

CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE CATÉGORIQUES

PIERRE LEROUX

PAULO RIBENBOIM

Dérivations d'ordre supérieur dans les catégories semi-additives

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome
11, n° 4 (1969), p. 437-466

http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1969__11_4_437_0

© Andrée C. Ehresmann et les auteurs, 1969, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

DERIVATIONS D'ORDRE SUPERIEUR DANS LES CATEGORIES SEMI-ADDITIVES

par Pierre LEROUX et Paulo RIBENBOIM

INTRODUCTION

Dans ce travail, nous généralisons la notion de dérivation (d'ordre supérieur) dans les anneaux aux dérivations dans les catégories semi-additives. Nous obtenons une catégorie $\mathcal{D}_{\text{ers}_S}$ (pour tout segment initial S de $\mathbf{N} = (0, 1, 2, \dots)$) dont les objets sont les catégories semi-additives et les morphismes les dérivations d'ordre S , la composition de dérivations étant définie de façon analogue au cas des anneaux (c.f. [6], [7]).

Tout foncteur additif peut être considéré comme une dérivation et ceci donne lieu à un plongement $T_S: \mathcal{C}_{\text{sad}} \rightarrow \mathcal{D}_{\text{ers}_S}$ (où \mathcal{C}_{sad} dénote la catégorie des catégories semi-additives et foncteurs additifs). La partie cruciale de ce travail est la construction dans les paragraphes 3 et 4 des dérivations universelles et co-universelles associées à toute catégorie semi-additive ou, en d'autres termes, la construction d'adjoints à gauche et à droite du foncteur T_S . C'est dans ce but que les notions de catégorie quotient et de catégorie semi-additive libre sur un graphe orienté sont rappelées et que celle de séries formelles sur une catégorie semi-additive est introduite dans le paragraphe 1.

Dans le paragraphe 5, nous définissons une notion de transformation naturelle entre dérivations et une loi de composition entre ces transformations faisant de $\mathcal{D}_{\text{ers}_S}$ une 2-catégorie, i. e. de telle sorte que les règles du calcul fonctoriel de Godement soient valides. Ceci provient du fait que ces transformations sont en réalité des transformations naturelles entre certains foncteurs induits par les dérivations.

Finalement, dans le paragraphe 6 nous considérons les groupes des endo-dérivations inversibles et quasi-inversibles d'une catégorie additive.

La terminologie prérequise peut être trouvée dans [5] sauf exception explicite. Si \mathcal{C} est une catégorie, $|\mathcal{C}|$ désigne la classe des objets de \mathcal{C} , $\mathcal{M}_{\alpha}(\mathcal{C})$ la classe de tous les morphismes de \mathcal{C} .

TABLE DES MATIERES

	Page
0. Catégories semi-additives	3
1. Quelques constructions dans les catégories semi-additives	5
<i>A. Catégories quotients</i>	5
<i>B. Sous-catégories engendrées et catégories libres</i>	6
<i>C. Catégories de séries formelles</i>	8
2. Dérivations	10
3. Dérivations universelles	13
4. Dérivations et séries formelles. Dérivations co-universelles	18
5. Transformations naturelles de dérivations	22
6. Endo-dérivations inversibles et quasi-inversibles dans les catégories additives	26
BIBLIOGRAPHIE	30

0. Catégories semi-additives

DEFINITION. Une catégorie \mathcal{C} est dite *semi-additive* si pour tout couple d'objets C, C' de \mathcal{C} l'ensemble $\mathcal{C}(C, C')$ des morphismes de C à C' dans \mathcal{C} est muni d'une structure de monoïde (demi-groupe avec élément neutre) commutatif de telle sorte que les relations suivantes soient satisfaites: Chaque fois que les composés suivants sont définis, on a

- S-A-1 $(f+f')g = fg+f'g, b(f+f') = bf+bf',$
- S-A-2 $0g = 0 = f0$ (le même symbole 0 dénote les éléments neutres des différents monoïdes).

Si, de plus, les monoïdes $\mathcal{C}(C, C')$ sont des groupes, on dit que \mathcal{C} est une catégorie *additive*. (S-A-2 devient alors une conséquence de S-A-1). Dans ce cas on a aussi la relation

$$(-f)g = -fg = f(-g).$$

EXEMPLES. 1. Soit A un anneau. La catégorie des A -modules (à gauche) et A -homomorphismes est alors une catégorie additive.

5. Soit A un anneau associatif avec élément neutre. A peut alors être considéré comme une catégorie additive avec un seul objet. Réciproquement, si \mathcal{C} est une catégorie additive et C un objet de \mathcal{C} , alors $\mathcal{C}(C, C)$ est muni d'une structure d'anneau associatif avec élément unité.

3. Soit \mathcal{K} une catégorie multiplicative (i. e. munie d'un bifoncteur $\mathcal{K} \times \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$ de telle sorte que $*$ soit associative et possède un élément neutre à droite et à gauche) avec sommes directes finies (et donc aussi un objet initial: 0) dans laquelle les relations suivantes sont satisfaites:

$$A*(B \oplus C) = (A*B) \oplus (A*C), \quad (A \oplus B)*C = (A*C) \oplus (B*C),$$

$$A*0 = 0 = 0*A.$$

Par exemple: Espaces topologiques avec $*$ = produit direct. A -modules avec $*$ = \otimes si A est commutatif.

Supposons que de plus \mathcal{K} possède un petit squelette, i. e. que la classe des classes d'équivalences d'objets de \mathcal{K} sous les \mathcal{K} -isomorphismes soit un ensemble. Si $\overline{\mathcal{K}}$ désigne le squelette de \mathcal{K} , alors $|\overline{\mathcal{K}}|$ (ensemble des objets de $\overline{\mathcal{K}}$) est muni d'une structure de semi-anneau, i. e. de ca-

tégorie semi-additive avec un seul objet, en prenant la somme directe comme somme et $*$ comme produit.

4. La catégorie des semi-groupes commutatifs et homomorphismes est semi-additive, si on définit la somme de deux homomorphismes de façon évidente.

DEFINITION. Un foncteur $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$, où \mathcal{C} et \mathcal{C}' sont deux catégories semi-additives, est dit *additif* si

$$\begin{aligned} F(f+f') &= F(f) + F(f') \quad (\text{chaque fois que } f+f' \text{ a un sens}), \\ F(0) &= 0 \quad (\text{pour chaque } 0). \end{aligned}$$

Désignons par $\mathcal{C}_{\Delta ad}$ la catégorie des catégories semi-additives et foncteurs additifs et par \mathcal{C}_{add} la sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}_{\Delta ad}$ dont les objets sont les catégories additives.

Quelques restrictions à caractère ensembliste doivent être imposées lorsque l'on parle de ces «très grandes» catégories; on peut par exemple utiliser les univers de Grothendieck ou bien travailler dans le cadre de la catégorie \mathcal{Cat} des catégories de Lawvere [3]. Nous passerons sous silence cet aspect de la question.

THEOREME 0.1. *Le plongement $\mathcal{C}_{add} \rightarrow \mathcal{C}_{\Delta add}$ possède un adjoint à gauche. En d'autres termes, pour toute catégorie semi-additive \mathcal{C} , il existe une catégorie additive $\bar{\mathcal{C}}$ et un foncteur additif $F_{\mathcal{C}}: \mathcal{C} \rightarrow \bar{\mathcal{C}}$ de telle sorte que, pour toute autre catégorie additive \mathcal{C}' et tout foncteur additif $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$, il existe un unique foncteur additif $\bar{F}: \bar{\mathcal{C}} \rightarrow \mathcal{C}'$ tel que le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{F_{\mathcal{C}}} & \bar{\mathcal{C}} \\ & \searrow F & \downarrow \bar{F} \\ & & \mathcal{C}' \end{array}$$

soit commutatif.

PREUVE. Si \mathcal{C} est une catégorie semi-additive, on construit la catégorie $\bar{\mathcal{C}}$ de la façon suivante: Les objets de $\bar{\mathcal{C}}$ sont ceux de \mathcal{C} . Si C et C' sont des objets de \mathcal{C} , $\bar{\mathcal{C}}(C, C')$ est le groupe total des différences du monoïde $\mathcal{C}(C, C')$. La composition étant bilinéaire dans \mathcal{C} , elle s'étend alors de façon canonique en une composition dans $\bar{\mathcal{C}}$ en imposant la bili-

néarité. Le reste de la démonstration est laissé au lecteur.

THEOREME 0.2. *Le foncteur d'oubli $\mathcal{C}_{\text{sad}} \rightarrow \mathcal{C}_{\text{at}}$ a un adjoint à gauche $\text{Sad}: \mathcal{C}_{\text{at}} \rightarrow \mathcal{C}_{\text{sad}}$.*

PREUVE. Si \mathcal{U} est une catégorie quelconque, $\text{Sad}(\mathcal{U})$ désigne la catégorie semi-additive obtenue à partir de \mathcal{U} de la façon suivante: Les objets de $\text{Sad}(\mathcal{U})$ sont ceux de \mathcal{U} et $\text{Sad}(\mathcal{U})(A, A')$ est le demi-groupe abélien libre engendré par $\mathcal{U}(A, A')$. La composition se définit à l'aide de la distributivité et en demandant que les zéros agissent comme morphismes nuls.

COROLLAIRE. *Le composé $\mathcal{C}_{\text{add}} \rightarrow \mathcal{C}_{\text{sad}} \rightarrow \mathcal{C}_{\text{at}}$ a un adjoint à gauche.*

En fait $\overline{\text{Sad}(\mathcal{U})} = \overline{\text{Add}(\mathcal{U})}$ (c.f. [5], page 37) est la catégorie ayant les mêmes objets que \mathcal{U} et pour laquelle $\text{Add}(\mathcal{U})(A, A')$ est le groupe abélien libre engendré par $\mathcal{U}(A, A')$.

1. Quelques constructions dans les catégories semi-additives

A. CATEGORIES QUOTIENTS.

DEFINITION. Une congruence \mathcal{R} sur une catégorie semi-additive \mathcal{C} est une famille $\mathcal{R} = (\mathcal{R}_{CC'})_{(C, C') \in |\mathcal{C}| \times |\mathcal{C}|}$ de relations d'équivalence $\mathcal{R}_{CC'}$ sur $\mathcal{C}(C, C')$ compatibles avec l'addition et la composition, i.e.

$$\begin{aligned} &\text{si } f \mathcal{R}_{CC'} f', f_1 \mathcal{R}_{CC'} f'_1 \text{ et } g \mathcal{R}_{C'C''} g', \text{ alors} \\ &(f + f_1) \mathcal{R}_{CC'} (f' + f'_1) \text{ et } (g \circ f) \mathcal{R}_{CC''} (g' \circ f'). \end{aligned}$$

EXEMPLE. Tout foncteur additif $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{C}'$ induit une congruence \mathcal{R}_F sur \mathcal{C} si on pose

$$f \mathcal{R}_{F, CC'} f' \iff F(f) = F(f').$$

Lorsque \mathcal{R} est une congruence sur \mathcal{C} , on construit une nouvelle catégorie semi-additive \mathcal{C}/\mathcal{R} et un foncteur additif $P_{\mathcal{R}}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}/\mathcal{R}$ de la façon suivante: Les objets de \mathcal{C}/\mathcal{R} sont ceux de \mathcal{C} et $P_{\mathcal{R}}$ est l'identité sur les objets.

$$\mathcal{C}/\mathcal{R}(C, C') = \mathcal{C}(C, C') / \mathcal{R}_{CC'}$$

et $P_{\mathcal{R}}(f)$ est la classe d'équivalence de f modulo $\mathcal{R}_{CC'}$. La composition dans \mathcal{C}/\mathcal{R} est la seule faisant de $P_{\mathcal{R}}$ un foncteur:

$$P_{\mathcal{R}}(g) \circ P_{\mathcal{R}}(f) = P_{\mathcal{R}}(g \circ f).$$

Alors \mathcal{C}/\mathcal{R} est bien semi-additive et $P_{\mathcal{R}}$ est additif. De plus, $\mathcal{R}_{P_{\mathcal{R}}} = \mathcal{R}$. \mathcal{C}/\mathcal{R} est appelée la *catégorie quotient* de \mathcal{C} par \mathcal{R} .

THEOREME 1.1. $P_{\mathcal{R}}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}/\mathcal{R}$ a la propriété universelle suivante: $f \mathcal{R} f'$ entraîne $P_{\mathcal{R}}(f) = P_{\mathcal{R}}(f')$, et, si $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ est un foncteur additif tel que $f \mathcal{R} f'$ entraîne $F(f) = F(f')$, alors il existe un unique foncteur additif $F': \mathcal{C}/\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{C}'$ tel que le diagramme suivant soit commutatif:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{P_{\mathcal{R}}} & \mathcal{C}/\mathcal{R} \\ & \searrow F & \downarrow F' \\ & & \mathcal{C}' \end{array}$$

COROLLAIRE. Si $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ est un foncteur additif, il existe un foncteur additif $F': \mathcal{C}/\mathcal{R}_F \rightarrow \mathcal{C}'$ unique tel que $F' \circ P_{\mathcal{R}_F} = F$.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{P_{\mathcal{R}_F}} & \mathcal{C}/\mathcal{R}_F \\ & \searrow F & \downarrow F' \\ & & \mathcal{C}' \end{array}$$

PROPOSITION 1.1. Soit $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ un foncteur additif tel que

- i) $|\mathcal{C}'| = |\mathcal{C}|$ et F est l'identité sur les objets,
- ii) pour chaque $C, C' \in |\mathcal{C}|$, l'application induite par F de $\mathcal{C}(C, C')$ dans $\mathcal{C}'(C, C')$ est surjective.

Alors \mathcal{C}' est isomorphe à $\mathcal{C}/\mathcal{R}_F$.

DEFINITION. Soit \mathcal{C} une catégorie additive. Un idéal \mathcal{I} de \mathcal{C} est une famille $\mathcal{I} = (\mathcal{I}_{CC'})_{(C, C') \in |\mathcal{C}| \times |\mathcal{C}|}$ de sous-groupes $\mathcal{I}_{CC'}$ de $\mathcal{C}(C, C')$, de telle sorte que, pour chaque C, C', C'', C''' dans $|\mathcal{C}|$,

$$\mathcal{C}(C'', C''') \circ \mathcal{I}_{C', C''} \circ \mathcal{C}(C, C') \subseteq \mathcal{I}_{CC''}.$$

PROPOSITION 1.2. Si \mathcal{C} est une catégorie additive, les idéaux de \mathcal{C} sont les noyaux des foncteurs additifs de source \mathcal{C} et sont en bijection avec les congruences sur \mathcal{C} .

B. SOUS-CATEGORIES ENGENDREES ET CATEGORIES LIBRES.

DEFINITION. Soit \mathcal{C} une catégorie. Une sous-classe de morphismes de \mathcal{C} est une famille $\mathcal{S} = (\mathcal{S}_{CC'})_{(C, C') \in |\mathcal{C}| \times |\mathcal{C}|}$ de sous-ensembles (éventuellement vides) $\mathcal{S}_{CC'}$ de $\mathcal{C}(C, C')$.

\mathcal{S} peut être considéré comme un graphe orienté sur $|\mathcal{C}|$: pour tout couple (C, C') d'objets de \mathcal{C} , on a un ensemble $\mathcal{S}_{CC'}$ de flèches de C à C' . En fait \mathcal{S} est un sous-graphe du graphe orienté sous-jacent à \mathcal{C} .

Les sous-classes de morphismes de \mathcal{C} sont partiellement ordonnées par inclusion:

$$\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}' \iff \forall C, C', \mathcal{S}_{CC'} \subseteq \mathcal{S}'_{CC'}$$

DEFINITION. Soit \mathcal{S} une sous-classe de morphismes d'une catégorie semi-additive \mathcal{C} . La plus petite sous-catégorie semi-additive $\langle \mathcal{S} \rangle$ de \mathcal{C} ayant les mêmes objets que \mathcal{C} et contenant \mathcal{S} s'appelle la *sous-catégorie semi-additive de \mathcal{C} engendrée par \mathcal{S}* .

Si \mathcal{S} est une sous-classe de morphismes d'une catégorie semi-additive \mathcal{C} , $\langle \mathcal{S} \rangle$ peut être décrite explicitement: Les objets de $\langle \mathcal{S} \rangle$ sont ceux de \mathcal{C} . Si C et C' sont des objets de \mathcal{C} , un morphisme $f: C \rightarrow C'$ de $\langle \mathcal{S} \rangle$ est une somme finie de composés

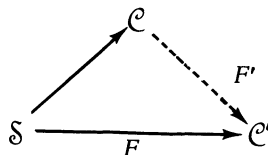
$$(*) \quad f = \sum_i f_{k_i, i} \circ \dots \circ f_{2, i} \circ f_{1, i}$$

où, pour chaque i , $f_{n, i} \in \mathcal{S}$, $n = 1, 2, \dots, k_i$, et $f_{1, i}$ est de source C et $f_{k_i, i}$ est de but C' . On convient d'admettre la somme vide, que l'on identifie à $0: C \rightarrow C'$; cependant un composé dans la somme (*) peut être vide seulement si $C = C'$, et alors ce composé vide est identifié à 1_C .

DEFINITION. Si la représentation (*) des morphismes de $\langle \mathcal{S} \rangle$ est unique à l'ordre des termes de la somme près, on dira que $\langle \mathcal{S} \rangle$ est *librement engendrée par \mathcal{S}* .

Si $\mathcal{C} = \langle \mathcal{S} \rangle$, on dira que \mathcal{C} est *engendrée par \mathcal{S}* et, le cas échéant, que \mathcal{C} est *libre sur \mathcal{S}* .

THEOREME 1.2. Soit \mathcal{C} une catégorie semi-additive libre sur une sous-classe de morphismes \mathcal{S} . Alors pour toute catégorie semi-additive \mathcal{C}' , tout homomorphisme de graphes orientés $F: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{C}'$ s'étend de façon unique en un foncteur additif $F': \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$.



PREUVE. F' est donné par la formule:

$$F'(\sum_i f_{k_i, i} \circ \dots \circ f_{2, i} \circ f_{1, i}) = \sum_i F(f_{k_i, i}) \circ \dots \circ F(f_{2, i}) \circ F(f_{1, i}).$$

THEOREME 1.3. Soit \mathcal{S} un graphe orienté sur un ensemble E . Alors il existe une catégorie semi-additive $\mathcal{C}(\mathcal{S})$, unique à un isomorphisme près, telle que $|\mathcal{C}(\mathcal{S})| = E$ et que $\mathcal{C}(\mathcal{S})$ contienne un sous-graphe orienté isomorphe à \mathcal{S} sur lequel $\mathcal{C}(\mathcal{S})$ est libre.

PREUVE. Soit $\hat{\mathcal{S}}$ la catégorie libre engendrée par \mathcal{S} (c. f. Ehresmann [2]; les morphismes sont des mots ...). Alors $\mathcal{C}(\mathcal{S}) = \text{Sad}(\hat{\mathcal{S}})$.

THEOREME 1.4. Toute catégorie semi-additive est quotient d'une catégorie semi-additive libre.

PREUVE. Soient \mathcal{C} une catégorie semi-additive et \mathcal{S} une sous-classe de morphismes engendrant \mathcal{C} , par exemple le graphe sous-jacent à \mathcal{C} . Alors l'inclusion de \mathcal{S} dans \mathcal{C} induit un foncteur additif $P: \mathcal{C}(\mathcal{S}) \rightarrow \mathcal{C}$ et il est clair que $\mathcal{C} \cong \mathcal{C}(\mathcal{S}) / \mathcal{R}_P$.

Remarquons que les notions de sous-catégorie engendrée et de catégorie libre s'étendent de façon assez immédiate aux catégories additives.

C. CATEGORIES DE SERIES FORMELLES.

Soit \mathcal{C} une catégorie semi-additive. Nous construisons une nouvelle catégorie $\tilde{\mathcal{C}}$ de la façon suivante: Les objets de $\tilde{\mathcal{C}}$ sont ceux de \mathcal{C} . Un morphisme f de C à C' dans $\tilde{\mathcal{C}}$ est une suite $\tilde{f} = (f_0, f_1, \dots)$, où chaque f_ν est un morphisme de C à C' dans \mathcal{C} . Si $\tilde{g} = (g_0, g_1, \dots)$ est un morphisme de C' à C'' dans $\tilde{\mathcal{C}}$, on définit

$$\tilde{g} \circ \tilde{f} = \tilde{h} = (h_0, h_1, \dots) \quad \text{en posant} \quad h_\nu = \sum_{\lambda + \mu = \nu} g_\lambda \circ f_\mu.$$

Il est facile de voir que cette loi de composition, pour laquelle

$$\hat{1}_C = (1_C, 0, 0, \dots)$$

est élément neutre, est associative et qu'elle est distributive relativement à la somme définie ainsi: Si $\tilde{f}' = (f'_0, f'_1, \dots)$,

$$\tilde{f} + \tilde{f}' = (f_0 + f'_0, f_1 + f'_1, \dots).$$

On a aussi

$$\tilde{0}_{CC'} = (0_{CC'}, 0_{CC'}, \dots).$$

PROPOSITION 1.2. \mathcal{C} est une catégorie semi-additive.

Si $f: C \rightarrow C'$ dans \mathcal{C} , on notera de nouveau par f le morphisme $(f, 0, 0, \dots)$ de $\tilde{\mathcal{C}}$.

PROPOSITION 1.3. L'application $f \mapsto f = (f, 0, 0, \dots)$ définit un foncteur additif fidèle nous permettant d'identifier \mathcal{C} à la sous-catégorie de $\tilde{\mathcal{C}}$ dont les morphismes sont les suites (f_0, f_1, \dots) pour lesquelles $f_\nu = 0$ si $\nu > 0$.

Pour chaque $C \in |\mathcal{C}|$, désignons par X_C le morphisme $(0, 1_C, 0, 0, \dots)$ de C à C dans $\tilde{\mathcal{C}}$.

Alors

$$X_C^2 = (0, 0, 1_C, 0, 0, \dots), \quad X_C^3 = (0, 0, 0, 1_C, \dots), \quad \text{etc.};$$

on pose

$$X_C^0 = 1_C = (1_C, 0, 0, \dots).$$

Alors

$$X_C^\nu \circ X_C^\mu = X_C^{\nu + \mu}.$$

PROPOSITION 1.4. Pour tout $\tilde{f} = (f_0, f_1, f_2, \dots): C \rightarrow C'$ de $\tilde{\mathcal{C}}$ et pour tout $\nu \geq 0$, on a $X_C^\nu \circ \tilde{f} = \tilde{f} \circ X_C^\nu$.

PREUVE. En fait si \tilde{g} désigne $X_C^\nu \circ \tilde{f}$ ou $\tilde{f} \circ X_C^\nu$, alors

$$g_\mu = 0 \text{ si } \mu < \nu \text{ et } g_{\nu + \lambda} = f_\lambda \text{ pour } \lambda \geq 0,$$

i.e.

$$\tilde{g} = (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{\nu \text{ termes}}, f_0, f_1, f_2, \dots).$$

En particulier, si $f: C \rightarrow C'$ dans \mathcal{C} ,

$$X_C^\nu \circ f = f \circ X_C^\nu = (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{\nu \text{ termes}}, f, 0, 0, \dots).$$

Ainsi si $\tilde{f} = (f_0, f_1, f_2, \dots): C \rightarrow C'$, on peut écrire formellement:

$$\tilde{f} = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu X_C^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} X_C^\nu f_\nu.$$

Si

$$\tilde{g} = \sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu X_C^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} X_C^\nu g_\nu: C' \rightarrow C'',$$

alors

$$\begin{aligned}
\tilde{g} \circ \tilde{f} &= \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} g_{\nu} X_{C'}^{\nu} \right) \circ \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} X_{C'}^{\nu} f_{\nu} \right) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\sum_{\lambda+\mu=\nu} g_{\lambda} X_{C'}^{\lambda} \circ X_{C'}^{\mu} f_{\mu} \right) \\
&= \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\sum_{\lambda+\mu=\nu} g_{\lambda} X_{C'}^{\nu} f_{\mu} \right) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\sum_{\lambda+\mu=\nu} g_{\lambda} f_{\mu} \right) X_{C'}^{\nu} \\
&= \sum_{\nu=0}^{\infty} X_{C'}^{\nu} \left(\sum_{\lambda+\mu=\nu} g_{\lambda} f_{\mu} \right).
\end{aligned}$$

L'analogie avec la théorie des anneaux nous permet d'écrire $\tilde{\mathcal{C}} = \mathcal{C}[[X]]$ et de nommer $\mathcal{C}[[X]]$ la catégorie des séries formelles en X sur \mathcal{C} . Nous désignerons par $\mathcal{C}[X]$ la sous-catégorie de $\mathcal{C}[[X]]$ contenant \mathcal{C} dont les morphismes sont les suites à support fini. $\mathcal{C}[X]$ est aussi semi-additive. Si $\tilde{f}: C \rightarrow C'$ dans $\mathcal{C}[X]$, alors \tilde{f} se représente de façon unique comme une somme finie:

$$\tilde{f} = \sum_{\nu=0}^n f_{\nu} X_{C'}^{\nu} \quad \text{ou} \quad \tilde{f} = \sum_{\nu=0}^n X_{C'}^{\nu} f_{\nu}.$$

Remarquons que, si \mathcal{C} est additive, $\mathcal{C}[X]$ et $\mathcal{C}[[X]]$ sont aussi additives.

2. Dérivations

Soit S un segment initial de $\mathbf{N} = (0, 1, 2, \dots)$.

Soient \mathcal{C} et \mathcal{D} deux catégories semi-additives.

DEFINITION. Une dérivation d'ordre S de \mathcal{C} à \mathcal{D} est une famille $D = (D_{\nu})_{\nu \in S}$ d'applications du type $D_{\nu}: \mathfrak{M}_{\alpha}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathfrak{M}_{\alpha}(\mathcal{D})$ telle que:

D-1 D_0 préserve les identités.

D-2 Si on note $D_{\nu}^{CC'}$ la restriction de D_{ν} à $\mathcal{C}(C, C')$ (de sorte que

$$D_{\nu} = \bigcup_{(C, C') \in |\mathcal{C}| \times |\mathcal{C}|} D_{\nu}^{CC'}, \text{ alors}$$

$$D_{\nu}^{CC'}: \mathcal{C}(C, C') \rightarrow \mathcal{D}(D_0(C), D_0(C')) \quad \forall \nu \in S.$$

D-3 Chaque fois que $f+f'$ est défini et pour tout $\nu \in S$,

$$\text{a) } D_{\nu}(f+f') = D_{\nu}(f) + D_{\nu}(f'); \quad \text{b) } D_{\nu}(0) = 0.$$

D-4 Chaque fois que $g \circ f$ est défini et pour tout $\nu \in S$,

$$D_{\nu}(g \circ f) = \sum_{\lambda+\mu=\nu} D_{\lambda}(g) \circ D_{\mu}(f).$$

D-5 Si $0 \neq \nu \in S$, $D_{\nu}(1_C) = 0$.

Il suit immédiatement de la définition que D_0 est un foncteur additif et que chaque $D_\nu^{CC'}$ est un homomorphisme de monoïdes additifs.

Si \mathfrak{D} est une catégorie additive, D-3-b est conséquence de D-3-a et D-5 est conséquence de D-4.

La condition D-4 entraîne la généralisation suivante:

$$D_\nu(f_n \circ \dots \circ f_2 \circ f_1) = \sum_{\lambda_n + \dots + \lambda_1 = \nu} D_{\lambda_n}(f_n) \circ \dots \circ D_{\lambda_2}(f_2) \circ D_{\lambda_1}(f_1).$$

EXEMPLES. 1. Si A et B sont deux anneaux, une dérivation d'ordre S de A à B (c. f. [6]) est tout simplement une dérivation d'ordre S de A à B considérés comme catégories additives avec un seul objet.

2. Si $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathfrak{D}$ est un foncteur additif, alors, pour tout S , F s'étend de façon canonique en une dérivation D^F d'ordre S de \mathcal{C} à \mathfrak{D} en posant $D_0^F = F$ et $D_\nu^F = 0$.

3. La formule tensorielle de Künneth (c. f. [4], page 166)

$$H_n(K \otimes L) = \sum_{p+q=n} H_p(K) \otimes H_q(L)$$

valide sous certaines hypothèses sur K et L permet d'envisager l'homologie comme une dérivation H de \bar{K} à \bar{K}' pour certaines catégories semi-additives \bar{K} et \bar{K}' du type de l'exemple 3, § 0. On doit également avoir

$$H_n(K \oplus K') = H_n(K) \oplus H_n(K').$$

4. Une dérivation classique d sur un anneau A , par exemple sur un anneau de polynômes, donne une dérivation d'ordre $(0, 1)$ sur A pour laquelle $d_0 = 1_A$ et $d_1 = d$. On obtient de la même façon une dérivation D d'ordre $(0, 1)$ sur $\mathcal{C}[X]$ ou $\mathcal{C}[[X]]$, en posant

$$D_0 = 1_{\mathcal{C}[X]} \quad \text{et} \quad D_1(\tilde{f}) = \tilde{f}', \quad \text{où} \quad (\tilde{f}')_\nu = (\nu + 1)f_{\nu+1}$$

5. Soit \mathcal{C} une catégorie additive. Considérons $\mathfrak{E} = \prod_{C \in |\mathcal{C}|} \mathcal{C}(C, C)$, anneau des familles d'endomorphismes de \mathcal{C} . Explicitement les éléments de \mathfrak{E} sont les familles $\mathfrak{f} = (f_C)_{C \in |\mathcal{C}|}$ de morphismes $f_C: C \rightarrow C$ de \mathcal{C} , et l'addition et la multiplication sont données par:

$$(f_C) + (g_C) = (f_C + g_C), \quad (f_C) \cdot (g_C) = (f_C \circ g_C).$$

Pour chaque $\mathfrak{f} \in \mathfrak{E}$, on définit une dérivation d'ordre $(0, 1)$, $D^{\mathfrak{f}}$, de \mathcal{C} à \mathcal{C} en posant:

$$D_0^{\ell} = \mathcal{I}_{\mathcal{C}} \quad \text{et} \quad D_1^{\ell}(g) = f_{\mathcal{C}} \circ g - g \circ f_{\mathcal{C}}, \quad \text{si } g \in \mathcal{C}(C, C').$$

On a alors les relations suivantes:

$$\begin{aligned} D_1^{\ell+\ell'} &= D_1^{\ell} + D_1^{\ell'} \quad (\text{i. e. } D^{\ell+\ell'} = D^{\ell} \circ D^{\ell'}, \text{ voir plus bas}), \\ D_1^{\ell+\ell'} &= [D_1^{\ell}, D_1^{\ell'}]. \end{aligned}$$

6. D'autres exemples seront donnés par les dérivations universelles (paragraphe 3) et co-universelles (paragraphe 4).

Soient D' une dérivation d'ordre S' de \mathcal{B} à \mathcal{C} et D une dérivation d'ordre S de \mathcal{C} à \mathcal{D} . On définit une nouvelle famille

$$D \circ D' = ((D \circ D')_{\nu})_{\nu \in S''},$$

où $S'' = S \cap S'$, en posant

$$(D \circ D')_{\nu} = \sum_{\lambda + \mu = \nu} D_{\lambda} \circ D'_{\mu}.$$

PROPOSITION 2.1. $D \circ D'$ est une dérivation de \mathcal{B} à \mathcal{D} . De plus les relations suivantes sont satisfaites:

$$\begin{aligned} (D \circ D') \circ D'' &= D \circ (D' \circ D''), \quad \text{si } D'' \text{ est une dérivation de } \mathcal{A} \text{ à } \mathcal{B}; \\ D^F \circ D^{F'} &= D^F \circ F', \quad \text{si } \mathcal{B} \xrightarrow{E} \mathcal{C} \xrightarrow{E'} \mathcal{D} \text{ sont des foncteurs additifs;} \\ D^{\mathcal{D}} \circ D &= D = D \circ D^{\mathcal{C}}. \end{aligned}$$

PREUVE. On a

$$\begin{aligned} (D \circ D')_{\nu}(g \circ f) &= \sum_{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = \nu} D_{\lambda_1}(D_{\lambda_2}(g)) \circ D_{\lambda_3}(D_{\lambda_4}(f)) \\ &= \sum_{\lambda + \mu = \nu} (D \circ D')_{\lambda}(g) \circ (D \circ D')_{\mu}(f). \end{aligned}$$

$D \circ D'$ satisfait donc à la condition D-4 et il est facile de voir que les autres conditions sont aussi vérifiées; donc $D \circ D'$ est bien une dérivation. Par ailleurs

$$((D \circ D') \circ D'')_{\nu} = \sum_{\lambda + \mu + \rho = \nu} D_{\lambda} \circ D'_{\mu} \circ D''_{\rho} = (D \circ (D' \circ D''))_{\nu}.$$

Les deux autres relations sont immédiates.

On obtient ainsi une catégorie \mathcal{D}_{ers} dont les objets sont les catégories semi-additives et les morphismes les dérivations de tous les ordres. Pour chaque segment initial S de \mathbf{N} , on a aussi la catégorie $\mathcal{D}_{\text{ers}, S}$

ayant les mêmes objets que $\mathcal{D}ers$, mais dont les morphismes sont les dérivations d'ordre S . En particulier, pour le segment initial (0) de \mathbf{N} , on a la catégorie $\mathcal{D}ers_{(0)}$, qui est isomorphe à $\mathcal{C}ad$.

Notons aussi l'existence des catégories $\mathcal{D}era$ et $\mathcal{D}era_S$, sous-catégories pleines de $\mathcal{D}ers$ et $\mathcal{D}ers_S$ respectivement dont les objets sont les catégories additives. En particulier $\mathcal{D}era_{(0)} = \mathcal{C}add$.

Notons $P: \mathcal{D}era \rightarrow \mathcal{D}ers$ et $P_S: \mathcal{D}era_S \rightarrow \mathcal{D}ers_S$ les foncteurs plongements canoniques.

THEOREME 2.1. *Les foncteurs P et P_S pour chaque S ont des adjoints à gauche.*

PREUVE. En fait le théorème 0.1 donne l'adjoint à gauche de $P_{(0)}$. Cet adjoint s'étend de façon évidente en un adjoint à P et à P_S .

Si S et S' sont des segments initiaux de \mathbf{N} et si $S \subseteq S'$, on a un foncteur $\Psi_{S',S}: \mathcal{D}ers_{S'} \rightarrow \mathcal{D}ers_S$ qui est l'identité sur les objets et pour lequel

$$\Psi_{S',S}((D_\nu)_{\nu \in S'}) = (D_\nu)_{\nu \in S}.$$

C'est un problème ouvert de déterminer si ces foncteurs ont des adjoints à gauche ou à droite, même dans le cas des foncteurs d'oubli $\Psi_{S(0)}: \mathcal{D}ers_S \rightarrow \mathcal{C}ad$. Par ailleurs $\Psi_{S',S} \circ \Psi_{S'',S'} = \Psi_{S'',S}$ et ainsi Ψ définit un diagramme de catégories. On remarque alors que $\mathcal{D}ers_{\mathbf{N}} = \varprojlim_{S \neq \mathbf{N}} \mathcal{D}ers_S$.

3. Dérivations universelles

Soit S un segment initial de \mathbf{N} .

On a un foncteur $T_S: \mathcal{C}ad \rightarrow \mathcal{D}ers_S$ qui est l'identité sur les objets et pour lequel $T_S(F) = D^F$ est défini par

$$D_0^F = F \quad \text{et} \quad D_\nu^F = 0, \quad 0 \neq \nu \in S,$$

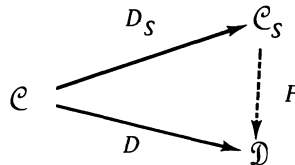
si F est un foncteur additif.

Les deux dernières relations de la proposition 2.1 expriment précisément que T_S est un foncteur. T_S est un plongement fidèle qui nous permet d'identifier $\mathcal{C}ad$ avec la sous-catégorie de $\mathcal{D}ers_S$ dont les morphismes sont les dérivations D pour lesquelles $D_\nu = 0$ si $0 \neq \nu \in S$. Ainsi si F est un foncteur additif, on notera de nouveau par F la dériva-

tion D^F . On a alors

$$(F \circ D')_{\nu} = F \circ D'_{\nu} \quad \text{et} \quad (D \circ F')_{\nu} = D_{\nu} \circ F'.$$

THEOREME 3.1. Pour chaque segment initial S de \mathbf{N} , le foncteur $T_S: \mathcal{C}_{\text{ad}} \rightarrow \mathcal{D}_{\text{ers}_S}$ a un adjoint à gauche. Explicitement, pour chaque catégorie semi-additive \mathcal{C} , il existe une catégorie semi-additive \mathcal{C}_S et une dérivation D_S d'ordre S de \mathcal{C} à \mathcal{C}_S telles que, pour toute catégorie semi-additive \mathcal{D} et toute dérivation D d'ordre S de \mathcal{C} à \mathcal{D} , il existe un unique foncteur additif $F: \mathcal{C}_S \rightarrow \mathcal{D}$ tel que $F \circ D_S = D$.



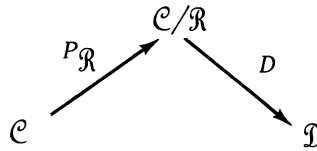
\mathcal{C}_S est appelée la catégorie différentielle d'ordre S associée à \mathcal{C} et D_S la dérivation universelle d'ordre S associée à \mathcal{C} .

Le reste de cette section est consacré à la démonstration de ce théorème.

PROPOSITION 3.1. Soit \mathcal{R} une congruence sur \mathcal{C} et soit $D = (D_{\nu})_{\nu \in S}$ une famille d'applications du type $\mathcal{M}_{\text{or}}(\mathcal{C} / \mathcal{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{\text{or}}(\mathcal{D})$ telle que

$$D \circ P_{\mathcal{R}} = (D_{\nu} \circ P_{\mathcal{R}})_{\nu \in S}$$

soit une dérivation d'ordre S de \mathcal{C} à \mathcal{D} ; alors D est une dérivation d'ordre S de $\mathcal{C} / \mathcal{R}$ à \mathcal{D} .



PREUVE.

D-1
$$D_0(1_C) = D_0 P_{\mathcal{R}}(1_C) = 1_{D_0 P_{\mathcal{R}}(C)}.$$

On a donc

$$D_0(C) = D_0 \circ P_{\mathcal{R}}(C).$$

D-2 Si $\bar{f}: C \rightarrow C'$ dans $\mathcal{C} / \mathcal{R}$, alors $\bar{f} = P_{\mathcal{R}}(f)$ avec $f \in \mathcal{C}$ et

$$D_{\nu}(\bar{f}) = D_{\nu}(P_{\mathcal{R}}(f)) = (D \circ P_{\mathcal{R}})_{\nu}(f) : D_0(C) \rightarrow D_0(C').$$

D-3 a)
$$D_{\nu}(\bar{f} + \bar{f}') = D_{\nu}(P_{\mathcal{R}}(f) + P_{\mathcal{R}}(f')) = D_{\nu}(P_{\mathcal{R}}(f + f'))$$

$$\begin{aligned} &= (D \circ P_{\mathcal{R}})_{\nu}(f + f') = (D \circ P_{\mathcal{R}})_{\nu}(f) + (D \circ P_{\mathcal{R}})_{\nu}(f') \\ &= D_{\nu}(P_{\mathcal{R}}(f)) + D_{\nu}(P_{\mathcal{R}}(f')) = D_{\nu}(\bar{f}) + D_{\nu}(\bar{f}'). \end{aligned}$$

b)
$$D_{\nu}(0) = D_{\nu}P_{\mathcal{R}}(0) = 0.$$

D-4 On a

$$\begin{aligned} D_{\nu}(\bar{g} \circ \bar{f}) &= D_{\nu}(P_{\mathcal{R}}(g) \circ P_{\mathcal{R}}(f)) = D_{\nu} \circ P_{\mathcal{R}}(g \circ f) \\ &= (D \circ P_{\mathcal{R}})_{\nu}(g \circ f) = \sum_{\lambda + \mu = \nu} (D \circ P_{\mathcal{R}})_{\lambda}(g) \circ (D \circ P_{\mathcal{R}})_{\mu}(f) \\ &= \sum_{\lambda + \mu = \nu} D_{\lambda}(P_{\mathcal{R}}(g)) \circ D_{\mu}(P_{\mathcal{R}}(f)) = \sum_{\lambda + \mu = \nu} D_{\lambda}(\bar{g}) \circ D_{\mu}(\bar{f}). \end{aligned}$$

D-5 Si $\nu \neq 0$, $D_{\nu}(1_C) = D_{\nu}(P_{\mathcal{R}}(1_C)) = (D \circ P_{\mathcal{R}})_{\nu}(1_C) = 0$.

PROPOSITION 3.2. Soit \mathcal{C} une catégorie semi-additive et soit \mathcal{S} une sous-classe de morphismes de \mathcal{C} telle que $\langle \mathcal{S} \rangle = \mathcal{C}$. Alors toute dérivation D d'ordre S de \mathcal{C} à \mathcal{D} est déterminée uniquement par son effet sur $|\mathcal{C}|$ et sur la classe \mathcal{S} .

PREUVE. On doit avoir

$$\begin{aligned} D_{\nu}(f_n \circ f_{n-1} \circ \dots \circ f_1) &= \sum_{\lambda_n + \dots + \lambda_1 = \nu} D_{\lambda_n}(f_n) \circ \dots \circ D_{\lambda_1}(f_1). \\ D_{\nu}(0) &= 0, \quad D_0(1_C) = 1_{D_0(C)} \quad \text{et} \quad D_{\nu}(1_C) = 0 \quad \text{si} \quad \nu \neq 0. \end{aligned}$$

Or les morphismes de \mathcal{C} sont des sommes finies

$$\sum_i f_{n_i, i} \circ \dots \circ f_{2, i} \circ f_{1, i} \quad \text{avec} \quad f_{k, i} \in \mathcal{S}$$

et chaque D_{ν} est additif. La conclusion est immédiate.

PROPOSITION 3.3. Soit \mathcal{C} une catégorie semi-additive libre sur un graphe \mathcal{S} . Soit S un segment initial de \mathbf{N} . Soit $d: |\mathcal{C}| \rightarrow |\mathcal{D}|$ une application, où \mathcal{D} est une catégorie semi-additive, et pour chaque $x: C \rightarrow C'$ dans \mathcal{S} , soit $(d_{x, \nu})_{\nu \in S}$ une famille de morphismes de \mathcal{D} du type

$$d_{x, \nu}: d(C) \rightarrow d(C').$$

Alors il existe une unique dérivation D d'ordre S de \mathcal{C} à \mathcal{D} telle que:

- i) $D_0(C) = d(C), \quad C \in |\mathcal{C}|,$
- ii) $D_{\nu}(x) = d_{x, \nu}, \quad x \in \mathcal{S}, \quad \nu \in S.$

PREUVE. L'unicité de D est une conséquence de la proposition 3.2. Pour démontrer l'existence, il suffit de voir qu'en posant

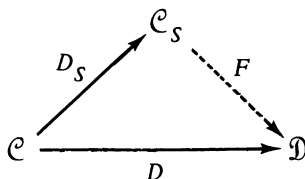
$$\begin{aligned}
 & D_\nu(\sum_i x_{k_i, i} \circ \dots \circ x_{2, i} \circ x_{1, i}) = \\
 & = \sum_i (\sum_{\lambda_{k_i}^i + \dots + \lambda_2^i + \lambda_1^i = \nu} d_{x_{k_i, i}, \lambda_{k_i}^i} \circ \dots \circ d_{x_{2, i}, \lambda_2^i} \circ d_{x_{1, i}, \lambda_1^i}), \\
 & D_0(1_C) = 1_{d(C)} \text{ et } D_\nu(1_C) = 0 \text{ si } \nu > 0,
 \end{aligned}$$

on obtient bien une dérivation d'ordre S de \mathcal{C} à \mathcal{D} . Or ceci n'est qu'une vérification formelle.

Soit \mathcal{S} un graphe orienté sur un ensemble E et soit S un segment initial de \mathbf{N} . On construit un nouveau graphe orienté \mathcal{S}_S sur E en posant $(\mathcal{S}_S)_{CC'} = \mathcal{S}_{CC'} \times S$ et on pose $x_\nu = (x, \nu)$ pour $x \in \mathcal{S}$ et $\nu \in S$.

PROPOSITION 3.4. Si \mathcal{C} est la catégorie libre sur \mathcal{S} ($|\mathcal{C}| = E$), alors la catégorie différentielle \mathcal{C}_S d'ordre S de \mathcal{C} est la catégorie libre sur \mathcal{S}_S et la dérivation universelle D_S d'ordre S de \mathcal{C} est la seule dérivation d'ordre S de \mathcal{C} à \mathcal{C}_S telle que

$$(D_S)_0(C) = C \text{ et } (D_S)_\nu(x) = x_\nu \text{ si } x \in \mathcal{S}.$$



PREUVE. D'après la proposition précédente, D_S est bien une dérivation d'ordre S . Si D est une dérivation d'ordre S de \mathcal{C} à \mathcal{D} , soit F le seul foncteur additif de \mathcal{C}_S à \mathcal{D} tel que $F(C) = D_0(C)$ et $F(x_\nu) = D_\nu(x)$. Alors $F \circ D_S$ est une dérivation d'ordre S de \mathcal{C} à \mathcal{D} qui coïncide avec D sur \mathcal{S} , car

$$(F \circ D_S)_0(C) = F((D_S)_0(C)) = F(C) = D_0(C)$$

et

$$(F \circ D_S)_\nu(x) = F((D_S)_\nu(x)) = F(x_\nu) = D_\nu(x), \text{ si } x \in \mathcal{S}.$$

Donc $F \circ D_S = D$. Par ailleurs si F' est un autre foncteur additif de $\mathcal{C}_S \rightarrow \mathcal{D}$ tel que $F' \circ D_S = D$, alors

$$F'(C) = D_0(C) \text{ et } F'(x_\nu) = D_\nu(x),$$

et donc $F' = F$.

PREUVE DU THEOREME 3. 1. Soit \mathcal{C} une catégorie semi-additive. \mathcal{C} est quotient d'une catégorie libre $\mathcal{C}(\mathcal{S})$ sur un graphe orienté \mathcal{S} par une congruence \mathcal{R} sur $\mathcal{C}(\mathcal{S})$, i. e. $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\mathcal{S})/\mathcal{R}$.

Soit $\mathcal{C}(\mathcal{S})_S$ la catégorie différentielle d'ordre S de $\mathcal{C}(\mathcal{S})$ et $D'_S : \mathcal{C}(\mathcal{S}) \rightarrow \mathcal{C}(\mathcal{S})_S$ la dérivation universelle d'ordre S de $\mathcal{C}(\mathcal{S})$. Soit \mathcal{R}_S la congruence la plus fine sur $\mathcal{C}(\mathcal{S})_S$ telle que, pour $x, x' \in \mathcal{C}(\mathcal{S})$,

$$x \mathcal{R} x' \implies (D'_S)_\nu(x) \mathcal{R}_S (D'_S)_\nu(x') \quad \forall \nu \in S.$$

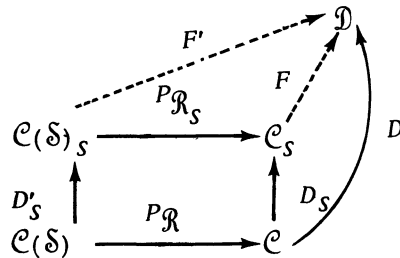
Soient $\mathcal{C}_S = \mathcal{C}(\mathcal{S})_S/\mathcal{R}_S$ et $P_{\mathcal{R}_S} : \mathcal{C}(\mathcal{S})_S \rightarrow \mathcal{C}_S$ le foncteur canonique. On définit $D_S = ((D_S)_\nu)_{\nu \in S}$ de \mathcal{C} à \mathcal{C}_S de la façon suivante: Si $y = P_{\mathcal{R}}(x) : C \rightarrow C'$ dans \mathcal{C} , on pose

$$(D_S)_\nu(y) = P_{\mathcal{R}_S}((D'_S)_\nu(x)).$$

Alors D_S est bien défini, car, si $P_{\mathcal{R}}(x) = y = P_{\mathcal{R}}(x')$, $x \mathcal{R} x'$ et donc

$$(D'_S)_\nu(x) \mathcal{R}_S (D'_S)_\nu(x') \text{ d'où } P_{\mathcal{R}_S}((D'_S)_\nu(x)) = P_{\mathcal{R}_S}((D'_S)_\nu(x')).$$

Par ailleurs $D_S \circ P_{\mathcal{R}} = P_{\mathcal{R}_S} \circ D'_S$ est une dérivation et donc D_S aussi, d'après la proposition 3. 1. Alors D_S de \mathcal{C} à \mathcal{C}_S est la solution cherchée.



En effet, si D est une dérivation d'ordre S de \mathcal{C} à \mathcal{D} , $D \circ P_{\mathcal{R}}$ est une dérivation d'ordre S de $\mathcal{C}(\mathcal{S})$ à \mathcal{D} , et donc il existe un unique foncteur additif $F' : \mathcal{C}(\mathcal{S})_S \rightarrow \mathcal{D}$ tel que $D \circ P_{\mathcal{R}} = F' \circ D'_S$. Mais si $x \mathcal{R} x'$,

$$F' \circ (D'_S)_\nu(x) = D_\nu \circ P_{\mathcal{R}}(x) = D_\nu \circ P_{\mathcal{R}}(x') = F' \circ (D'_S)_\nu(x');$$

donc, si $z \mathcal{R} z'$, $F'(z) = F'(z')$, car \mathcal{R}_S est plus fine que $\mathcal{R}_{F'}$. Il existe donc un unique foncteur additif $F : \mathcal{C}_S \rightarrow \mathcal{D}$ tel que $F \circ P_{\mathcal{R}_S} = F'$; alors

$$F \circ D_S \circ P_{\mathcal{R}} = F \circ P_{\mathcal{R}_S} \circ D'_S = F' \circ D'_S = D \circ P_{\mathcal{R}},$$

donc $F \circ D_S = D$. Si $\bar{F} \circ D_S = D$, alors

$$F \circ P_{\mathcal{R}_S} \circ D'_S = F \circ D_S \circ P_{\mathcal{R}} = D \circ P_{\mathcal{R}} = \bar{F} \circ D_S \circ P_{\mathcal{R}} = \bar{F} \circ P_{\mathcal{R}_S} \circ D'_S ;$$

donc

$$F \circ P_{\mathcal{R}_S} = \bar{F} \circ P_{\mathcal{R}_S} \quad \text{et} \quad F = \bar{F}.$$

COROLLAIRE 3.1. T_S préserve les limites projectives. En particulier $\mathcal{D}_{\text{ers}_S}$ possède des produits directs qui coïncident avec ceux de \mathcal{C}_{ad} .

Posant $\text{Dif}_S(\mathcal{C}) = \mathcal{C}_S$, Dif_S s'étend de façon canonique en un foncteur $\mathcal{D}_{\text{ers}_S} \rightarrow \mathcal{C}_{\text{ad}}$ qui est l'adjoint à gauche de T_S .

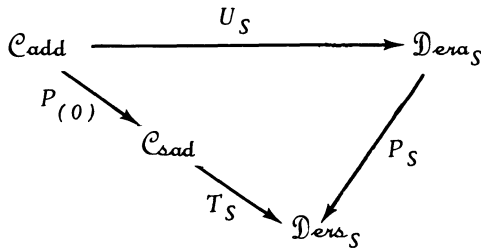
COROLLAIRE 3.2. Dif_S préserve les limites inductives.

COROLLAIRE 3.3. Le foncteur composé

$$T_S \circ P_{(0)} : \mathcal{C}_{\text{add}} \rightarrow \mathcal{C}_{\text{ad}} \rightarrow \mathcal{D}_{\text{ers}_S}$$

a un adjoint à gauche.

COROLLAIRE 3.4. Considérons le diagramme commutatif suivant, où U_S



est simplement la restriction de T_S aux catégories additives. Alors U_S a un adjoint à gauche.

PREUVE. Ceci est une conséquence d'un théorème de E. Dubuc ([1]) sur les «adjoint triangles», P_S et $T_S \circ P_{(0)}$ ayant des adjoints à gauche. En fait l'adjoint à gauche de U_S peut être construit directement par un procédé analogue à celui de la construction de l'adjoint à gauche de T_S .

4. Dérivations et séries formelles. Dérivations co-universelles

Soit \mathcal{C} une catégorie semi-additive. $\tilde{\mathcal{C}}$ désigne la catégorie des séries formelles sur \mathcal{C} décrite en 1-C.

Si $\tilde{f} = (f_0, f_1, \dots)$ et $\tilde{f}' = (f'_0, f'_1, \dots)$ sont des morphismes $C \rightarrow C'$ de $\tilde{\mathcal{C}}$ et si S est un segment initial de \mathbf{N} , on définit

$$\tilde{f} \mathcal{R}_{CC'}^S \tilde{f}' \iff f_\nu = f'_\nu \quad \forall \nu \in S.$$

PROPOSITION 4.1. La famille $\mathcal{R}^S = (\mathcal{R}_{CC}^S)$ est une congruence sur $\tilde{\mathcal{C}}$.

Nous noterons $\tilde{\mathcal{C}}^S$ la catégorie quotient $\tilde{\mathcal{C}} / \mathcal{R}^S$. Remarquons que $\tilde{\mathcal{C}}^{(0)}$ est isomorphe à \mathcal{C} et que $\tilde{\mathcal{C}}^{\mathbf{N}} = \tilde{\mathcal{C}}$. On écrira $X_C^S = P_{\mathcal{R}^S}(X_C)$. Si S et S' sont des segments initiaux et si $S \leq S'$, on a $\mathcal{R}^{S'} \leq \mathcal{R}^S$ et on obtient donc un foncteur $\Phi_{S'S} : \tilde{\mathcal{C}}^{S'} \rightarrow \tilde{\mathcal{C}}^S$.

En fait $\tilde{\mathcal{C}}^S$ est isomorphe à la catégorie dont les morphismes sont les suites $\tilde{f}^S = (f_\nu)_{\nu \in S}$, la somme se faisant termes à termes et la composition par la règle

$$(g \circ f)_\nu = \sum_{\lambda + \mu = \nu} g_\lambda \circ f_\mu.$$

Alors $\Phi_{S'S}$ consiste tout simplement à tronquer les suites.

$$\Phi_{S'S} \circ \Phi_{S''S'} = \Phi_{S''S},$$

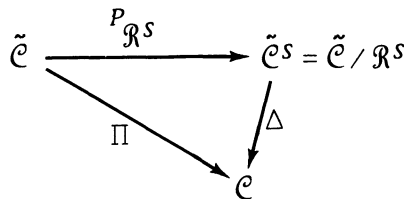
et ainsi Φ définit un diagramme dans \mathcal{Cat} . On remarque que

$$\tilde{\mathcal{C}} = \tilde{\mathcal{C}}^{\mathbf{N}} = \lim_{S \neq \mathbf{N}} \tilde{\mathcal{C}}^S.$$

On définit une dérivation $\Pi_{\tilde{\mathcal{C}}}^S = \Pi$ d'ordre S de $\tilde{\mathcal{C}}$ à \mathcal{C} en posant

$$\Pi_0(C) = C \quad \text{et} \quad \Pi_\nu(\tilde{f}) = f_\nu, \quad \nu \in S.$$

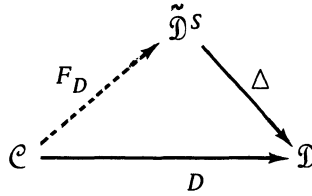
Alors si $\tilde{f} \mathcal{R}^S \tilde{f}'$, $\Pi_\nu(\tilde{f}) = \Pi_\nu(\tilde{f}')$ pour tout $\nu \in S$, de sorte que Π induit une dérivation $\Delta_{\tilde{\mathcal{C}}}^S = \Delta$ d'ordre S de $\tilde{\mathcal{C}}^S$ à \mathcal{C} unique pour laquelle on a $\Delta \circ P_{\mathcal{R}^S} = \Pi$.



On a

$$\Delta_0(C) = C \quad \text{et} \quad \Delta_\nu(\tilde{f}^S) = f_\nu.$$

THEOREME 4.1. Soit S un segment initial de \mathbf{N} . Alors la dérivation $\Delta_{\tilde{\mathcal{D}}}^S = \Delta$ d'ordre S de $\tilde{\mathcal{D}}^S$ à \mathcal{D} est co-universelle, c'est-à-dire que, pour toute dérivation D d'ordre S de \mathcal{C} à \mathcal{D} , il existe un unique foncteur additif $F_D : \mathcal{C} \rightarrow \tilde{\mathcal{D}}^S$ pour lequel $\Delta \circ F_D = D$.



En d'autres termes, posant $E^S(\mathfrak{D}) = \tilde{\mathfrak{D}}^S$, E^S s'étend en un foncteur $\mathfrak{Ders}_S \rightarrow \mathfrak{C}_{\text{ad}}$ adjoint à droite de $T_S: \mathfrak{C}_{\text{ad}} \rightarrow \mathfrak{Ders}_S$. En fait, $E^S(D)(\tilde{f}^S)$ est donné par la formule

$$[E^S(D)(\tilde{f}^S)]_\nu = \sum_{\lambda + \mu = \nu} D_\lambda(f_\mu).$$

De plus E^S est un plongement fidèle, et un foncteur additif $F: \tilde{\mathfrak{C}}^S \rightarrow \tilde{\mathfrak{D}}^S$ est de la forme $E^S(D)$ pour une dérivation D d'ordre S de \mathfrak{C} à \mathfrak{D} si et seulement si $F(X_{\mathfrak{C}}^S) = X_{F(\mathfrak{C})}^S$.

PREUVE DU THEOREME. Soit D une dérivation d'ordre S de \mathfrak{C} à \mathfrak{D} . Si $C \in |\mathfrak{C}|$, on doit avoir

$$F_D(C) = \Delta_0 \circ F_D(C) = D_0(C)$$

et, si $f: C \rightarrow C'$ dans \mathfrak{C} , on doit avoir

$$[F_D(f)]_\nu = (\Delta \circ F_D)_\nu(f) = D_\nu(f).$$

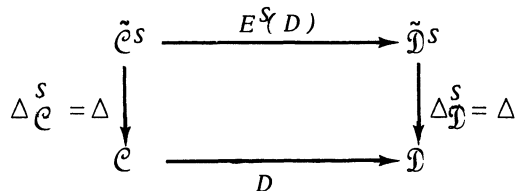
L'unicité de F_D est donc acquise. Posant

$$F_D(C) = D_0(C) \quad \text{et} \quad [F_D(f)]_\nu = D_\nu(f),$$

il est facile de voir que F_D est bien un foncteur additif pour lequel

$$\Delta \circ F_D = D.$$

Posons $E^S(\mathfrak{D}) = \tilde{\mathfrak{D}}^S$. Alors l'extension de E^S en un foncteur $\mathfrak{Ders}_S \rightarrow \mathfrak{C}_{\text{ad}}$ se fait de la façon habituelle. Explicitement $E^S(D) = F_{D \circ \Delta}$ est le seul foncteur additif $\tilde{\mathfrak{C}}^S \rightarrow \tilde{\mathfrak{D}}^S$ pour lequel $\Delta \circ E^S(D) = D \circ \Delta$.



En fait

$$E^S(D)(C) = D_0 \circ \Delta_0(C) = D_0(C)$$

et, si $\tilde{f}^S = (f_\nu)_{\nu \in S} : C \rightarrow C'$ dans $\tilde{\mathcal{C}}^S$,

$$\begin{aligned} [E^S(D)(\tilde{f}^S)]_\nu &= (D \circ \Delta)_\nu(\tilde{f}^S) = \left(\sum_{\lambda + \mu = \nu} D_\lambda \circ \Delta_\mu \right)(\tilde{f}^S) \\ &= \sum_{\lambda + \mu = \nu} D_\lambda(\Delta_\mu(\tilde{f}^S)) = \sum_{\lambda + \mu = \nu} D_\lambda(f_\mu). \end{aligned}$$

Notons que

$$E^S(D)(X_C^S) = X_{D_0(C)}^S = X_{E^S(D)(C)}^S.$$

Si G est une dérivation d'ordre S de \mathcal{C} à \mathfrak{D} telle que $D \neq G$, et si $D_0 = G_0$, alors il existe $\nu \in S$ et $f : C \rightarrow C'$ dans \mathcal{C} tels que l'on ait $D_\nu(f) \neq G_\nu(f)$. Posant $f^S = (f, 0, 0, \dots)$, on a

$$E^S(D)(f^S) = (D_\nu(f))_{\nu \in S} \neq (G_\nu(f))_{\nu \in S} = E^S(G)(f^S),$$

et donc $E^S(D) \neq E^S(G)$. Ainsi E^S est fidèle.

Par ailleurs, si $F : \tilde{\mathcal{C}}^S \rightarrow \tilde{\mathfrak{D}}^S$ est un foncteur additif tel que

$$F(X_C^S) = X_{F(C)}^S,$$

on définit une dérivation D d'ordre S de \mathcal{C} à \mathfrak{D} de la façon suivante :

$$D_0(C) = F(C), \quad D_\nu(f) = \Delta_\nu(F(f^S)), \quad f^S = (f, 0, 0, \dots).$$

Alors

$$\begin{aligned} D_\nu(g \circ f) &= \Delta_\nu(F((g \circ f)^S)) = \Delta_\nu(F(g^S) \circ F(f^S)) \\ &= \sum_{\lambda + \mu = \nu} \Delta_\lambda(F(g^S)) \circ \Delta_\mu(F(f^S)) = \sum_{\lambda + \mu = \nu} D_\lambda(g) \circ D_\mu(f), \end{aligned}$$

et on vérifie aisément que D est bien une dérivation.

Par ailleurs, pour $\nu \in S$,

$$\begin{aligned} F(\tilde{f}^S) &= F((f_0, f_1, \dots, f_\nu, 0, 0, \dots) + (0, 0, \dots, 0, f_{\nu+1}, f_{\nu+2}, \dots)) \\ &= F(f_0^S + f_1^S \circ X_C^S + \dots + f_\nu^S \circ (X_C^S)^\nu + (f_{\nu+1}, f_{\nu+2}, \dots) \circ (X_C^S)^{\nu+1}) \\ &= F(f_0^S) + F(f_1^S) \circ X_{F(C)}^S + \dots + F(f_\nu^S) \circ (X_{F(C)}^S)^\nu + \\ &\quad + F(f_{\nu+1}, f_{\nu+2}, \dots) \circ (X_{F(C)}^S)^{\nu+1} \end{aligned}$$

et

$$\Delta_\nu(\tilde{g}^S \circ (X_D^S)^{\nu+1}) = 0 \quad \text{pour tout } \tilde{g}^S : D \rightarrow D' \text{ dans } \tilde{\mathfrak{D}}^S.$$

Donc

$$\begin{aligned} \Delta_\nu(F(\tilde{f}^S)) &= \Delta_\nu(F(f_0^S)) + \Delta_{\nu-1}(F(f_1^S)) + \dots + \Delta_0(F(f_\nu^S)) \\ &= D_\nu(f_0) + D_{\nu-1}(f_1) + \dots + D_0(f_\nu) = \Delta_\nu(E^S(D)(\tilde{f}^S)). \end{aligned}$$

Ainsi

$$F(\tilde{f}^S) = E^S(D)(\tilde{f}^S) \quad \text{et} \quad F = E^S(D).$$

COROLLAIRE. T_S préserve les limites inductives. En particulier $\mathcal{D}_{\text{ers}_S}$ possède des sommes directes qui coïncident avec celles de \mathcal{C}_{sad} .

Remarquons finalement que la restriction de E^S aux catégories additives donne un foncteur $\bar{E}^S: \mathcal{D}_{\text{era}_S} \rightarrow \mathcal{C}_{\text{add}}$ adjoint à droite du plongement $U_S: \mathcal{C}_{\text{add}} \rightarrow \mathcal{D}_{\text{era}_S}$.

5. Transformations naturelles de dérivations

Soit S un segment initial de \mathbf{N} .

L'application $f \mapsto f^S = (f, 0, 0, \dots)$ définit un foncteur additif $\Phi_{\mathcal{C}} = \Phi^S: \mathcal{C} \rightarrow \tilde{\mathcal{C}}^S$ qui est un plongement fidèle. Φ^S est le seul foncteur additif tel que $\Delta \circ \Phi^S = 1_{\mathcal{C}}$ dans $\mathcal{D}_{\text{ers}_S}$.

DEFINITION. Soient D et D' deux dérivations d'ordre S de \mathcal{C} à \mathcal{D} et soient F_D et $F_{D'}$ les deux foncteurs additifs de $\tilde{\mathcal{C}}^S$ à $\tilde{\mathcal{D}}^S$ correspondant à D et D' respectivement selon le théorème 4.1 (alors notés $E^S(D)$ et $E^S(D')$ respectivement). Une transformation naturelle $\tilde{\alpha}$ de D à D' est une transformation naturelle du foncteur $F_D \circ \Phi^S$ vers le foncteur $F_{D'} \circ \Phi^S: \mathcal{C} \rightarrow \tilde{\mathcal{D}}^S$.

On doit donc avoir

$$\tilde{\alpha} = (\tilde{\alpha}_C)_{C \in |\mathcal{C}|}, \quad \text{où} \quad \tilde{\alpha}_C: (F_D \circ \Phi^S)(C) \rightarrow (F_{D'} \circ \Phi^S)(C)$$

est un morphisme de $\tilde{\mathcal{D}}^S$, i. e.

$$\tilde{\alpha}_C = ((\alpha_C)_\nu)_{\nu \in S}, \quad \text{où} \quad (\alpha_C)_\nu: D_0(C) \rightarrow D'_0(C) \quad \text{dans} \quad \mathcal{D},$$

de telle sorte que, si $f: C \rightarrow C'$ dans \mathcal{C} , le diagramme suivant soit commutatif dans $\tilde{\mathcal{D}}^S$:

$$\begin{array}{ccc} D_0(C) & \xrightarrow{\tilde{\alpha}_C} & D'_0(C) \\ \downarrow F_D(f^S) & & \downarrow F_{D'}(f^S) \\ D_0(C') & \xrightarrow{\tilde{\alpha}_{C'}} & D'_0(C') \end{array}$$

C'est-à-dire que l'on doit avoir (rappelant que $F_D(f^S) = (D_\nu(f))_{\nu \in S}$) pour chaque $\nu \in S$:

$$\sum_{\lambda + \mu = \nu} D'_\lambda(f) \circ (\alpha_C)_\mu = \sum_{\lambda + \mu = \nu} (\alpha_{C'})_\lambda \circ D'_\mu(f).$$

$$\begin{array}{ccc} D_0(C) & \xrightarrow{(\alpha_C)_\mu} & D'_0(C) \\ D_\mu(f) \downarrow & & \downarrow D'_\lambda(f) \\ D_0(C') & \xrightarrow{(\alpha_{C'})_\lambda} & D'_0(C') \end{array}$$

Si chaque $\tilde{\alpha}_C$ est inversible dans \mathfrak{D}^S , alors $\tilde{\alpha}^{-1} = (\tilde{\alpha}_C^{-1})_{C \in |\mathcal{C}|}$ est aussi une transformation naturelle de $F_D \circ \Phi^S$ à $F_D \circ \Phi^S$.

DEFINITION. On dira alors que $\tilde{\alpha}$ est une *équivalence naturelle* de D à D' et que D et D' sont *naturellement équivalentes*.

Si D'' est une autre dérivation d'ordre S de \mathcal{C} à \mathfrak{D} et si $\tilde{\alpha}'$ est une transformation naturelle de D' à D'' , on obtient une transformation naturelle $\tilde{\alpha}' \circ \tilde{\alpha}$ de D à D'' en posant $(\tilde{\alpha}' \circ \tilde{\alpha})_C = \tilde{\alpha}'_C \circ \tilde{\alpha}_C$. On a alors

$$((\tilde{\alpha}' \circ \tilde{\alpha})_C)_\nu = (\tilde{\alpha}'_C \circ \tilde{\alpha}_C)_\nu = \sum_{\lambda + \mu = \nu} (\alpha_{C'})_\lambda \circ (\alpha_C)_\mu.$$

De plus $\tilde{I}_D = (\tilde{I}_{D_0(C)})$, où $\tilde{I}_{D_0(C)} = (1_{D_0(C)}, 0, 0, \dots)$ est une transformation naturelle de D à D , et

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}' \circ \tilde{I}_D &= \tilde{\alpha}', \quad \tilde{I}_{D'} \circ \tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}, \\ (\tilde{\alpha}'' \circ \tilde{\alpha}') \circ \tilde{\alpha} &= \tilde{\alpha}'' \circ (\tilde{\alpha}' \circ \tilde{\alpha}). \end{aligned}$$

Si $\tilde{\alpha}^{-1}$ existe, $\tilde{\alpha} \circ \tilde{\alpha}^{-1} = \tilde{I}_{D'}$, et $\tilde{\alpha}^{-1} \circ \tilde{\alpha} = \tilde{I}_D$.

On remarque que la relation « D est naturellement équivalente à D' », notée $D \tilde{\sim} D'$ si $\tilde{\alpha}$ est une équivalence naturelle de D à D' , est une relation d'équivalence sur la classe $\mathfrak{Der}_S(\mathcal{C}, \mathfrak{D})$.

PROPOSITION 5.1. $\tilde{\alpha}$ est une transformation naturelle de D à D' si et seulement si $\tilde{\alpha}$ est une transformation naturelle de F_D à $F_{D'}$. En particulier $\tilde{I}_D = \tilde{I}_{F_D}$.

PREUVE. La condition est évidemment suffisante.

Supposons donc que $\tilde{\alpha} = (\tilde{\alpha}_C)_{C \in |\mathcal{C}|}$ est une transformation naturelle de $F_D \circ \Phi^S$ à $F_{D'} \circ \Phi^S$, et montrons que $\tilde{\alpha} = (\tilde{\alpha}_C)$ est aussi une transformation naturelle de F_D à $F_{D'}$.

Pour cela, soit $\tilde{f}^S = (f_\nu)_{\nu \in S}: C \rightarrow C'$ dans $\tilde{\mathcal{C}}^S$ et voyons que le diagramme suivant est commutatif dans $\tilde{\mathcal{D}}^S$.

$$\begin{array}{ccc} D_0(C) & \xrightarrow{\tilde{\alpha}_C} & D'_0(C) \\ F_D(\tilde{f}^S) \downarrow & & \downarrow F_{D'}(\tilde{f}^S) \\ D_0(C') & \xrightarrow{\tilde{\alpha}_{C'}} & D'_0(C') \end{array}$$

Or

$$\begin{aligned} (F_{D'}(\tilde{f}^S) \circ \tilde{\alpha}_C)_\nu &= \sum_{\lambda + \gamma = \nu} F_{D'}(\tilde{f}^S)_\lambda \circ (\alpha_C)_\gamma \\ &= \sum_{\lambda + \gamma = \nu} \left(\sum_{\zeta + \beta = \lambda} D'_\zeta(f_\beta) \circ (\alpha_C)_\gamma \right) \\ &= \sum_{\zeta + \beta + \gamma = \nu} D'_\zeta(f_\beta) \circ (\alpha_C)_\gamma \\ &= \sum_{\beta + \mu = \nu} \sum_{\zeta + \gamma = \mu} D'_\zeta(f_\beta) \circ (\alpha_C)_\gamma \\ &= \sum_{\beta + \mu = \nu} (F_{D'}(f_\beta^S) \circ \tilde{\alpha}_C)_\mu \\ &= \sum_{\beta + \mu = \nu} (\tilde{\alpha}_{C'} \circ F_D(f_\beta^S))_\mu \\ &= \sum_{\beta + \mu = \nu} \left(\sum_{\zeta + \gamma = \mu} (\alpha_{C'})_\zeta \circ D_\gamma(f_\beta) \right) \\ &= \sum_{\zeta + \beta + \gamma = \nu} (\alpha_{C'})_\zeta \circ D_\gamma(f_\beta) \\ &= \sum_{\zeta + \delta = \nu} (\alpha_{C'})_\zeta \circ \left(\sum_{\beta + \gamma = \delta} D_\gamma(f_\beta) \right) \\ &= \sum_{\zeta + \delta = \nu} (\alpha_{C'})_\zeta \circ (F_D(\tilde{f}^S))_\delta = (\tilde{\alpha}_{C'} \circ F_D(\tilde{f}^S))_\nu. \end{aligned}$$

PROPOSITION 5.2. Soient D et D' des dérivations d'ordre S de \mathcal{C} à \mathcal{D} . Si $\alpha = (\alpha_C)_{C \in |\mathcal{C}|}$ est une transformation naturelle de D_0 à D'_0 , telle que, pour chaque $\nu \in S$ et chaque $f: C \rightarrow C'$, on ait $D'_\nu(f) \alpha_C = \alpha_{C'} \circ D_\nu(f)$ dans \mathcal{D} , et si on pose $\alpha_C^S = (\alpha_C, 0, 0, \dots)$, alors $\alpha^S = (\alpha_C^S)_{C \in |\mathcal{C}|}$ est une transformation naturelle de D à D' .

$$\begin{array}{ccc}
 & \xrightarrow{\alpha_C} & \\
 D_0(C) & \longrightarrow & D'_\nu(C) \\
 \downarrow D_\nu(f) & & \downarrow D'_\nu(f) \\
 D_0(C') & \xrightarrow{\alpha_{C'}} & D'_0(C')
 \end{array}$$

COROLLAIRE. Si chaque α_C est inversible dans \mathfrak{D} , α^S est une équivalence naturelle de D à D' et on a, pour tout $f: C \rightarrow C'$ de \mathcal{C} et pour chaque $\nu \in S$,

$$D'_\nu(f) = \alpha_{C'} \circ D_\nu(f) \circ \alpha_C^{-1}.$$

Réciproquement si $\alpha = (\alpha_C)_{C \in |\mathcal{C}|}$ est une famille d'isomorphismes de \mathfrak{D} du type $\alpha_C: D_0(C) \rightarrow D'_0(C)$ où D est une dérivation d'ordre S de \mathcal{C} à \mathfrak{D} , on définit une nouvelle dérivation D' d'ordre S de \mathcal{C} à \mathfrak{D} , naturellement équivalente à D , en posant :

$$D'_0(C) = D_0(C), \quad D'_\nu(f) = \alpha_{C'} \circ D_\nu(f) \circ \alpha_C^{-1}.$$

PROPOSITION 5.3. *Considérons la situation suivante*

$$\begin{array}{ccc}
 \mathfrak{B} & \xrightarrow{\bar{D}} & \mathfrak{C} & \xrightarrow{D} & \mathfrak{D} \\
 & \downarrow \tilde{\alpha}_1 & & \downarrow \tilde{\alpha} & \\
 \mathfrak{B} & \xrightarrow{\bar{D}'} & \mathfrak{C} & \xrightarrow{D'} & \mathfrak{D}
 \end{array}$$

où D, D', \bar{D}, \bar{D}' , sont des dérivations d'ordre S et où $\tilde{\alpha}$ et $\tilde{\alpha}_1$ sont des transformations naturelles de dérivations. On définit de nouvelles transformations naturelles $D*\tilde{\alpha}_1$ de $D \circ \bar{D}$ à $D \circ \bar{D}'$ et $\tilde{\alpha}*\bar{D}$ de $D \circ \bar{D}$ à $D' \circ \bar{D}$, en posant:

$$(D*\tilde{\alpha}_1)_B = F_D((\tilde{\alpha}_1)_B) : (D \circ \bar{D})_0(B) \rightarrow (D \circ \bar{D}')_0(B)$$

et

$$(\tilde{\alpha}*\bar{D})_B = \tilde{\alpha}_{\bar{D}_0(B)} : (D \circ \bar{D})_0(B) \rightarrow (D' \circ \bar{D})_0(B).$$

De plus

$$(D*\tilde{\alpha}_1) \circ (\tilde{\alpha}*\bar{D}') = (\tilde{\alpha}*\bar{D}) \circ (D'*\tilde{\alpha}_1).$$

Cette dernière égalité définit une transformation naturelle, notée $\tilde{\alpha}_1*\tilde{\alpha}$, de $D \circ \bar{D}$ à $D' \circ \bar{D}'$.

PROPOSITION 5.4. *Munie de la loi * ainsi définie, $\mathcal{D}_{\text{ers}_S}$ devient une 2-catégorie.*

PREUVE. Tenant compte de la proposition 5.1 et du théorème 4.1 et remarquant que $D*\tilde{\alpha}_1 = F_D*\tilde{\alpha}_1$ et $\tilde{\alpha}*\bar{D} = \tilde{\alpha}*F_{\bar{D}}$, ceci résulte du fait que les transformations naturelles forment une 2-catégorie. On obtient ainsi les «règles du calcul fonctoriel de Godement»:

$$\begin{aligned} D*\tilde{\alpha}_1 &= \tilde{I}_D*\tilde{\alpha}_1, & \tilde{\alpha}*\bar{D} &= \tilde{\alpha}*\tilde{I}_{\bar{D}}, \\ (\tilde{\alpha}'\circ\tilde{\alpha})*(\tilde{\alpha}_1\circ\tilde{\alpha}_1) &= (\tilde{\alpha}'*\tilde{\alpha}'_1)\circ(\tilde{\alpha}*\tilde{\alpha}_1), \\ (\tilde{\alpha}*\tilde{\alpha}_1)*\tilde{\alpha}_2 &= \tilde{\alpha}*(\tilde{\alpha}_1*\tilde{\alpha}_2), \\ \tilde{I}_{D\circ\bar{D}} &= \tilde{I}_D\circ\tilde{I}_{\bar{D}}. \end{aligned}$$

En outre, si $\tilde{\alpha}$ et $\tilde{\alpha}_1$ sont des équivalences naturelles, $\tilde{\alpha}*\tilde{\alpha}_1$ en est aussi une.

COROLLAIRE. *La relation «D est naturellement équivalent à D'» est une congruence sur la catégorie $\mathcal{D}_{\text{ers}_S}$ permettant de passer à la catégorie quotient $\mathcal{D}_{\text{ers}_S}/\sim$.*

De même, en se restreignant à la catégorie $\mathcal{D}_{\text{era}_S}$, on obtient la catégorie quotient $\mathcal{D}_{\text{era}_S}/\sim$.

PREUVE. On sait déjà que \sim est une relation d'équivalence sur chaque classe $\mathcal{D}_{\text{ers}_S}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$.

Par ailleurs, si $D \sim D'$ et $\bar{D} \sim \bar{D}'$, alors $D \circ \bar{D} \sim D' \circ \bar{D}'$.

C'est un exercice amusant (!) de vérifier que

$$\begin{aligned} [(\tilde{\alpha}*\tilde{\alpha}_1)_B]_{\nu} &= \sum_{\lambda+\sigma+\rho=\nu} [\alpha_{D_0(B)}]_{\lambda} \circ D'_{\sigma}([(\alpha_1)_B]_{\rho}) \\ &= \sum_{\zeta+\rho+\mu=\nu} D_{\zeta}([(\alpha_1)_B]_{\rho}) \circ [\alpha_{\bar{D}'_0(B)}]_{\mu}. \end{aligned}$$

6. Endo-dérivations inversibles et quasi-inversibles dans les catégories additives

Dans cette section, \mathcal{C} est une catégorie additive et S est un segment initial de \mathbf{N} .

PROPOSITION 6.1. *Si D est une dérivation d'ordre S de \mathcal{C} à \mathcal{C} pour laquelle $D_0 = 1_{\mathcal{C}}$, alors D est inversible.*

PREUVE. On définit une dérivation Δ d'ordre S de \mathcal{C} à \mathcal{C} en posant:

$$\Delta_0 = 1_{\mathcal{C}}, \quad \Delta_1 = -D_1, \quad \Delta_2 = D_1^2 - D_2,$$

$$\Delta_3 = -D_1^3 + (D_2 D_1 + D_1 D_2) - D_3,$$

en général pour $n \in S$,

$$\Delta_n = (-1)^n D_1^n + (-1)^{n-1} \sum_{\substack{\lambda_1 + \dots + \lambda_{n-1} = n \\ \lambda_i \neq 0}} D_{\lambda_1} \dots D_{\lambda_{n-1}} +$$

$$+ (-1)^{n-2} \sum_{\substack{\lambda_1 + \dots + \lambda_{n-2} = n \\ \lambda_i \neq 0}} D_{\lambda_1} \dots D_{\lambda_{n-2}} + \dots +$$

$$+ \sum_{\substack{\lambda_1 + \lambda_2 = n \\ \lambda_i \neq 0}} D_{\lambda_1} D_{\lambda_2} - D_n.$$

Il est alors facile (mais long) de vérifier que Δ est bien une dérivation d'ordre S de \mathcal{C} à \mathcal{C} et que $D \circ \Delta = 1_{\mathcal{C}} = \Delta \circ D$.

COROLLAIRE 6.1. Si \mathcal{D} est une catégorie semi-additive et si D est une dérivation d'ordre S de \mathcal{C} à \mathcal{D} , D est inversible si et seulement si $D_0 = F$ est un foncteur inversible.

PREUVE. La condition est évidemment nécessaire.

Par ailleurs, si elle est satisfaite, $F^{-1} \circ D$ est une dérivation d'ordre S de \mathcal{C} à \mathcal{C} et

$$(F^{-1} \circ D)_0 = F^{-1} \circ D_0 = F^{-1} \circ F = 1_{\mathcal{C}}.$$

D'après la proposition précédente, $F^{-1} \circ D$ est donc inversible; soit D' son inverse. Alors $D' \circ F^{-1}$ est l'inverse de D .

COROLLAIRE 6.2. Si \mathcal{B} est une catégorie semi-additive et si D est une dérivation d'ordre S de \mathcal{B} à \mathcal{C} , D est inversible si et seulement si $D_0 = F$ est un foncteur inversible.

Désignons par

$\text{Aut}(\mathcal{C})$ le groupe des endo-foncteurs additifs inversibles de \mathcal{C} ,

$\mathcal{G}\mathcal{D}er_S(\mathcal{C})$ le groupe des endo-dérivations d'ordre S inversibles de \mathcal{C} ,

$\mathcal{G}_0\mathcal{D}er_S(\mathcal{C})$ le sous-groupe normal de $\mathcal{G}\mathcal{D}er_S(\mathcal{C})$ constitué des dérivations D pour lesquelles $D_0 = 1_{\mathcal{C}}$.

COROLLAIRE 6.3. $D \in \mathcal{G} \mathcal{D}er_S(\mathcal{C})$ équivaut à $D_0 \in \mathcal{A}ut(\mathcal{C})$. En fait on a une suite exacte scindée de groupes:

$$1 \rightarrow \mathcal{G}_0 \mathcal{D}er_S(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{G} \mathcal{D}er_S(\mathcal{C}) \xrightarrow[\lambda_S]{t_S} \mathcal{A}ut(\mathcal{C}) \rightarrow 1,$$

où $\lambda_S(D) = D_0$ et $t_S(F) = F$ considéré comme dérivation.

Notons au passage qu'un procédé analogue à celui employé dans [6] permet de construire l'anneau de Lie gradué des endo-dérivations inversibles de \mathcal{C} .

PROPOSITION 6.2. Soit \mathcal{B} une catégorie semi-additive et soient D et D' deux dérivations d'ordre S de \mathcal{B} à \mathcal{C} . Alors une transformation naturelle $\tilde{\alpha}$ de D à D' est une équivalence si et seulement si $\alpha_0 = ((\alpha_C)_0)_{C \in |\mathcal{C}|}$ est une équivalence naturelle de D_0 à D'_0 , considérés comme foncteurs.

PREUVE. Par un calcul analogue à celui de la proposition 6.1, on montre que $\tilde{\alpha}_C = ((\alpha_C)_\nu)_{\nu \in S}$ est inversible si et seulement si $(\alpha_C)_0$ est inversible. La conclusion vient donc de ce que $\tilde{\alpha}$ est une équivalence naturelle si et seulement si chaque $\tilde{\alpha}_C$ est inversible.

Rappelons que l'on écrit $D \sim D'$ pour signifier que D est naturellement équivalent à D' .

DEFINITION. Une dérivation D d'ordre S de \mathcal{C} à \mathcal{D} est dite *quasi-inversible* s'il existe une dérivation D' d'ordre S de \mathcal{D} à \mathcal{C} telle que

$$D' \circ D \sim 1_{\mathcal{C}} \text{ et } D \circ D' \sim 1_{\mathcal{D}}.$$

On dit alors que D' est un *quasi-inverse* de D .

PROPOSITION 6.3. Soit D une dérivation d'ordre S de \mathcal{C} à \mathcal{C} telle que D_0 soit un foncteur naturellement équivalent à $1_{\mathcal{C}}$. Alors D est quasi-inversible.

PREUVE. Soit $\alpha = (\alpha_C)_{C \in |\mathcal{C}|}$ une équivalence naturelle de D_0 à $1_{\mathcal{C}}$. Alors pour chaque $f: C \rightarrow C'$ de \mathcal{C} , on a

$$\begin{array}{ccc} D_0(C) & \xrightarrow{\alpha_C} & C \\ D_0(f) \downarrow & & \downarrow f \\ D_0(C') & \xrightarrow{\alpha_{C'}} & C' \end{array}$$

$$f\alpha_C = \alpha_C \cdot D_0(f), \text{ i. e. } f = \alpha_C \cdot D_0(f) \alpha_C^{-1}.$$

On définit \bar{D} d'ordre S de \mathcal{C} à \mathcal{C} en posant

$$\bar{D}_0(C) = C \text{ et } \bar{D}_\nu(f) = \alpha_C \cdot D_\nu(f) \alpha_C^{-1}.$$

Il est facile de voir que \bar{D} est une dérivation de \mathcal{C} à \mathcal{C} pour laquelle $\bar{D}_0 = 1_{\mathcal{C}}$; de plus, posant $\alpha_C^S = (\alpha_C, 0, 0, \dots)$, $\alpha^S = (\alpha_C)_{C \in |\mathcal{C}|}$ est une équivalence naturelle de D à \bar{D} .

Or vu la proposition 6.1, \bar{D} est inversible; soit D' son inverse.

Alors

$$D \circ D' \stackrel{\alpha^S * D'}{\sim} \bar{D} \circ D' = 1_{\mathcal{C}} \text{ et } D' \circ D \stackrel{D' * \alpha^S}{\sim} D' \circ \bar{D} = 1_{\mathcal{C}}.$$

D est donc quasi-inversible.

COROLLAIRE. Si \mathcal{D} (resp. \mathcal{B}) est une catégorie semi-additive, et si D est une dérivation d'ordre S de \mathcal{C} à \mathcal{D} (resp. de \mathcal{B} à \mathcal{C}), D est quasi-inversible si et seulement si $F = D_0$ est un foncteur quasi-inversible.

PREUVE. La condition est évidemment nécessaire.

Si elle est satisfaite, soit $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ un foncteur tel que $G \circ F$ soit naturellement équivalent à $1_{\mathcal{C}}$ et $F \circ G$ à $1_{\mathcal{D}}$. $G \circ D$ est une dérivation d'ordre S de \mathcal{C} à \mathcal{C} satisfaisant aux hypothèses de la proposition 6.3. Soit donc Δ un quasi-inverse de $G \circ D$. Alors $\Delta \circ G$ est un quasi-inverse de D .

La démonstration est analogue lorsque D est une dérivation de \mathcal{B} à \mathcal{C} .

Bibliographie.

1. DUBUC, E., *Adjoint Triangles*, Lecture Notes in Mathematics 61, 1968, Springer.
2. EHRESMANN, C., *Catégories et structures*, Dunod, Paris, 1965.
3. LAWVERE, F.W., The Category of Categories as a Foundation for Mathematics. *Proc. Conf. on Categorical Algebra*, La Jolla, 1965. Springer.
4. MAC LANE, S., *Homology*, Springer, 1963.
5. MITCHELL, B.M., *Theory of Categories*, Academic Press, New York, 1965.
6. RIBENBOIM, P., Algebraic Theory of Higher Order Derivations, *Proceedings Royal Society of Canada* (to appear).
7. RIBENBOIM, P., *Higher Order Derivations of Rings* (to appear).

Département de Mathématiques
Université de Montréal
MONTREAL, Canada

et

Department of Mathematics
Queen's University
KINGSTON, Canada