CAHIERS DE
TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
CATÉGORIQUES

CHRISTIAN LAIR

Idées et maquettes de structures algébriques

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 12, nº 1 (1971), p. 29-55

<http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1971__12_1_29_0>

CAHIERS DE TOPOLOGIE
ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE

Vol. XII, 1

IDEES ET MAQUETTES DE STRUCTURES ALGEBRIQUES

par Christian LAIR

On sait qu'une structure algébrique peut être entièrement «esquissée» par la donnée de certaines conditions sur un graphe multiplicatif convenable. De plus, dans les cas usuels, on constate l'existence d'une partie minimale, en un certain sens, de ce graphe multiplicatif constituée de morphismes qui donnent une idée de la structure algébrique considérée, sans pour autant la décrire totalement. Par exemple, a, b, i, k donnent aussi bien l'idée d'une structure de catégorie que celle d'une structure de graphe multiplicatif [1]. Cet exemple pose d'ailleurs les problèmes liés de la comparaison selon leur «finesse» de certaines structures algébriques (ou de leurs esquisses) possédant une même idée et celui de la description d'une structure algébrique au moyen d'un graphe orienté (i. e. d'un système de «générateurs») et de relations.

Dans cet article, nous nous proposons de préciser ces notions déjà introduites explicitement dans [1] ou implicitement dans [3] du point de vue systématiquement constructif des esquisses (et surtout des préesquisses), en opposition avec celui, plus global, des types.

Nous introduisons d'abord deux notions de pseudo-esquisses qui présentent le double avantage d'alléger la démonstration du théorème 1 (caractérisation des pseudo-esquisses admettant une idée) et d'être plus pratiques que la notion d'esquisse (on n'impose pas que le morphisme canonique d'une pseudo-esquisse dans son type soit une injection canonique), tout en étant plus précises que celle de préesquisse (on évite certaines identifications «flagrantes» par passage au type).

Nous précisons ensuite la notion de pseudo-esquisse admettant une idée (i. e. de prémaquette) en celle de maquette (paragraphe 2). Une maquette est une prémaquette que son idée suffit à «engendrer». Nous en déduisons la notion de système de générateurs pour un type: c'est l'idée d'une maquette ayant ce type. Nous montrons alors que, sous certaines conditions, on peut déterminer un système de générateurs pour un type donné.

Une structure de graphe multiplicatif, en particulier de catégorie, sur un ensemble U est désignée par $U^{\cdot}$ ($\cdot$ symbolisant la loi de composition), lorsqu'aucune autre précision n'est donnée; α et β désignent alors les applications source et but de U dans la classe $U_0^{\cdot}$ des unités; la classe des couples composables est notée $U^{\cdot} * U^{\cdot}$. Si $I^{\cdot}$ est une catégorie, à toute unité e du graphe multiplicatif $U^{\cdot}$ on associe le néofoncteur constant $\hat{e}$ de $I^{\cdot}$ vers $U^{\cdot}$ défini par $\hat{e}(i) = e$ pour tout $i \in I$.

Sommaire.

0. Notations et définitions préliminaires.

Les notations sont celles de [1] et [2]. En particulier, $\mathfrak{M}_0$ et $\hat{\mathfrak{M}}_0$ sont deux univers tels que $\mathfrak{M}_0 \in \hat{\mathfrak{M}}_0$ et $\mathfrak{M}_0 \subset \hat{\mathfrak{M}}_0$, $\mathfrak{N}'$ et $\mathfrak{F}$ (resp. $\hat{\mathfrak{N}}'$ et $\hat{\mathfrak{F}}$) sont les catégories pleines de néofoncteurs et de foncteurs associées à $\mathfrak{M}_0$ (resp. à $\hat{\mathfrak{M}}_0$), $\mathfrak{I}$ et $\mathfrak{I}'$ sont deux parties de $\mathfrak{F}_0$ équipotentes à des éléments de $\mathfrak{M}_0$, $\mathfrak{F}^{\mathfrak{I}\mathfrak{I}'}$ (resp. $\mathfrak{S}^{\mathfrak{I}\mathfrak{I}'}$, $\mathfrak{S}'^{\mathfrak{I}\mathfrak{I}'}$) sont les catégories pleines de morphismes entre $(\mathfrak{I}, \mathfrak{I}')$-types (resp. $(\mathfrak{I}, \mathfrak{I}')$-esquisses, $(\mathfrak{I}, \mathfrak{I}')$-préesquisses), non pointés, au-dessus de $\hat{\mathfrak{M}}$, $p^{\mathfrak{I}\mathfrak{I}'}$ (resp. $p'^{\mathfrak{I}\mathfrak{I}'}$, $p''^{\mathfrak{I}\mathfrak{I}'}$) est le foncteur canonique de $\mathfrak{F}^{\mathfrak{I}\mathfrak{I}'}$ (resp. de $\mathfrak{S}^{\mathfrak{I}\mathfrak{I}'}$, de $\mathfrak{S}'^{\mathfrak{I}\mathfrak{I}'}$) vers $\hat{\mathfrak{M}}$, T (resp. T') est un foncteur $(\mathfrak{F}^{\mathfrak{I}\mathfrak{I}'}, \mathfrak{S}^{\mathfrak{I}\mathfrak{I}'})$-projection (resp. $(\mathfrak{F}^{\mathfrak{I}\mathfrak{I}'}, \mathfrak{S}'^{\mathfrak{I}\mathfrak{I}'})$-projection).

Nous utiliserons également la terminologie suivante:

DEFINITION 1. Si $U^{\cdot} \in \hat{\mathfrak{N}}'_0$ et $J^{\cdot} \in \hat{\mathfrak{F}}_0$, nous dirons que la transformation naturelle $\eta = (\phi, \tau, \hat{e})$ (resp. $\eta = (\hat{e}, \tau, \phi)$), appartenant à $\mathfrak{N}(U^{\cdot}, J^{\cdot})$ et telle que $\hat{e}$ soit le néofoncteur constant sur e, est une *$J^{\cdot}$-prélimite projective* (resp. *inductive) naturalisée* si, et seulement si, pour tout couple $(f_1, f_2) \in U \times U$ vérifiant

$$\tau(i).f_1 = \tau(i).f_2 \text{ (resp. } f_1.\tau(i) = f_2.\tau(i)) \text{ pour tout } i \in I_0^{\cdot},$$

on a $f_1 = f_2$.

Soit $U^{\cdot} \in \hat{\mathfrak{N}}'_0$. Pour tout entier $n \geqslant 1$, nous désignons par S_n l'ensemble des suites $(f_1, \ldots, f_n)$ d'éléments de U et nous posons $S = \bigcup_{n \geqslant 1} S_n$. Si $F = (f_1, \ldots, f_n) \in S$ et $F' = (f'_1, \ldots, f'_m) \in S$, nous posons:

$$F \perp F' = (f_1, \ldots, f_n, f'_1, \ldots, f'_m) \in S.$$

Nous allons définir un ensemble $L(U^{\cdot})$ par récurrence de la manière suivante:

$L_1(U^{\cdot}) = U$; si $f \in L_1(U^{\cdot})$, on pose $c_1^{U^{\cdot}}(f) = f$ et $\kappa_1^{U^{\cdot}}(f) = f$; si, pour $n \geqslant 1$, $L_n(U^{\cdot})$ et $c_n^{U^{\cdot}}: L_n(U^{\cdot}) \to S$, $\kappa_n^{U^{\cdot}}: L_n(U^{\cdot}) \to U$ sont définis, nous posons:

$$L_{n+1}(U^{\cdot}) = L_n(U^{\cdot}) \cup \{(l_2, l_1) \mid l_s \in L_n(U^{\cdot}),\ s = 1, 2 \text{ et } (\kappa_n^{U^{\cdot}}(l_2), \kappa_n^{U^{\cdot}}(l_1)) \in U^{\cdot} * U^{\cdot}\},$$

$$c_{n+1}^{U^{\cdot}}(l_2, l_1) = c_n^{U^{\cdot}}(l_2) \perp c_n^{U^{\cdot}}(l_1), \quad \kappa_{n+1}^{U^{\cdot}}(l_2, l_1) = \kappa_n^{U^{\cdot}}(l_2) . \kappa_n^{U^{\cdot}}(l_1).$$

DEFINITION 2. L'ensemble $L(U^{\cdot}) = \bigcup_{n \geqslant 1} L_n(U^{\cdot})$ est appelé *ensemble des chemins d'associativité de* $U^{\cdot}$, l'application $c_{U^{\cdot}} : L(U^{\cdot}) \to S$, définie par $c_{U^{\cdot}}|_{L_n(U^{\cdot})} = c_n^{U^{\cdot}}$, est appelée *application composantes* et l'application $\kappa_{U^{\cdot}} : L(U^{\cdot}) \to U$, définie par $\kappa_{U^{\cdot}}|_{L_n(U^{\cdot})} = \kappa_n^{U^{\cdot}}$, est appelée *application composition.*

Si $l \in L(U^{\cdot})$ et si $c_{U^{\cdot}}(l) \in S_n$, on dit que l est un chemin d'associativité de $U^{\cdot}$ de *longueur* n.

DEFINITION 3. Nous dirons que $\sigma = (U^{\cdot}, \mu_{U^{\cdot}}, \mu'_{U^{\cdot}}) \in \mathcal{S}_0^{\mathfrak{I}\mathfrak{I}'}$ est une $z'^{\mathfrak{I}\mathfrak{I}'}$-*pseudo-esquisse* si, et seulement si, elle vérifie la condition:

pour tout $I^{\cdot} \in \mathfrak{I}$ (resp. $I^{\cdot} \in \mathfrak{I}'$), tout $\phi \in U^{\cdot}.\hat{\mathfrak{N}}'.I^{\cdot}$ tel que $\mu_{U^{\cdot}}(\phi)$ (resp. $\mu'_{U^{\cdot}}(\phi)$) soit défini, $\mu_{U^{\cdot}}(\phi)$ (resp. $\mu'_{U^{\cdot}}(\phi)$) est une $I^{\cdot}$-prélimite projective (resp. inductive) naturalisée.

Nous désignerons par $\mathcal{Z}''^{\mathfrak{I}\mathfrak{I}'}$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{S}'^{\mathfrak{I}\mathfrak{I}'}$ admettant les $z'^{\mathfrak{I}\mathfrak{I}'}$-pseudo-esquisses pour classe d'objets.

DEFINITION 4. Nous dirons que $\sigma \in \mathcal{S}_0'^{\mathfrak{I}\mathfrak{I}'}$ est une $z^{\mathfrak{I}\mathfrak{I}'}$-*pseudo-esquisse* si et seulement si:

$$\begin{cases} \sigma \in \mathcal{Z}_0''^{\mathfrak{I}\mathfrak{I}'}, \\ \text{si } l_s \in L(U^{\cdot}),\ s = 1, 2, \text{ sont tels que } c_{U^{\cdot}}(l_1) = c_{U^{\cdot}}(l_2), \text{ alors} \\ \qquad \kappa_{U^{\cdot}}(l_1) = \kappa_{U^{\cdot}}(l_2). \end{cases}$$

Par analogie $\mathcal{Z}'^{\mathfrak{I}\mathfrak{I}'}$ désignera la sous-catégorie pleine de $\mathcal{Z}''^{\mathfrak{I}\mathfrak{I}'}$ admettant pour classe d'objets la classe des $z^{\mathfrak{I}\mathfrak{I}'}$-pseudo-esquisses. Lorsqu'aucune confusion ne sera possible, nous dirons z'-pseudo-esquisse et z-pseudo-esquisse pour simplifier. Bien entendu on a les inclusions:

$$\mathcal{S}_0^{\mathfrak{I}\mathfrak{I}'} \subset \mathcal{Z}_0'^{\mathfrak{I}\mathfrak{I}'} \subset \mathcal{Z}_0''^{\mathfrak{I}\mathfrak{I}'} \subset \mathcal{S}_0'^{\mathfrak{I}\mathfrak{I}'}.$$

REMARQUE. Dans les cas usuels on se borne souvent à constater qu'une $(\mathfrak{I}, \mathfrak{I}')$-préesquisse est une z'-pseudo-esquisse ou une z-pseudo-esquisse.

DEFINITION 5. Nous appellerons $(\mathfrak{I}, \mathfrak{I}')$-*idée* un $\sigma_0 = (U'^{\cdot}, \mu_{U'^{\cdot}}, \mu'_{U'^{\cdot}}) \in \mathcal{S}_0'^{\mathfrak{I}\mathfrak{I}'}$ tel que:

$$\begin{cases} U'^{\cdot} * U'^{\cdot} = \{(f, \alpha(f)) \mid f \in U'\} \cup \{(\beta(f), f) \mid f \in U'\}, \\ \mu_{U'^{\cdot}} \text{ (resp. } \mu'_{U'^{\cdot}}\text{) est de surjection sous-jacente vide.} \end{cases}$$

$I_0^{\mathfrak{J}\mathfrak{J}'}$ désignera la sous-classe de $\mathfrak{S}_0^{\mathfrak{J}\mathfrak{J}'}$ dont les éléments sont les $(\mathfrak{J}, \mathfrak{J}')$-idées. Il est clair que $I_0^{\mathfrak{J}\mathfrak{J}'} \subset \mathfrak{S}_0^{\mathfrak{J}\mathfrak{J}'}$.

Dans la suite une $(\mathfrak{J}, \mathfrak{J}')$-idée telle que σ_0 sera commodément écrite $([U'^{\cdot}], \emptyset, \emptyset)$, où $[U'^{\cdot}]$ est le graphe orienté sous-jacent à $U'^{\cdot}$. Inversement, à une structure de graphe orienté $[X]$ sur $X \in \hat{\mathfrak{M}}_0$, nous associerons canoniquement la $(\mathfrak{J}, \mathfrak{J}')$-idée $([X]^{\cdot}, \emptyset, \emptyset)$, notée $\Sigma[X]$. En particulier, si $\sigma = (U^{\cdot}, \mu_{U^{\cdot}}, \mu'_{U^{\cdot}}) \in \mathfrak{S}_0^{\mathfrak{J}\mathfrak{J}'}$, si $j_{\emptyset}^{\sigma}$ désigne le néofoncteur injection canonique de $[U^{\cdot}]^{\cdot}$ dans $U^{\cdot}$, on a:

$$\bar{j}_{\emptyset}^{\sigma} = (\sigma, j_{\emptyset}^{\sigma}, \Sigma[U^{\cdot}]) \in \sigma.\, \mathfrak{S}^{\mathfrak{J}\mathfrak{J}'} . I_0^{\mathfrak{J}\mathfrak{J}'} .$$

1. Idées des pseudo-esquisses. Prémaquettes.

Désormais x désignera l'un des symboles z ou z', et $\mathfrak{X}$ l'un des symboles $\mathfrak{Z}$ ou $\mathfrak{Z}'$.

Si $\sigma \in \mathfrak{X}_0^{\mathfrak{J}\mathfrak{J}'}$, nous désignerons par ${}^{x}\nabla(\sigma)$ la sous-catégorie pleine de la catégorie $\nabla\mathfrak{S}^{\mathfrak{J}\mathfrak{J}'}$ des triangles, [2], admettant pour classe d'objets la sous-classe ${}^{x}\nabla(\sigma)_0$ formée des $\bar{j} \in \sigma.\, \mathfrak{S}^{\mathfrak{J}\mathfrak{J}'}$ vérifiant:

$$\begin{cases} p''^{\mathfrak{J}\mathfrak{J}'}(\bar{j}) \in \hat{\mathfrak{M}}^{\iota}, \\ \text{si } \Phi_s \in \mathfrak{X}^{\mathfrak{J}\mathfrak{J}'}.\sigma,\ s = 1, 2, \text{ et si } \Phi_2 . \bar{j} = \Phi_1 . \bar{j}, \text{ alors } \Phi_2 = \Phi_1 . \end{cases}$$

Remarquons que ${}^{x}\nabla(\sigma)_0 \subset \sigma.\mathfrak{X}^{\mathfrak{J}\mathfrak{J}'}$, puisque l'on vérifie aisément que, si $\bar{j} \in \sigma.\mathfrak{S}^{\mathfrak{J}\mathfrak{J}'}$ est tel que $p''^{\mathfrak{J}\mathfrak{J}'}(\bar{j}) \in \hat{\mathfrak{M}}^{\iota}$, alors $\alpha(\bar{j}) \in \mathfrak{X}_0^{\mathfrak{J}\mathfrak{J}'}$.

DEFINITION 6. Nous dirons que σ est une *$(\mathfrak{J}, \mathfrak{J}')$-$x$-prémaquette de $(\mathfrak{J}, \mathfrak{J}')$-$x$-idée* σ_0 si, et seulement si, ${}^{x}\nabla(\sigma)$ admet un élément initial ${}^{x}\bar{i}^{\sigma}$ appartenant à $\mathfrak{X}^{\mathfrak{J}\mathfrak{J}'}.\sigma_0$.

Evidemment une $(\mathfrak{J}, \mathfrak{J}')$-$x$-prémaquette admet une et une seule $(\mathfrak{J}, \mathfrak{J}')$-$x$-idée. De plus, celle-ci appartient à $I_0^{\mathfrak{J}\mathfrak{J}'}$, i.e. est une $(\mathfrak{J}, \mathfrak{J}')$-idée, ce qui justifie la terminologie adoptée. Lorsqu'aucune confusion ne sera possible, nous dirons x-prémaquette et x-idée plutôt que $(\mathfrak{J}, \mathfrak{J}')$-$x$-prémaquette et $(\mathfrak{J}, \mathfrak{J}')$-$x$-idée.

Etablissons une condition nécessaire et suffisante pour qu'une x-pseudo-esquisse soit une x-prémaquette. Intuitivement la x-idée d'une x-prémaquette ne contient aucun des morphismes qui sont univoquement déterminés par des conditions vérifiées par la $(\mathfrak{J}, \mathfrak{J}')$-préesquisse.

A. Morphismes z'-réductibles et z-réductibles.

Supposons $\sigma \in \mathcal{Z}_0^{\prime\prime \mathfrak{G}'}$. Nous posons:

DEFINITION 7. $f \in U$, $f \notin U_0^{\bullet}$ sera dit *z'-réductible* si, et seulement si, il existe un chemin d'associativité $l \in L(U^{\bullet})$ vérifiant:

$$\begin{cases} \text{si } c_{U^{\bullet}}(l) = (f_1, \dots, f_n), \text{ alors } f_s \neq f,\ s = 1, \dots, n, \\ \kappa_{U^{\bullet}}(l) = f. \end{cases}$$

Supposons que $\sigma \in \mathcal{Z}_0^{\prime \mathfrak{G}'}$. Avant de définir les morphismes *z*-réductibles, effectuons la construction qui suit.

A 1. Si $f \in U$ est un élément non *z'*-réductible et tel que $f \notin U_0^{\bullet}$, désignons par $\tilde{f}$ un élément tel que $\{\tilde{f}\} \in \hat{\mathfrak{M}}_0$ et $\tilde{f} \notin U$. Posons:

$$\begin{cases} \tilde{U}_f = U \cup \{\tilde{f}\}, \\ \tilde{\alpha}(g) = \alpha(g) \text{ si } g \in U,\ \tilde{\alpha}(\tilde{f}) = \tilde{\alpha}(f) = \alpha(f), \\ \tilde{\beta}(g) = \beta(g) \text{ si } g \in U,\ \tilde{\beta}(\tilde{f}) = \tilde{\beta}(f) = \beta(f). \end{cases}$$

On vérifie immédiatement que $\tilde{U}_f$ est muni d'une structure de graphe orienté $[\tilde{U}_f] = (\tilde{U}_f, \tilde{\beta}, \tilde{\alpha})$, [2].

A 2. Soit alors $\tilde{U}_f * \tilde{U}_f$ l'ensemble des couples $(h_1, h_2) \in \tilde{U}_f \times \tilde{U}_f$ vérifiant de plus l'une des conditions:

(i) $(h_1, h_2) \in U^{\bullet} * U^{\bullet}$;

(ii) $h_1 = \tilde{f}$, $h_2 \neq f$ et $(f, h_2) \in U^{\bullet} * U^{\bullet}$;

(iii) $h_1 \neq f$, $h_2 = \tilde{f}$ et $(h_1, f) \in U^{\bullet} * U^{\bullet}$;

(iv) $h_s = \tilde{f}$, $s = 1, 2$, si, et seulement si, $(f, f) \in U^{\bullet} * U^{\bullet}$.

Dans ces différents cas, nous posons:

(j) $\tilde{\underline{\kappa}}(h_1, h_2) = h_1 \cdot h_2$ dans $U^{\bullet}$;

(jj) $\tilde{\underline{\kappa}}(\tilde{f}, h_2) = \begin{cases} f \cdot h_2 & \text{si } f \cdot h_2 \neq f \text{ dans } U^{\bullet}, \\ \tilde{f} & \text{si } f \cdot h_2 = f \text{ dans } U^{\bullet}; \end{cases}$

(jjj) $\tilde{\underline{\kappa}}(h_1, \tilde{f}) = \begin{cases} h_1 \cdot f & \text{si } h_1 \cdot f \neq f \text{ dans } U^{\bullet}, \\ \tilde{f} & \text{si } h_1 \cdot f = f \text{ dans } U^{\bullet}; \end{cases}$

(jv) $\tilde{\underline{\kappa}}(\tilde{f}, \tilde{f}) = \begin{cases} f \cdot f & \text{si } f \cdot f \neq f \text{ dans } U^{\bullet}, \\ \tilde{f} & \text{si } f \cdot f = f \text{ dans } U^{\bullet}. \end{cases}$

On constate facilement que $((\tilde{U}_f, \tilde{\beta}, \tilde{\alpha}), \tilde{\kappa})$, où $\tilde{\kappa} = (\tilde{U}_f, \tilde{\underline{\kappa}}, \tilde{U}_f * \tilde{U}_f)$, définit une structure de graphe multiplicatif sur $\tilde{U}_f$ que nous notons $\tilde{U}_f^{\bullet}$, puisque $U^{\cdot}$ en est trivialement un sous-graphe multiplicatif. Pour cette même raison, nous poserons

$$\tilde{\kappa}(h_1, h_2) = h_1 . h_2 \text{ si } (h_1, h_2) \in \tilde{U}_f * \tilde{U}_f \text{ et } \tilde{U}_f * \tilde{U}_f = \tilde{U}_f^{\cdot} * \tilde{U}_f^{\cdot} .$$

Enfin la surjection $\underline{\rho}' : U \to \underline{\rho}'(U) \subset \tilde{U}_f$, définie par

$$\rho'(h) = h \text{ si } h \in U - \{f\}, \quad \rho'(f) = \tilde{f},$$

définit un néofoncteur injectif $\rho' = (\tilde{U}_f^{\cdot}, \underline{\rho}', U^{\cdot})$. Soit $\underset{\sim}{U}_f^{\cdot}$ l'image isomorphe de $U^{\cdot}$ par ρ' dans $\check{U}_f^{\cdot}$. Il est clair que $\rho = (\underset{\sim}{U}_f^{\cdot}, \underline{\rho}', U^{\cdot})$ est un néofoncteur inversible.

A 3. Notons $F_{\tilde{U}_f}$ (resp. $F'_{\tilde{U}_f}$) la classe de tous les néofoncteurs $\tilde{\phi} \in \tilde{U}_f^{\cdot} . \hat{\mathfrak{N}}' . I^{\cdot}$ tels que $I^{\cdot} \in \mathfrak{I}$ (resp. $I^{\cdot} \in \mathfrak{I}'$) et vérifiant l'une des deux conditions:

$$\begin{cases} \tilde{\underline{\phi}}(I) \subset U; \ \phi \text{ désigne alors le néofoncteur } (U^{\cdot}, \tilde{\underline{\phi}}, I^{\cdot}), \\ \tilde{\underline{\phi}}(I) \subset \underset{\sim}{U}_f; \text{ nous poserons dans ce cas } \phi = \rho^{-1}.(\underset{\sim}{U}_f^{\cdot}, \tilde{\underline{\phi}}, I^{\cdot}). \end{cases}$$

Nous définirons $\mu_{\tilde{U}_f}(\tilde{\phi})$ (resp. $\mu'_{\tilde{U}_f}(\tilde{\phi})$) si et seulement si:

$$\tilde{\phi} \in F_{\tilde{U}_f} \text{ (resp. } \tilde{\phi} \in F'_{\tilde{U}_f}) \text{ et } \mu_{U^{\cdot}}(\phi) \text{ (resp. } \mu'_{U^{\cdot}}(\phi)) \text{ est défini.}$$

Dans ces conditions, nous poserons $\mu_{\tilde{U}_f}(\tilde{\phi}) = (\tilde{\phi}, \tilde{\tau}, \hat{e})$ (resp. $\mu'_{\tilde{U}_f}(\tilde{\phi}) = (\hat{e}, \tilde{\tau}, \tilde{\phi})$), où

$$\begin{cases} \tilde{\tau}(i_0) = \rho(\tau(i_0)) \text{ pour tout } i_0 \in I_0^{\cdot}, \text{ lorsque } \tilde{\underline{\phi}}(I) \subset \underset{\sim}{U}_f, \\ \tilde{\tau}(i_0) = \tau(i_0), \text{ pour tout } i_0 \in I_0^{\cdot}, \text{ si } \tilde{\underline{\phi}}(I) \subset U, \end{cases}$$

quand $\mu_{U^{\cdot}}(\phi) = (\phi, \tau, \hat{e})$ (resp. $\mu'_{U^{\cdot}}(\phi) = (\hat{e}, \tau, \phi)$). Il est clair que $\tilde{\sigma}_f = (\tilde{U}_f^{\cdot}, \mu_{\tilde{U}_f}, \mu'_{\tilde{U}_f}) \in \mathfrak{S}_0^{\mathfrak{I}\mathfrak{I}'}$, ce qui achève la construction.

DEFINITION 8. Nous dirons que $\tilde{\sigma}_f$ est une $(\mathfrak{I}, \mathfrak{I}')$-*dilatation en* f *de* σ.

DEFINITION 9. $f \in U$, $f \notin U_0^{\cdot}$ sera dit *z-réductible* si, et seulement si, l'une des conditions suivantes est vérifiée:

f est z'-réductible dans $U^{\cdot}$,

f n'est pas z'-réductible dans $U^{\cdot}$ et il existe deux chemins d'associativité $l_s \in L(\tilde{U}_f^{\cdot})$, $s = 1, 2$, tels que

$$c_{\tilde{U}_f^{\cdot}}(l_1) = c_{\tilde{U}_f^{\cdot}}(l_2) \quad \text{et} \quad \kappa_{\tilde{U}_f^{\cdot}}(l_1) = f, \ \kappa_{\tilde{U}_f^{\cdot}}(l_2) = \tilde{f}.$$

B. Morphismes naturalisés, conaturalisés, inductifs, projectifs.

DEFINITION 10. Nous dirons que $f \in U$ est $\mathfrak{I}$-*naturalisé* (resp. $\mathfrak{I}'$-*conatura-*

lisé) si, et seulement si, il existe $I^{\cdot} \in \mathfrak{I}$ (resp. $I^{\cdot} \in \mathfrak{I}'$), $i_0 \in I_0^{\cdot}$, $\phi \in U^{\cdot} . \hat{\mathfrak{N}}'. I^{\cdot}$ tels que:

$\mu_{U^{\cdot}}(\phi)$ (resp. $\mu'_{U^{\cdot}}(\phi)$) est défini et égal à $(\phi, \tau, \hat{e})$ (resp. $(\hat{e}, \tau, \phi)$),

$\phi(i) \neq f$ pour tout $i \in I$; $\tau(i_0) = f$.

DEFINITION 11. Nous dirons que $f \in U$, $f \notin U_0^{\cdot}$, *est* $\mathfrak{I}$*-projectif* (resp. $\mathfrak{I}'$-*inductif)* si, et seulement si, il existe $I^{\cdot} \in \mathfrak{I}$ (resp. $I^{\cdot} \in \mathfrak{I}'$) et $\phi \in U^{\cdot} . \mathfrak{N}' . I^{\cdot}$ tels que:

$$\begin{cases} \mu_{U^{\cdot}}(\phi) \text{ (resp. } \mu'_{U^{\cdot}}(\phi)\text{) est défini et égal à } (\phi, \tau, \hat{e}'), \text{ où } e' = \beta(f) \\ \text{(resp. à } (\hat{e}, \tau, \phi), \text{ où } e = \alpha(f)); \\ \tau(i_0) \neq f \text{ pour tout } i_0 \in I_0^{\cdot}; \\ \tau(i_0).f \text{ (resp. } f.\tau(i_0)\text{) est défini et différent de } f \text{ pour tout } i_0 \in I_0^{\cdot}. \end{cases}$$

Les définitions 10 et 11 sont évidemment indépendantes de la valeur de x et de $\mathfrak{X}$.

C. Unités limitées et colimitées.

Soit ${}^xR(\sigma)$ (resp. $N_{\mathfrak{I}}(\sigma)$, $N'_{\mathfrak{I}'}(\sigma)$, $P_{\mathfrak{I}}(\sigma)$, $P'_{\mathfrak{I}'}(\sigma)$) la classe des éléments x-réductibles (resp. $\mathfrak{I}$-naturalisés, $\mathfrak{I}'$-conaturalisés, $\mathfrak{I}$-projectifs, $\mathfrak{I}'$-inductifs) de σ et $\Gamma(\sigma)$ l'ensemble des $f \in U$ admettant au moins un inverse $f' \neq f$. Posons

$$\begin{cases} {}^{z'}W(\sigma) = {}^{z'}R(\sigma) \cup N_{\mathfrak{I}}(\sigma) \cup N'_{\mathfrak{I}'}(\sigma) \cup P_{\mathfrak{I}}(\sigma) \cup P'_{\mathfrak{I}'}(\sigma), \\ {}^{z}W(\sigma) = {}^{z}R(\sigma) \cup N_{\mathfrak{I}}(\sigma) \cup N'_{\mathfrak{I}'}(\sigma) \cup P_{\mathfrak{I}}(\sigma) \cup P'_{\mathfrak{I}'}(\sigma) \cup \Gamma(\sigma), \\ {}^{x}Y(\sigma) = \complement_U \; {}^{x}W(\sigma). \end{cases}$$

DEFINITION 12. Nous dirons que $e \in {}^xY(\sigma)$, $e \in U_0^{\cdot}$, est $\mathfrak{I}$*-limitée* (resp. $\mathfrak{I}'$*-colimitée*) si, et seulement si,

$$\begin{cases} (U.e) \cap {}^xY(\sigma) = (e.U) \cap {}^xY(\sigma) = \{e\}, \\ \text{il existe } I^{\cdot} \in \mathfrak{I} \text{ (resp. } I^{\cdot} \in \mathfrak{I}'\text{) et } \phi \in U^{\cdot} . \hat{\mathfrak{N}}' . I^{\cdot} \text{ tels que } \phi(i_0) \neq e \\ \text{pour tout } i_0 \in I_0^{\cdot} \text{ et que } \mu_{U^{\cdot}}(\phi) \text{ (resp. } \mu'_{U^{\cdot}}(\phi)\text{) soit défini et égal} \\ \text{à } (\phi, \tau, \hat{e}) \text{ (resp. } (\hat{e}, \tau, \phi)). \end{cases}$$

Soit ${}^xL_{\mathfrak{I}}(\sigma)$ (resp. ${}^xL'_{\mathfrak{I}'}(\sigma)$) la classe des unités $\mathfrak{I}$-limitées (resp. $\mathfrak{I}'$-colimitées) de ${}^xY(\sigma)$. Posons:

$${}^xV(\sigma) = {}^xL_{\mathfrak{I}}(\sigma) \cup {}^xL'_{\mathfrak{I}'}(\sigma),$$

$$X(\sigma) = \complement_{{}^{x}Y(\sigma)}({}^{x}V(\sigma)), \quad \text{pour } x = z, z' \text{ et } X = Z, Z';$$

nous pouvons énoncer la condition nécessaire et suffisante cherchée:

THEOREME 1.

(i) *$X(\sigma)$ définit un sous-graphe orienté $[X(\sigma)]$ de $[U^{\cdot}]$.*

(ii) *Pour que $\sigma \in \mathfrak{X}_0^{\prime\mathfrak{J}\mathfrak{J}'}$ soit une x-prémaquette, il faut et il suffit que $\bar{j}^X = (\sigma, j^X, \Sigma[X(\sigma)])$ appartienne à ${}^{x}\nabla(\sigma)_0$, où j^X est le néo-foncteur injection canonique de $[X(\sigma)]^{\cdot}$ dans $U^{\cdot}$.*

(iii) *Dans ces conditions $\Sigma[X(\sigma)] = ([X(\sigma)], \emptyset, \emptyset)$ est la x-idée de σ et $\bar{j}^X = {}^{x}\bar{i}^{\sigma}$.*

Δ. (i) L'assertion se montre facilement compte tenu des définitions qui précèdent.

(ii1) Démontrons que la condition est nécessaire lorsque $x = z'$. Pour ce faire, nous supposons que $\sigma \in \mathfrak{Z}_0^{\prime\prime\mathfrak{J}\mathfrak{J}'}$ est une z'-prémaquette de z'-idée $\sigma_0 = ([U'], \emptyset, \emptyset) \in I_0^{\mathfrak{J}\mathfrak{J}'}$. Si $f \in U$ et $f \notin U_0^{\cdot}$, nous posons $V = U - \{f\}$. Alors V définit un sous-graphe orienté $[V]$ de $[U^{\cdot}]$ et nous désignons par $\bar{j}^V = (\sigma, j^V, \Sigma[V])$ le morphisme injection canonique.

(ii11) Si $f \in {}^{z'}R(\sigma)$, soit l un chemin d'associativité de $U^{\cdot}$ vérifiant les conditions de la définition 7 dont nous reprenons les notations. Il est clair que $f_s \in V$, $s = 1, \dots, n$. Si $\Phi_s \in \mathfrak{Z}^{\prime\prime\mathfrak{J}\mathfrak{J}'}.\sigma$, $s = 1, 2$, sont tels que

$$\beta(\Phi_s) = (\bar{U}^{\cdot}, \mu_{\bar{U}^{\cdot}}, \mu'_{\bar{U}^{\cdot}}) \quad \text{et} \quad \Phi_2 . \bar{j}^V = \Phi_1 . \bar{j}^V,$$

ils définissent deux applications $F_s : L(U^{\cdot}) \to L(\bar{U}^{\cdot})$ (que l'on peut définir «terme à terme» ou par récurrence). En conséquence $F_s(l)$, $s = 1, 2$, sont deux chemins d'associativité de $\bar{U}^{\cdot}$ vérifiant:

$$c_{\bar{U}^{\cdot}}(F_1(l)) = (\Phi_s(f_1), \dots, \Phi_s(f_n)) = c_{\bar{U}^{\cdot}}(F_2(l)),$$

$$\kappa_{\bar{U}^{\cdot}}(F_s(l)) = \Phi_s(f), \quad s = 1, 2.$$

D'où l'on déduit $\Phi_1 = \Phi_2$. Ceci permet de conclure que $\bar{j}^V \in {}^{z'}\bar{\nabla}(\sigma)_0$, ou encore que $U' \subset V$.

De manière analogue, si $f \in N_{\mathfrak{J}}(\sigma)$ (resp. $f \in N_{\mathfrak{J}'}(\sigma)$), on montre que $U' \subset V$.

(ii12) Supposons que $f \in P_{\mathfrak{J}}(\sigma)$. Nous reprenons les notations de la définition 11. On conclut aisément que $U' \subset V$ lorsque $\phi(i) \neq f$ pour tout $i \in I$. Supposons donc qu'il existe $i_1 \in I$ tel que $\phi(i_1) = f$ et que $\Phi_2 . \bar{j}^V = \Phi_1 . \bar{j}^V$. On a

$$\Phi_1(\tau(i_0).f) = \Phi_1(\tau(i_0)).\Phi_1(f) = \Phi_2(\tau(i_0)).\Phi_2(f) = = \Phi_1(\tau(i_0)).\Phi_2(f),$$

puisque

$$\tau(i_0).f \neq f \quad \text{ et } \quad \tau(i_0) \neq f$$

pour tout $i_0 \in I_0^{\cdot}$. Comme $\beta(\Phi_s)$ est une z'-pseudo-esquisse, ceci implique $\Phi_1(f) = \Phi_2(f)$ et par suite $\Phi_1 = \Phi_2$.

Comme un raisonnement analogue s'applique au cas $f \in P'_{\mathcal{J}'}(\sigma)$, on en déduit $U' \subset {}^{z'}Y(\sigma)$.

(ii13) Si $e \in L_{\mathcal{J}}(\sigma)$, soit $U''^{\cdot}$ le sous-graphe multiplicatif plein de $U^{\cdot}$ admettant $U_0^{\cdot} - \{e\}$ pour classe d'objets. Avec les notations de la définition 12, supposons qu'il existe $i_0 \in I_0^{\cdot}$ tel que $\beta(\tau(i_0)) = e$. Il vient

$$\phi(i_0) = \beta(\tau(i_0)) = e,$$

contrairement à l'hypothèse. Par conséquent on a $\phi(I) \subset U''$. Désignons par $j^{U''}$ le néofoncteur injection canonique de $[U''^{\cdot}]^{\cdot}$ dans $U^{\cdot}$ et posons $\bar{j}^{U''} = (\sigma, j^{U''}, \Sigma[U''^{\cdot}]) \in \mathcal{Z}''^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$.

Si $\Phi_s \in \mathcal{Z}''^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}.\sigma$, $s = 1, 2$, si $\Phi_2 . \bar{j}^{U''} = \Phi_1 . j^{U''}$, il vient $\Phi_2 . \phi = \Phi_1 . \phi$. On en déduit $\Phi_2(e) = \Phi_1(e)$, ce qui revient à dire que $\Phi_2 |{}^{z'}Y(\sigma) = \Phi_1 |{}^{z'}Y(\sigma)$. Le résultat final de (ii12) montre donc que $\Phi_2 = \Phi_1$.

En d'autres termes $\bar{j}^{U''} \in {}^{z'}\nabla(\sigma)_0$, c'est-à-dire $U' \subset Z'(\sigma)$, ou encore $\bar{j}^{Z'} \in {}^{z'}\nabla(\sigma)_0$.

(ii2) Supposons maintenant que $\sigma \in \mathcal{Z}_0'^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$ soit une z-prémaquette de z-idée σ_0.

(ii21) Supposons $f \in {}^{z}R(\sigma)$. Si f est z'-réductible, le résultat de (ii11) s'applique.

Supposons donc que f vérifie la seconde condition de la définition 9, dont nous reprenons les notations; désignons par $\tilde{\sigma}_f$ la $(\mathcal{J}, \mathcal{J}')$-dilatation de σ en f (définition 8). Alors $V = U - \{f\}$ définit un sous-graphe multiplicatif $V^{\cdot}$ de $U^{\cdot}$, et $\bar{j}^V$ est le morphisme défini comme en (ii1).

Si $\Phi_s \in (\bar{U}^{\cdot}, \bar{\mu}_{\bar{U}^{\cdot}}, \mu'_{\bar{U}^{\cdot}}).\mathfrak{Z}'^{\mathfrak{M}'}.\sigma$, $s = 1, 2$, vérifient $\Phi_1.\bar{j}^V = \Phi_2.\bar{j}^V$, nous définissons $\tilde{\underline{\Phi}} : \tilde{U}_f \to \tilde{\underline{\Phi}}(\tilde{U}_f) \subset U$ par les conditions:

$\tilde{\underline{\Phi}}(h) = \Phi_1(h)$, si $h \neq \tilde{f}$,

$\tilde{\underline{\Phi}}(\tilde{f}) = \Phi_2(f)$.

Comme $f \notin \tilde{U}^{\cdot}_{f0}$, $\tilde{f} \notin \tilde{U}^{\cdot}_{f0}$ et $\tilde{U}^{\cdot}_{f0} \subset V^{\cdot}_0$, il est clair que l'on a

$$\tilde{\underline{\Phi}}(\tilde{U}^{\cdot}_0) = \tilde{\underline{\Phi}}(U^{\cdot}_0) = \Phi_1(U^{\cdot}_0) \subset \bar{U}^{\cdot}_0.$$

(ii211) Si $(h_1, h_2) \in \tilde{U}^{\cdot}_f * \tilde{U}^{\cdot}_f$ est tel que $(h_1, h_2) \in U^{\cdot} * U^{\cdot}$, alors $\tilde{\underline{\Phi}}(h_1.h_2) = \Phi_1(h_1.h_2)$, car $h_1.h_2 \neq \tilde{f}$. Ceci donne, puisque $h_s \neq \tilde{f}$, $s = 1, 2$:

$$\tilde{\underline{\Phi}}(h_1.h_2) = \Phi_1(h_1).\Phi_1(h_2) = \tilde{\underline{\Phi}}(h_1).\tilde{\underline{\Phi}}(h_2).$$

(ii212) Supposons que $(\tilde{f}, h_2) \in \tilde{U}^{\cdot}_f * \tilde{U}^{\cdot}_f$, ce qui implique $h_2 \neq f$, et que $\tilde{f}.h_2 \neq \tilde{f}$; c'est-à-dire $(f, h_2) \in U^{\cdot} * U^{\cdot}$ et $f.h_2 \neq f$. Nous en déduisons, par des égalités successives:

$$\tilde{\underline{\Phi}}(\tilde{f}.h_2) = \tilde{\underline{\Phi}}(\tilde{f}).\tilde{\underline{\Phi}}(h_2).$$

(ii213) Supposons, avec des notations identiques, que $f.h_2 = f$, ce qui impose $\tilde{f}.h_2 = \tilde{f}$. On obtient $\tilde{\underline{\Phi}}(\tilde{f}.h_2) = \tilde{\underline{\Phi}}(\tilde{f}).\tilde{\underline{\Phi}}(h_2)$.

(ii214) Si $(h_1, \tilde{f}) \in \tilde{U}^{\cdot}_f * \tilde{U}^{\cdot}_f$, où $h_1 \in U$ et $h_1 \neq f$, par symétrie on prouve aisément que $\tilde{\underline{\Phi}}(h_1.\tilde{f}) = \tilde{\underline{\Phi}}(h_1).\tilde{\underline{\Phi}}(\tilde{f})$.

(ii215) Si $f.f$ est défini dans $U^{\cdot}$ et tel que $f.f \neq f$, il vient $\tilde{\underline{\Phi}}(\tilde{f}.\tilde{f}) = \tilde{\underline{\Phi}}(f.f)$, ce qui suffit à prouver que

$$\tilde{\underline{\Phi}}(\tilde{f}.\tilde{f}) = \underline{\Phi}_2(f).\underline{\Phi}_2(f), \text{ donc } \tilde{\underline{\Phi}}(\tilde{f}.\tilde{f}) = \tilde{\underline{\Phi}}(\tilde{f}).\tilde{\underline{\Phi}}(\tilde{f}).$$

(ii216) Si $f.f$ est défini et égal à f dans $U^{\cdot}$, on a $\tilde{\underline{\Phi}}(\tilde{f}.\tilde{f}) = \tilde{\underline{\Phi}}(\tilde{f}) = \Phi_2(f)$. Or

$$\Phi_2(f) = \Phi_2(f.f) = \Phi_2(f).\Phi_2(f).$$

D'où l'on conclut que $\tilde{\underline{\Phi}}(\tilde{f}.\tilde{f}) = \tilde{\underline{\Phi}}(\tilde{f}).\tilde{\underline{\Phi}}(\tilde{f})$.

Par suite $\tilde{\underline{\Phi}}$ définit un néofoncteur $\tilde{\Phi} = (\bar{U}^{\cdot}, \tilde{\underline{\Phi}}, \tilde{U}^{\cdot}_f)$ et induit une application $\tilde{F} : L(\tilde{U}^{\cdot}) \to L(\bar{U}^{\cdot})$. Il s'ensuit

$$\kappa_{\bar{U}^{\cdot}}(\tilde{F}(l_1)) = \tilde{\Phi}(f) = \Phi_1(f),$$
$$\kappa_{\bar{U}^{\cdot}}(\tilde{F}(l_2)) = \tilde{\Phi}(\tilde{f}) = \Phi_2(f),$$
$$c_{\bar{U}^{\cdot}}(\tilde{F}(l_1)) = c_{\bar{U}^{\cdot}}(\tilde{F}(l_2)).$$

On en déduit $\Phi_2 = \Phi_1$ et donc $U' \subset V$, ce qui achève (ii21).

(ii22) Il est clair que l'on obtient, de façon analogue à (ii1), $U' \subset V$ dès que $f \in N\mathfrak{g}(\sigma)$ (resp. $N\mathfrak{g}'(\sigma)$, $P\mathfrak{g}(\sigma)$, $P\mathfrak{g}'(\sigma)$. Ceci signifie que l'on a $U' \subset {}^zW'(\sigma)$, lorsque

$$ {}^zW'(\sigma) = {}^zR(\sigma) \cup N\mathfrak{g}(\sigma) \cup N\mathfrak{g}'(\sigma) \cup P\mathfrak{g}(\sigma) \cup P\mathfrak{g}'(\sigma). $$

(ii23) Si $(\bar{U}^\cdot, \mu_{\bar{U}^\cdot}, \mu'_{\bar{U}^\cdot}) \in \mathcal{Z}'^{\mathfrak{g}\mathfrak{g}'}_0$, si $g'' \in \bar{U}$ admet g''_s, $s = 1, 2$, pour inverses, les deux chemins d'associativité $l_s \in L(\bar{U}^\cdot)$, $s = 1, 2$,

$$ l_1 = (g''_2, (g'', g''_1)) \quad \text{et} \quad l_2 = ((g''_2, g''), g''_1) $$

sont tels que $\kappa_{\bar{U}^\cdot}(l_1) = g''_2 = g''_1 = \kappa_{\bar{U}^\cdot}(l_2)$. En conséquence si $g \in U$, $g \notin U_0^\cdot$ a pour unique inverse $g' \neq g$, si $V = U - \{g\}$, si $\Phi_s \in \mathcal{Z}'^{\mathfrak{g}\mathfrak{g}'}.\sigma$, sont tels que $\Phi_2.\bar{j}^V = \Phi_1.\bar{j}^V$, alors $\Phi_2(g') = \Phi_1(g')$ admet $\Phi_2(g)$ et $\Phi_1(g)$ pour inverses dans $\bar{U}^\cdot$. D'où $\Phi_2(g) = \Phi_1(g)$, et $\Phi_2 = \Phi_1$. Ceci s'écrit encore $U' \subset V$.

(ii24) Le raisonnement de (ii13) s'applique trivialement, moyennant un changement évident de notations.

Lorsque $x = z$, la condition est également nécessaire.

(ii3) Montrons que la condition est suffisante en supposant que

$$ \alpha(\bar{j}^V) = (V^\cdot, \mu_{V^\cdot}, \mu'_{V^\cdot}), \quad \bar{j}^V \in \sigma.\mathcal{S}'^{\mathfrak{g}\mathfrak{g}'}, \quad p''^{\mathfrak{g}\mathfrak{g}'}(\bar{j}^V) \in \hat{\mathfrak{M}}\iota $$

et que $f \in X(\sigma)$, $f \notin V$.

(ii31) Supposons que $f \notin U_0^\cdot$ et soit $\underline{\tilde{k}}: \tilde{U}_f \to \tilde{k}(\tilde{U}_f) \subset U$ défini par:

$$ \underline{\tilde{k}}(h) = h \quad \text{si} \quad h \neq \tilde{f} \quad \text{et} \quad \underline{\tilde{k}}(\tilde{f}) = f, $$

où $\tilde{\sigma}_f = (\tilde{U}_f^\cdot, \mu_{\tilde{U}_f^\cdot}, \mu'_{\tilde{U}_f^\cdot})$ est la $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}')$-dilatation de σ en f (définition 8). On constate que $\underline{\tilde{k}}$ définit un néofoncteur surjectif $\tilde{k} = (U^\cdot, \underline{\tilde{k}}, \tilde{U}_f^\cdot)$.

Supposons que $\tilde{\phi} \in \tilde{U}_f^\cdot.\hat{\mathfrak{N}}'.I^\cdot$, où $I^\cdot \in \mathfrak{g}$, soit tel que $\mu_{\tilde{U}_f^\cdot}(\tilde{\phi})$ soit défini et égal à $(\tilde{\phi}, \tilde{\tau}, \beta(f_s))$, $s = 1, 2$, et que $\tilde{\tau}(i_0).f_1 = \tilde{\tau}(i_0).f_2$, pour tout $i_0 \in I_0^\cdot$. Alors $\tilde{k}(\tilde{\tau}(i_0)).\tilde{k}(f_s)$, $s = 1, 2$, sont égaux pour tout $i_0 \in I_0^\cdot$, ce qui impose $\tilde{k}(f_1) = \tilde{k}(f_2)$.

(ii311) Si (f_1, f_2) vérifie les deux conditions

$$ (f_1, f_2) \neq (f, \tilde{f}), \quad (f_1, f_2) \neq (\tilde{f}, f), $$

alors on a $f_1 = f_2$.

(ii312) Supposons donc, pour fixer les idées, que $(f_1, f_2) = (f, \tilde{f})$. Alors $\tilde{k}(f) = \tilde{k}(\tilde{f}) = f$. Comme $f \notin P\mathfrak{J}(\sigma)$, l'une des conditions suivantes est vérifiée, où $\underline{\tau} = \underline{\tilde{k}}.\underline{\tilde{\tau}}$:

$$\tau(i_0) = f, \quad \tau(i_0).f = f,$$

pour au moins un $i_0 \in I_0^{\cdot}$. Or $\tilde{\tau}(i_0).\tilde{f}$ (resp. $\tilde{\tau}(i_0).f$) est défini. Si $\tilde{\tau}(i_0) = f$, il y a contradiction, car $f.\tilde{f}$ n'est pas défini dans $\tilde{U}_f^{\cdot}$; de même si $\tilde{\tau}(i_0) = \tilde{f}$, le composé $\tilde{f}.f$ n'étant pas défini; ainsi l'hypothèse (ii312) ne peut pas être réalisée, puisque $\tilde{\tau}(i_0) \in U - \{f\}$ implique $\tilde{\tau}(i_0).f \neq \tilde{f}$ et $\tilde{\tau}(i_0).\tilde{f} \neq f$. On raisonne de même dans le cas inductif. Donc (ii31) prouve que $\tilde{\sigma}_f \in \mathfrak{Z}_0^{\mathfrak{J}\mathfrak{J}'}$.

(ii313) Supposons de plus que $x = z$, $\sigma \in \mathfrak{Z}_0^{\mathfrak{J}\mathfrak{J}'}$ et que $l_s \in L(\tilde{U}_f^{\cdot})$, $s = 1, 2$, soient des chemins tels que $c_{\tilde{U}_f^{\cdot}}(l_1) = c_{\tilde{U}_f^{\cdot}}(l_2)$. Alors $\tilde{k}$ induit une application $K: L(\tilde{U}_f^{\cdot}) \to L(U^{\cdot})$ et $K(l_s)$ sont deux chemins d'associativité de $U^{\cdot}$. Posons $\kappa_{\tilde{U}_f^{\cdot}}(l_s) = h_s$, $s = 1, 2$. Si (h_1, h_2) vérifie les deux conditions:

$$(h_1, h_2) \neq (f, \tilde{f}), \quad (h_1, h_2) \neq (\tilde{f}, f),$$

on obtient $\kappa_{U^{\cdot}}(K(l_s)) = \tilde{k}(h_s)$, $s = 1, 2$. Comme $h_1 \neq h_2$ équivaut à $\tilde{k}(h_1) \neq \tilde{k}(h_2)$, il vient $h_1 = h_2$.

(ii314) Conservant ces notations, supposons par exemple que $(h_1, h_2) = (f, \tilde{f})$. On a $\kappa_{U^{\cdot}}(K(l_1)) = \kappa_{U^{\cdot}}(K(l_2)) = f$. Or $f \notin {}^{z}R(\sigma)$, ce qui est contradictoire. Cette hypothèse n'est donc pas réalisée.

(ii31) prouve ainsi que $\tilde{\sigma}_f \in \mathfrak{Z}_0^{\mathfrak{J}\mathfrak{J}'}$ dès que $\sigma \in \mathfrak{Z}_0^{\mathfrak{J}\mathfrak{J}'}$.

(ii315) Soient $\overline{id} = (\tilde{\sigma}_f, id, \sigma)$ et $\bar{\rho} = (\tilde{\sigma}_f, \rho, \sigma)$ le morphisme défini dans la construction qui précède la définition 8. Il est clair que $\overline{id} \neq \bar{\rho}$ et que $\overline{id} \in \mathfrak{X}^{\mathfrak{J}\mathfrak{J}'}$, $\bar{\rho} \in \mathfrak{X}^{\mathfrak{J}\mathfrak{J}'}$.

Comme $f \notin V$, il vient $\overline{id}.\bar{j}^V = \bar{\rho}.\bar{j}^V$, ce qui signifie $\bar{j}^V \notin {}^{x}\nabla(\sigma)_0$.

(ii32) Si $f \in U_0^{\cdot}$, posons $e = f$ et supposons que $e.X(\sigma)$ ou $X(\sigma).e$ soit différent de $\{e\}$. Il existe $g \in X(\sigma)$, $g \notin U_0^{\cdot}$ tel que $g \notin V$. Le raisonnement qui précède (ii21) s'applique.

Supposons donc que $e.X(\sigma) = X(\sigma).e = \{e\}$. Comme e n'est pas $\mathfrak{J}$-limitée (resp. $\mathfrak{J}'$-colimitée), par une méthode évidente de «dédoublement» de e, on construit une x-pseudo-esquisse $\tilde{\sigma}_e = (\tilde{U}_e^{\cdot}, \mu_{\tilde{U}_e}, \mu'_{\tilde{U}_e})$ telle qu'il existe

$$\overline{id} = (\tilde{\sigma}_e, id, \sigma) \in \mathfrak{X}^{\prime \mathfrak{J}\mathfrak{J}'} . \sigma , \quad \bar{\rho} = (\tilde{\sigma}_e, \rho, \sigma) \in \mathfrak{X}^{\prime \mathfrak{J}\mathfrak{J}'} . \sigma$$

vérifiant $\rho(e) \neq id(e)$ et par suite $\bar{\rho} \neq \overline{id}$.

(ii31) et (ii32) permettent alors de conclure à la suffisance de la condition (ii).

Comme (iii) résulte trivialement de (ii), ceci achève la preuve. ∇

Nous déduisons immédiatement de ce théorème les corollaires:

COROLLAIRE 1. *Si* $\sigma_0 \in I_0^{\mathfrak{J}\mathfrak{J}'}$, *alors* σ_0 *est une* x*-prémaquette de* x*-idée* σ_0.

Δ. Il suffit de constater que $X(\sigma_0) = U'$ et que $\Sigma\,[\,X(\sigma_0)] = \sigma_0$ appartient à ${}^x\nabla(\sigma_0)_0$, où $\sigma_0 = ([\,U'\,], \emptyset, \emptyset)$. ∇

COROLLAIRE 2. *Si* $\sigma_0 \in I_0^{\mathfrak{J}\mathfrak{J}'}$, *alors* $T(\sigma_0)$ *est une* x*-prémaquette de* x*-idée* σ_0.

Δ. Il suffit de constater que le type $T(\sigma_0)$ est construit à partir de σ_0 par adjonction d'éléments naturalisés, conaturalisés, projectifs, inductifs, limités et colimités (voir [8]). ∇

Dans les exemples qui suivent, les classes $\mathfrak{J}$ et $\mathfrak{J}'$ sont précisées dans les références que nous donnons et nous définissons la x-idée d'une x-prémaquette σ par la seule donnée de $X(\sigma)$.

EXEMPLE 1. Désignons par $\sigma_{\mathfrak{F}}$ l'esquisse (non pointée) d'une catégorie définie comme dans [1]. Il est clair que

$$X(\sigma_{\mathfrak{F}}) = \{\, a, b, i, k, u_0, u, u*u \,\}$$

vérifie les conditions du théorème 1 pour $X = Z$ ou Z'. Donc $\sigma_{\mathfrak{F}}$ est une x-prémaquette, pour $x = z$ ou z'.

EXEMPLE 2. Désignons par σ_ι l'esquisse (non pointée) d'une catégorie à monomorphismes définie dans [4]. Alors σ_ι est une x-prémaquette dont la x-idée est telle que $X(\sigma_\iota) = X(\sigma_{\mathfrak{F}}) \cup \{\iota, x_0\}$.

EXEMPLE 3. Soit $\bar{\sigma}_{\mathfrak{T}}$ (resp. $\bar{\sigma}_p$) l'esquisse non pointée d'une topologie (resp. d'une quasi-topologie) introduite dans [5]. On constate aisément que $\bar{\sigma}\mathcal{J}$ (resp. $\bar{\sigma}_p$) est une x-prémaquette de x-idée définie par

$$X(\bar{\sigma}\mathcal{J}) = X(\bar{\sigma}_p) = \{ i, k, k', k'', k''', e, c, c*f^c(e), c*e, c*f(c), f(e) \}.$$

Remarquons qu'il est «rare» qu'un type soit une x-prémaquette. De plus si deux x-prémaquettes ont le même type, elles n'ont cependant pas nécessairement la même x-idée.

2. $(\mathfrak{I}, \mathfrak{I}')$-maquettes. Génération des $(\mathfrak{I}, \mathfrak{I}')$-types.

Soient $\bar{j} = (\sigma_2, j, \sigma_1) \in \mathcal{S}'^{\mathfrak{I}\mathfrak{I}'}$, $\sigma_s = (U_s^{\cdot}, \mu_{U_s^{\cdot}}, \mu'_{U_s^{\cdot}})$, $s = 1, 2$. Nous notons

$$\bar{j}(\sigma_1) = (j(U_1)^{\cdot}, \mu_{j(U_1)^{\cdot}}, \mu'_{j(U_1)^{\cdot}}) \in \mathcal{S}'^{\mathfrak{I}\mathfrak{I}'}_0$$

la source du morphisme image de $\bar{j}$ dans $\mathcal{S}'^{\mathfrak{I}\mathfrak{I}'}$. On constate facilement que $\bar{j}(\sigma_1)$ est défini comme suit:

les applications source et but de $j(U_1)^{\cdot}$ sont les restrictions à $j(U_1)$ de celles de $U_2^{\cdot}$,

$(h'_1, h'_2) \in j(U_1)^{\cdot} * j(U_1)^{\cdot}$ si, et seulement si, il existe $(h_1, h_2) \in U_1^{\cdot} * U_1^{\cdot}$ tel que $j(h_s) = h'_s$, $s = 1, 2$,

si $(h'_1, h'_2) \in j(U_1)^{\cdot} * j(U_1)^{\cdot}$, son composé dans $j(U_1)^{\cdot}$ est égal à son composé dans $U_2^{\cdot}$; soit $j' = (j(U_1)^{\cdot}, \underline{j}, U_1^{\cdot})$;

si $\psi' \in j(U_1)^{\cdot} . \hat{\mathfrak{N}}' . I^{\cdot}$, $I^{\cdot} \in \mathfrak{I}$ (resp. $I^{\cdot} \in \mathfrak{I}'$), $\mu_{j(U_1)^{\cdot}}(\psi')$ (resp. $\mu'_{j(U_1)^{\cdot}}(\psi')$) est défini si, et seulement si, il existe $\psi \in U_1^{\cdot} . \hat{\mathfrak{N}}' . I^{\cdot}$ tel que $\psi' = j'. \psi$ et que $\mu_{U_1^{\cdot}}(\psi)$ (resp. $\mu'_{U_1^{\cdot}}(\psi)$) soit défini,

dans ces conditions, $\mu_{j(U_1)^{\cdot}}(\psi') = j' \mu_{U_1^{\cdot}}(\psi)$ (resp. $\mu'_{j(U_1)^{\cdot}}(\psi') = j' \mu'_{U_1^{\cdot}}(\psi)$).

DEFINITION 13. $\bar{j}(\sigma_1)$ est appelée la *$(\mathfrak{I}, \mathfrak{I}')$-préesquisse image de σ_1 dans σ_2 par $\bar{j}$.*

Bien entendu, il existe un morphisme de $\mathcal{S}'^{\mathfrak{I}\mathfrak{I}'}$ injection canonique de $\bar{j}(\sigma_1)$ dans σ_2. De plus, si $\sigma_2 \in \mathcal{X}'^{\mathfrak{I}\mathfrak{I}'}_0$, $\bar{j}(\sigma_1) \in \mathcal{X}'^{\mathfrak{I}\mathfrak{I}'}_0$, $\mathcal{X} = \mathcal{Z}$ ou $\mathcal{Z}'$.

Dans ce qui suit, nous supposons toujours que l'on a

$$\sigma = (U^{\cdot}, \mu_{U^{\cdot}}, \mu'_{U^{\cdot}}) \in \mathcal{S}'^{\mathfrak{I}\mathfrak{I}'}_0$$

DEFINITION 14. Nous dirons qu'une partie M de U est *saturée stable* *dans* σ si les conditions suivantes sont vérifiées:

M définit un sous-graphe multiplicatif stable $M^{\cdot}$ de $U^{\cdot}$; notons i le néofoncteur injection canonique de $M^{\cdot}$ dans $U^{\cdot}$;

si $I^{\cdot} \in \mathfrak{I}$ (resp. $I^{\cdot} \in \mathfrak{I}'$), $\phi \in U^{\cdot}.\hat{\mathfrak{N}}'.I^{\cdot}$, $\phi(I) \subset M$ et si $\mu_{U^{\cdot}}(\phi)$ (resp. $\mu'_{U^{\cdot}}(\phi)$) est défini et égal à $(\phi, \tau, \hat{e})$ (resp. $(\hat{e}, \tau, \phi)$), alors $e \in M$ et $\tau(i_0) \in M$, pour tout $i_0 \in I_0^{\cdot}$; si de plus $f \in U$ est tel que $\tau(i_0).f$ (resp. $f.\tau(i_0)$) soit défini et appartienne à M pour tout $i_0 \in I_0^{\cdot}$, on a $f \in M$.

DEFINITION 15. Soit $U'^{\cdot}$ un sous-graphe multiplicatif de $U^{\cdot}$ et soit j le néofoncteur injection canonique de $U'^{\cdot}$ dans $U^{\cdot}$. On appelle $(\mathfrak{I}, \mathfrak{I}')$*-préesquisse restriction de* σ *à* $U'^{\cdot}$ la $(\mathfrak{I}, \mathfrak{I}')$-préesquisse définie comme suit: Si $\phi \in U'^{\cdot}.\hat{\mathfrak{N}}'.I^{\cdot}$, $I^{\cdot} \in \mathfrak{I}$ (resp. $I^{\cdot} \in \mathfrak{I}'$), $\mu_{U'^{\cdot}}(\phi)$ (resp. $\mu'_{U'^{\cdot}}(\phi)$) est défini si, et seulement si, $\mu_{U^{\cdot}}(j.\phi)$ (resp. $\mu'_{U^{\cdot}}(j.\phi)$) est défini et égal à $(j.\phi, \tau, \hat{e})$ (resp. $(\hat{e}, \tau, j.\phi)$), où $\tau(i_0) \in U'$, pour tout $i_0 \in I_0^{\cdot}$; dans ce cas, $j\mu_{U'^{\cdot}}(\phi) = \mu_{U^{\cdot}}(j.\phi)$ (resp. $j\mu'_{U'^{\cdot}}(\phi) = \mu'_{U^{\cdot}}(j.\phi)$).

DEFINITION 16. Si $\bar{j} \in \sigma.\mathfrak{S}'^{\mathfrak{I}\mathfrak{I}'}.\sigma''$, $\sigma'' = (U''^{\cdot}, \mu_{U''^{\cdot}}, \mu'_{U''^{\cdot}})$, nous dirons que σ'' est *saturée stable dans* σ si, et seulement si:

$$\begin{cases} p''^{\mathfrak{I}\mathfrak{I}'}(\bar{j}) \in \hat{\mathfrak{M}}^{\iota} \text{ et } U''^{\cdot} \text{ est un sous-graphe multiplicatif de } U^{\cdot}, \\ U'' \text{ est saturée stable dans } \sigma, \\ \sigma|_{U''^{\cdot}} = \sigma'', \text{ où } \sigma|_{U''^{\cdot}} \text{ est la préesquisse restriction de } \sigma \text{ à } U''^{\cdot}. \end{cases}$$

Désignons par J'' la classe des $\bar{j} \in \mathfrak{S}'^{\mathfrak{I}\mathfrak{I}'}$ tels que $\alpha(\bar{j})$ soit une $(\mathfrak{I}, \mathfrak{I}')$-préesquisse saturée stable dans $\beta(\bar{j})$. Il est évident que $p''^{\mathfrak{I}\mathfrak{I}'}$ est $(\mathfrak{M}, J'')$-engendrant. Si $M \subset U$, nous désignons par σ''_M la $(J'', p''^{\mathfrak{I}\mathfrak{I}'})$-sous-structure de σ engendrée par M [2], et nous posons

$$\sigma''_M = (U''^{\cdot}_M, \mu_{U''^{\cdot}_M}, \mu'_{U''^{\cdot}_M}).$$

PROPOSITION 1. U''_M *peut être construit par récurrence transfinie* [1].

Δ. Soit $\hat{\lambda}$ l'ordinal initial régulier $\omega_{\Lambda'+1}$, où Λ' est l'ordinal borne supérieure des ordinaux $\bar{I}$, lorsque $I^{\cdot} \in \mathfrak{I} \cup \mathfrak{I}'$. Soit $[M_0]$ (resp. $M_1^{\cdot}$) le sous-graphe orienté (resp. multiplicatif stable) de $[U^{\cdot}]$ (resp. de $U^{\cdot}$) engendré par M. Supposons que $\lambda \neq 0$ soit un ordinal inférieur ou égal à $\hat{\lambda}$ et que l'on ait défini une suite transfinie $(M_\xi)_{\xi<\lambda}$ vérifiant la condition:

(d) M_ξ définit un sous-graphe multiplicatif stable de $U^{\cdot}$ et on a

$M_{\xi'} \subset M_\xi$ lorsque $\xi' < \xi$ et $\xi \neq 0$.

1^er cas: Si λ est un ordinal limite, nous posons $M_\lambda = \bigcup_{\xi < \lambda} M_\xi$. Alors M_λ définit un sous-graphe multiplicatif stable de $U^\cdot$, contenant M_ξ, $\xi < \lambda$.

2^ème cas: $\lambda = \xi + 1$:

Si ϕ est un néofoncteur de $I^\cdot$ vers $U^\cdot$ tel que $\mu_{U^\cdot}(\phi)$ est défini et égal à $(\phi, \tau, \hat{e})$ et si $\phi(I)$ n'est pas contenu dans M_ξ, nous posons $A(\phi) = \emptyset$.

Si ϕ est un néofoncteur de $I^\cdot$ vers $U^\cdot$ tel que $\mu_{U^\cdot}(\phi)$ est défini et égal à $(\phi, \tau, \hat{e})$ et si $\phi(I) \subset M_\xi$, nous notons $A(\phi)$ l'ensemble formé des $\tau(i_0)$, où $i_0 \in I_0^\cdot$, et des $f \in U$ tels que $\tau(i_0).f$ soit défini et appartienne à M_ξ pour tout $i_0 \in I_0^\cdot$.

Définissons de même l'ensemble $A'(\phi)$ dans le cas inductif et posons

$$M'_\xi = M_\xi \cup \Big(\bigcup_{\phi \in \alpha(\mu_{U^\cdot})} A(\phi)\Big) \cup \Big(\bigcup_{\phi \in \alpha(\mu'_{U^\cdot})} A'(\phi)\Big).$$

$M_\lambda^\cdot$ désignera le sous-graphe multiplicatif stable de $U^\cdot$ engendré par M'_ξ.

Nous avons ainsi construit une suite transfinie croissante $(M_\xi)_{\xi \leqslant \hat{\lambda}}$ vérifiant la condition (d).

On laisse au lecteur le soin de constater que $\sigma|_{M^\cdot_{\hat{\lambda}}} = \sigma''_M$. ∇

Cette proposition va nous permettre de préciser la notion de x-prémaquette. Pour cela, nous posons $\sigma_0 = ([M_0], \emptyset, \emptyset)$,

$$\sigma_\lambda = \sigma|_{M^\cdot_\lambda} \text{ si } 0 < \lambda \leqslant \hat{\lambda} \text{ (en particulier } \sigma''_M = \sigma_{\hat{\lambda}})$$

et nous désignons par $\bar{j}_{\lambda', \lambda}$ le morphisme injection canonique de σ_λ dans $\sigma_{\lambda'}$ lorsque $\lambda \leqslant \lambda' \leqslant \hat{\lambda}$.

DEFINITION 17. Nous dirons que $\sigma = (U^\cdot, \mu_{U^\cdot}, \mu'_{U^\cdot}) \in \mathcal{S}_0^{\prime \mathfrak{J}\mathfrak{J}'}$ est une $(\mathfrak{J}, \mathfrak{J}')$*-maquette de* $(\mathfrak{J}, \mathfrak{J}')$*-idée* $\sigma_0 = ([M], \emptyset, \emptyset)$ si:

σ est une $(\mathfrak{J}, \mathfrak{J}')$-$z'$-prémaquette de $(\mathfrak{J}, \mathfrak{J}')$-$z'$-idée σ_0 ;

$\sigma''_M = \sigma$;

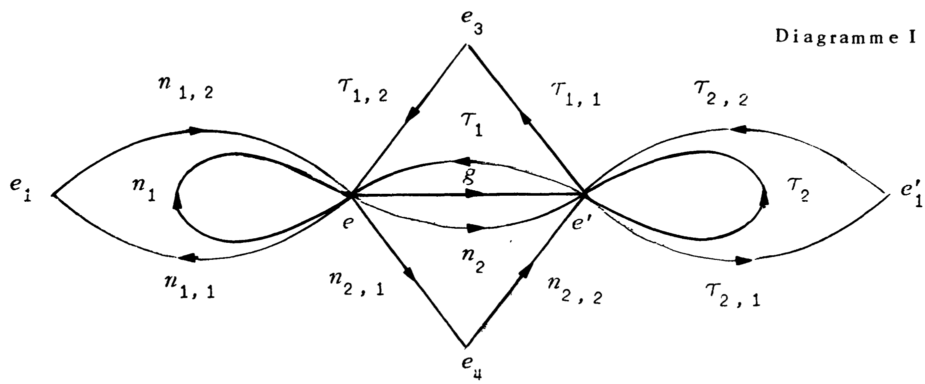
il existe un morphisme de $\mathcal{S}^{\prime \mathfrak{J}\mathfrak{J}'}$, injection canonique de $\sigma_{\lambda+1}$ dans $T'(\bar{j}_{\lambda+1,\lambda})(T'(\sigma_\lambda))$, $(\mathfrak{J}, \mathfrak{J}')$-préesquisse image de $T'(\sigma_\lambda)$ dans $T'(\sigma_{\lambda+1})$ par $T'(\bar{j}_{\lambda+1,\lambda})$, pour tout $\lambda < \hat{\lambda}$.

En particulier une $(\mathcal{J},\mathcal{J}')$-idée $\sigma_0 \in I_0^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$ est une $(\mathcal{J},\mathcal{J}')$-maquette de $(\mathcal{J},\mathcal{J}')$-idée σ_0, ce qui précise le corollaire 1. De même le corollaire 2 permet d'affirmer que le $(\mathcal{J},\mathcal{J}')$-type $T(\sigma_0)$ d'une $(\mathcal{J},\mathcal{J}')$-idée σ_0 est une $(\mathcal{J},\mathcal{J}')$-maquette de $(\mathcal{J},\mathcal{J}')$-idée σ_0.

Remarquons cependant que certaines z'-prémaquettes ne sont pas des maquettes, comme le montre l'exemple suivant.

EXEMPLE 4. Désignons par $F^{\cdot}$ une catégorie possédant deux unités et un seul morphisme non trivial f. Posons $\mathcal{J} = \{ F^{\cdot} \}$ et $\mathcal{J}' = \emptyset$. Soit $U^{\cdot}$ le graphe multiplicatif défini par le diagramme I et par les relations qui

Diagramme I



suivent

$$\tau_{s,2} \cdot \tau_{s,1} = \tau_s, \quad n_{s,2} \cdot n_{s,1} = n_s, \quad s = 1, 2;$$

$$g \cdot \tau_1 = \tau_2, \quad g \cdot n_1 = n_2,$$

$$\tau_s \cdot g = n_s, \quad s = 1, 2.$$

Nous désignons par $\phi: F^{\cdot} \to U^{\cdot}$ le néofoncteur défini par $\phi(f) = g$. Nous posons

$$\mu_{U^{\cdot}}(\phi) = (\phi, \tau, \hat{e}'), \text{ avec } \tau(\alpha(f)) = \tau_1 \text{ et } \tau(\beta(f)) = \tau_2.$$

Enfin $\eta = (\phi, n, \hat{e}) \in \mathfrak{N}(U^{\cdot}, I^{\cdot})$ est la transformation naturelle définie par:

$$n(\alpha(f)) = n_1 \quad \text{et} \quad n(\beta(f)) = n_2.$$

Dans ces conditions on constate que $\sigma = (U^{\cdot}, \mu_{U^{\cdot}}, \emptyset)$ est une $(\mathcal{J},\emptyset)$-z'-prémaquette admettant $\sigma_0 = (U'^{\cdot}, \emptyset, \emptyset)$ pour $(\mathcal{J},\emptyset)$-z'-idée, où $U'^{\cdot}$ s'identifie au graphe orienté défini par le diagramme II. Enfin on vérifie que $\sigma''_{U^{\cdot}} = (U''^{\cdot}, \emptyset, \emptyset)$, où $U''^{\cdot}$ est le graphe multiplicatif défini par le diagramme I privé de g, les seules relations étant:

$$\tau_{s,2}\cdot\tau_{s,1} = \tau_s,\quad n_{s,2}\cdot n_{s,1} = n_s,\quad s = 1, 2.$$

Comme $\sigma''_{U'} \neq \sigma$, σ n'est pas une $(\mathfrak{J}, \emptyset)$-maquette.

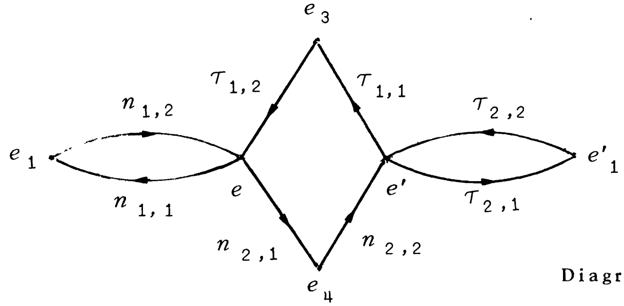


Diagramme II

Nous supposons dans la suite que σ est une $(\mathfrak{J},\mathfrak{J}')$-maquette de $(\mathfrak{J},\mathfrak{J}')$-idée $\sigma_0 = (U'^{\cdot}, \emptyset, \emptyset)$. Reprenons les notations de la démonstration de la proposition 1, lorsque l'on suppose $M = U'$. Nous notons $I(\hat\lambda)^{\cdot}$ la catégorie associée à l'ensemble bien ordonné $O(\hat\lambda)$ des ordinaux inférieurs strictement à $\hat\lambda$.

Avant d'aborder l'étude du prochain théorème, nous établissons un lemme.

LEMME 1. *$(\sigma_{\hat\lambda}, \tilde\tau, \Gamma)$ est une $I(\hat\lambda)^{\cdot}$-limite inductive naturalisée dans $\mathfrak{N}(\mathcal{Z}''^{\mathfrak{J}\mathfrak{J}'}, I(\hat\lambda)^{\cdot})^{\square\square}$, lorsque $\Gamma : I(\hat\lambda)^{\cdot} \to \mathcal{Z}''^{\mathfrak{J}\mathfrak{J}'}$ est défini par $\Gamma(\lambda', \lambda) = \bar{j}_{\lambda',\lambda}$, $\lambda \leqslant \lambda' < \hat\lambda$ et que $\tilde\tau(\lambda, \lambda) = \bar{j}_{\hat\lambda,\lambda}$, $\lambda < \hat\lambda$.*

Δ. Supposons que $\bar{j}^1_\lambda \in \sigma_1 . \mathcal{Z}''^{\mathfrak{J}\mathfrak{J}'} . \sigma_\lambda$ pour tout $\lambda < \hat\lambda$ et que l'on ait

$$\bar{j}^1_{\lambda'} \cdot \bar{j}_{\lambda',\lambda} = \bar{j}^1_\lambda \text{ pour } \lambda \leqslant \lambda' < \hat\lambda,\quad \sigma_1 = (U_1^{\cdot}, \mu_{U_1^{\cdot}}, \mu'_{U_1^{\cdot}}).$$

Puisque $U = \bigcup_{\xi<\hat\lambda} M_\xi$, avec $M_0 = U'$, il est clair qu'il existe un néofoncteur «injection canonique» $j \in U_1^{\cdot} . \hat{\mathfrak{N}}' . U^{\cdot}$. Montrons que j est sous-jacent à un morphisme $\bar{j} \in \sigma_1 . \mathcal{Z}''^{\mathfrak{J}\mathfrak{J}'} . \sigma$. Soit $\phi \in U^{\cdot} . \hat{\mathfrak{N}}' . I^{\cdot}$, $I^{\cdot} \in \mathfrak{J}$ (resp. $I^{\cdot} \in \mathfrak{J}'$) un néofoncteur tel que $\mu_{U^{\cdot}}(\phi)$ (resp. $\mu'_{U^{\cdot}}(\phi)$) soit défini et égal à $(\phi, \tau, \hat{e})$ (resp. $(\hat{e}, \tau, \phi)$). Pour tout $i \in I$, il existe $\xi_i < \hat\lambda$ tel que $\phi(i) \in M_{\xi_i}$. Comme $I \in \mathfrak{M}_0$ entraîne $\bar{I} < \hat\lambda$ et comme $\hat\lambda$ est un ordinal régulier, on a $\xi = \sup_{i\in I} \xi_i < \hat\lambda$. On en déduit $\phi(I) \subset M_\xi$ et, par construction de $M_{\xi+1}$, $\tau(I_0^{\cdot}) \subset M_{\xi+1}$. Ceci suffit à prouver, par l'intermédiaire de $\bar{j}^1_{\xi+1}$, que

$\mu_{U_1^\cdot}(j.\phi)$ (resp. $\mu'_{U_1^\cdot}(j.\phi)$) est défini et égal à $j\mu_{U^\cdot}(\phi)$ (resp. à $j\mu'_{U^\cdot}(\phi)$). D'où le morphisme $\bar{j}$.

On constate trivialement que, pour tout $\lambda < \hat{\lambda}$, on a $\bar{j}.\bar{j}_{\hat{\lambda},\lambda} = \bar{j}^1_\lambda$. Ceci entraîne en particulier $\bar{j}.j_{\hat{\lambda},0} = \bar{j}^1_0$. Puisque $\bar{j}_{\hat{\lambda},0} = {}^{z'}\bar{i}^{\sigma}$, on en déduit l'unicité de $\bar{j}$. ∇

Nous obtenons alors le théorème:

THEOREME 2. *La famille* $(\bar{j}_{\lambda',\lambda})_{\lambda \leqslant \lambda' < \hat{\lambda}}$ *vérifie les conditions:*

(i) $(T'(\sigma_{\hat{\lambda}}), \bar{\tau}, \bar{\Gamma})$ *est une* $I(\hat{\lambda})^{\cdot}$ *-limite inductive naturalisée dans* $\mathfrak{N}(\mathfrak{F}^{\mathfrak{I}\mathfrak{I}'}, I(\hat{\lambda})^{\cdot})^{\square\square}$, *lorsque* $\bar{\Gamma}: I(\hat{\lambda})^{\cdot} \to \mathfrak{F}^{\mathfrak{I}\mathfrak{I}'}$ *est défini par* $\bar{\Gamma}(\lambda',\lambda)$ $T'(\bar{j}_{\lambda',\lambda})$, $\lambda \leqslant \lambda' < \hat{\lambda}$ *et que* $\bar{\tau}(\lambda,\lambda) = T'(\bar{j}_{\hat{\lambda},\lambda})$, *pour* $\lambda < \hat{\lambda}$.

(ii) $T'(\bar{j}_{\xi+1,\xi})$ *est une* $p^{\mathfrak{I}\mathfrak{I}'}$*-quasi-surjection pour* $\xi < \hat{\lambda}$.

(iii) *Pour tout* $\lambda \leqslant \hat{\lambda}$, σ_λ *est une* $(\mathfrak{I},\mathfrak{I}')$*-maquette de* $(\mathfrak{I},\mathfrak{I}')$*-idée* σ_0.

Δ. (i) $T'|\mathfrak{Z}''^{\mathfrak{I}\mathfrak{I}'}$ étant adjoint au foncteur injection canonique de $\mathfrak{F}^{\mathfrak{I}\mathfrak{I}'}$ dans $\mathfrak{Z}''^{\mathfrak{I}\mathfrak{I}'}$, il est compatible avec les $I(\hat{\lambda})^{\cdot}$-limites inductives naturalisées [2], d'où la première assertion.

(ii) Posons:

$\sigma_\zeta = (M^\cdot_\zeta, \mu_{M^\cdot_\zeta}, \mu'_{M^\cdot_\zeta})$, pour $\zeta = \xi$ et $\xi + 1$,

$T'(\sigma_\zeta) = (\bar{M}^\cdot_\zeta, \mu_{\bar{M}^\cdot_\zeta}, \mu'_{\bar{M}^\cdot_\zeta})$, pour $\zeta = \xi, \xi+1$,

$\sigma'_\xi = T'(\bar{j}_{\xi+1,\xi})(\sigma_\xi)$, $(\mathfrak{I},\mathfrak{I}')$-préesquisse image de $T'(\sigma_\xi)$ par $T'(\bar{j}_{\xi+1,\xi})$ dans $T'(\sigma_{\xi+1})$.

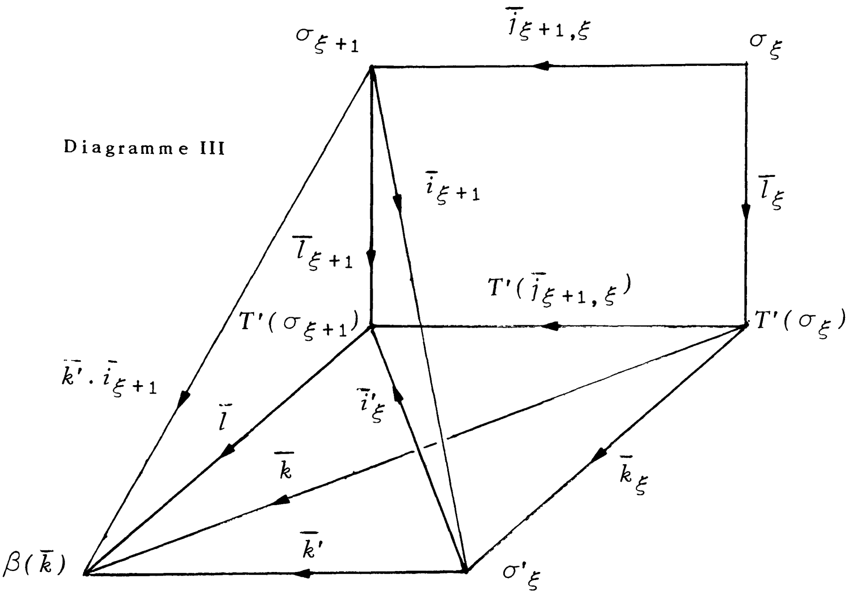
Désignons par $\bar{i}_{\xi+1}$ le morphisme «injection canonique» de $\sigma_{\xi+1}$ dans σ'_ξ, et par $\bar{k}_\xi$ le morphisme canonique de $T'(\sigma_\xi)$ dans σ'_ξ. On pourra se reporter au diagramme III.

Si $\bar{k} \in \mathfrak{F}^{\mathfrak{I}\mathfrak{I}'}.T'(\sigma_\xi)$ est tel qu'il existe $k' \in \hat{\mathfrak{M}}$ vérifiant $p^{\mathfrak{I}\mathfrak{I}'}(\bar{k}) = k'.p''^{\mathfrak{I}\mathfrak{I}'}(\bar{k}_\xi)$, on vérifie facilement que k' se relève en $\bar{k}' \in \beta(\bar{k}).\mathfrak{S}'^{\mathfrak{I}\mathfrak{I}'}$ tel que $\bar{k} = \bar{k}'.\bar{k}_\xi$. Par conséquent, comme $\bar{k}'.\bar{i}_{\xi+1} \in \beta(\bar{k}).\mathfrak{S}'^{\mathfrak{I}\mathfrak{I}'}.\sigma_{\xi+1}$, il existe un unique $\bar{l} \in \beta(\bar{k}).\mathfrak{F}^{\mathfrak{I}\mathfrak{I}'}.T'(\sigma_{\xi+1})$ tel que $\bar{l}.\bar{l}_{\xi+1} = \bar{k}'.\bar{i}_{\xi+1}$, où $(T'(\sigma_{\xi+1}), \bar{l}_{\xi+1})$ est un $(\mathfrak{F}^{\mathfrak{I}\mathfrak{I}'}, \mathfrak{S}'^{\mathfrak{I}\mathfrak{I}'})$-projecteur.

Il s'ensuit que $\bar{l}$ est l'unique morphisme de $\mathfrak{F}^{\mathfrak{I}\mathfrak{I}'}$ vérifiant l'égalité $l.T'(j_{\xi+1,\xi}) = k$. D'où (ii).

(iii) Il suffit de considérer la construction de σ_λ dans les deux cas possibles (proposition 1) et de raisonner par récurrence transfinie. ∇

Diagramme III



Nous allons donner une proposition que l'on peut interpréter comme une réciproque du théorème 2.

PROPOSITION 2. *Soit* $(\bar{k}_{\lambda',\lambda})_{\lambda \leqslant \lambda' \leqslant \hat\lambda}$ *une famille de morphismes de* $\mathfrak{F}^{\mathfrak{I}\mathfrak{I}'}$ *vérifiant les conditions:*

(i1) $\bar\sigma_\lambda = \bar{k}_{\lambda,\lambda} \in \mathfrak{F}_0^{\mathfrak{I}\mathfrak{I}'}$, $\lambda < \hat\lambda$;

(i2) $\bar{k}_{\lambda',\lambda} \in \bar\sigma_{\lambda'} . \mathfrak{F}^{\mathfrak{I}\mathfrak{I}'} . \bar\sigma_\lambda$, $\lambda \leqslant \lambda' \leqslant \hat\lambda$;

(i3) $\bar\sigma_0 = T'(\sigma_0)$, $\sigma_0 \in I_0^{\mathfrak{I}\mathfrak{I}'}$;

(i4) $\bar{k}_{\lambda'',\lambda'} \cdot \bar{k}_{\lambda',\lambda} = \bar{k}_{\lambda'',\lambda}$ *pour tout* $\lambda \leqslant \lambda' \leqslant \lambda'' \leqslant \hat\lambda$;

(ii) $(\bar\sigma_{\hat\lambda}, \bar\tau, \bar\Gamma)$ *est une* $I(\hat\lambda)^\cdot$*-limite inductive naturalisée dans* $\mathfrak{N}(\mathfrak{F}^{\mathfrak{I}\mathfrak{I}'}, I(\hat\lambda)^\cdot)^{\square\square}$, *lorsque* $\bar\Gamma : I(\hat\lambda)^\cdot \to \mathfrak{F}^{\mathfrak{I}\mathfrak{I}'}$ *est défini par* $\bar\Gamma(\lambda', \lambda) = \bar{k}_{\hat\lambda,\lambda'}$, $\lambda \leqslant \lambda' < \hat\lambda$, *et que* $\bar\tau(\lambda, \lambda) = \bar{k}_{\hat\lambda,\lambda}$, $\lambda < \hat\lambda$;

(iii) $\sigma''_{\hat\lambda} = \bar{k}_{\hat\lambda,\lambda}(\bar\sigma_\lambda)$, $(\mathfrak{I},\mathfrak{I}')$*-préesquisse image de* $\bar\sigma_\lambda$ *dans* $\bar\sigma_{\hat\lambda}$ *par* $\bar{k}_{\hat\lambda,\lambda}$, *est une* $(\mathfrak{I},\mathfrak{I}')$*-maquette de* $(\mathfrak{I},\mathfrak{I}')$*-idée* σ_0.

Alors il existe une $(\mathfrak{I},\mathfrak{I}')$*-maquette* σ'' *de* $(\mathfrak{I},\mathfrak{I}')$*-idée* σ_0 *et de* $(\mathfrak{I},\mathfrak{I}')$*-type isomorphe à* $\bar\sigma_{\hat\lambda}$.

Δ. Notons $\vec{j}_{\lambda',\lambda}$ le morphisme injection canonique de σ''_λ dans $\sigma''_{\lambda'}$ lorsque $\lambda \leqslant \lambda' < \hat{\lambda}$. Posons $U'' = \bigcup_{\lambda < \hat{\lambda}} p''^{\mathcal{G}\mathcal{G}'}(\sigma''_\lambda)$; $\hat{\lambda}$ étant un ordinal régulier, on munit U'' d'une structure de $(\mathcal{G}, \mathcal{G}')$-préesquisse $\sigma'' = (U''^{\cdot}, \mu_{U''\cdot}, \mu'_{U''\cdot})$ par un raisonnement analogue à celui du lemme 1. De même on montre facilement que $(\sigma'', \tilde{\tau}, \Gamma)$ est une $I(\hat{\lambda})^{\cdot}$-limite inductive naturalisée dans $\mathcal{Z}''^{\mathcal{G}\mathcal{G}'}$ pour $\Gamma : I(\hat{\lambda})^{\cdot} \to \mathcal{Z}''^{\mathcal{G}\mathcal{G}'}$ défini par $\Gamma(\lambda', \lambda) = \vec{j}_{\lambda',\lambda}$, $\lambda \leqslant \lambda' < \hat{\lambda}$, avec $\tau(\lambda, \lambda) = j_{\hat{\lambda},\lambda}$, injection canonique de σ''_λ dans $\sigma'' = \sigma''_{\hat{\lambda}}$ pour $\lambda < \hat{\lambda}$.

Nous utiliserons les notations suivantes:

$\bar{k}_\lambda$ est le morphisme canonique de $\bar{\sigma}_\lambda$ dans σ''_λ, $\lambda < \hat{\lambda}$,

$\bar{i}$ est le morphisme injection canonique de σ'' dans $\bar{\sigma}_{\hat{\lambda}}$,

$(T'(\sigma''_\lambda), \bar{l}''_\lambda)$ est un $(\mathcal{F}^{\mathcal{G}\mathcal{G}'}, \mathcal{S}'^{\mathcal{G}\mathcal{G}'})$-projecteur,

$(T'(\sigma''), \bar{l}'')$ est un $(\mathcal{F}^{\mathcal{G}\mathcal{G}'}, \mathcal{S}'^{\mathcal{G}\mathcal{G}'})$-projecteur.

On pourra se reporter d'autre part à la figure IV.

Il s'ensuit qu'il existe un unique $\bar{l} \in \bar{\sigma}_{\hat{\lambda}}.\mathcal{F}^{\mathcal{G}\mathcal{G}'}.T'(\sigma'')$ tel que $\bar{l}.\bar{l}'' = \bar{i}$. De plus l'hypothèse *(ii)* montre qu'il existe un unique

$$\bar{k} \in T'(\sigma'').\mathcal{F}^{\mathcal{G}\mathcal{G}'}.\bar{\sigma}_{\hat{\lambda}} \quad \text{tel que} \quad \bar{k}.\bar{k}_{\hat{\lambda},\lambda} = T'(\bar{j}_{\hat{\lambda},\lambda}).\bar{l}''_\lambda.\bar{k}_\lambda$$

pour tout $\lambda < \hat{\lambda}$. Montrons que $\bar{l}$ et $\bar{k}$ sont inverses l'un de l'autre. On a

$$\bar{l}.k.k_{\hat{\lambda},\lambda} = \bar{l}.T'(\bar{j}_{\hat{\lambda},\lambda}).l''_\lambda.k_\lambda ,$$

c'est-à-dire

$$\bar{l}.\bar{k}.\bar{k}_{\hat{\lambda},\lambda} = \bar{l}.\bar{l}''.\bar{j}_{\hat{\lambda},\lambda}.\bar{k}_\lambda$$

et il est clair que ceci s'écrit encore:

$$\bar{l}.\bar{k}.\bar{k}_{\hat{\lambda},\lambda} = \bar{k}_{\hat{\lambda},\lambda} \quad \text{pour tout} \quad \lambda < \hat{\lambda}.$$

Ceci signifie que $\bar{l}.\bar{k} = \bar{\sigma}_{\hat{\lambda}}$, vu l'hypothèse *(ii)*.

De même on a

$$\bar{k}.\bar{l}.\bar{l}''.\bar{j}_{\hat{\lambda},\lambda}.\bar{k}_\lambda = \bar{k}.\bar{i}.\bar{j}_{\hat{\lambda},\lambda}.\bar{k}_\lambda ,$$

soit

$$\bar{k}.\bar{l}.\bar{l}''.\bar{j}_{\hat{\lambda},\lambda}.\bar{k}_\lambda = \bar{k}.\bar{k}_{\hat{\lambda},\lambda}.$$

En vertu de la définition de k et du fait que $p''^{\mathcal{G}\mathcal{G}'}(\bar{k}_\lambda)$ est surjective et $p''^{\mathcal{G}\mathcal{G}'}$ fidèle, on obtient:

$$\bar{k}.\bar{l}.\bar{l}''.\bar{j}_{\hat{\lambda},\lambda} = \bar{l}''.\bar{j}_{\hat{\lambda},\lambda} \quad \text{pour tout} \quad \lambda < \hat{\lambda}.$$

En vertu du premier résultat établi dans cette démonstration, on trouve $k.l.l'' = l''$. Comme l'' est un $(\mathfrak{F}^{\mathfrak{H}'}, \mathfrak{S}'^{\mathfrak{H}'})$-projecteur, on a $\bar{k}.\bar{l} = T'(\sigma'')$, ce qui prouve l'assertion voulue.

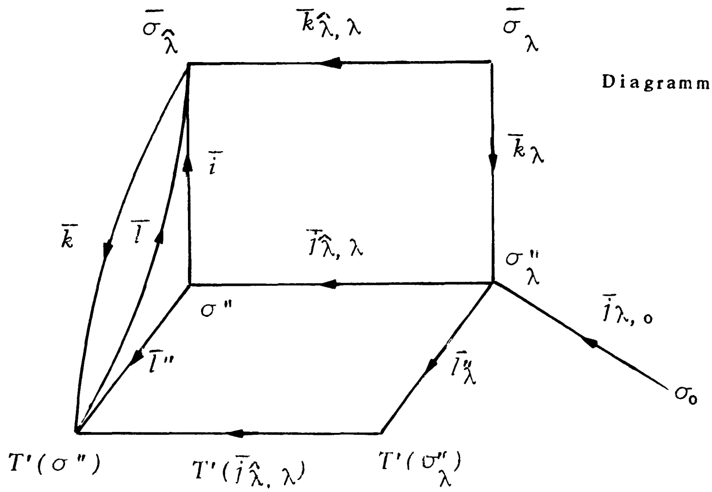


Diagramme IV

On achève aisément la démonstration par récurrence transfinie. ∇

REMARQUE. Dans cette proposition 2 l'hypothèse (ii) n'est pas reprise (et donc la proposition 2 est une réciproque des seuls points (i) et (iii) du théorème 2). Nous avons démontré (ii) dans le but d'aboutir à la notion expliquée dans ce qui suit.

Soit $\Sigma = (\bar{k}_{\lambda',\lambda})_{\lambda \leqslant \lambda' < \hat{\lambda}}$ une famille de morphismes de $\mathfrak{F}^{\mathfrak{H}'}$ vérifiant les conditions *(i1)*, *(i2)*, *(i3)* et *(i4)* de la proposition 2. Comme en *(iii)* de cette même proposition, nous posons $\sigma''_{\lambda} = \bar{k}_{\hat{\lambda},\lambda}(\bar{\sigma}_{\lambda})$ et $\bar{k}_{\lambda}$ désigne, pour tout λ, le morphisme canonique appartenant à $\mathfrak{S}'^{\mathfrak{H}'}$ de $\bar{\sigma}_{\lambda}$ dans σ''_{λ}, $\bar{j}_{\lambda',\lambda}$ le morphisme injection canonique de σ''_{λ} dans $\sigma''_{\lambda'}$, pour $\lambda \leqslant \lambda' < \hat{\lambda}$, et $\bar{i}_{\hat{\lambda},\lambda}$ le morphisme injection canonique de σ''_{λ} dans $\bar{\sigma}_{\hat{\lambda}}$.

DEFINITION 18. Supposons que, pour toute famille $(\bar{k}''_{\lambda})_{\lambda < \hat{\lambda}}$ et tout morphisme $\bar{k}'''_0$ vérifiant:

$$\left\{\begin{array}{l} \bar{k}'''_0 \in \bar{\sigma}.\mathfrak{S}'^{\mathfrak{H}'}.\sigma_0, \quad \bar{k}''_{\lambda} \in \bar{\sigma}.\mathfrak{S}'^{\mathfrak{H}'}.\sigma''_{\lambda}, \quad \lambda < \hat{\lambda}, \\ \bar{\sigma} \in \mathfrak{F}_0^{\mathfrak{H}'}, \quad \bar{k}''_{\lambda'}.\bar{j}_{\lambda',\lambda} = \bar{k}''_{\lambda}, \quad \lambda \leqslant \lambda' < \hat{\lambda}, \\ \bar{k}''_0.\bar{j}_0 = \bar{k}'''_0, \text{ où } \bar{j}_0 = \bar{k}_0.\bar{l}_0 \text{ et } (\bar{\sigma}_0, \bar{l}_0) \text{ est un } (\mathfrak{F}^{\mathfrak{H}'}, \mathfrak{S}'^{\mathfrak{H}'})\text{-projecteur,} \end{array}\right.$$

il existe une unique famille $(k'_\lambda)_{\lambda\leqslant\hat\lambda}$ vérifiant:

$$\bar k'_{\hat\lambda}\cdot \bar i_{\hat\lambda,\lambda} = \bar k''_\lambda \quad \text{pour tout } \lambda < \hat\lambda,$$

$$\bar k'_{\hat\lambda}\cdot \bar k_{\hat\lambda,\lambda} = \bar k'_\lambda \quad \text{pour tout } \lambda < \hat\lambda.$$

Alors nous dirons que $\bar\sigma_{\hat\lambda}$ est $(\mathcal{J},\mathcal{J}')$-*engendré par le système de générateurs* σ_0 *et la famille* $(\bar k_{\lambda',\lambda})_{\lambda\leqslant\lambda'\leqslant\hat\lambda}$.

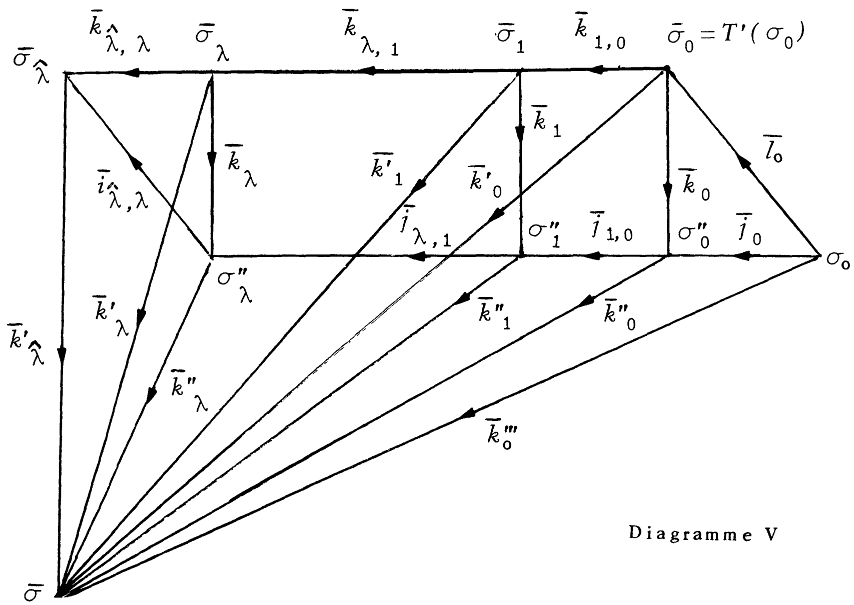


Diagramme V

On constate trivialement que les points (i), (ii) et (iii) du théorème 2 montrent que le $(\mathcal{J},\mathcal{J}')$-type $\bar\sigma$ d'une $(\mathcal{J},\mathcal{J}')$-maquette σ admettant σ_0 pour $(\mathcal{J},\mathcal{J}')$-idée est $(\mathcal{J},\mathcal{J}')$-engendré par le système de générateurs σ_0 et la famille $(T'(\bar j_{\lambda',\lambda}))_{\lambda\leqslant\lambda'\leqslant\hat\lambda}$.

On remarque de plus que la notion introduite dans la définition 18 peut être considérée comme une généralisation de la notion de structure quasi-quotient [2].

DEFINITION 19. Si $\bar\sigma_{\hat\lambda}\in\mathcal{F}_0^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$ est $(\mathcal{J},\mathcal{J}')$-engendré par le système de générateurs σ_0 et la famille $\Sigma = (\bar k_{\lambda',\lambda})_{\lambda\leqslant\lambda'<\hat\lambda}$, nous dirons que $\bar\sigma_{\lambda'}$ *définit une structure algébrique plus fine que* $\bar\sigma_\lambda$ si, et seulement si, $\lambda' \geqslant \lambda$.

EXEMPLE 5. On voit facilement qu'une structure de catégorie est plus fine qu'une structure de catégorie non associative, elle-même plus fine qu'une structure de quasi-catégorie non associative [2]. De même une structure de catégorie non associative est plus fine qu'une structure de quasi-catégorie.

Remarquons que ces comparaisons s'obtiennent par application directe de la définition 19 et non par la construction de la famille de sous-esquisses de $\sigma\mathcal{F}$ «à partir de a, b, i, k», par stabilisations et saturations successives, qui ne permet de comparer que la structure de catégorie à celle de catégorie non associative.

3. Cas des préesquisses pointées.

Rappelons [1] qu'une $(\mathcal{I}, \mathcal{I}')$-préesquisse pointée est un couple (σ, M) vérifiant les conditions:

$$\sigma = (U^{\cdot}, \mu_{U^{\cdot}}, \mu'_{U^{\cdot}}) \in \mathcal{S}_0^{\mathcal{I}\mathcal{I}'} \quad \text{et} \quad M \subset U.$$

On dit que $\bar{\bar{j}} = ((\sigma_2, M_2), \bar{j}, (\sigma_1, M_1))$ est un morphisme de $(\mathcal{I}, \mathcal{I}')$-préesquisses pointées si, et seulement si:

(σ_s, M_s), $s = 1, 2$, est une $(\mathcal{I}, \mathcal{I}')$-préesquisse pointée,

$\bar{j} = (\sigma_2, j, \sigma_1) \in \mathcal{S}^{\mathcal{I}\mathcal{I}'}$ et $j(M_1) \subset M_2$.

Désignons par $\mathcal{P}^{\mathcal{I}\mathcal{I}'}$ la catégorie des morphismes entre $(\mathcal{I}, \mathcal{I}')$-préesquisses pointées.

Nous dirons que (σ, M) est une $(\mathcal{I}, \mathcal{I}')$- préesquisse *m-pointée* si $(\sigma, M) \in \mathcal{P}_0^{\mathcal{I}\mathcal{I}'}$, $\sigma = (U^{\cdot}, \mu_{U^{\cdot}}, \mu'_{U^{\cdot}})$, et si:

$f_s \in e.M.e'$, $e \in U_0^{\cdot}$, $e' \in U_0^{\cdot}$, $s = 1, 2$, impliquent $f_1 = f_2$.

$\mathcal{P}_m^{\mathcal{I}\mathcal{I}'}$ désignera la sous-catégorie pleine de $\mathcal{P}^{\mathcal{I}\mathcal{I}'}$ admettant pour objets les $(\mathcal{I}, \mathcal{I}')$-préesquisses m-pointées.

DEFINITION 20. On dira que $(\sigma, M) \in \mathcal{P}_{m0}^{\mathcal{I}\mathcal{I}'}$ est une $z_m^{\mathcal{I}\mathcal{I}'}$*-pseudo-esquisse* si $\sigma \in \mathcal{Z}_0^{\mathcal{I}\mathcal{I}'}$.

La sous-catégorie pleine de $\mathcal{P}_m^{\mathcal{I}\mathcal{I}'}$ admettant pour objets les $z_m^{\mathcal{I}\mathcal{I}'}$-pseudo-esquisses est notée $\mathcal{Z}_m^{\mathcal{I}\mathcal{I}'}$. Soit ${}^z\nabla_m(\sigma,M)$ la sous-catégorie pleine de la catégorie des triangles de $\mathcal{P}_m^{\mathcal{I}\mathcal{I}'}$ ayant pour objets les $\bar{\bar{j}} \in \sigma.\mathcal{P}_m^{\mathcal{I}\mathcal{I}'}$ tels que

$$\phi_s \in \mathcal{Z}_m^{\mathcal{I}\mathcal{I}'}.\sigma,\ s = 1, 2,\ \phi_1.\bar{\bar{j}} = \phi_2.\bar{\bar{j}} \text{ impliquent } \phi_1 = \phi_2.$$

On suppose désormais que $\sigma \in \mathcal{Z}'^{\mathfrak{I}\mathfrak{I}'}_{m0}$.

DEFINITION 21. Si ${}^z\nabla_m(\sigma)$ admet un élément initial ${}^z\bar{i}^{\sigma}_m \in \mathcal{P}'^{\mathfrak{I}\mathfrak{I}'}_m . (\sigma'_0, M'_0)$, on dira que (σ, M) est une $z^{\mathfrak{I}\mathfrak{I}'}_m$*-prémaquette de* $z^{\mathfrak{I}\mathfrak{I}'}_m$*-idée* (σ'_0, M'_0).

Si (σ, M) est une $z^{\mathfrak{I}\mathfrak{I}'}_m$-prémaquette de $z^{\mathfrak{I}\mathfrak{I}'}_m$-idée (σ'_0, M'_0), alors $\sigma'_0 \in I^{\mathfrak{I}\mathfrak{I}'}_0$ et $M'_0 = \emptyset$. Si de plus σ est une $z^{\mathfrak{I}\mathfrak{I}'}$-prémaquette de $z^{\mathfrak{I}\mathfrak{I}'}$-idée σ_0, il existe un morphisme injection canonique de σ'_0 dans σ_0. Enfin une $z^{\mathfrak{I}\mathfrak{I}'}_m$-prémaquette admet une et une seule $z^{\mathfrak{I}\mathfrak{I}'}_m$-idée.

Supposons que l'on ait

$$(\sigma, M) \in \mathcal{Z}'^{\mathfrak{I}\mathfrak{I}'}_{m0}, \quad \text{où} \quad \sigma = (U^{\cdot}, \mu_{U^{\cdot}}, \mu'_{U^{\cdot}}),$$

et posons, avec les notations du paragraphe 1:

$$\begin{cases} M' = \{ f \mid f \in M,\ f \notin U^{\cdot}_0 \}, \\ {}^zW_m(\sigma, M) = {}^zW(\sigma) \cup M', \\ {}^zY_m(\sigma, M) = \complement_U {}^zW_m(\sigma, M), \\ Z_m(\sigma, M) = \complement_{{}^zY_{m(\sigma,M)}} {}^zV(\sigma). \end{cases}$$

Le théorème qui suit complète le théorème 1.

THEOREME 3. *$Z_m(\sigma, M)$ définit un sous-graphe orienté $[Z_m(\sigma, M)]$ de $[U^{\cdot}]$. Désignons par j^{Z_m} le néofoncteur injection canonique du graphe multiplicatif $[Z_m(\sigma, M)]^{\cdot}$ dans $U^{\cdot}$. Pour que (σ, M) soit une $z^{\mathfrak{I}\mathfrak{I}'}_m$-prémaquette, il faut et il suffit que:*

$$\bar{\bar{j}}^{Z_m} = ((\sigma, M), \bar{j}^{Z_m}, (\Sigma [Z_m(\sigma, M)], \emptyset)) \in {}^z\nabla_m(\sigma)_0 .$$

Δ. La démonstration est analogue à celle du théorème 1. ∇

EXEMPLE 1'. Soit $\sigma\mathcal{F}_0$ l'esquisse associée au graphe orienté défini, dans l'exemple 1, par les morphismes a, b, k, par leurs sources et leurs buts. Alors $(\sigma\mathcal{F}_0, \emptyset)$ est la $z^{\mathfrak{I}\mathfrak{I}'}_m$-idée de $(\sigma\mathcal{F}, \{i\})$.

EXEMPLE 2'. Soit $\sigma_{\iota 0}$ l'esquisse associée au graphe orienté défini, dans l'exemple 2, par les morphismes $a,\ b,\ k,\ x_0$, leurs sources et leurs buts. Alors $(\sigma_{\iota 0}, \emptyset)$ est la $z^{\mathfrak{I}\mathfrak{I}'}_m$-idée de $(\sigma_\iota, \{i, \iota\})$.

EXEMPLE 3'. Soit $\sigma\mathcal{T}_0$ l'esquisse associée au graphe orienté défini, dans l'exemple 3, par les morphismes $k,\ k',\ k'',\ k'''$, leurs sources et leurs buts. Alors $(\sigma\mathcal{T}_0, \emptyset)$ est la $z^{\mathfrak{I}\mathfrak{I}'}_m$-idée de $(\bar{\sigma}\mathcal{T}, \{i\})$.

Bibliographie

1. C. EHRESMANN, Esquisses et types des structures algébriques, *Bul. Inst. Polit. Iaşi* XIV (1968).

2. C. EHRESMANN, *Algèbre 1ère partie,* C. D. U., Paris, 1968.

3. C. EHRESMANN, *Introduction to the theory of structured categories,* Un. of Kansas, Technical report 10, Lawrence 1966.

4. Ch. LAIR, Foncteurs structurés compatiblement engendrants et à adjoints compatibles, *C. R. A. S.* 271, Paris (1970), p. 122.

5. A. BURRONI, Esquisses des catégories à limites et des quasi-topologies, *Esquisses mathématiques* 5, Paris, 1970.

6. C. EHRESMANN, *Catégories et Structures,* Dunod, Paris, 1965.

7. Ch. LAIR, Constructions d'esquisses, transformations naturelles généralisées, *Esquisses mathématiques* 2, Paris, 1970.

8. C. EHRESMANN, Sur l'existence de structures libres et de foncteurs adjoints, *Cahiers Top. et Géo. dif. IX, 1-2,* Dunod (1967).

Département de Mathématiques,
Tours 45-55,
Université Paris 7,
2, Place Jussieu,
75 - PARIS (5e).