otimes} j^{s_\nu}\,.$$

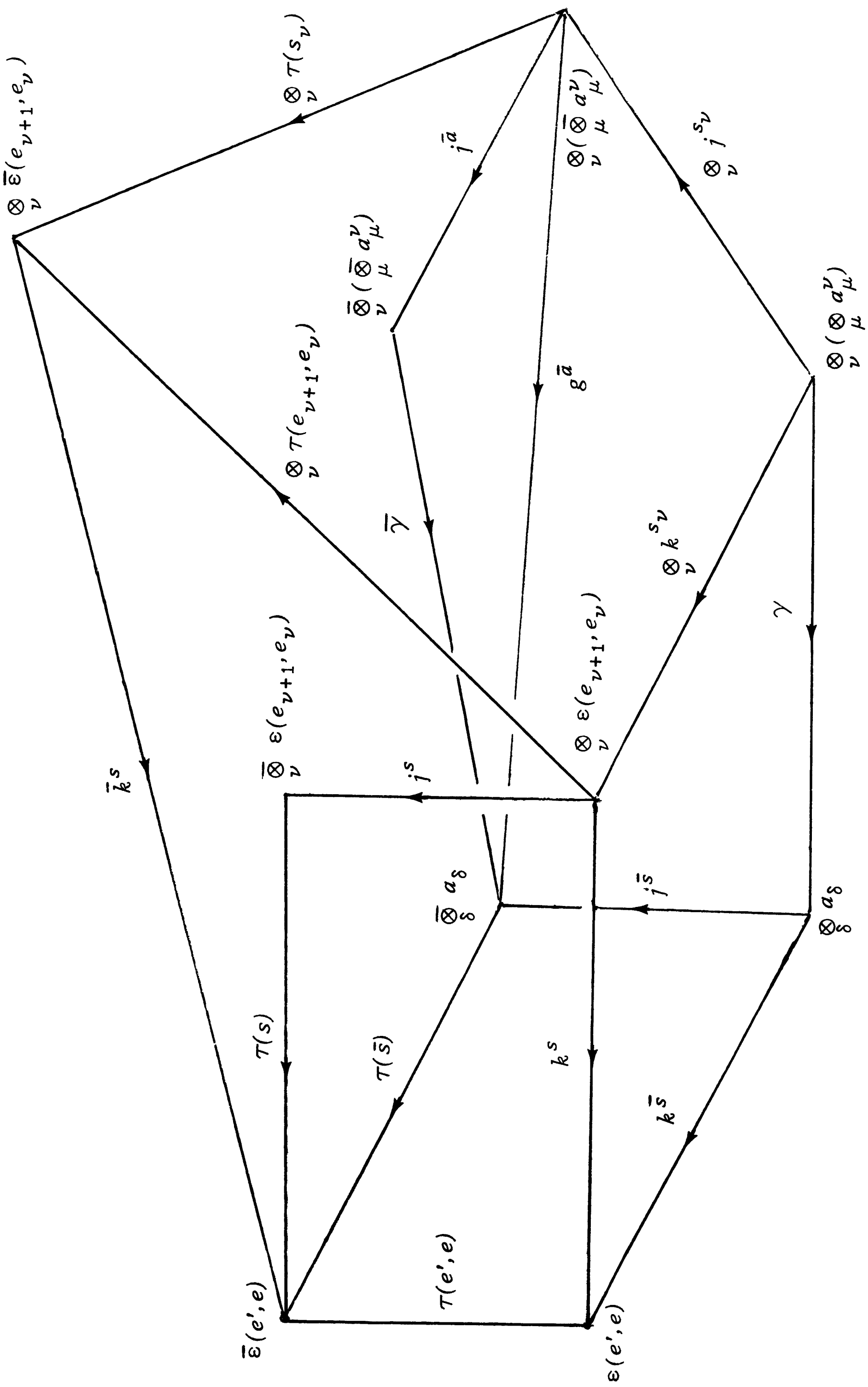
Alors $\bar{\Psi}$ est défini par les équations:

$$\sigma((s_\nu)_{\nu\leqslant n}) = \tau(\bar{s})\cdot g^{\bar{a}}, \quad \sigma(((e_{\nu+1}, e_\nu))_{\nu\leqslant n}) = t\cdot k^s.$$

On posera $\bar{k}^s = \lim_\Psi \bar{\Psi}$.

Montrons que la famille $(\bar{k}^s)_{s\in\Sigma}$ vérifie les conditions de la proposition 2.

α. *Vérifions la condition* (2). Supposons que s (resp. s_1) soit la suite (e', e, e) (resp. (e, e)). Posons



$\bigotimes_\nu \bar\varepsilon(e_{\nu+1}, e_\nu)$
$\bigotimes_\nu T(s_\nu)$
$j^{\bar a}$
$\bigotimes_\nu(\bar\bigotimes_\mu a^\nu_\mu)$
$\bigotimes_\nu j^{s_\nu}$
$\bar\bigotimes_\nu(\bar\bigotimes_\mu a^\nu_\mu)$
$\bigotimes_\nu(\bigotimes_\mu a^\nu_\mu)$
$\bigotimes_\nu T(e_{\nu+1}, e_\nu)$
$g^{\bar a}$
$\bar\gamma$
$\bigotimes_\nu k^{s_\nu}$
γ
$\bar\bigotimes_\nu \varepsilon(e_{\nu+1}, e_\nu)$
$\bigotimes_\nu \varepsilon(e_{\nu+1}, e_\nu)$
$\bar k^s$
j^s
$\bar\bigotimes_\delta a_\delta$
$j^{\bar s}$
$\bigotimes_\delta a_\delta$
$T(s)$
$T(\bar s)$
k^s
$k^{\bar s}$
$T(e', e)$
$\bar\varepsilon(e', e)$
$\varepsilon(e', e)$

$$\bar{c} = (\bar{\bigotimes_{\mu \leqslant m(2)}} a^2_\mu,\ \varepsilon(e,e)),\quad c \doteq (\bigotimes_{\mu \leqslant m(2)} a^2_\mu,\ \varepsilon(e,e)),$$
$$\hat{c} = (\bar{\varepsilon}(e',e),\ \bar{\varepsilon}(e,e)).$$

On a une transformation naturelle $\tilde{\psi} = (\beta(f^{\hat{c}}), \tilde{\sigma}, \phi_{(e',e)})$, dont le but est un foncteur constant et qui est définie par:

$$\tilde{\sigma}((e',e)) = (\tau((e',e)) \otimes \tau((e,e))) . f^s_{(e,1)},$$
$$\tilde{\sigma}(s_2) = (\tau(s_2) \otimes \tau((e,e))) . f^{\bar{c}}_{(e,1)} .$$

Il est clair que $f^{\hat{c}}_{(e,1)} = \lim_{\psi_{(e',e)}} \tilde{\psi}$. Mais k^s est un inverse à gauche de $f^s_{(e,1)}$. De même, si $s' = (e^2_2, e, e)$, le morphisme $k^{s'}$ est inverse à gauche de $f^{s'}_{(e,1)}$. Comme $\otimes$ est associatif, $k^{s'}$ induit un inverse à gauche l de $\gamma . f^c_{(e,1)}$. De plus l vérifie la relation $k^{s_2} . l = k^{\bar{s}}$, $\bar{s} = s_2 + s_1$. Par suite

$$\tau(s_2) . j^{s_2} = \tau(s_2) . j^{s_2} . l . \gamma . f^c_{(e,1)} = \tau(\bar{s}) . j^{\bar{s}} . \gamma . f^c_{(e,1)} =$$
$$= \tau(\bar{s}) . g^{\bar{a}} . f^{\bar{c}}_{(e,1)} . j^{s_2} .$$

Comme j^{s_2} est un épimorphisme,

$$\tau(s_2) = \tau(\bar{s}) . g^{\bar{a}} . f^{\bar{c}}_{(e,1)} = \bar{k}^s . (\tau(s_2) \otimes \tau((e,e))) . f^{\bar{c}}_{(e,1)} =$$
$$= \bar{k}^s . f^{\hat{c}}_{(e,1)} . \tau(s_2) .$$

Ainsi $\bar{k}^s$ est bien un inverse à gauche de $f^{\hat{c}}_{(e,1)}$.

β. *Vérifions la condition* (3). On suppose que s est la suite (e', e_2, e). Soit $s(\nu,\mu) = (e^{(\nu,\mu)}_\eta)_{\eta \leqslant \rho(\nu,\mu)+1}$ une suite de $\Sigma(e^\nu_{\mu+1}, e^\nu_\mu)$; notons $\tilde{s}_\nu = (e^\nu_\rho)_{\rho \leqslant \tilde{\rho}(\nu)+1}$ la somme des suites $s(\nu,\mu)$, où ν est fixé et où $\mu \leqslant m(\nu)+1$; soit $\tilde{s} = (e_\iota)_{\iota \leqslant \tilde{\rho}+1}$ la suite $\tilde{s}_2 + \tilde{s}_1$. Posons

$$b^{(\nu,\mu)}_\eta = \varepsilon(e^{(\nu,\mu)}_{\eta+1}, e^{(\nu,\mu)}_\eta),\quad t(\nu,\mu) = \tau((e^\nu_{\mu+1}, e^\nu_\mu))$$
$$\text{et}\quad \bar{a}^\nu_\mu = \bar{\varepsilon}(e^\nu_{\mu+1}, e^\nu_\mu).$$

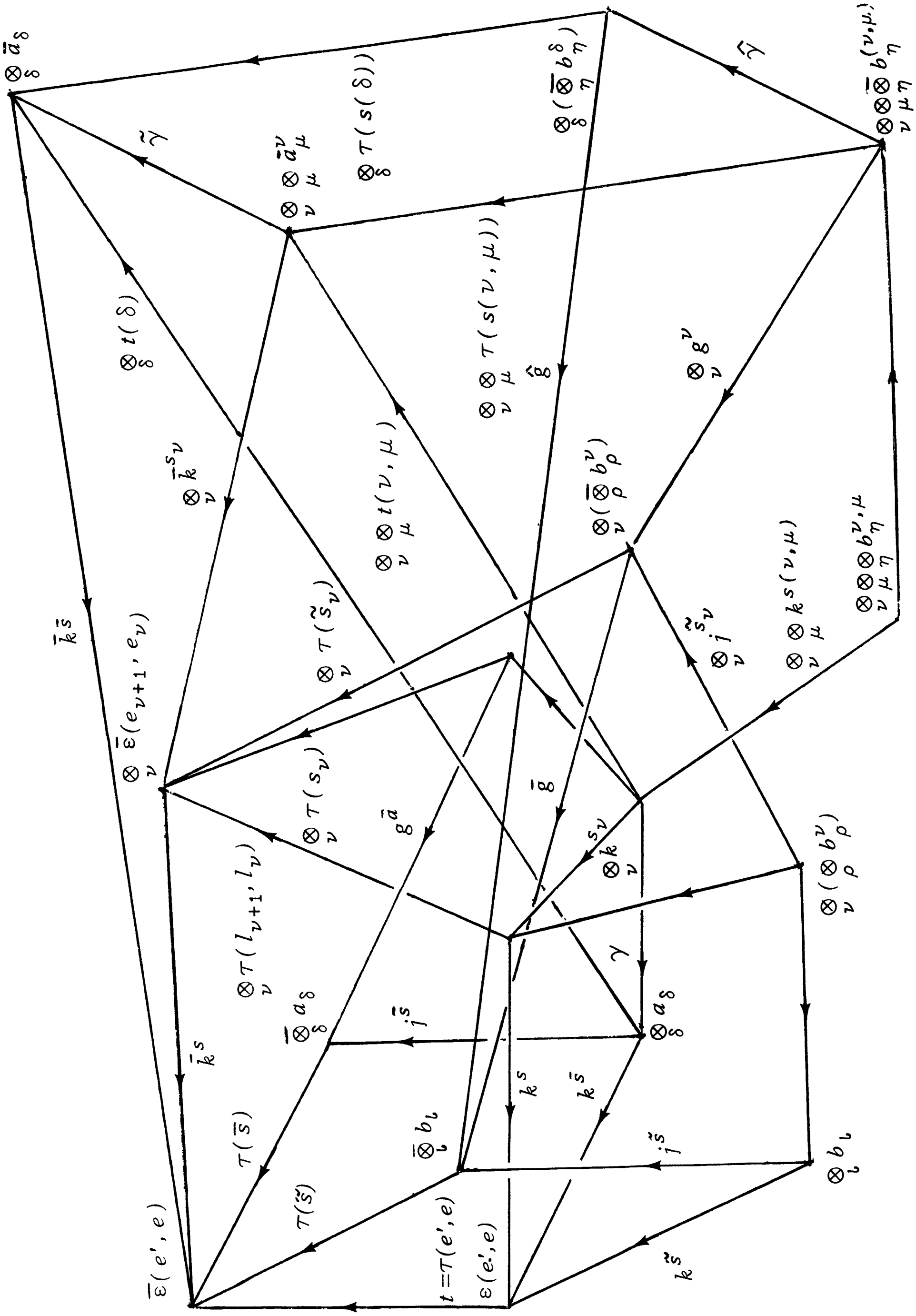
On définit de même b^ν_ρ et b_ι. Si $\delta = \mu + \sum_{\bar{\nu}<\nu} m(\bar{\nu})$, on posera

$$s(\delta) = s(\nu,\mu),\quad b^\delta_\eta = b^{(\nu,\mu)}_\eta,\quad t(\delta) = t(\nu,\mu),\quad \bar{a}_\delta = \bar{a}^\nu_\mu .$$

On a des isomorphismes canoniques

$$\tilde{\gamma} = \bigotimes_\nu(\bigotimes_\mu \bar{a}^\nu_\mu) \to \bigotimes_\delta \bar{a}_\delta,\quad \hat{\gamma} = \bigotimes_\nu(\bigotimes_\mu(\bar{\bigotimes_\eta} b^{(\nu,\mu)}_\eta)) \to \bigotimes_\delta(\bar{\bigotimes_\eta} b^\delta_\eta),$$

ainsi que des morphismes canoniques:



$\bigotimes_\delta \bar a_\delta$
$\bigotimes_\nu \bigotimes_\mu \bar a^\nu_\mu$
$\bigotimes_\nu \bigotimes_\mu \bigotimes_\eta \bar b^{(\nu,\mu)}_\eta$
$\bigotimes_\delta(\bar\bigotimes_\eta b^\delta_\eta)$
$\bigotimes_\delta \tau(s(\delta))$
$\hat\gamma$
$\tilde\gamma$
$\bigotimes_\nu \bigotimes_\mu \tau(s(\nu,\mu))$
$\hat g$
$\bigotimes_\nu g^\nu$
$\bigotimes_\delta t(\delta)$
$\bigotimes_\nu \bar k^{s\nu}$
$\bigotimes_\nu \bigotimes_\mu t(\nu,\mu)$
$\bigotimes_\nu(\bar\bigotimes_\rho b^\nu_\rho)$
$\bigotimes_\nu \bigotimes_\mu \bigotimes_\eta b^{\nu,\mu}_\eta$
$\bigotimes_\nu \bigotimes_\mu k^{s(\nu,\mu)}$
$\bigotimes_\nu j^{\tilde s\nu}$
$\bar k^{\bar s}$
$\bigotimes_\nu \tau(\tilde s_\nu)$
$\bigotimes_\nu \bar\varepsilon(e_{\nu+1},e_\nu)$
$\bigotimes_\nu \tau(s_\nu)$
$g^{\bar a}$
$\bar g$
$\bigotimes_\nu k^{s\nu}$
$\bigotimes_\nu(\bigotimes_\rho b^\nu_\rho)$
$\bigotimes_\nu \tau(l_{\nu+1},l_\nu)$
γ
$\bar\bigotimes_\delta a_\delta$
$j^{\bar s}$
$\bigotimes_\delta a_\delta$
$\bar k^s$
k^s
$k^{\bar s}$
$\tau(\bar s)$
$\bar\bigotimes_\iota b_\iota$
$j^{\tilde s}$
$\bigotimes_\iota b_\iota$
$\tau(\tilde s)$
$t=\tau(e',e)$
$\varepsilon(e',e)$
$\bar\varepsilon(e',e)$
$k^{\tilde s}$

$$\hat{g}: \underset{\delta}{\otimes}(\underset{\eta}{\bar{\otimes}} b_\eta^\delta) \to \underset{\iota}{\bar{\otimes}} b_\iota, \quad \bar{g}: \underset{\nu}{\otimes}(\underset{\rho}{\bar{\otimes}} b_\rho^\nu) \to \underset{\iota}{\bar{\otimes}} b_\iota, \quad g^\nu: \underset{\mu}{\otimes}(\underset{\eta}{\bar{\otimes}} b_\eta^{(\nu,\mu)}) \to \underset{\rho}{\bar{\otimes}} b_\rho^\nu.$$

Ces morphismes vérifient les égalités suivantes:

$$\tilde{\gamma}\cdot \underset{\nu}{\otimes}(\underset{\mu}{\otimes}\tau(s(\nu,\mu))) = \underset{\delta}{\otimes}\tau(s(\delta)).\hat{\gamma},$$

$$\tilde{\gamma}\cdot\underset{\nu}{\otimes}(\underset{\mu}{\otimes} t(\nu,\mu)) = \underset{\delta}{\otimes} t(\delta).\gamma, \quad \bar{g}\cdot\underset{\nu}{\otimes} g^\nu = \hat{g}.\hat{\gamma}.$$

Par suite on a:

$$\bar{k}^{\bar{s}}.\tilde{\gamma}.\underset{\nu}{\otimes}(\underset{\mu}{\otimes} t(\nu,\mu)) = \bar{k}^{\bar{s}}.(\underset{\delta}{\otimes} t(\delta)).\gamma = t.k^{\bar{s}}.\gamma =$$

$$= \bar{k}^s.\underset{\nu}{\otimes}(\tau(s_\nu).j^{s_\nu}) = \bar{k}^s.\underset{\nu}{\otimes}(\bar{k}^{s_\nu}).\underset{\nu}{\otimes}(\underset{\mu}{\otimes} t(\nu,\mu)),$$

ainsi que

$$\bar{k}^{\bar{s}}.\tilde{\gamma}.\underset{\nu}{\otimes}(\underset{\mu}{\otimes}\tau(s(\nu,\mu))) = \bar{k}^{\bar{s}}.\underset{\delta}{\otimes}\tau(s(\delta)).\hat{\gamma} =$$

$$= \tau(\tilde{s}).\hat{g}.\hat{\gamma} = \tau(\tilde{s}).\bar{g}.\underset{\nu}{\otimes} g^\nu = \bar{k}^s.\underset{\nu}{\otimes}(\tau(\tilde{s}_\nu).g^\nu) =$$

$$= \bar{k}^s.\underset{\nu}{\otimes}(\bar{k}^{s_\nu}).\underset{\nu}{\otimes}(\underset{\mu}{\otimes}\tau(s(\nu,\mu))).$$

Or

$$\Psi_\nu = \underset{\mu\leqslant m(\nu)}{\otimes}.\underset{\mu\leqslant m(\nu)}{\hat{\Pi}}\psi(e^\nu_{\mu+1}, e^\nu_\mu)$$

est une limite inductive naturalisée. Donc $\underset{\nu\leqslant 2}{\otimes}.\Psi_2\hat{\Pi}\Psi_1$ en est aussi une. En multipliant cette dernière par les deux transformations naturelles constantes définies par $\bar{k}^s.\underset{\nu}{\otimes}(\bar{k}^{s_\nu})$ et $\bar{k}^{\bar{s}}.\tilde{\gamma}$, on obtient le même résultat. Ces deux morphismes sont donc égaux et la condition 3'en résulte.

Ainsi nous obtenons une catégorie (R,q)-dominée $\bar{E} = (\bar{\varepsilon}, \bar{C}^\cdot)$ et, en posant $\bar{v}(e',e) = \tau(e',e)$, nous définissons un foncteur (R,q)-dominé $\bar{v}$ de E vers $\bar{E}$; en effet

$$\tau(e',e).k^s = \bar{k}^s.\underset{\nu\leqslant n}{\otimes}\tau(e_{\nu+1}, e_\nu).$$

Soit $\bar{w}$ un autre foncteur (R,q)-dominé de source E, de but $\hat{E} = (\hat{\varepsilon}, \hat{C}^\cdot)$. On suppose que $\hat{E}$ est une catégorie $(\bar{R},q)$-dominée. Pour tout s de $\Sigma(e',e)$, il existe un unique morphisme l^s vérifiant:

$$\bar{w}(e',e).k^s = l^s.j^s.$$

Soit $\underline{w}$ la surjection sous-jacente à $\bar{w}$, soit $\hat{e}' = \underline{w}(e')$ et $\hat{e} = \underline{w}(e)$. Il existe une transformation naturelle $\chi = (\hat{\varepsilon}(\hat{e}', \hat{e}), \hat{\tau}, \phi_{(e',e)})$, dont le but est un foncteur constant et qui est définie par:

$$\hat{\tau}((e', e)) = \bar{w}(e', e), \quad \hat{\tau}(s) = l^s.$$

Posons $\bar{w}'(e', e) = lim_{\psi_{(e',e)}} \chi$. Soit $(\hat{k}^{\hat{s}})_{\hat{s}\in\hat{\Sigma}}$ (resp. $(\check{k}^{\hat{s}})_{\hat{s}\in\hat{\Sigma}}$) la famille de morphismes attachée à $\hat{E}$ relativement à $\otimes$ (resp. à $\bar{\otimes}$) et soit $\hat{s}$ la suite $(\hat{e}_\nu)_{\nu\leqslant n+1}$, où $\hat{e}_\nu = \underline{w}(e_\nu)$. Avec ces notations, nous avons:

$$\hat{k}^{\hat{s}}. \underset{\nu}{\otimes}(\bar{w}'(e_{\nu+1}, e_\nu). \tau(e_{\nu+1}, e_\nu)) = \hat{k}^{\hat{s}}. \underset{\nu}{\otimes}\bar{w}(e_{\nu+1}, e_\nu) =$$
$$= \bar{w}'(e', e). \bar{k}^s. \underset{\nu}{\otimes}\tau(e_{\nu+1}, e_\nu).$$

La relation $\check{k}^{\hat{s}}. j^{\hat{s}} = \hat{k}^{\hat{s}}$ assure que le morphisme

$$\hat{k}^{\hat{s}}. \underset{\nu}{\otimes}(\bar{w}'(e_{\nu+1}, e_\nu). \tau(s_\nu). j^{s_\nu})$$

s'écrit de manière unique sous la forme $\hat{l}. j^{\bar{a}}. \underset{\nu}{\otimes} j^{s_\nu}$.

En multipliant la relation précédente par $\underset{\nu}{\otimes} k^{s_\nu}$, on trouve

$$\hat{l}. \bar{\gamma}^{-1}. j^{\bar{s}} = l^{\bar{s}}. j^{\bar{s}}, \quad \text{d'où } \hat{l}. j^{\bar{a}} = l^{\bar{s}}. \bar{\gamma}. j^{\bar{a}}.$$

Ainsi

$$\hat{k}^{\hat{s}}. \underset{\nu}{\otimes}(\bar{w}'(e'_{\nu+1}, e_\nu). \tau(s_\nu)) = \bar{w}'(e', e). \bar{k}^s. \underset{\nu}{\otimes}\tau(s_\nu);$$

c'est-à-dire

$$\bar{w}'(e', e). \bar{k}^s = \hat{k}^{\hat{s}}. \underset{\nu}{\otimes}\bar{w}'(e_{\nu+1}, e_\nu).$$

Par suite il existe un foncteur (R, q)-dominé $\bar{w}'$ de source $\bar{E}$, de but $\hat{E}$ et vérifiant $\bar{w} = \bar{w}'. \bar{v}$. La définition de $\bar{w}'(e', e)$ assure que cette décomposition est unique. ∇

COROLLAIRE. *Si q est de plus à $\mathfrak{F}_0$-limites inductives et si $\underline{q}(j^a)$ est une surjection (resp. une bijection) pour toute famille $a = (a_\nu)_{\nu\leqslant n}$ d'unités de $K^\cdot$, la catégorie $\bar{C}^\cdot$ s'identifie à une catégorie quotient de $C^\cdot$ (resp. à $C^\cdot$).*

Si $\bar{\xi}$ est un ordinal limite appartenant à l'univers $\mathfrak{U}$, nous notons $\bar{\xi}^\cdot$ la catégorie associée.

PROPOSITION 4. *Si, avec les hypothèses de la proposition 3, il existe un ordinal limite $\bar{\xi}$ appartenant à $\mathfrak{U}$ tel que $\bar{\otimes}$ soit compatible avec les $\{\bar{\xi}^\cdot\}$-limites inductives, ${}^R\mathfrak{F}$ est à ${}^{\bar{R}}\mathfrak{F}$- projections.*

PREUVE. Soit $E = (\varepsilon, C^{\cdot})$ une catégorie (R, q)-dominée. Définissons par récurrence une famille $(\bar{u}_{(\xi', \xi)})_{\xi \leqslant \xi' \leqslant \bar{\xi}}$ de foncteurs (R, q)-dominés et une famille $(E_\xi)_{\xi \leqslant \bar{\xi}}$ de catégories (R, q)-dominées telles que:

la source de $\bar{u}_{(\xi', \xi)}$ est E_ξ, son but est $E_{\xi'}$ et

$$u_{(\xi'', \xi')} \cdot \bar{u}_{(\xi', \xi)} = \bar{u}_{(\xi'', \xi)}.$$

$E_1 = E.$

E_ξ a les mêmes unités que E et $u_{(\xi', \xi)}(e) = e$ pour $e \in E_0^{\cdot}$.

Posons $E_\xi = (\varepsilon_\xi, C_\xi^{\cdot})$ et désignons par $(k_\xi^s)_{s \in \Sigma}$ la famille des morphismes associée à E_ξ.

a. Si E_ξ est défini, $\bar{u}_{(\xi+1, \xi)}$ est le foncteur défini par la proposition 3.

b. Supposons que ξ est un ordinal limite et que $\bar{u}_{(\xi'', \xi')}$ est défini pour tout $\xi'' < \xi$. Il existe un foncteur ϕ_ξ de $\xi^{\cdot}$ vers ${}^R\mathfrak{F}$ qui associe $\bar{u}_{(\xi'', \xi')}$ à (ξ'', ξ'). Comme $\otimes$ est compatible avec les limites inductives, ce foncteur admet une limite inductive naturalisée dans ${}^q\mathfrak{F}$, notée $\psi_\xi = (E_\xi, \tau, \phi_\xi)$. Les unités de E_ξ s'identifient à celles de E, et $\varepsilon_\xi(e', e)$ est une limite inductive dans $K^{\cdot}$ du foncteur $\phi_\xi(e', e)$, qui à (ξ'', ξ') associe $\bar{u}_{(\xi'', \xi')}(e', e)$; on note $\psi_\xi(e', e)$ la limite inductive naturalisée correspondante.

Par définition, $\bar{u}_{(\xi, \xi')} = \tau(\xi')$ pour tout $\xi' < \xi$.

Montrons que $E_{\bar{\xi}}$ est une catégorie $(\bar{R}, q)$-dominée. Soit une suite $s = (e_\nu)_{\nu \leqslant n+1}$ de $\Sigma(e', e)$. Notons par ϕ' (resp. ϕ_ν) le foncteur $\phi_{\bar{\xi}}(e', e)$ (resp. $\phi_{\bar{\xi}}(e_{\nu+1}, e_\nu)$) et soit

$$\phi = \underset{\nu \leqslant n}{\otimes} \cdot [\phi_\nu]_{\nu \leqslant n}, \quad \bar{\phi} = \underset{\nu \leqslant n}{\bar{\otimes}} \cdot [\phi_\nu]_{\nu \leqslant n}.$$

Posons aussi:

$$\psi' = \psi_{\bar{\xi}}(e', e), \quad \psi_\nu = \psi_{\bar{\xi}}(e_{\nu+1}, e_\nu),$$

$$\psi = \underset{\nu \leqslant n}{\otimes} [\psi_\nu]_{\nu \leqslant n} \quad \text{et} \quad \bar{\psi} = \underset{\nu \leqslant n}{\bar{\otimes}} [\psi_\nu]_{\nu \leqslant n}.$$

Par hypothèse, ψ et $\bar{\psi}$ sont des limites inductives naturalisées dans $K^{\cdot}$. Il existe une transformation naturelle $\zeta = (\bar{\phi}, j, \phi)$, où $j(\xi)$ désigne le morphisme canonique de $\underset{\nu \leqslant n}{\otimes} \varepsilon_\xi(e_{\nu+1}, e_\nu)$ vers $\underset{\nu \leqslant n}{\bar{\otimes}} \varepsilon_\xi(e_{\nu+1}, e_\nu)$, et $j(\bar{\xi}) = Lim_{(\bar{\psi}, \psi)} \zeta$. Il existe une autre transformation naturelle $\chi =$

$= (\Phi', \sigma, \Phi)$, définie par

$$\sigma(\xi) = k^s_\xi \quad \text{et} \quad k^s_\xi = Lim_{(\psi', \psi)} \chi .$$

D'autre part la proposition 3 nous indique qu'il existe un unique morphisme $t(\xi)$ vérifiant

$$t(\xi) . j(\xi) = \Phi'(\xi + 1, \xi) . k^s_\xi .$$

Si $\psi' = (\varepsilon_{\xi}(e', e), \tau', \Phi')$ et si $\xi \leqslant \xi'$, nous avons

$$\tau'(\xi + 1) . t(\xi) . j(\xi) = \tau'(\xi') . k^s_{\xi'} . \Phi(\xi', \xi) =$$
$$= \tau'(\xi' + 1) . t(\xi') . \bar{\Phi}(\xi', \xi) . j(\xi) .$$

Le fait que $j(\xi)$ est un épimorphisme permet de définir une transformation naturelle $\bar{\chi} = (\varepsilon_{\xi}(e', e), \bar{\sigma}, \bar{\Phi})$, où $\bar{\sigma}(\xi) = \tau'(\xi + 1) . t(\xi)$. De plus, la relation $\bar{\chi} \boxminus \zeta = \psi' \boxminus \chi$ assure que $k^s_\xi = \bar{k}^s . j(\bar{\xi})$ si $\bar{k}^s = lim_{\bar{\psi}} \chi$. Ainsi $E_{\bar{\xi}}$ est une catégorie $(\bar{R}, q)$-dominée.

Soit $\check{E}$ une autre catégorie $(\bar{R}, q)$-dominée. D'après la proposition 3, tout foncteur (R, q)-dominé $\bar{w}_\xi$ de E_ξ vers $\check{E}$ s'écrit d'une seule façon sous la forme $\bar{w}_{\xi+1} . \bar{u}_{(\xi+1, \xi)} = \bar{w}_\xi$.

Supposons que ξ est un ordinal limite et que nous avons une transformation naturelle $\theta = (\check{E}, w, \Phi_\xi)$ dans ${}^R\mathfrak{F}$. Il existe un unique foncteur (R, q)-dominé $\bar{w}_\xi$ de E_ξ vers $\check{E}$ vérifiant

$$\bar{w}_\xi . \bar{u}_{(\xi, \xi')} = \bar{w}_{\xi'} , \qquad \text{pour tout } \xi' < \xi .$$

On en déduit que tout foncteur (R, q)-dominé $\bar{w}$ de E vers $\check{E}$ se décompose de manière unique sous la forme $\bar{w}_{\bar{\xi}} . \bar{u}_{(\bar{\xi}, 1)} = \bar{w}$. Ainsi $\bar{u}_{(\bar{\xi}, 1)}$ est un $({}^R\mathfrak{F}, {}^R\mathfrak{F})$-projecteur. ∇

COROLLAIRE. *Si, de plus, les hypothèses du corollaire de la proposition 3 sont vérifiées, la catégorie* $C^{\cdot}_\xi$ *s'identifie à* $C^{\cdot}$.

EXEMPLE. On suppose que q est le foncteur d'oubli vers $\hat{\mathfrak{M}}$ de la catégorie des applications continues (resp. applications quasi-continues, resp. uniformes, etc...) associée à $\hat{\mathfrak{U}}$, que $C^{\cdot}$ est la catégorie des applications continues (resp. quasi-continues, resp. uniformes,...) associée à $\mathfrak{U}$ et que $\bar{\otimes}$ est le foncteur produits finis (exemple a du n°2). Le corollaire assure qu'à tout foncteur «*Hom* interne» on peut associer universellement un foncteur «*Hom* interne» qui est une domination forte.

Bibliographie

1. EHRESMANN C., *Catégories et structures*, Dunod, Paris, 1965.

2. EHRESMANN C., *Algèbre, 1ère partie*, C.D.U., Paris, 1968.

3. EHRESMANN C., Sur l'existence de structures libres et de foncteurs adjoints, *Cahiers Top. et Géo. dif. IX, 1-2*, Dunod (1967).

4. FOLTZ. F., Produit tensoriel généralisé, *Cahiers Top. et Géo. dif. X, 3*, Dunod (1968).

5. FOLTZ F., Sur la catégorie des foncteurs dominés, *Cahiers Top. et Géo-dif. XI, 2*, Dunod (1969).

6. EHRESMANN C., Catégories structurées généralisées, *Cahiers Top. et Géo. dif. X, 2*, Dunod (1968).

7. BASTIANI A., *Topologie 2* (Cours multigraphié), Amiens, 1968.

8. EILENBERG-KELLY, Closed categories, *Proc. Conf. on Categorical Algebra, La Jolla*, Springer 1966.

Département de Mathématiques,
Tours 45 - 55,
Université Paris VII,
2, Place Jussieu,
PARIS (5).