CAHIERS DE
TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
CATÉGORIQUES

SAMI HARARI

Pureté et platitude pour les modules généralisés

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 12, nº 1 (1971), p. 3-27

<http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1971__12_1_3_0>

CAHIERS DE TOPOLOGIE *Vol. XII, 1*
ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE

PURETE ET PLATITUDE POUR LES MODULES GENERALISES

par Sami HARARI

Le but de cet article est de donner des théorèmes de structure dans la catégorie des foncteurs additifs d'une petite catégorie préadditive C vers la catégorie des groupes abéliens, notée Ab^C. Le travail dans une telle catégorie est aisé, car elle vérifie les axiomes (AB 1)-(AB 6) de Grothendieck. Plusieurs auteurs se sont intéressés à la question: Mitchell, Oberst, Rohrl, Stenstrom, Zand, Weidenfeld, Dartois, ...

Les principaux résultats concernent les C-modules plats. En effet, Oberst et Rohrl se sont efforcés dans [17] d'obtenir l'analogue du théorème de Lazard et Govorov ([14], [11]). Ils n'y sont parvenus que sous l'hypothèse supplémentaire de filtration sur C. Nous donnons une formulation générale de ce théorème. Ensuite nous généralisons un théorème de Jensen sur la dimension homologique en suivant une preuve de D. Lazard. Enfin nous obtenons un théorème sur les sous-C-modules purs engendrés, suivant la méthode de B. Osofsky [18]. Pour cela nous utilisons l'analogue d'un lemme de M. Auslander [1] et Berstein [4]. Les notations sont celles conseillées par Mitchell.

Je tiens à remercier mes amis Weidenfeld, Fakir et Dubuc pour nos entretiens au sujet de ce travail. Que M. Barry Mitchell trouve ici ma sincère reconnaissance pour l'aide qu'il m'a accordée tant dans le domaine des mathématiques qu'ailleurs; la valeur de son enseignement, de ses encouragements et de ses critiques a été pour moi inappréciable. Je tiens à remercier aussi M. Charles Ehresmann de m'avoir fait découvrir l'univers des catégories, et Mme Andrée Bastiani de sa lecture attentive du manuscrit et de ses remarques toujours fondées. Enfin mes remerciements vont à M. Daniel Lazard pour sa participation au Jury de ma thèse de 3ème cycle, dont ce texte reprend les points principaux.

I. SUR LA NOTION DE MODULE GENERALISE

1. C-modules.

Soit C une petite catégorie additive. Notons $|C|$ la classe de ses objets, C^* sa duale, Ab la catégorie des (homomorphismes entre) groupes abéliens, (C, Ab) la catégorie de tous les foncteurs de C dans Ab et Ab^C la catégorie abélienne des foncteurs additifs de C dans Ab.

La catégorie Ab vérifiant les axiomes (AB 1) à (AB 6) de Grothendieck, il en est de même de Ab^C. La catégorie Ab^C possède donc des noyaux, conoyaux, produits, coproduits, des limites inductives et limites projectives. Ainsi on peut définir des notions analogues à celles de la théorie des modules, en considérant les objets de C comme des généralisations des modules.

NOTATION : Soient M un objet de Ab^C, p un objet de C, $x \in M(p)$, $\lambda : p \to p'$ un morphisme de C. On posera $M(\lambda) x = \lambda x$

Avec cette notation on a les égalités suivantes:

$$\lambda(x+x') = \lambda x + \lambda x', \quad 1_p x = x,$$

$$(\lambda+\mu) x = \lambda x + \mu x, \quad \mu(\lambda x) = (\mu\lambda) x$$

chaque fois que les membres de gauche sont définis, où x et x' appartiennent à $\bigcup_{p \in |C|} M(p)$ et où λ et μ sont des morphismes de C.

Un élément de M sera un couple (x, p), où $p \in C$ et où $x \in M(p)$. Pour simplifier l'écriture, on supposera que $M(p) \cap M(q) = \emptyset$, pour deux objets p et q de C distincts. Avec cette convention un élément de M peut être simplement noté x. En effet, x détermine un unique objet de C, noté $|x|$, tel que $x \in M(|x|)$.

DEFINITION. Un objet M de Ab^C sera appelé un *C-module* et un morphisme de Ab^C sera un *morphisme de C-modules*.

On notera $C(p, -) = C_p$ le foncteur $Hom_C(p, -)$ de C et, M étant fixé, $\tilde{x}: C_{|x|} \to M$ l'unique morphisme de C-modules tel que $\tilde{x}(|x|)(1_{|x|}) = x$ donné par l'isomorphisme de Yoneda $j: Ab^C(C_p, M) \simeq M(p)$, $p = |x|$.

DEFINITIONS: Soit M un C-module, $(x_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de M. La famille $(x_i)_{i\in I}$ est une *partie géneratrice* si tout $x\in M$ s'écrit

$$x=\sum_{i\in I}\lambda_i x_i,$$

où les λ_i appartiennent à C et $\lambda_i=0$ pour presque tout i.

- Une famille $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments de M est dite *libre* si, pour toute famille de morphismes λ_i de C telle que $\Sigma\lambda_i x_i=0$, on a $\lambda_i=0\ \forall\, i\in I$.

- Une famille $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments de M est une *base* si elle est une famille génératrice libre.

- Un C-module M est *libre* s'il admet une base.

LEMME: *Tout C-module libre est isomorphe à un coproduit de foncteurs représentables et tout C-module est quotient d'un C-module libre.*

DEFINITION: Un C-module P est dit *de présentation finie* si, et seulement si, il existe deux familles finies $(p_i)_{1\leqslant i\leqslant r}$ et $(p'_j)_{1\leqslant j\leqslant s}$ d'objets de C et une suite exacte:

$$\bigoplus_{i=1}^{r} C_{p_i}\to\bigoplus_{j=1}^{s} C_{p'_j}\to P\to 0.$$

On sait qu'un C-module est limite inductive filtrante de C-modules de type fini. Dans le cas où C est noethérienne, tout module de type fini est de présentation finie, donc tout module est limite inductive filtrante de modules de présentation finie. En fait on a plus généralement:

PROPOSITION 1. *Soit C une petite catégorie additive; alors tout C-module M est limite inductive filtrante de C-modules de présentation finie.*

PREUVE. Il existe un épimorphisme $f\colon \bigoplus_{i\in I} C_{p_i}\to M$ d'un module libre sur M vérifiant la condition: Pour tout x de M, il existe un sous-ensemble dénombrable de I, noté N_x, tel que, pour tout $i\in N_x$, $f|_{C_{p_i}}\colon C_{p_i}\to M$ soit défini par $1_{p_i}\to x$. En termes imagés: «M est recouvert une infinité dénombrable de fois par f». Soit $g\colon R\to\bigoplus_{i\in I} C_{p_i}$ le noyau de f. Considérons un ensemble $\mathcal{J}$ de couples (J,S), où J est un sous-ensemble fini de I, S un sous-C-module de type fini de $R\cap\bigoplus_{j\in J} C_{p_j}$. Ordonnons $\mathcal{J}$ de la manière suivante:

$$(J',S')\geqslant(J'',S'')\ \text{si et seulement si}\ J'\supset J''\ \text{et}\ S'\supset S''.$$

Cet ensemble ordonné est filtrant: En effet, si (J_1, S_1) et (J_2, S_2) appartiennent à $\mathcal{J}$, alors $(J_1 \cup J_2, S_1+S_2)$ appartient à $\mathcal{J}$ et vérifie

$$J_1 \cup J_2 \supset J_k \text{ et } S_1+S_2 \supset S_k, \text{ où } k=1, 2.$$

Considérons le système de C-modules $\{M_J^S, (J,S) \in \mathcal{J}\}$ défini par $M_J^S = \bigoplus_{j \in J} C_{p_j}/S$ Si $(J,S) \geqslant (J',S')$, on a un unique morphisme

$$f_{J,S}^{J',S'} : M_{J'}^{S'} \to M_J^S$$

induit par l'inclusion. Il est facile de voir que ce système est inductif; montrons que sa limite est M:

Pour tout $(J,S) \in \mathcal{J}$ le morphisme $f_{(J,S)}: M_J^S \to M$ est induit par le diagramme commutatif suivant dont les lignes sont exactes:

$$(1) \qquad \begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & S & \to & \bigoplus_{i \in J} C_{p_i} & \to & M_J^S & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow k & & \downarrow f_{(J,S)} & & \\ 0 & \to & R & \xrightarrow{g} & \bigoplus_{i \in I} C_{p_i} & \xrightarrow{f} & M & \to & 0 \end{array}$$

Montrons que tout élément de M est dans l'image d'un M_J^S, où $(J,S) \in \mathcal{J}$. Soit $m \in M$. Il existe un $i_0 \in I$ tel que l'image de $1_{p_{i_0}}$ soit m. Soient S un sous-C-module de type fini de $R \cap C_{p_{i_0}}$ et m' l'image de $1_{p_{i_0}}$ dans $M_{\{i_0\}}^S$; le diagramme commutatif suivant dont les lignes sont exactes nous assure que $f_{\{i_0\},S}(m') = m$:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & S & \to & C_{p_{i_0}} & \to & M_{\{i_0\}}^S & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow k & & \downarrow & & \\ 0 & \to & R & \xrightarrow{g} & \bigoplus_{i \in I} C_{p_i} & \xrightarrow{f} & M & \to & 0 \end{array}$$

Pour terminer il faut montrer que, si $f_{(J,S)}(m)=0$ pour $m \in M_J^S$, il existe $(J',S') \geqslant (J,S)$ tel que $f_{(J',S')}^{(J,S)}(m)=0$. Soit donc $(J,S) \in \mathcal{J}$, $m \in M_J^S$ tel que $f_{(J,S)}(m)=0$. Il existe $x \in \bigoplus_J C_{p_i}$ ayant pour image m dans M_J^S. Soit x' l'image de x par l'inclusion k. Vu la commutativité du diagramme (1), l'image $f(x')$ de x' dans M est égale à 0; il existe donc $r \in R$ tel que $g(r)=x'$. Considérons le C-module engendré par r et S. C'est un sous-module de type fini de $R \cap \bigoplus_{i \in J} C_{p_i}$, et $(J, \langle S \cup r \rangle) \geqslant (J,S)$.

On a le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & S & \to & \bigoplus_J C_{p_i} & \to & M_J^S & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & <S \cup r> & \to & \bigoplus_J C_{p_i} & \to & M_J^{<S\cup r>} & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & R & \to & \bigoplus_I C_{p_i} & \to & M & \to & 0
\end{array}$$

Il est clair que l'image de m dans $M_J^{<S\cup r>}$ est 0.

2. Produit tensoriel

Si C_1 et C_2 sont deux catégories, on peut former le produit $C_1 \times C_2$ de manière évidente et on a l'identification

$$(1) \qquad (C_2, (C_1, A)) \simeq (C_2 \times C_1, A);$$

si C_1 et C_2 sont additives, il y a une structure additive évidente sur $C_1 \times C_2$. Si A est aussi additive, (1) est aussi valable mais on a

$$(1') \qquad (A^{C_1})^{C_2} \not\simeq A^{C_1 \times C_2}.$$

Ceci conduit à considérer le produit tensoriel $C_1 \otimes C_2$ de deux catégories additives C_1 et C_2: C'est la catégorie dont la classe des objets est $|C_1| \times |C_2|$ et où le groupe abélien des morphismes de (p_1, q_1) à (p_2, q_2) est le produit tensoriel ordinaire des groupes abéliens $C_1(p_1, q_1)$, $C_2(p_2, q_2)$ La composition bilinéaire est définie explicitement par:

$$(f_1 \otimes f_2)(g_1 \otimes g_2) = (f_1 g_1) \otimes (f_2 g_2).$$

L'isomorphisme correspondant à (1) est alors $(A^{C_1})^{C_2} \simeq A^{C_1 \otimes C_2}$, si A est une catégorie additive. On a aussi les identifications

$$\mathbf{Z} \otimes C \simeq C\ , \quad C_1 \otimes C_2 \simeq C_2 \otimes C_1,$$

$$(C_1 \otimes C_2) \otimes C_3 \simeq C_1 \otimes (C_2 \otimes C_3).$$

Soit C une petite catégorie additive. Nous allons généraliser le produit tensoriel de modules sur un anneau de la manière suivante:

$\otimes C$ sera le foncteur de $Ab^{C^*} \otimes Ab^C \to Ab$ tel que, si $M \in Ab^{C^*}$ et $N \in Ab^C$, alors

$$M \otimes_C N = L/\bigcup_{p\in|C|} Im(j_p \circ (M(\gamma)\otimes N(p)) - j_{p'} \circ (M(p')\otimes N(\gamma))),$$

où j_p est l'injection canonique de $M(p)\otimes N(p)$ dans $L = \bigoplus_{p\in|C|} M(p)\otimes N(p)$.
La proposition suivante montre que ce produit tensoriel coïncide avec le produit tensoriel de C-modules defini dans [19] .

PROPOSITION 2. *Soit M un C^*-module. Le foncteur $M\otimes_C : Ab^C \to Ab$ est adjoint à gauche au foncteur $Ab(M,-): Ab \to Ab^C$ (défini ci-dessous).*

PREUVE: Nous allons montrer qu'il existe un isomorphisme

$$Ab(M\otimes_C B, A) \simeq Ab^C(B, Ab(M,A)),$$

pour tout C-module B et tout groupe abélien A, et que cet isomorphisme est naturel en B, A et M.Remarquons d'abord que le groupe abélien A' sous-jacent au C^*-module M est isomorphe à $\bigoplus_{p\in|C|} M(p)$.Posons $Ab(M,A) = Ab(A',A)$.

Exhibons la structure de C-module de $Ab(M,A)$: Il possède une structure de groupe abélien induite par celle de A. Soit $\lambda: p \to p'$ un morphisme de C et $f\in Ab(M,A)$; définissons λf par:

$$\lambda f(x) = f_p(x\lambda^*), \text{ si } x\in M(p') \text{ où } x\lambda^* = M(\lambda)(x).$$

Soient λ un morphisme de C et $f'\in Ab(M,A)$; on vérifie facilement que:

$$(\lambda+\lambda')f = \lambda f + \lambda' f,\ \lambda(f+f') = \lambda f + \lambda f',\ 1_p f = f,$$

chaque fois que les membres de gauche ont un sens. Considérons deux morphismes $\mu: p\to q$, $\lambda: q\to r$ de C. Soit $x\in M(p)$. On a alors les égalités suivantes:

$$\lambda(\mu f)(x) = \lambda f(x\mu^*) = f(x\mu^*\lambda^*) = f(x(\lambda\mu)^*) = (\lambda\mu)f(x),$$

d'où la relation

$$(\lambda\mu)f = \lambda(\mu f).$$

Il est clair alors que $Ab(M,A)$ est un objet de Ab^C.

Considérons maintenant la transformation naturelle

$$\eta_{B,A}: Ab(M\otimes_C B, A) \to Ab^C(B, Ab(M,A))$$

telle que, si $f: M\otimes_C B \to A$ et si b est un élément de B, alors

$$\eta_{B,A}(f)(b) = \tilde{f}(-,b): M \to A$$

où $\tilde{f}: M\times B \to A$ induit f.

Ensuite soit $\zeta_{B,A} : Ab^{C}(B, Ab(M, A)) \to Ab(M \otimes_C B, A)$ la transformation naturelle telle que, si $g : B \to Ab(M, A)$, alors $\zeta_{B,A}(g) : M \otimes_C B \to A$ est défini par

$$\zeta(g)(m \otimes b) = g(b)(m), \text{ si } m \otimes b \in M \otimes_C B.$$

On vérifie que $\eta_{3,A}$ et $\zeta_{B,A}$ sont des isomorphismes naturels en M. Ceci achève la démonstration.

COROLLAIRE: *$M \otimes_C$ est exact à droite, préserve les limites inductives, en particulier préserve les coproduits.*

LEMME: *Soient C et C' deux petites catégories additives. Soient B un $C^* \otimes C'$-module, N un C'-module. On a alors l'isomorphisme naturel suivant:*

$$\eta : C_p^* \otimes_C Ab^{C'}(B', N) \simeq Ab^{C'}(Ab^{C^*}(C_p^*, \tilde{B}), N)$$

pour $p \in |C|$, où $\eta(x \otimes f)(g) = f(g(x))$ et où $\tilde{B}$ est le C^*-module associé à B et B' le C'-module associé à B.

PREUVE. Exhibons d'abord la structure de C-module de $Ab^{C'}(B', N)$. C'est évidemment un groupe abélien. Soient $\lambda : p \to q$ et $\mu : q \to r$ deux morphismes de C^* et $f : B \to N$ un morphisme de $Ab^{C'}$. Définissons μf de la manière suivante:

$$\mu f(x) = f(\mu x) \in B(q, p'), \quad \text{si} \quad x \in B(r, p').$$

Il est alors clair que $(\mu + \nu) f = \mu f + \nu f$, si le membre de gauche a un sens, et de même $\mu(f + g) = \mu f + \mu g$. Enfin $(\mu \lambda) f = \lambda(\mu f)$, car

$$\mu \lambda f(x) = f(\mu \lambda)(x) = f(\lambda(\mu x)) = \lambda(\mu f(x)).$$

Donc $Ab^{C'}(B', N)$ a une structure de C^{**}-module, i.e. une structure de C-module. On montre de même que $Ab^{C^*}(C_p^*, \tilde{B})$ possède la même propriété. Il suffit alors de considérer le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{tikzcd}
C_p^* \otimes_C Ab^{C'}(B', N) \arrow[r] \arrow[d, "\xi"'] & Ab^{C'}(Ab^{C^*}(C_p^*, B), N) \\
Ab^{C'}(B', N) \arrow[r] & Ab^{C'}(B', N) \arrow[u, "\zeta"']
\end{tikzcd}$$

où ξ est l'isomorphisme:

$$C^*_p \otimes_C Ab^{C'}(B, N) \to Ab^{C'}(B', N), \quad 1_p \otimes f \to f$$

et ζ l'isomorphisme de $Ab^{C'}(B', N)$ sur $Ab^{C'}(Ab^{C^*}(C^*_p, B), N)$ défini par

$$Ab^{C'}(B', N) \to [\, Ab^{C^*}(C^*_p, B') \to N\,], \quad f \to [\,(g: 1_p \to b) \to f(b)\,].$$

CONSEQUENCE: Si L est un C^*-module projectif de type fini, sous les conditions et notations du lemme,

$$L \otimes_C Ab^{C'}(B', N) \simeq Ab^{C'}(Ab^{C^*}(L, \tilde{B}), N).$$

COROLLAIRE: *Soit L un C-module projectif de type fini. Si on pose $L^* = Ab^C(C(\ ,\ ), L)$, alors L^* est un C^*-module et on a $L^* \otimes_C N \simeq Ab^C(L, N)$ pour tout $N \in Ab^C$, l'isomorphisme étant naturel en L et N.*

PREUVE: Si dans le lemme précédent on prend $C = C'$ et $B = C(\ ,\ )$ et si on identifie $Ab^C(C(\ ,\ ), N)$ à N grâce au lemme de Yonéda, on obtient le corollaire.

PROPOSITION: *Soit M un C-module et $N = \bigoplus_I C_{p_i}$. Alors $M \otimes_C N \simeq \bigoplus_{i \in I} M(p_i)$ et tout élément de $M \otimes_C N$ s'écrit de manière unique $\sum_{i \in I} m_i \otimes 1_{p_i}$.*

PREUVE : On a la suite d'isomorphismes suivants:

$$M \otimes_C (\bigoplus_I C_{p_i}) \simeq \bigoplus_I (M \otimes C_{p_i}) \simeq \bigoplus_I M(p_i).$$

L'unicité de l'écriture dans $\bigoplus_I M(p_i)$ entraîne la deuxième assertion.

II. PURETE ET PLATITUDE

1. Modules plats et monomorphismes purs.

DEFINITION: Un C-module M est dit *plat* si, pour toute petite suite exacte

$$0 \to N' \xrightarrow{u} N \xrightarrow{u'} N'' \to 0$$

dans Ab^{C^*}, la suite

$$0 \to N' \otimes_C M \xrightarrow{u \otimes M} N \otimes_C M \xrightarrow{u' \otimes M} N'' \otimes_C M \to 0$$

est exacte dans Ab. On a une notion de C^*-module plat en intervertissant les rôles de C et C^* dans la définition précédente.

Un C-module libre est plat. En effet, soient M un C-module libre et

$$0 \to N' \to N \to N'' \to 0$$

une suite exacte dans Ab^{C^*}. On sait que $M \simeq \underset{I}{\oplus} C_{p_i}$, donc

$$N' \otimes_C M \to N \otimes_C M \to N'' \otimes_C M \to 0$$

est isomorphe à

$$\underset{i \in I}{\oplus} N'(p_i) \to \underset{i \in I}{\oplus} N(p_i) \to \underset{i \in I}{\oplus} N''(p_i) \to 0 ;$$

c'est une petite suite exacte, car Ab^C vérifie (AB 6).

DEFINITION: Soit $0 \to M' \xrightarrow{u} M \to M'' \to 0$ une suite exacte dans Ab^C. Nous dirons que M' est un *sous-module pur* de M ou que u est un *homomorphisme pur* ou que *la suite est pure* si $N \otimes u$ est une injection de groupes abéliens pour tout C^*-module N.

Ici encore on a une notion de C^*-module pur, en intervertissant les rôles de C et C^* dans la définition précédente.

Ainsi un facteur direct est un monomorphisme pur.

PROPOSITION 1: *Soit un monomorphisme $u: M' \to M$ dans Ab^{C^*}. Pour que u soit pur, il suffit que $M/_{M'}$ soit plat. Dans le cas où u est pur et M plat, $M/_{M'}$ est plat.*

PREUVE: Posons $M/_{M'} = M''$ et considérons une suite exacte

$$0 \to N' \xrightarrow{\lambda} N \to N'' \to 0$$

dans Ab^C. Supposons u pur et M plat. Par tensorisation nous obtenons le diagramme commutatif suivant dont les lignes sont exactes:

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & M'\otimes_C N' \arrow[r] \arrow[d] & M\otimes_C N' \arrow[r] \arrow[d, "M\otimes\lambda"] & M''\otimes_C N'' \arrow[r] \arrow[d, "M''\otimes\lambda"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M'\otimes_C N \arrow[r] \arrow[d] & M\otimes_C N \arrow[r] \arrow[d] & M''\otimes_C N \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & M'\otimes_C N'' \arrow[r, "u\otimes N''"'] \arrow[d] & M\otimes_C N'' \arrow[r] \arrow[d] & M''\otimes_C N'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

En appliquant le lemme du serpent aux deux lignes supérieures et en observant que $u\otimes N''$ est une injection de groupes abéliens, puisque u est pur, et que $M\otimes\lambda$ est une injection, puisque M est plat, on voit que $M''\otimes\lambda$ est une injection, donc que M'' est plat.

Réciproquement supposons M'' plat et soit N un C-module. Il existe une suite exacte $0 \to K \to L_N \to N \to 0$ dans Ab^C avec L_N libre. Considérons le diagramme commutatif suivant dont les lignes et colonnes sont exactes:

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] & \\
 & M'\otimes_C K \arrow[r] \arrow[d] & M\otimes_C K \arrow[r] \arrow[d] & M''\otimes_C K \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & M'\otimes_C L_N \arrow[r] \arrow[d] & M\otimes_C L_N \arrow[r] \arrow[d] & M''\otimes_C L_N \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & M'\otimes_C N \arrow[r] \arrow[d] & M\otimes_C N \arrow[r] \arrow[d] & M''\otimes_C N \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

La ligne du milieu est une ptetite suite exacte, car L_N est libre; de même la colonne de droite est une petite suite exacte, M'' étant plat. Appliquons le lemme du serpent; on voit que $u\otimes N$ est une injection, i.e. u est plat.

REMARQUE. Si on intervertit C et C^*, la conclusion reste valable.

REMARQUE. Soit $u: M' \to M$ un monomorphisme pur; $M/_{M'}$ n'est pas forcément un module plat. En effet, si Q est un module non plat, le morphisme $0 \to Q$ est un monomorphisme pur dont le conoyau n'est pas plat.

2. Critères de pureté.

LEMME. *Pour qu'un monomorphisme $u: M' \to M$ dans Ab^C soit pur, il faut et il suffit que, si $(m'_i)_{i\in I}$ est une famille finie d'éléments de M' et $(x_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de M tels que $u(m'_i) = \sum_{j\in J} a_{j_i} x_j$ pour tout $i \in I$ et pour une famille (a_{j_i}) de morphismes de C, alors il existe une famille $(x'_j)_{j\in J}$ d'éléments de M' telle que $m'_i = \sum_{j\in J} a_{j_i} x'_j$.*

PREUVE. Montrons que la condition est nécessaire. Soient $(p_i)_{i\in I}$ et $(q_j)_{j\in J}$ les familles d'objets de C telles que $m'_i \in M'(p_i)$ et $x_j \in M(q_j)$. Désignons $C(p,-)$ par C_p et $C(-,p)$ par C^*_p. La famille (a_{j_i}) détermine un morphisme $f: \bigoplus_{j\in J} C^*_{q_j} \to \bigoplus_{i\in I} C^*_{p_i}$. Soit $g: \bigoplus_{i\in I} C^*_{p_i} \to K$ son conoyau. La suite exacte

$$\bigoplus_{j\in J} C^*_{q_j} \xrightarrow{f} \bigoplus_{i\in I} C^*_{p_i} \xrightarrow{g} K \to 0$$

définit le diagramme commutatif suivant dont les lignes sont exactes et les colonnes des injections de groupes abéliens, puisque u est pur:

$$\begin{array}{ccccccc}
\bigoplus_J M'(q_j) & \to & \bigoplus_I M'(p_i) & \to & K\otimes_C M' & \to & 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\bigoplus_J M(q_j) & \to & \bigoplus_I M(p_i) & \to & K\otimes_C M & \to & 0
\end{array}$$

Considérons les isomorphismes:

$$\bigoplus_{i\in I} M'(p_i) \xrightarrow{\sim} (\bigoplus_{i\in I} C^*_{p_i})\otimes_C M', \quad (m'_i) \to \sum_{i\in I} 1_{p_i}\otimes m'_i,$$

$$\bigoplus_{j\in J} M(q_j) \xrightarrow{\sim} (\bigoplus_{j\in J} C^*_{q_j})\otimes_C M, \quad (m_j) \to \sum_{j\in J} 1_{q_j}\otimes m_j;$$

en vertu de l'hypothèse et après notre identification, on voit que l'élément $\sum_{i\in I} 1_{p_i}\otimes u(m_i)$ appartient à l'image de $f\otimes M$, donc que son image dans $K\otimes_C M$ est nulle. Puisque $K\otimes u$ est une injection, car u est pur, l'image de $\sum_{i\in I} 1_{p_i}\otimes m'_i$ est nulle dans $K\otimes_C M'$. Il existe donc $(x'_j)_{j\in J} \in M'$ telle que $m'_i = \sum_{j\in J} a_{j_i} x'_j$ pour tout $i\in I$.

Montrons que la condition est suffisante. Pour cela il suffit de le vérifier sur les C^*-modules de présentation finie. Soit N un tel C^*-module. Il existe une suite exacte dans Ab^{C^*} :

$$\bigoplus_{j\in J} C^*_{q_j} \to \bigoplus_{i\in I} C^*_{p_i} \xrightarrow{g} N \to 0$$

où I et J sont des ensembles finis. On a le diagramme commutatif dont les dont les lignes sont exactes:

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_J M'(q_j) \arrow[r] \arrow[d] & \bigoplus_I M'(p_i) \arrow[r] \arrow[d] & N\otimes_C M' \arrow[r] \arrow[d, "N\otimes u"] & 0 \\
\bigoplus_J M(p_j) \arrow[r] & \bigoplus_I M(p_i) \arrow[r, "g'"] & N\otimes_C M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Soit x un élément de $N\otimes_C M'$ dont l'image par $N\otimes u$ est 0. Il existe un $y\in\bigoplus_I M'(p_i)$ qui relève x. L'image de y par $g'\circ u$ est 0, d'après la commutativité du diagramme. Donc

$$u(y) = (\sum_{j\in J} a_{j_i} x_j)_{i\in I}, \quad \text{où} \quad x_j \in M .$$

Vu notre hypothèse, y s'écrit alors $y = (\sum_{j\in J} a_{j_i} x'_j)_{i\in I}$, où x'_j appartient à M'. Puisque la ligne du haut est exacte, $x = 0$ et $N\otimes u$ est un monomorphisme. Par conséquent u est pur pour tout C^*-module de présentation finie et, comme tout C^*-module est limite inductive filtrante de tels modules , d'après la proposition 1, et que Ab^{C^*} vérifie la condition (AB4), on en déduit que u est pur.

COROLLAIRE. *Pour qu'un monomorphisme $u: M'\to M$ dans Ab^C soit pur, il faut et il suffit que, pour tout diagramme commutatif de la forme*

$$\begin{tikzcd}
L' \arrow[r, "v"] \arrow[d, "k'"'] & L \arrow[d, "k"] \arrow[dl, dashed, "w"'] \\
M' \arrow[r] & M
\end{tikzcd}$$

avec L' et L libres de type fini, il existe $w: L\to M'$ tel que $w\circ v = k'$.

Pour démontrer le théorème suivant, nous utiliserons le

LEMME. *Dans une catégorie abélienne $\mathfrak{A}$, considérons le diagramme commutatif suivant dont les lignes sont exactes:*

$$\begin{array}{ccccccc} & & A' & \xrightarrow{\alpha'} & A & \xrightarrow{\alpha''} & A'' & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \delta'} & & \downarrow{\scriptstyle \delta} & & \downarrow{\scriptstyle \delta''} \\ 0 & \rightarrow & B' & \xrightarrow[\beta']{} & B & \xrightarrow[\beta'']{} & B'' \end{array}$$

Il existe un morphisme $\mu : A \to B'$ tel que $\mu\, \alpha' = \delta'$ si, et seulement si, il existe $\nu : A'' \to B$ tel que $\beta'' \nu = \delta''$.

PREUVE: Montrons que l'existence de μ implique celle de ν, la réciproque s'obtenant par dualité. Soit μ tel que $\mu\, \alpha' = \delta'$. Considérons

$$(\delta - \beta' \mu)\alpha' = \delta\, \alpha' - \beta' \mu\, \alpha' = 0 .$$

Il existe donc $\nu : A'' \to B$ tel que $\nu\, \alpha'' = \delta - \beta' \mu$. Composons avec β''; on obtient: $\beta'' \nu\, \alpha'' = \beta'' \delta$, et, d'après la commutativité du carré,

$$\beta'' \nu\, \alpha'' = \delta''\, \alpha'' ,$$

d'où $\beta'' \nu = \delta''$, puisque α'' est un épimorphisme.

THEOREME 1: *Soit $0 \rightarrow M' \xrightarrow{u'} M \xrightarrow{w} M'' \rightarrow 0$ une suite exacte dans Ab^C. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

i) Cette suite est pure.

ii) Pour tout module de présentation finie P, l'application

$$Ab^C(P, w) : Ab^C(P, M) \to Ab^C(P, M'')$$

est surjective.

iii) Cette suite est limite inductive suivant un ensemble filtrant de suites exactes scindées

$$0 \rightarrow M' \rightarrow M' \oplus P_i \rightarrow P_i \rightarrow 0,$$

où les P_i sont des C-modules de présentation finie.

REMARQUE: La condition déduite de (iii) en retirant la condition que les P_i soient de présentation finie est encore équivalente aux autres, car elle est plus faible que (iii) et une limite inductive filtrante de suites exactes scindées est pure.

PREUVE: (iii) entraîne (i), car les limites inductives filtrantes sont des foncteurs exacts commutant avec les produits tensoriels.

Montrons que (i) entraîne (ii). Considérons une présentation de

P, i.e. une suite exacte

$$L_1 \xrightarrow{f} L_0 \xrightarrow{g} P \to 0$$

de C-modules, où L_0 et L_1 sont des C-modules libres de type fini, et $u : P \to M''$ un morphisme de C-modules.

$$\begin{tikzcd} & L_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "l"] & L_0 \arrow[r, "g"] \arrow[d, "k"] & P \arrow[r] \arrow[d, "u"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "u'"'] & M \arrow[r, "w"'] & M'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

u induit des morphismes $k : L_0 \to M$ et $l : L_1 \to M'$ rendant le diagramme commutatif. Puisque u' est pur, en appliquant le corollaire précédent à ce diagramme, on voit qu'il existe $v' : L_0 \to M'$ tel que $v' \circ f = l$. D'après le lemme precédent, il s'ensuit que (ii) est vérifiée.

Supposons (ii) vérifiée et montrons (iii). Ecrivons M comme limite inductive filtrante de C-modules de présentation finie P_i : $M'' = \varinjlim_{i \in I} P_i$. Considérons le diagramme suivant, où le carré de droite est un produit fibré.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M' \arrow[r] \arrow[d] & M_i \arrow[r, "u'_i"] \arrow[d, "f_i"'] & P_i \arrow[r] \arrow[d, "f''_i"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & M' \arrow[r] & M \arrow[r, "w"] & M'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

D'après la condition (ii), il existe $g_i : P_i \to M$ tel que $w \circ g_i = f''_i$; on en conclut que la suite du haut est scindée. Il est clair que $M = \varinjlim M_i$, car en passant à la limite inductive sur i, on obtient un diagramme commutatif dont les lignes sont exactes:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M' \arrow[r] \arrow[d] & \varinjlim M_i \arrow[r] \arrow[d, "h"] & M'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & M' \arrow[r] & M \arrow[r] & M'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Vu le lemme des cinq on déduit que h est un isomorphisme.

COROLLAIRE: *Une suite exacte pure* $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ *telle que* M'' *soit de présentation finie est scindée.*

COROLLAIRE: *Soient* C *et* C' *deux petites catégories additives. Si un fonc-*

teur de la catégorie des C-modules dans la catégorie des C'-modules commute avec les limites inductives filtrantes et les coproduits finis, il transforme les suites exactes pures en suites exactes pures.

3. Critères de platitude.

THEOREME 2: *Soit* $u: P \to M$ *un homomorphisme d'un C-module de présentation finie dans un C-module plat. Il existe un C-module libre de type fini* L *et des homomorphismes* $v: P \to L$ *et* $w: L \to M$ *tels que* $w \circ v = u$.

PREUVE: Considérons une suite exacte $0 \to K \to L_M \xrightarrow{w'} M \to 0$ dans Ab^C avec L_M libre. D'après la proposition 1 cette suite est pure. En lui appliquant le théorème 1, on obtient $v': P \to L_M$ tel que $w' \circ v' = u$. L'image de v' se factorise par L, sous-module libre de L_M, d'où v et w.

THEOREME 3: (Lazard-Govorov). *Soit* M *un C-module. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

i) M *est plat.*

ii) Pour tout C-module de présentation finie P *et tout homomorphisme* $u: P \to M$, *il existe un C-module libre de type fini* L *et des homomorphismes* $v: P \to L$ *et* $w: L \to M$ *tels que* $w \circ v = u$:

iii) Il existe un ensemble ordonné filtrant I *et un système inductif de C-modules libres de type fini* $(M_i)_{i \in I}$ *tels que* $M = \varinjlim M_i$.

PREUVE: Nous avons vu que (i) entraîne (ii).

Montrons que (ii) entraîne (iii): Nous savons que tout C-module est limite inductive filtrante de C-modules de présentation finie. Avec les notations de la proposition 1, §I, on a $M = \varinjlim_{(J,S)} M_J^S$. Nous allons montrer que l'ensemble des couples (J, S) tels que $\bigoplus_J C_{p_i}/S$ soit libre est un sous-ensemble cofinal dans l'ensemble ordonné $\mathcal{J}$ de tous les couples (J, S). Soit (J, S) un couple quelconque de $\mathcal{J}$. D'après (ii) il existe un C-module libre L tel que le diagramme suivant commute:

$$\begin{tikzcd} \bigoplus_{j \in J} C_{p_j}/S \arrow[rr, "f_{J,S}"] \arrow[dr, "v"'] & & M \\ & L \arrow[ur, "w"'] & \end{tikzcd}$$

Montrons que $L = \underset{i \in J_0}{\oplus} C_{p_i} / T$ pour un certain couple (J_0, T) appartenant à $\mathcal{J}$..

Soit $(e_i)_{i \in J}$ l'image dans $\underset{i \in J}{\oplus} C_{p_i}/S$ de la base $(1_{p_j})_{j \in J}$ de $\underset{i \in J}{\oplus} C_{p_i}$.. Posons $f_i = v(e_i) \in L$. Soient B une base de L, B' un sous-ensemble de I disjoint de J, équipotent à B et ayant même image que B dans M. Posons $J_0 = B' \cup J$.

Considérons l'homomorphisme $\underset{i \in J_0}{\oplus} C_{p_i} \to L$ qui envoie $(1_{p_i})_{i \in J_0}$ sur $B \cup (f_i)_{i \in J}$. Il donne naissance à la suite exacte

$$0 \to T \to \underset{J_0}{\oplus} C_{p_i} \to L \to 0,$$

où T est un sous-C-module de type fini de $\underset{J_0}{\oplus} C_{p_i} \cap R$. On a évidemment $(J_0, T) \geqslant (J, S)$, ce qui nous donne le résultat.

Enfin (iii) entraîne (i) car la catégorie Ab^C vérifie (AB 5)..

III. DIMENSION HOMOLOGIQUE

1. Dimension homologique d'une réunion de C-modules.

THEOREME 1 (M. Auslander). *Soient I un ensemble bien ordonné, $(M_i)_{i\in I}$ une famille de C-modules tels que, si $i \leqslant j$, M_i est inclus dans M_j. Soit $M = \bigcup_{i\in I} M_i$ et posons $M'_i = \bigcup_{j<i} M_j$. Si $h.d.(M_i/_{M'_i}) \leqslant n$ pour tout $i \in I$, alors $h.d.(M) \leqslant n$.*

PREUVE. La démonstration se fera par récurrence sur n.

a. Supposons $n = 0$: $h.d.(M_i/_{M'_i}) = 0$ veut dire que $M_i/_{M'_i}$ est est projectif. Pour chaque $i \in I$ on a la suite exacte suivante dans Ab^C:

$$0 \to \bigcup_{j<i} M_j \to M_i \to M_i/_{M'_i} \to 0.$$

Elle est scindée, puisque $M_i/_{M'_i}$ est projectif. On peut donc écrire $M_i = M'_i \oplus M''_i$, où M''_i est un C-module projectif isomorphe à $M_i/_{M'_i}$. Considérons le C-module $\sum_{i\in I} M''_i \subset M$ formé par les combinaisons linéaires d'éléments des M''_i, pour $i \in I$. Montrons que $\bigoplus_{i\in I} M''_i = \sum_{i\in I} M''_i$. En effet, soit $m'' = \sum_I m''_i \in \sum_I M''_i$ tel que $m'' = 0$. Supposons qu'il existe des indices i tels que $m''_i \neq 0$. Ils sont en nombre fini; soit i_0 le plus grand d'entre eux; alors $m''_{i_0} = - \sum_{j<i_0} m_j$. Or chaque m_j, pour $j < i_0$, appartient à M'_{i_0}; donc m''_{i_0} appartient à M'_{i_0}, contredisant le fait que $M_{i_0} = M'_{i_0} \oplus M''_{i_0}$. Montrons que M est contenu dans $\sum_I M''_i$. Par récurrence transfinie sur k, on va montrer que, si un élément m appartient à M_k, alors m appartient à $\bigoplus_{i\in I} M''_i$. Soit

$$\alpha = inf(I), \quad M'_\alpha = 0 \quad \text{et} \quad M''_\alpha \approx M_\alpha \subset \bigoplus_{i\in I} M''_i.$$

Supposons la propriété vraie pour $k < i$. Montrons qu'elle est vraie pour i. Soit $m \in M_i$; alors

$$m = m'_i + m''_i \quad \text{avec} \quad m'_i \in M'_i \quad \text{et} \quad m''_i \in M''_i.$$

m'_i appartient à M_k pour un certain $k < i$, donc

$$m'_i \in \bigoplus_{i\in I} M''_i \quad \text{et} \quad m''_i \in M''_i \subset \bigoplus_{j\in I} M''_j.$$

M étant un coproduit de C-modules projectifs, il est projectif.

b. Supposons le théorème vérifié dans le cas: $h.\,d.(M_i/M'_i) \leqslant n-1$. Montrons qu'il est vrai pour $h.\,d.(M_i/M'_i) \leqslant n$. Considérons le foncteur d'oubli $O\colon Ab^C \to (C, Ens)$. Il a pour adjoint le foncteur

$$L\colon (C, Ens) \to Ab^C, \quad \underline{M} \to L_{\underline{M}},$$

où $L_{\underline{M}}(p)$ est, pour chaque $p \in |C|$, le groupe abélien libre engendré par $M(p)$. Le foncteur L commute avec les limites inductives, en particulier avec les limites inductives filtrantes. Considérons la suite exacte

$$0 \to K_{M_i} \to L_{\underline{M}_i} \to M_i \to 0, \quad \text{où} \quad \underline{M}_i = O(M_i),$$

pour tout $i \in I$. Puisque Ab^C possède des limites inductives exactes, on a:

$$K_{M'_i} = \bigcup_{j<i} K_{M_j}, \quad K_M = \bigcup_{i \in I} K_{M_i}.$$

Considérons le diagramme suivant dont les lignes sont exactes:

(1)
$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & K_{M'_i} \arrow[r] \arrow[d] & L_{\underline{M}'_i} \arrow[r] \arrow[d] & M'_i \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & K_{M_i} \arrow[r] \arrow[d] & L_{\underline{M}_i} \arrow[r] \arrow[d] & M_i \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & K_{M_i}/K_{M'_i} \arrow[r] \arrow[d] & L_{\underline{M}_i - \underline{M}'_i} \arrow[r] \arrow[d] & M_i/M'_i \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Appliquons la longue suite des *Ext* à la ligne du bas; on voit que l'on a $h.\,d.(K_{M_i}/K_{M'_i}) \leqslant n-1$. De notre hypothèse de récurrence il résulte que $h.\,d.(K_{M_i}) \leqslant n-1$. Appliquons la longue suite des *Ext* à la petite suite exacte:

$$0 \to K_M \to L_M \to M \to 0\,;$$

on en déduit que $h.\,d.(M) \leqslant n$.

REMARQUE. Cette démonstration n'est pas valable dans des catégories abéliennes autres que Ab^C en remplaçant les C-modules libres par des objets projectifs, le diagramme (1) n'ayant plus lignes et colonnes exactes.

PROPOSITION 1. *Soient $\mathfrak{A}$ une catégorie abélienne et $u\colon B \to A$ un monomorphisme:*

Si $h.d.(A) > h.d.(B)$, alors $h.d.(A) = h.d.(A/_B)$;
Si $h.d.(A) < h.d.(B)$, alors $h.d.(A/_B) = h.d.(B)+1$;
Si $h.d.(A) = h.d.(B)$, alors $h.d.(B) < h.d.(A/_B)+1$;

PREUVE. Il suffit d'appliquer la longue suite des *Ext* à la petite suite:

$$0 \to B \xrightarrow{u} A \to A/_B \to 0.$$

REMARQUE. $h.d.(B)$ ne peut pas être supérieur à $h.d.(A)$ et $h.d.(A/_B)$. $h.d.(B) = h.d.(A/_B)$ entraîne $h.d.(B) = h.d.(A)$.

COROLLAIRE. *Sous les hypothèses du théorème 1 et si $h.d.(M'_i) \leqslant m$ pour tout $i \in I$, alors $h.d.(M) \leqslant m+1$.*

PREUVE. Puisque $h.d.(M'_i) \leqslant m$ et $h.d.(M_i) = h.d.(M'_{i+1}) \leqslant m$, alors $h.d.(M_i/_{M'_i}) \leqslant m+1$ d'après la proposition, donc $h.d.(M) \leqslant m+1$ d'après le théorème d'Auslander.

2. Sous-modules purs engendrés.

Soient F un C-module libre et $f: M' \to F$ un monomorphisme. Le critère de pureté vu au chapitre II peut s'écrire sous une forme plus agréable: f est pur si, et seulement si, pour toute famille finie $(m'_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ d'éléments de M', il existe $u \in Ab^C(F, M')$ tel que $u \circ f(m'_i) = m'_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$. Nous allons grâce à cette formulation démontrer le

THEOREME 2. *Soit F un C-module libre de base $(x_i)_{i \in I}$. Tout sous-C-module T de F engendré par $\aleph_k$ éléments, k ordinal fini, peut être plongé dans un C-module $T^\blacktriangle$ pur dans F et $\aleph_k$-engendré.*

PREUVE. On fait une récurrence transfinie sur k.

a. *Cas où* $k = 0$, c'est-à-dire $\aleph_k = \omega$. Soit $(t_i)_{i \in \omega}$ une partie génératrice de T dans F. On va définir par récurrence T_i et u_i pour tout $i \in \omega$ de sorte que $T_0 = C_{|t_0|} t_0$ et

i. $t_i \in T_i$;
ii. $T_j \subset T_i$ pour $j < i$;
iii. T_i est un sous-C-module finiment engendré de F;
iv. $u_i \in Ab^C(F, T_{i+1})$ est l'identité sur T_i.

Supposons que l'on ait défini T_j pour $j \leqslant i$. Soit $u' \in Ab^C(F, F)$ tel que u' soit l'identité sur $M_i = T_i + C_{|t_{i+1}|} t_{i+1}$. Définissons $v_i : F \to F$

en posant:

$$\begin{cases} v_i(x_j) = 0 & \text{si } M_i \subset \bigoplus_{\substack{k\in I \\ k\neq j}} C_{|x_k|} x_k , \\ v_i(x_j) = u'(x_j) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Puisque M_i est finiment engendré, $v_i(x_j) = 0$ sauf pour un nombre fini de j, de sorte que $T_{i+1} = v_i(F)$ est finiment engendré. Si $u_i\colon F \to T_{i+1}$ est la restriction de v_i, alors $(T_j)_{0\leqslant j\leqslant i+1}$ et $(u_j)_{0\leqslant j\leqslant i}$ satisfont aux conditions (i) à (iv).

Posons $T^{\blacktriangle} = \bigcup_{i\in\omega} T_i$. Puisque tout sous-ensemble fini de $T^{\blacktriangle}$ est contenu dans un certain T_i, le morphisme $u_i'\colon F \to T^{\blacktriangle}$ déduit de u_i le laisse invariant. Donc $T^{\blacktriangle}$ est un sous-C-module pur de F.

b. *Cas général.* Supposons le théorème prouvé pour $k \leqslant n-1$ et supposons $k = n$. Soit $(t_\gamma)_{\gamma<\nu}$, où $\nu = \aleph_n$, une famille génératrice de T. Soit, pour tout $\gamma < \nu$,

$$T_\gamma = (C_{|t_\gamma|} t_\gamma + \bigcup_{\beta<\gamma} T_\beta) .$$

Si, pour tout $\beta < \gamma$, T_β est engendré par au plus $\omega \times card(\beta)$ éléments, T_γ est engendré par au plus $\omega \times card(\gamma)$ éléments. Vu l'hypothèse de récurrence, $T_\gamma^{\blacktriangle}$ existe donc et est engendré par au plus $\omega \times card(\gamma)$ éléments. Posons $T^{\blacktriangle} = \bigcup_{\gamma<\nu} T_\gamma^{\blacktriangle}$. Alors $T^{\blacktriangle}$ contient T et est ν-engendré. Puisqu'une chaîne linéairement ordonnée de sous-C-modules purs est un sous-C-module pur, $T^{\blacktriangle}$ est le sous-C-module pur requis.

3. Dimension homologique d'une limite inductive.

Soit D un ensemble préordonné filtrant croissant.

PROPOSITION 2 (Berstein). *Soient $\mathfrak{A}$ une catégorie abélienne dont les coproduits sont exacts, $\{M_i, f_i^j \mid i, j \in D\}$ un système inductif dans $\mathfrak{A}$ et $M = \varinjlim_D M_i$. Si D est dénombrable, alors $h.d.(M) \leqslant 1 + \sup_{i\in D} h.d.(M_i)$.*

PREUVE. D étant dénombrable, il contient un sous-ensemble dénombrable totalement ordonné cofinal dans D. On peut donc supposer que D est l'ensemble ordonné $\mathbf{N}$ des entiers. Si $g_i\colon M_i \to M$ et $f_i\colon M_i \to M_{i+1}$ sont les morphismes du système, on a la suite

$$M_0 \xrightarrow{f_0} M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \to \dots \to M_n \xrightarrow{f_n} M_{n+1} \to \dots$$

telle que $\lim\limits_{\overrightarrow{\mathbf{N}}} M_n = M$. On en déduit la suite exacte

$$0 \to \bigoplus_{n\in\mathbf{N}} M_n \xrightarrow{\Delta} \bigoplus_{n\in\mathbf{N}} M_n \xrightarrow{j} M \to 0$$

où j est défini comme étant égal sur le n-ième facteur à g_n et où Δ est défini par le diagramme:

$$\begin{tikzcd}
M_0 \arrow[d, "1"'] \arrow[dr, "-f_0"] & \oplus & M_1 \arrow[d, "1"'] \arrow[dr, "-f_1"] & \oplus & M_2 \arrow[d, "1"] & \oplus \ldots \\
M_0 & \oplus & M_1 & \oplus & M_2 & \oplus \ldots
\end{tikzcd}$$

Or $h.\,d.(\bigoplus\limits_n M_n) \leqslant \sup\limits_n h.\,d.(M_n)$; donc en appliquant la longue suite des Ext on obtient $h.\,d.(M) \leqslant 1 + \sup\limits_n h.\,d.(M_n)$.

Ce résultat est valable en particulier pour les catégories de la forme Ab^C. En fait nous allons voir que, pour ces catégories, le résultat se généralise au cas où D admet un sous-ensemble cofinal D' de cardinal $\aleph_n$, $n \in \omega$. Comme une limite inductive relativement à D est identique à la limite inductive relativement à D', on peut supposer $D = D'$.

LEMME. *Supposons D de cardinal $\nu = \aleph_n$, où $n > 0$. Il existe une famille $(E_\gamma)_{\gamma<\nu}$ de sous-ensembles de D vérifiant:*

(1) $D = \bigcup\limits_{\gamma<\nu} E_\gamma$,

(2) $E_\beta \subset E_\delta$ *pour* $\beta < \delta$ *et* $E_\alpha = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} E_\beta$,

(3) $E_\delta - E_\beta$ *majore* E_β *pour* $\beta < \delta$,

(4) *Le cardinal de* E_γ *est* $\aleph_{n-1}$ *pour tout* $\gamma < \nu$.

PREUVE. Soit $\gamma < \nu$ et supposons défini des E_β vérifiant (2), (3), (4), pour $\beta < \gamma$. Posons

$$E'_{\gamma,0} = \{ d_\alpha \mid \alpha < \aleph_{n-1} + \gamma \} \cup \bigcup_{\beta<\gamma} E_\beta,$$

où d_α est l'élément de D associé à $\alpha < \aleph_n$ par une bijection choisie de de $\{\alpha < \aleph_n\}$ sur D. On voit aisément que $card(E'_{\gamma,0}) = \aleph_{n-1}$. Une fois $E'_{\gamma,i}$ défini, posons $E'_{\gamma,i+1} = E'_{\gamma,i} \cup F_i$, où F_i est l'image d'une fonction de $E'_{\gamma,i} \times E'_{\gamma,i}$ dans D qui, à un couple (x, y), fait correspondre un majorant de x et de y dans D. Chaque $E'_{\gamma,i}$ a un cardinal égal à $\aleph_{n-1}$

et il en est de même pour $E'_\gamma = \bigcup_{i \in \omega} E'_{\gamma, i}$. Posons $E_\gamma = \bigcup_{\beta < \gamma} E'_\beta$. Alors la famille $(E_\gamma)_{\gamma < \nu}$ satisfait aux conditions voulues.

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème général:

THEOREME 3. *Soient D un ensemble préordonné filtrant croissant et M la limite inductive sur D d'un système inductif $\{ M_i, f_i^j \mid i, j \in D \}$ de C-modules. Si un ensemble de cardinal $\aleph_n$ est cofinal dans D, alors*

$$h.\,d.(M) \leqslant n + 1 + \sup_{i \in D} h.\,d.(M_i).$$

PREUVE. La démonstration se fait par récurrence sur n. Le cas où $n = 0$ est le théorème de Berstein. Supposons le résultat prouvé si le cardinal de D est inférieur ou égal à $\aleph_{n-1}$ et supposons $card(D) = \aleph_n$. Posons $\nu = \aleph_n$. D'après le lemme précédent, $D = \bigcup_{\gamma < \nu} E_\gamma$, où la famille $(E_\gamma)_{\gamma < \nu}$ vérifie les conditions (1) à (4).

Considérons, pour $\alpha < \nu$, la suite exacte:

$$0 \to K_\alpha \to \bigoplus_{i \in E_\alpha} M_i \to \varinjlim_{E_\alpha} M_i \to 0.$$

On sait que

$$h.\,d.\Big(\bigoplus_{i \in E_\alpha} M_i\Big) \leqslant \sup_{i \in E_\alpha} h.\,d.(M_i). \tag{1}$$

Vu l'hypothèse de récurrence

$$h.\,d.\big(\varinjlim_{E_\alpha} M_i\big) \leqslant n + \sup_{i \in E_\alpha} h.\,d.(M_i), \tag{2}$$

puisque $card(E_\alpha) < \aleph_{n-1}$. En utilisant la longue suite des Ext (Kaplansky), (1) et (2), on obtient $h.\,d.(K_\alpha) \leqslant n - 1 + \sup_{i \in E_\alpha} h.\,d.(M_i)$.

Si $\alpha < \beta$, sachant que $E_\alpha \subset E_\beta$, on a le diagramme commutatif suivant, dont les lignes sont exactes:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K_\alpha \arrow[r] \arrow[d, "g"'] & \bigoplus_{i \in E_\alpha} M_i \arrow[r] \arrow[d] & \varinjlim_{E_\alpha} M_i \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & K_\beta \arrow[r] & \bigoplus_{i \in E_\beta} M_i \arrow[r] & \varinjlim_{E_\beta} M_i \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

On voit que g est un monomorphisme. En passant à la limite sur $\alpha < \nu$, on obtient la suite exacte

$$0 \to \bigcup_{\alpha<\gamma} K_\alpha \to \bigoplus_{i\in D} M_i \to M \to 0.$$

D'après le corollaire page 19 , on a

$$h.\,d.\,(\bigcup_{\alpha<\nu} K_\alpha) \leqslant 1+\sup_{\gamma<\nu} h.\,d.\,(\bigcup_{\beta<\gamma} K_\beta)\,.$$

Le choix des E_α entraîne $\bigcup_{\beta<\gamma} K_\beta = K_\gamma$ et, puisque

$$h.\,d.\,(K_\beta) \leqslant n-1+\sup_{i\in D} h.\,d.\,(M_i) \quad \text{pour tout} \quad \beta<\nu\,,$$

on en conclut

$$h.\,d.\,(\bigcup_{\alpha<\nu} K_\alpha) \leqslant 1+n-1+\sup_{i\in D} h.\,d.\,(M_i)\,.$$

De cette relation et de la longue suite des *Ext*, il suit que

$$h.\,d.\,(M) \leqslant n+1+\sup_{i\in D} h.\,d.\,(M_i)\,.$$

4. Dimension homologique des C-modules plats.

THEOREME 4 (Osofsky [18]). *Un C-module plat de presentation de cardinal $\aleph_n$, $n\in\omega$, est de dimension homologique inférieure ou égale à $n+1$.*

REMARQUE. Dans le cas où $n=0$, c'est-à-dire dans le cas où le module est de présentation dénombrable, on retrouve le théorème de Jensen [13] . La démonstration suivante nous a été indiquée par D. Lazard, dans le cas des modules sur un anneau.

PREUVE. Soit M un C-module plat de présentation de cardinal $\nu = \aleph_n$. Il est limite inductive filtrante d'une famille $(M_k)_{k\in K}$ de C-modules libres de type fini. Choisissons pour tout $k\in K$ une base $e_{k,1},\dots,e_{k,n(k)}$ de M_k. Désignons par $e'_{k,m}$ (resp. par $e^l_{k,m}$) l'image canonique de $e_{k,m}$ dans M (resp. dans M_l, pour $l \geqslant k$). Soit $(x_i)_{i\in I}$ un système de générateurs de M de cardinalité ν.

Pour tout i de I il existe un indice $k(i)\in K$ tel que x_i appartienne à l'image de $M_{k(i)}$ dans M. Soit $H_0 = \bigcup_{i\in I}\{k(i)\}$. On a la suite exacte

$$R \xrightarrow{\alpha} \bigoplus_{k\in H_0} M_k \xrightarrow{p} M \to 0\,,$$

où α est le noyau de p; soit $(r_j)_{j\in J}$ un système de générateurs de R. D'après le lemme de Schanuel, $card(J)=\nu$. Pour tout j de J, on a

$$\alpha(r_j) = \sum_{i \in I_j} \lambda_i^j e_{k_i, m_i} \quad \text{et} \quad p \circ \alpha(r_j) = \sum_{i \in I_j} \lambda_i^j e'_{k_i, m_i} = 0\,,$$

où I_j est un ensemble fini. Il existe $l(j) \geqslant k_i$ pour $i \in I_j$ tel que

$$\sum_{i \in I_j} \lambda_i^j \, e_{k_i, m_i}^{l(j)} = 0\,.$$

Soit H_1 un sous-ensemble filtrant de K, de cardinal ν contenant $H_0 \cup (\bigcup_{j \in J} \{ l(j) \})$.

La construction de H_1 à partir de H_0 peut être itérée et permet de construire une suite croissante $(H_q)_{q \in \omega}$ d'ensembles filtrants de cardinal ν, dont la réunion H est filtrante et de cardinal ν. En outre elle vérifie $M = \varinjlim_{k \in H} M_k$. En appliquant un théorème d'Osofsky, on conclut que

$$h.\,d.(M) \leqslant n + 1\,.$$

7, Avenue Stéphane Mallarmé
75 - PARIS (17e)

BIBLIOGRAPHIE

1. AUSLANDER M., On the dimension of modules and algebras III, *Nagoya Math. J.* 9 (1956).

2. BOURBAKI N., *Algèbre commutative, chapitre I: Modules plats,* Hermann, Paris.

3. BOURBAKI N., *Algèbre linéaire, chapitre I: Modules sur un anneau,* Hermann, Paris.

4. BERSTEIN I., On the dimension of modules and algebras IX, *Nagoya Math. J.* 13 (1958), 83-84.

5. CARTAN-EILENBERG, *Homological Algebra,* Princeton Un. Press.

6. EHRESMANN C., *Catégories et Structures,* Dunod, Paris, 1965.

7. EHRESMANN C., *Algèbre 1ère partie,* C. D. U., Paris, 1968.

8. EILENBERG-STEENROD, *Foundations of algebraic Topology,* Princeton Un. Press.

9. FREYD P., *Abelian Categories,* Harper and Row, 1964.

10. GABRIEL P., Des catégories abéliennes, *Bull. Soc. Math. France* 90 (1962), 323-448.

11. GOVOROV, On flat modules, *Sibirsk Math. J.* 6 (1965), 300-304.

12. GROTHENDIECK A., Elements d'Algèbre homologique, *Tohoku Math. J.* 9 (1959), 119-221.

13. JENSEN C. U., On cohomological dimension of $\aleph_0$-coherent rings, *Math. Scand.* 20 (1967), 56-66.

14. LAZARD D., Autour de la platitude, *Bull. Soc. Math. France* 97 (1969).

15. MITCHELL B., *Theory of Categories,* Academic Press, New York, 1965.

16. MITCHELL B., *Rings with several objects* (multigraphié), Dalhousie University, November 1970.

17. OBERST-ROHRL, Flat and coherent functors, *J. of Algebra* 14 (1970).

18. OSOFSKY B., *Nagoya Math. J.* 32 (1968), 315-322.

19. STENSTROM, Purity in functor categories, *J. of Algebra* 8 (1968), 352.

20. WEIDENFELD G., Modules généralisés (Thèse 3e cycle, Paris, 1970), *Esquisses mathématiques* 3 (multigraphié), Paris, 1970.