CAHIERS DE
TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
CATÉGORIQUES

NADINE BEDNARZ

Noyaux d'espèces de structures. Applications covariantes topologiques

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 11, n° 4 (1969), p. 387-403

<http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1969__11_4_387_0>

CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE Vol. XI,4

NOYAUX D'ESPECES DE STRUCTURES APPLICATIONS COVARIANTES TOPOLOGIQUES

par Nadine BEDNARZ

Introduction.

Un système dynamique consiste en la donnée d'un groupe topologique d'opérateurs $(G^\bullet, T)$ sur un espace topologique T'. De même que les systèmes dynamiques ont été introduits en vue d'une étude qualitative des équations différentielles linéaires, un des buts de la notion de noyau d'espèce de structures (n.e.s) est d'associer à une équation différentielle non linéaire (ou plus généralement à un système d'équations aux dérivées partielles) une structure algébrique-topologique.

Les espèces de structures topologiques, introduites par C. Ehresmann en 1958, généralisent la notion de système dynamique en y remplaçant le groupe topologique d'opérateurs sur T' par une catégorie topologique d'opérateurs. Les n.e.s, introduits dans [1] en 1963 en vue d'une théorie des systèmes guidables, en sont une «localisation». C'est une notion plus précise que la notion de système de structures topologique (système de structures structuré) introduite par C. Ehresmann en 1965. Un cas particulier en est la notion de système semi-dynamique, développée par Hajek en 1965.

Le 1$^{\text{er}}$ paragraphe donne la définition d'un n.e.s. et énonce les premières propriétés.

Le 2$^{\text{ème}}$ paragraphe définit les morphismes «naturels» entre n.e.s, et étudie les propriétés algébriques de la catégorie ainsi obtenue. Le principal théorème montre que le problème universel de la projection d'un n.e.s. dans une espèce de structures topologique (resp. espèce de structures topologique au-dessus d'un groupoïde) admet une solution (ce qui généralise un résultat de [7] sur les systèmes semi-dynamiques)

Les notations et la terminologie sont celles de [4].

1. Noyaux d'espèces de structures.

1. DEFINITIONS (Rappels).

Soit $\mathcal{F}^o$ la catégorie des applications continues associée à un univers $\mathfrak{M}_o$, et θ son foncteur d'oubli vers la catégorie $\mathfrak{M}^o$ des applications. Si T est une topologie sur E et si E' est une partie de E, on note T/E' la topologie induite par T sur E'.

a) On appelle *noyau de catégorie* un couple $(C^\cdot, T)$, où $C^\cdot$ est une précatégorie (c'est-à-dire un graphe multiplicatif associatif) et T une topologie sur C vérifiant :

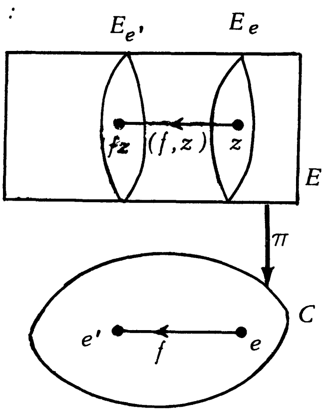
1 - Si α désigne la source dans $C^\cdot$, on a $(T, \alpha, T) \in \mathcal{F}$;

2 - De même $(T, \beta, T) \in \mathcal{F}$, où β est le but dans $C^\cdot$;

3 - $\kappa : (f, g) \in C^\cdot * C^\cdot \to f.g$ est telle que $(T, \kappa, T * T) \in \mathcal{F}$, où $T * T = T \times T / C^\cdot * C^\cdot$;

4 - $C^\cdot * C^\cdot \in T \times T / \alpha \vee \beta$, c'est-à-dire $C^\cdot * C^\cdot$ est un ouvert de $\alpha \vee \beta = \{(g, f) \in C \times C \mid \alpha(g) = \beta(f)\} \subseteq C \times C$.

b) On appelle *système de structures* un triplet $[C^\cdot, E, \kappa'] = \eta$, où $C^\cdot$ est un graphe multiplicatif, E un ensemble, κ' une application de $C^\cdot * E \subseteq C \times E$ dans E vérifiant, si $\kappa'((f, z))$ est noté fz pour $(f,z) \in C^\cdot * E$:



1) Si $(f, z) \in C^\cdot * E$, $(f', fz) \in C^\cdot * E$ et $(f', f) \in C^\cdot * C^\cdot$, alors $(f'.f, z) \in C^\cdot * E$ et $(f'.f)z = f'(fz)$;

2) Si $(f, z) \in C^\cdot * E$, alors $(\alpha(f), z) \in C^\cdot * E$ et $(\beta(f), fz) \in C^\cdot * E$;

3) Si $z \in E$, il existe au plus un $e \in C_o^\cdot$ tel que $(e, z) \in C^\cdot * E$ et $ez = z$;

4) a - Si $z \in E$, il existe $f \in C$ tel que $(f, z) \in C^\cdot * E$;

b - Si $e \in C_o^\cdot$, il existe $z \in E$ tel que $(e, z) \in C^\cdot * E$. (Ce dernier axiome est plus faible que celui utilisé dans [4].)

REMARQUE. $C^{\bullet} * E$ est appelée classe des couples composables, et on note π la projection canonique de E sur $C_0^{\bullet}$ définie par $\pi(z) = e$, où e est l'unique unité telle que $(e, z) \in C^{\bullet} * E$; π est toujours définie.

La notion *d'espèce de structures* est obtenue en supposant de plus que $C^{\bullet}$ est une catégorie, et que l'axiome suivant est vérifié :

$$f \in C \text{ et } (\alpha(f), z) \in C^{\bullet} * E \Longrightarrow (f, z) \in C^{\bullet} * E.$$

2. *NOYAU D'ESPECE DE STRUCTURES (n.e.s.)* [1].

DEFINITION 1. On appelle *noyau d'espèce de structures* un triplet $\bar{\eta} = [(C^{\bullet}, T), T', \kappa']$, où :

1°) $(C^{\bullet}, T)$ est un noyau de catégorie; soit $T_0 = T / C_0^{\bullet}$;

2°) T' est une topologie sur $\theta(T') = E$ et $\eta = [C^{\bullet}, E, \kappa']$ est un système de structures; soit $C^{\bullet} * E$ la classe des couples composables de η ;

3°) Si $\pi : E \to C_0^{\bullet}$ est la projection canonique associée à η, on a $(T_0, \pi, T') \in \mathfrak{T}$;

4°) $\kappa' : C^{\bullet} * E \to E$ est telle que $(T', \kappa', T * T') \in \mathfrak{T}$, où $T * T' = T \times T' / C^{\bullet} * E$;

5°) $C^{\bullet} * E \in T \times T' / \alpha \vee \pi$, c'est-à-dire $C^{\bullet} * E$ est un ouvert de $\alpha \vee \pi = \{(f, z) \in C \times E \mid \alpha(f) = \pi(z)\} \subseteq C \times E$.

REMARQUE. La notion *d'espèce de structures topologique* est obtenue en supposant de plus que $C^{\bullet}$ est une catégorie, et que $C^{\bullet} * E = \alpha \vee \pi$ (condition plus restrictive que la condition 5).

DEFINITION 2 (voir [3]). Si $(C^{\bullet}, T)$ et $(\bar{C}^{\bullet}, \bar{T})$ sont deux graphes multiplicatifs topologiques, on appelle *néofoncteur continu* de $(C^{\bullet}, T)$ vers $(\bar{C}^{\bullet}, \bar{T})$ un triplet $F = ((\bar{C}^{\bullet}, \bar{T}), \underline{F}, (C^{\bullet}, T))$, où

1°) $(\bar{C}^{\bullet}, \underline{F}, C^{\bullet})$ est un néofoncteur,

2°) $(\bar{T}, \underline{F}, T)$ est une application continue.

PROPRIETES.

THEOREME 1. *Soit* $\bar{\eta} = [(C^{\bullet}, T), T', \kappa']$ *un noyau d'espèce de structures, et soit* $(C^{\bullet} * E)^{\bullet}$ *le graphe multiplicatif des hypermorphismes associé au système de structures* $\eta = [C^{\bullet}, E, \kappa']$; $(C^{\bullet} * E)^{\bullet}$ *est défini par:*

$(f', z').(f, z) = (f'.f, z)$ si, et seulement si, $z' = fz$ et $(f', f) \in C^\bullet * C^\bullet$. Alors $((C^\bullet * E)^\bullet, T * T')$ est un noyau de catégorie, où $T * T' = T \times T' / C^\bullet * E$ (resp. une catégorie topologique si de plus $C^\bullet$ est une catégorie). De plus l'application $(f, z) \in C^\bullet * E \to f \in C$ définit un néofoncteur continu $\overline{\pi}$ (resp. un foncteur continu si $C^\bullet$ est une catégorie) de $((C^\bullet * E)^\bullet, T * T')$ vers $(C^\bullet, T)$.

2. Notion d'application covariante topologique entre noyaux d'espèces de structures.

1. DEFINITION 3. On appelle *application covariante topologique entre n.e.s.* un quadruplet $\overline{m} = (\overline{\eta}_2, \overline{\Phi}, \overline{\varphi}, \overline{\eta}_1)$, où

1°) $\overline{\eta}_1 = [(C_1^\bullet, T_1), T_1', \kappa_1']$ et $\overline{\eta}_2 = [(C_2^\bullet, T_2), T_2', \kappa_2']$ sont des n.e.s.;

2°) $\overline{\Phi} = ((C_2^\bullet, T_2), \underline{\Phi}, (C_1^\bullet, T_1))$ est un néofoncteur continu; on pose $\Phi = (C_2^\bullet, \underline{\Phi}, C_1^\bullet)$;

3°) $\overline{\varphi} = (T_2', \underline{\varphi}, T_1') \in \mathcal{T}$; on pose $\varphi = (E_2, \underline{\varphi}, E_1) = \theta(\overline{\varphi})$;

4°) $(\eta_2, \Phi, \varphi, \eta_1)$, où $\eta_1 = [C_1^\bullet, E_1, \kappa_1']$ et $\eta_2 = [C_2^\bullet, E_2, \kappa_2']$, est une application covariante, c'est-à-dire :

- Si $(e, z) \in C_1^\bullet * E_1$ où $e \in C_{1o}^\bullet$, $(\Phi(e), \varphi(z)) \in C_2^\bullet * E_2$;
- Si $(f, z) \in C_1^\bullet * E_1$, alors $(\Phi(f), \varphi(z)) \in C_2^\bullet * E_2$ et $\Phi(f)\varphi(z) = \varphi(fz)$.

2. Soit $\mathfrak{M}_o$ un univers, et soit $\mathfrak{A}(\mathcal{T})_o$ l'ensemble des n.e.s. $\overline{\eta} = [(C^\bullet, T), T', \kappa']$ vérifiant $C \in \mathfrak{M}_o$ et $E = \theta(T') \in \mathfrak{M}_o$. Soit $\mathfrak{A}(\mathcal{T})$ l'ensemble des applications covariantes topologiques $\overline{m} = (\overline{\eta}_2, \overline{\Phi}, \overline{\varphi}, \overline{\eta}_1)$ telles que $\overline{\eta}_1 \in \mathfrak{A}(\mathcal{T})_o$ et $\overline{\eta}_2 \in \mathfrak{A}(\mathcal{T})_o$, et $\mathfrak{A}(\mathcal{T})^o$ la catégorie définie par :

$$(\overline{\eta}_3', \overline{\Phi}', \overline{\varphi}', \overline{\eta}_3) \circ (\overline{\eta}_2, \overline{\Phi}, \overline{\varphi}, \overline{\eta}_1) = (\overline{\eta}_3', \overline{\Phi}' \circ \overline{\Phi}, \overline{\varphi}' \circ \overline{\varphi}, \overline{\eta}_1)$$

$$\text{si, et seulement si, } \overline{\eta}_3 = \overline{\eta}_2 .$$

On définit un foncteur fidèle p de $\mathfrak{A}(\mathcal{T})^o$ vers $\mathfrak{M}^o$, où

$$p(\overline{m}) = \underline{\Phi} \times \varphi \text{ si } \overline{m} = (\overline{\eta}_1, \overline{\Phi}, \overline{\varphi}, \overline{\eta}) \in \mathfrak{A}(\mathcal{T}),$$

et si $\underline{\Phi}$ est l'application sous-jacente à $\overline{\Phi}$, $\varphi = \theta(\overline{\varphi})$.

Nous allons étudier cette catégorie.

PROPRIETES.

2-a. Soit $\overline{\eta} = [(C^\bullet, T), T', \kappa'] \in \mathfrak{A}(\mathfrak{T})_o$. Si $C_1^\bullet$ est un sous-graphe multiplicatif stable de $C^\bullet$, si E_1 est une partie de $E = \theta(T')$ telle que $\pi(E_1) = (C_1)_o^\bullet$ (où π est la projection canonique associée au système de structures $\eta = [C^\bullet, E, \kappa']$) et si

$$fz \in E_1 \text{ lorsque } f \in C_1,\ z \in E_1, (f,z) \in C^\bullet * E,$$

alors $\overline{\eta}_1 = [(C_1^\bullet, T/C_1), T'/E_1, \kappa'_1]$ *est une p-sous-structure de* $\overline{\eta}$, où κ'_1 est la restriction de κ' à $(E_1, (C_1 \times E_1) \cap (C^\bullet * E))$.

2-b. *p-structures quotients.* Soit $\overline{\eta} = [(C^\bullet, T), T', \kappa'] \in \mathfrak{A}(\mathfrak{T})_o$, soient $\theta(T') = E$ et r une *relation d'équivalence sur* $C \times E = p(\overline{\eta})$ telle qu'il existe des relations d'équivalence r_1 sur C et r_2 sur E vérifiant les conditions :

- $(f, z) \underset{r}{\sim} (f', z')$ si, et seulement si, $f \underset{r_1}{\sim} f'$ et $z \underset{r_2}{\sim} z'$;
- r_1 est bicompatible sur $C^\bullet$ et les conditions $(f, g) \in C^\bullet * C^\bullet$, $f \underset{r_1}{\sim} f'$ et $g \underset{r_1}{\sim} g'$ entraînent $(f', g') \in C^\bullet * C^\bullet$;
- Si $(f, z) \in C^\bullet * E$ et si $(f, z) \underset{r}{\sim} (f', z')$, alors $(f', z') \in C^\bullet * E$ et de plus $f'z' \underset{r_2}{\sim} fz$;
- r_1 et r_2 sont des relations d'équivalence ouvertes sur T et T' respectivement.

Soient $C_1^\bullet$ le graphe multiplicatif quotient de $C^\bullet$ par r_1, $E_1 = E/r_2$, $T_1 = T/r_1$ et $T'_1 = T'/r_2$ les topologies quotient sur C_1 et sur E_1 respectivement. Alors on montre que $\overline{\eta}_1 = [(C_1^\bullet, T_1), T'_1, \kappa'_1]$ *est une p-structure quotient de* $\overline{\eta}$ *par* r, où

$$\kappa'_1 : (\tilde{f}, \tilde{z}) \to \widetilde{fz} \text{ si, et seulement si, il existe } f \in \tilde{f},\ z \in \tilde{z} \text{ tels que}$$

$$(f, z) \in C^\bullet * E$$

($\tilde{f}$ et $\tilde{z}$ désignant les classes d'équivalence de f et z).

2-c. Considérons $\mathfrak{A}^e(\mathfrak{T})^o$, sous-catégorie pleine de $\mathfrak{A}(\mathfrak{T})^o$ dont les objets sont les espèces de structures topologiques, et $\mathfrak{A}^g(\mathfrak{T})^o$, sous-catégorie pleine de $\mathfrak{A}(\mathfrak{T})^o$ dont les objets sont les espèces de structures topologiques $\overline{\eta} = [(C^\bullet, T), T', \kappa']$ telles que $(C^\bullet, T)$ soit un groupoïde topologique.

On montre que $\mathfrak{A}(\mathfrak{T})^o$ *est à produits finis, et que* $\mathfrak{A}^l(\mathfrak{T})^o$ *est à*

$\mathfrak{M}_o$*-produits pour* $l = e$ *ou* g. Soit $\overline{\eta}_i = [(C_i^{\cdot}, T_i), T'_i, \kappa'_i] \in \mathfrak{A}(\mathfrak{T})_o$ (resp. $\overline{\eta}_i \in \mathfrak{A}^l(\mathfrak{T})_o$ pour $l = e$ ou g) pour tout $i \in I$, où I est fini (resp. $I \in \mathfrak{M}_o$). Si $C^{\cdot}$ est le graphe multiplicatif produit des $(C_i^{\cdot})_{i \in I}$, si $E = \prod_{i \in I} E_i$, si $T = \prod_{i \in I} T_i$ et $T' = \prod_{i \in I} T'_i$ sont les topologies produits sur C et E respectivement, $\overline{\eta} = [(C^{\cdot}, T), T', \kappa']$ est un produit de $(\overline{\eta}_i)_{i \in I}$ dans $\mathfrak{A}(\mathfrak{T})^o$ (resp. dans $\mathfrak{A}^l(\mathfrak{T})^o$), où :

$$\kappa'((f_i)_{i \in I}, (z_i)_{i \in I}) = (f_i\, z_i)_{i \in I}$$

si, et seulement si, $(f_i, z_i) \in C_i^{\cdot} * E_i$, $\forall\, i \in I$.

2-d. On montre que $\mathfrak{A}(\mathfrak{T})^o$ et $\mathfrak{A}^l(\mathfrak{T})^o$ *sont des catégories à* $\mathfrak{M}_o$-*sommes, pour* $l = e$ *ou* g : Soit $\overline{\eta}_i = [(C_i^{\cdot}, T_i), T'_i, \kappa'_i] \in \mathfrak{A}(\mathfrak{T})_o$ (resp. $\overline{\eta}_i \in \mathfrak{A}^l(\mathfrak{T})_o$) pour tout $i \in I$, où $I \in \mathfrak{M}_o$; si $C^{\cdot}$ est le graphe multiplicatif somme des $(C_i^{\cdot})_{i \in I}$, si $E = \sum_{i \in I} E_i$, si $T = \sum_{i \in I} T_i$ et $T' = \sum_{i \in I} T'_i$ sont les topologies sommes sur C et sur E respectivement, alors

$$\overline{\eta} = [(C^{\cdot}, T), T', \kappa']$$

est une somme des $(\overline{\eta}_i)_{i \in I}$ dans $\mathfrak{A}(\mathfrak{T})^o$ (resp. dans $\mathfrak{A}^l(\mathfrak{T})^o$) où :

$$\kappa'((f, i), (z, j)) = (fz, i)$$

si, et seulement si, $i = j$ et $(f, z) \in C_i^{\cdot} * E_i$.

2-e. On montre que $\mathfrak{A}(\mathfrak{T})^o$ *et* $\mathfrak{A}^l(\mathfrak{T})^o$, *pour* $l = e$ *ou* g, *sont des catégories à noyaux :* Soient $\overline{m} = (\overline{\eta}_1, \overline{\Phi}, \overline{\varphi}, \overline{\eta}) \in \mathfrak{A}(\mathfrak{T})_o$ (resp. $\mathfrak{A}^l(\mathfrak{T})_o$) et $\overline{m}_1 = (\overline{\eta}_1, \overline{\Phi}_1, \overline{\varphi}_1, \overline{\eta}) \in \mathfrak{A}(\mathfrak{T})_o$ (resp. $\mathfrak{A}^l(\mathfrak{T})_o$), où $\overline{\eta} = [(C^{\cdot}, T), T', \kappa']$ et $\overline{\eta}_1 = [(C_1^{\cdot}, T_1), T'_1, \kappa'_1]$. Soit $E = \theta(T')$; soit E_2 l'ensemble des $z \in E$ tels que $\varphi(z) = \varphi_1(z)$, où $\varphi = \theta(\overline{\varphi})$ et $\varphi_1 = \theta(\overline{\varphi}_1)$; si $\underline{\Phi}$ et $\underline{\Phi}_1$ sont les applications sous-jacentes à $\overline{\Phi}$ et $\overline{\Phi}_1$ respectivement, soit C_2 l'ensemble des $f \in C$ tels que $\underline{\Phi}(f) = \underline{\Phi}_1(f)$ et tels qu'il existe $z \in E_2$ vérifiant $(\alpha(f), z) \in C^{\cdot} * E$; alors $C_2^{\cdot}$ est un sous-graphe multiplicatif stable de $C^{\cdot}$ (resp. une sous-catégorie de $C^{\cdot}$ si $l = e$, et un sous-groupoïde de $C^{\cdot}$ si $l = g$); soit κ'_2 la restriction de κ' à $(C_2 \times E_2) \cap C^{\cdot} * E$. On voit que $fz \in E_2$ si $f \in C_2$, $z \in E_2$ et $(f, z) \in C^{\cdot} * E$; soient $T_2 = T/C_2$ et $T'_2 = T'/E_2$. Alors $\overline{\eta}_2 = [(C_2^{\cdot}, T_2), T'_2, \kappa'_2] \in \mathfrak{A}(\mathfrak{T})_o$ (resp. $\overline{\eta}_2 \in \mathfrak{A}^l(\mathfrak{T})_o$ pour $l = e$ ou g) et $(\overline{\eta}, \overline{i}, \overline{i}', \overline{\eta}_2)$ est le noyau de $\overline{m}$

et $\overline{m}_1$ dans $\mathfrak{A}(\mathcal{T})^\circ$ (resp. $\mathfrak{A}^l(\mathcal{T})^\circ$), si $\overline{i}$ est le néofoncteur défini par l'injection (C, ι, C_2) et $\overline{i'}$ l'application continue définie par (E, ι, E_2).

3.Théorèmes de projection.

Dans ce paragraphe, soit $\mathfrak{M}_o$ un univers et considérons un univers $\hat{\mathfrak{M}}_o$ tel que $\mathfrak{M}_o \in \hat{\mathfrak{M}}_o$ et $\mathfrak{M}_o \subset \hat{\mathfrak{M}}_o$. Soit $\tilde{\mathfrak{M}}_o$ l'ensemble des éléments de $\hat{\mathfrak{M}}_o$ équipotents à un élément de $\mathfrak{M}_o$. Désignons par $\hat{\mathfrak{M}}^\circ$ la catégorie des applications associée à l'univers $\hat{\mathfrak{M}}_o$; soient $\hat{\mathfrak{A}}(\mathcal{T})^\circ$ et $\hat{\mathfrak{A}}^l(\mathcal{T})^\circ$ (pour $l = e$ ou g) les catégories construites comme plus haut, à partir de l'univers $\hat{\mathfrak{M}}_o$. Considérons le foncteur P de $\hat{\mathfrak{A}}(\mathcal{T})^\circ$ vers $\hat{\mathfrak{M}}^\circ$, construit comme ci-dessus, ayant p pour restriction à $\mathfrak{A}(\mathcal{T})^\circ$ et $\mathfrak{M}^\circ$, et soit P^l le foncteur restriction de P à $\hat{\mathfrak{A}}^l(\mathcal{T})^\circ$, pour $l = e$ ou g. Soit $\tilde{\mathfrak{A}}^l(\mathcal{T})^\circ$ la sous-catégorie pleine de $\hat{\mathfrak{A}}^l(\mathcal{T})^\circ$ dont les objets sont les

$$\overline{\eta} = [(C^\bullet, T), T', \kappa'] \in \hat{\mathfrak{A}}^l(\mathcal{T})_o$$

tels que $P^l(\overline{\eta}) \in \tilde{\mathfrak{M}}_o$. On montre que P^l est un foncteur d'homomorphismes saturé, pour $l = e$ ou g.

1: Sous-espèces de structures engendrées.

LEMME. *Soit X l'ensemble de tous les P^l-monomorphismes. Soit $\hat{\eta} = [(\hat{C}^\bullet, \hat{T}), \hat{T}', \hat{\kappa}'] \in \hat{\mathfrak{A}}^l(\mathcal{T})_o$ pour $l = e$ (resp. $l = g$), et soit $\hat{\pi}$ la projection canonique associée à l'espèce de structures sous-jacente $[\hat{C}^\bullet, \hat{E}, \hat{\kappa}']$; si $B = C'_1 \times E'_1 \neq \emptyset$ est une partie de $P^l(\hat{\eta}) = \hat{C} \times \hat{E}$ (autrement dit $C'_1 \subset \hat{C}$ et $E'_1 \subset \hat{E}$) telle que $B \in \tilde{\mathfrak{M}}_o$ et que $\hat{\pi}(E'_1)$ contienne la classe des unités de la sous-catégorie de $\hat{C}^\bullet$ engendrée par C'_1, alors il existe un $(X \circ \mathfrak{A}^l(\mathcal{T})_o, P^l)$-sous-morphisme de $\hat{\eta}$ engendré par $(\hat{C} \times \hat{E}, \iota, B)$.*

Pour démontrer ce lemme, nous aurons besoin des résultats suivants :

a) $\tilde{\mathfrak{M}}_o$ est un univers.

b) Si f est une surjection de A dans E, si $A \in \tilde{\mathfrak{M}}_o$ et si $E \in \hat{\mathfrak{M}}_o$, alors $E \in \tilde{\mathfrak{M}}_o$.

PREUVE. Le foncteur P^l étant un foncteur d'homomorphismes saturé, il suffit de montrer qu'il existe une P^l-sous-structure $\overline{\eta}_1$ de $\hat{\eta}$ engendrée par B telle que $P^l(\overline{\eta}) \in \tilde{\mathfrak{M}}_o$.

$$\begin{tikzcd} \hat{\mathfrak{A}}^l(\mathfrak{T})^o \arrow[d, "P^l"] \\ \hat{\mathfrak{M}}_o \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \hat{\eta} & \bar{\eta}_1 \arrow[l] \arrow[d] \\ & \bar{\eta}_2 \arrow[ul] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & P^l(\bar{\eta}_1) \arrow[dl] \\ \hat{C}\times\hat{E} & B \arrow[l, "\iota"] \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Autrement dit, il faut trouver une P^l-sous-structure de $\hat{\eta}$,

$$\bar{\eta}_1 = [(C_1^{\boldsymbol{\cdot}}, T_1), T'_1, \kappa'_1],$$

telle que $P^l(\bar{\eta}_1) = (C_1 \times E_1) \supset B$ et telle que $P^l(\bar{\eta}_1) \in \tilde{\mathfrak{M}}_o$, vérifiant de plus :

Si $\bar{\eta}_2$ est une autre P^l-sous-structure de $\hat{\eta}$ telle que $P^l(\bar{\eta}_2) \supset B$ et $P^l(\bar{\eta}_2) \in \tilde{\mathfrak{M}}_o$, alors $P^l(\bar{\eta}_1) \subset P^l(\bar{\eta}_2)$.

i) *Cas* $l = e$. Soit $C_1^{\boldsymbol{\cdot}}$ la sous-catégorie de $\hat{C}^{\boldsymbol{\cdot}}$ engendree par $C'_1 \cup \hat{\pi}(E'_1)$. Si $f_1 \in C_1$, $z_1 \in E'_1$ et $(f_1, z_1) \in \hat{C}^{\boldsymbol{\cdot}} * \hat{E}$, on sait que $f_1 z_1 \in \hat{E}$, mais on n'a pas nécessairement $f_1 z_1 \in E'_1$; c'est pourquoi on est amené à considérer

$$E_1 = \{ f_1 z_1 \in \hat{E} \mid f_1 \in C_1, \ z_1 \in E'_1 \text{ et } (f_1, z_1) \in \hat{C}^{\boldsymbol{\cdot}} * \hat{E} \}.$$

Si z appartient à E'_1, on trouve

$$z = \hat{\pi}(z) z \in E_1, \quad \text{car} \quad \hat{\pi}(z) \in \hat{\pi}(E'_1) \subset C_1.$$

Ainsi E_1 contient E'_1 et a fortiori $\hat{\pi}(E_1)$ contient la partie $C_{1o}^{\boldsymbol{\cdot}}$ de $\hat{\pi}(E'_1)$. Inversement si $f_1 z_1 \in E_1$, où $f_1 \in C_1$ et $z_1 \in E'_1$, la relation

$$\hat{\pi}(f_1 z_1) = \hat{\beta}(f_1) \in C_{1o}^{\boldsymbol{\cdot}}$$

a pour conséquence $\hat{\pi}(E_1) \subset C_{1o}^{\boldsymbol{\cdot}}$. Donc $\hat{\pi}(E_1) = C_{1o}^{\boldsymbol{\cdot}}$.

Montrons que E_1 appartient à $\tilde{\mathfrak{M}}_o$ En effet, comme B appartient à $\tilde{\mathfrak{M}}_o$, ses images C'_1 et E'_1 par les projections canoniques du produit B sur ses facteurs appartiennent à $\tilde{\mathfrak{M}}_o$. Il en résulte $C'_1 \cup \hat{\pi}(E'_1) \in \tilde{\mathfrak{M}}_o$ et, $\tilde{\mathfrak{M}}_o$ étant un univers, la sous-catégorie $C_1^{\boldsymbol{\cdot}}$ de $\hat{C}^{\boldsymbol{\cdot}}$ engendrée par cette réunion appartient aussi à $\tilde{\mathfrak{M}}_o$ [5]. Comme $\kappa'_1 : (f_1, z_1) \to f_1 z_1$ est une surjection d'une partie A de $C_1 \times E'_1$ sur E_1, la relation $C_1 \times E'_1 \in \tilde{\mathfrak{M}}_o$ entraîne $A \in \tilde{\mathfrak{M}}_o$, d'où $E_1 \in \tilde{\mathfrak{M}}_o$.

Si $(f, z) \in \hat{C}^{\cdot} * \hat{E}$, $f \in C_1$ et $z \in E_1$, par définition de E_1 il existe $f_1 \in C_1$ et $z_1 \in E'_1$ tels que $z = f_1 z_1$, d'où

$$fz = f(f_1\ z_1) = (f.f_1)z_1 \in E_1,$$

puisque $f_1.f$ appartient à la sous-catégorie $C_1^{\cdot}$ de $\hat{C}^{\cdot}$. Par suite il existe une restriction κ'_1 de $\hat{\kappa}'$ à $(E_1, C_1^{\cdot} * E_1)$, où

$$C_1^{\cdot} * E_1 = (C_1 \times E_1) \cap (\hat{C}^{\cdot} * \hat{E}).$$

Comme $\hat{\eta} = [(\hat{C}^{\cdot}, \hat{T}), \hat{T}', \hat{\kappa}'] \in \hat{\mathfrak{A}}^e(\mathfrak{T})_o$, comme $C_1^{\cdot}$ est une sous-catégorie de $\hat{C}^{\cdot}$, et a fortiori un sous-graphe multiplicatif stable, E_1 une partie de $\hat{E}$ telle que $\hat{\pi}(E_1) = C_{1o}^{\cdot}$, et $fz \in E_1$ si $f \in C_1$, $z \in E_1$ et $(f, z) \in \hat{C}^{\cdot} * \hat{E}$, $T_1 = \hat{T}/C_1$, $T'_1 = \hat{T}'/E_1$, et $\hat{\kappa}'_1$ une restriction de $\hat{\kappa}'$ à $C_1^{\cdot} * E_1$, d'après la propriété 2-a, on sait que $\overline{\eta}_1 = [(C_1^{\cdot}, T_1), T'_1, \kappa'_1]$ *est une P^e-sous-structure de $\hat{\eta}$, qui appartient à la saturante de $\mathfrak{A}^e(\mathfrak{T})$ dans $\hat{\mathfrak{A}}^e(\mathfrak{T})$*, et

$$P^e(\overline{\eta}_1) = C_1 \times E_1 \supset B.$$

Montrons que $\overline{\eta}_1$ est une $(X.\tilde{\hat{\mathfrak{A}}}^e(\mathfrak{T})_o, P^e)$-sous-structure engendrée par B. Pour cela, soit $\overline{\eta}_2 = [(C_2^{\cdot}, T_2), T'_2, \kappa'_2]$ une autre P^e-sous-structure de $\hat{\eta}$ telle que $P^e(\overline{\eta}_2) = (C_2 \times E_2) \supset B = (C'_1 \times E'_1)$, et telle que $P^e(\overline{\eta}_2) \in \tilde{\mathfrak{M}}_o$.

Soit $\overline{m} = (\hat{\eta}, \overline{\Phi}, \overline{\varphi}, \overline{\eta}_2)$ le P^e-monomorphisme défini par $\overline{\eta}_2$. On a $P^e(\overline{m}) = \underline{\Phi} \times \varphi \in \hat{\mathfrak{M}}^\iota$, car $\overline{\eta}_2$ est une P^e-sous-structure de $\hat{\eta}$, donc $\underline{\Phi} = (\hat{C}, \iota, C_2) \in \hat{\mathfrak{M}}^\iota$ et $\varphi = (\hat{E}, \iota, E_2) \in \hat{\mathfrak{M}}^\iota$. Comme $\overline{m} \in \hat{\mathfrak{A}}^e(\mathfrak{T})$, $\underline{\Phi}$ doit définir un foncteur de $C_2^{\cdot}$ vers $\hat{C}^{\cdot}$, par conséquent $C_2^{\cdot}$ est une sous-catégorie de $\hat{C}^{\cdot}$. De plus, par hypothèse, $C_2 \supset C'_1$; or $C_1^{\cdot}$ est la sous-catégorie de $\hat{C}^{\cdot}$ engendrée par $C'_1 \cup \hat{\pi}(E'_1)$; comme E'_1 est contenu dans E_2 par hypothèse, on a $\hat{\pi}(E'_1) \subset \hat{\pi}(E_2) = C_{2o}^{\cdot}$, d'où $C_1 \subset C_2$.

Soit $z \in E_1$; il existe $f_1 \in C_1$ et $z_1 \in E'_1$ tels que $z = f_1 z_1$. Nous savons que z_1 appartient à E_2 et f_1 à C_2. Il s'ensuit

$$(f_1, z_1) \in C_2^{\cdot} * E_2 \quad \text{et} \quad z = f_1 z_1 \in E_2.$$

Ceci prouve que

$$P^e(\overline{\eta}_1) = (C_1 \times E_1) \subset (C_2 \times E_2) = P^e(\overline{\eta}_2).$$

ii) *Cas* $l = g$. Soit $\hat{\eta} = [(\hat{C}^{\bullet}, \hat{T}), \hat{T}', \hat{\kappa}'] \in \hat{\mathfrak{A}}^g(\mathfrak{T})_o$ et $B = C'_1 \times E'_1 \subset \hat{C} \times \hat{E}$ telle que $\emptyset \neq B \in \tilde{\mathfrak{M}}_o$ et $\hat{\pi}(E'_1) \supset \hat{\alpha}(C'_1) \cup \hat{\beta}(C'_1)$.

On reprend exactement la même construction que précédemment, en prenant maintenant pour $C^{\bullet}_1$ le sous-groupoïde de $\hat{C}^{\bullet}$ engendré par $C'_1 \cup \hat{\pi}(E'_1)$.

Alors $\overline{\eta}_1 = [(C^{\bullet}_1, T_1), T'_1, \kappa'_1]$ est une P^g-sous-structure de $\hat{\eta}$ d'après ce que l'on a vu précédemment (car $C^{\bullet}_1$ est une sous-catégorie de $\hat{C}^{\bullet}$ et $\hat{\pi}(E_1) = C^{\bullet}_{1o}$). De plus $C^{\bullet}_1$ est un groupoïde.

Montrons que $\sigma_1 : f \to \overset{-1}{f}$ est continue de T_1 vers T_1 :

$\sigma : f \in \hat{C} \to \overset{-1}{f}$ est continue de $\hat{T}$ vers $\hat{T}$ puisque $\hat{\eta} \in \hat{\mathfrak{A}}^g(\mathfrak{T})_o$ entraîne que $(\hat{C}^{\bullet}, \hat{T})$ est un groupoïde topologique. σ_1, restriction de σ à C_1, est continue de T_1 vers $\hat{T}$. Or $\sigma_1(C_1) = \sigma(C_1) \subset C_1$, donc σ_1 est continue de T_1 vers T_1. Ainsi $(C^{\bullet}_1, T_1)$ est un groupoïde topologique, $\overline{\eta}_1 \in \hat{\mathfrak{A}}^g(\mathfrak{T})_o$, et $\overline{\eta}_1$ est une P^g-sous-structure de $\hat{\eta}$. De plus $P^g(\overline{\eta}_1) = (C_1 \times E_1) \supset (C'_1 \times E'_1)$, car $C_1 \supset C'_1$ et $E_1 \supset E'_1$.

Montrons que $P^g(\overline{\eta}_1) \in \tilde{\mathfrak{M}}_o$. En effet, on a toujours $E'_1 \in \tilde{\mathfrak{M}}_o$ et $\hat{\pi}(E'_1) \in \tilde{\mathfrak{M}}_o$. $C^{\bullet}_1$ est identique à la sous-catégorie de $\hat{C}^{\bullet}$ engendrée par $C'_1 \cup C'^{-1}_1 \cup \hat{\pi}(E'_1)$ par définition du sous-groupoïde engendré. Comme $C'_1 \in \tilde{\mathfrak{M}}_o$ entraîne $C'^{-1} \in \tilde{\mathfrak{M}}_o$, on a $C'_1 \cup C'^{-1}_1 \cup \hat{\pi}(E'_1) \in \tilde{\mathfrak{M}}_o$; puisque $\tilde{\mathfrak{M}}_o$ est un univers, la sous-catégorie engendrée par $C'_1 \cup C'^{-1}_1 \cup \hat{\pi}(E'_1)$ vérifie aussi $C_1 \in \tilde{\mathfrak{M}}_o$. Il s'ensuit $E_1 \in \tilde{\mathfrak{M}}_o$, d'où $P^g(\overline{\eta}_1) \in \tilde{\mathfrak{M}}_o$.

Si de plus $\overline{\eta}_2 = [(C^{\bullet}_2, T_2), T'_2, \kappa'_2]$ est une autre P^g-sous-structure de $\hat{\eta}$ telle que $P^g(\overline{\eta}_2) = C_2 \times E_2 \supset B$ et $P^g(\overline{\eta}_2) \in \tilde{\mathfrak{M}}_o$, on montre de la même façon que précédemment que $P^g(\overline{\eta}_1) = (C_1 \times E_1) \subset P^g(\overline{\eta}_2) = (C_2 \times E_2)$, ce qui achève la preuve du lemme.

2. Complément.

Le lemme précédent peut être généralisé comme suit: Soit $\mathfrak{A}'(\mathfrak{T})_o$ l'ensemble des n. e. s. $\overline{\eta} = ((C^{\bullet}, T), T', \kappa') \in \mathfrak{A}(\mathfrak{T})_o$ tels que $C^{\bullet} * E = \alpha \vee \pi$, où α est l'application source de $C^{\bullet}$ et π la projection canonique associée à η. Soient $\mathfrak{A}'(\mathfrak{T})^o$ la sous-catégorie pleine de $\mathfrak{A}(\mathfrak{T})^o$ ayant $\mathfrak{A}'(\mathfrak{T})_o$ pour classe d'objets, et p' le foncteur de $\mathfrak{A}'(\mathfrak{T})^o$ vers $\mathfrak{M}^o$ restriction de p. On définit de même les catégorie $\hat{\mathfrak{A}}'(\mathfrak{T})^o$ et foncteur P' associés à $\hat{\mathfrak{M}}_o$. Notons Y l'ensemble des P-monomorphismes $m = (\overline{\eta}',$

$\overline{\Phi}, \overline{\varphi}, \overline{\eta})$, où $\overline{\eta}$ et $\overline{\eta}'$ appartiennent à $\hat{\mathfrak{A}}'(\mathfrak{T})_o$ et où $\overline{\Phi}$ est un néofoncteur continu de $(C^{\cdot}, T)$ vers $(C'^{\cdot}, T')$ définissant un isomorphisme de $(C^{\cdot}, T)$ sur un sous-noyau de catégorie $(C_1^{\cdot}, T_1)$ de $(C'^{\cdot}, T')$ tel que C_1 soit stable dans $C'^{\cdot}$.

PROPOSITION. *Soient* $\hat{\eta} = ((\hat{C}^{\cdot}, \hat{T}), \hat{T}', \hat{\kappa}')$ *un élément de* $\hat{\mathfrak{A}}'(\mathfrak{T})_o$, $\hat{E}$ *l'ensemble sous-jacent à* $\hat{T}'$ *et* $\hat{\pi}$ *la projection canonique. Soit* $B = C'_1 \times E'_1$ *une partie de* $\hat{C} \times \hat{E}$ *telle que* $\hat{\pi}(E'_1)$ *contienne la classe des unités du sous-graphe multiplicatif de* $\hat{C}^{\cdot}$ *engendré par* C'_1. *Si* B *appartient à* $\tilde{\mathfrak{M}}_o$, *il existe un* $(Y \circ \mathfrak{A}'(\mathfrak{T})_o, P')$*-sous-morphisme de* $\hat{\eta}$ *engendré par* $(\hat{C} \times \hat{E}, \iota, B)$.

PREUVE. P' étant un foncteur d'homomorphismes saturé et Y étant saturé dans $\mathfrak{A}'(\mathfrak{T})^o$, il suffit de montrer qu'il existe une (Y, P')-sous-structure $\overline{\eta}_1$ de $\hat{\eta}$ engendrée par B et telle que $P'(\overline{\eta}_1) \in \tilde{\mathfrak{M}}_o$.

Soit $C^{\cdot}$ le sous-graphe multiplicatif stable de $\hat{C}^{\cdot}$ engendré par $C'_1 \cup \hat{\pi}(E')$. On a $C = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} D_n$, où D_1 est le sous-graphe multiplicatif de $C^{\cdot}$ engendré par $C'_1 \cup \hat{\pi}(E'_1)$ et où D_n est défini par récurrence pour tout entier n en posant

$$D_n = \{ f'.f \mid f \in D_{n-1},\ f' \in D_{n-1},\ (f', f) \in C^{\cdot} * C^{\cdot} \}.$$

Comme D_n appartient à $\tilde{\mathfrak{M}}_o$ si D_{n-1} y appartient, C appartient à $\tilde{\mathfrak{M}}_o$.

Soit E l'ensemble réunion de la suite $(E'_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de parties de E définie par récurrence en posant:

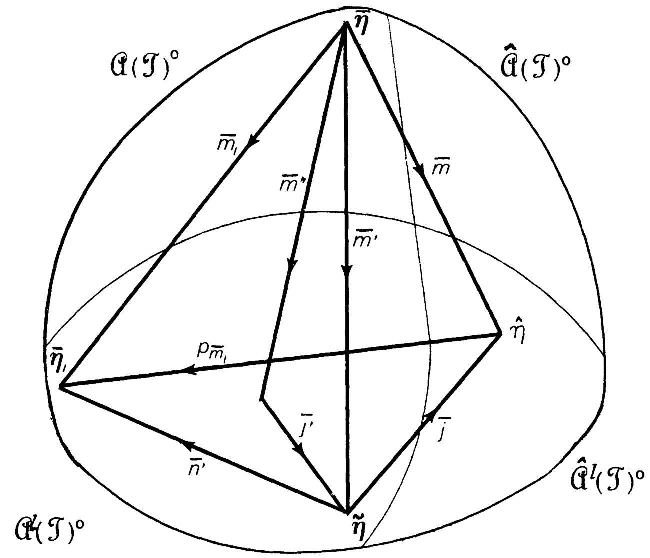
$$E'_n = \{ fz \mid f \in C,\ z \in E'_{n-1},\ (f, z) \in \hat{C}^{\cdot} * \hat{E} \}.$$

Une démonstration analogue à celle du lemme précédent prouve que cette suite est croissante et que, E'_1 appartenant à $\tilde{\mathfrak{M}}_o$, l'ensemble E y appartient aussi. De plus il existe une restriction κ'_1 de $\hat{\kappa}'$ à $(E, C^{\cdot} * E)$, où $C^{\cdot} * E = (C \times E) \cap (\hat{C}^{\cdot} * \hat{E})$. Par conséquent $C \times E \in \tilde{\mathfrak{M}}_o$ et

$$\overline{\eta}_1 = ((C^{\cdot}, T / C), T' / E, \kappa'_1) \in \mathfrak{A}'(\mathfrak{T})_o .$$

On voit facilement que $\overline{\eta}_1$ est la (Y, P')-sous-structure de $\hat{\eta}$ engendrée par B.

3. THEOREME 3 . *Le foncteur injection canonique* $(\mathfrak{A}(\mathfrak{T})^o, \iota, \mathfrak{A}^l(\mathfrak{T})^o)$, *pour* $l = e$ *ou* g, *admet un adjoint.*



Soit $\bar{\eta} = [\,(C^\bullet, T), T', \kappa'\,] \in \mathfrak{A}(\mathcal{T})_o$. On considère

$$\mathfrak{J} = \{\, \bar{m}_i = (\bar{\eta}_i, \bar{\Phi}_i, \bar{\varphi}_i, \bar{\eta}) \in \mathfrak{A}(\mathcal{T}) \mid \bar{\eta}_i \in \mathfrak{A}^l(\mathcal{T})_o \},$$

c'est-à-dire $\mathfrak{J} = \mathfrak{A}^l(\mathcal{T})_o \circ \mathfrak{A}(\mathcal{T}) \circ \bar{\eta}$. Il existe un produit $\hat{\eta} = [\,(\hat{C}^\bullet, \hat{T}), \hat{T}', \kappa'\,]$ de $(\beta(\bar{m}_i))_{\bar{m}_i \in \mathfrak{J}}$ dans $\hat{\mathfrak{A}}^l(\mathcal{T})^o$, car vu les résultats du paragraphe 2, il suffit de montrer que $\mathfrak{J}$ appartient à $\hat{\mathfrak{M}}_o$. Or $\mathfrak{A}(\mathcal{T})_o$ est une partie de $(\mathfrak{N}' \times \mathcal{T}) \times \mathcal{T} \times \mathfrak{M}$ et l'on sait que $\mathfrak{N}'$, $\mathcal{T}$, $\mathfrak{M}$ appartiennent à l'univers $\hat{\mathfrak{M}}_o$ [5]; il en résulte $(\mathfrak{N}' \times \mathcal{T}) \times \mathcal{T} \times \mathfrak{M} \in \hat{\mathfrak{M}}_o$, d'où $\mathfrak{A}(\mathcal{T})_o \in \hat{\mathfrak{M}}_o$. Les ensembles $\mathfrak{N}'(\mathcal{T})_o$ et $\mathfrak{N}'(\mathcal{T})$ des graphes multiplicatifs topologiques et des néofoncteurs continus associés à $\mathfrak{M}_o$ appartiennent à $\hat{\mathfrak{M}}_o$, car

$$\mathfrak{N}'(\mathcal{T})_o \subset \mathfrak{N}' \times \mathcal{T} \quad \text{et} \quad \mathfrak{N}'(\mathcal{T}) \subset \mathfrak{N}'(\mathcal{T})_o \times \mathfrak{M} \times \mathfrak{N}'(\mathcal{T})_o \in \hat{\mathfrak{M}}_o .$$

Il s'ensuit que $\mathfrak{A}(\mathcal{T})$, qui est contenu dans

$$\mathfrak{A}(\mathcal{T})_o \times \mathfrak{N}'(\mathcal{T}) \times \mathcal{T} \times \mathfrak{A}(\mathcal{T})_o \in \hat{\mathfrak{M}}_o,$$

est un élément de $\hat{\mathfrak{M}}_o$. A fortiori sa partie $\mathfrak{J}$ appartient à $\hat{\mathfrak{M}}_o$. Par suite il existe un produit naturalisé $((p_{\bar{m}_i})_{\bar{m}_i \in \mathfrak{J}}, \hat{\eta})$ de $(\beta(\bar{m}_i))_{\bar{m}_i \in \mathfrak{J}}$ dans $\hat{\mathfrak{A}}^l(\mathcal{T})^o$. Soit $m = (\hat{\eta}, \bar{\Gamma}, \bar{\gamma}, \bar{\eta})$ l'unique application covariante topologique telle que

$$p_{\bar{m}_i} \circ \bar{m} = \bar{m}_i \quad \text{pour tout} \quad \bar{m}_i \in \mathfrak{J}.$$

Soient G et g les applications sous-jacentes à $\bar{\Gamma}$ et à $\bar{\gamma}$, et E l'ensemble sous-jacent à T'. Les ensembles $G(C)$ et $g(E)$ appartiennent à $\tilde{\mathfrak{M}}_o$, car ce sont des images d'éléments de $\mathfrak{M}_o$ par des applications appartenant à $\hat{\mathfrak{M}}$. Par conséquent

$$B = G(C) \times g(E) \in \tilde{\mathfrak{M}}_o .$$

Si $\hat{\pi}$ est la projection canonique associée à $[\hat{C}^{\cdot}, \hat{E}, \hat{\kappa}']$, montrons que $\hat{\pi}(g(E)) = G(C_o^{\cdot})$. En effet, pour toute unité e de $C^{\cdot}$, il existe un élément z de E (resp. pour tout $z \in E$, il existe $e \in C_o^{\cdot}$) tel que ez soit défini, et alors $\hat{\pi}(g(z)) = G(e)$.

Par conséquent B vérifie les conditions du lemme, et il existe une $(X \circ \mathfrak{A}^l(\mathfrak{T})_o, P^l)$-sous-structure $\tilde{\eta}$ de $\hat{\eta}$ engendrée par B; notons

$$\tilde{\eta} = [(\tilde{C}^{\cdot}, \tilde{T}), \tilde{T}', \tilde{\kappa}'] \quad \text{et} \quad \bar{j} = (\hat{\eta}, \bar{i}, \bar{i}', \tilde{\eta}))$$

le P^l-monomorphisme définissant $\tilde{\eta}$. Comme $\bar{m}$ est un élément de $\hat{\mathfrak{A}}(\mathfrak{T})$ de même but que la P^l-injection $\bar{j}$ et que, si $\tilde{E}$ désigne l'ensemble $\theta(\tilde{T}')$,

$$P^l(\bar{m})(C \times E) = B \subset P^l(\bar{j})(\tilde{C} \times \tilde{E}),$$

il existe un unique $\bar{m}' \in \hat{\mathfrak{A}}(\mathfrak{T})$ tel que

$$\bar{j} \circ \bar{m}' = \bar{m} \quad \text{et} \quad \bar{m}' \in \mathfrak{J}.$$

Montrons que $\bar{m}'$ est un $(\mathfrak{A}^l(\mathfrak{T}), \mathfrak{A}(\mathfrak{T})^o)$-projecteur. Soit $\bar{m}_i \in \mathfrak{J}$; on a

$$\bar{m}_i = p_{\bar{m}_i} \circ \bar{m} = (p_{\bar{m}_i} \circ \bar{j}) \circ \bar{m}',$$

d'où

$$\bar{m}_i = \bar{n} \circ \bar{m}', \text{ où } \bar{n} = p_{\bar{m}_i} \circ \bar{j} \in \mathfrak{A}^l(\mathfrak{T}).$$

Soit $\bar{n}'$ un élément de $\mathfrak{A}^l(\mathfrak{T})$ tel que $\bar{m}_i = \bar{n}' \circ \bar{m}'$. Il existe un noyau $\bar{j}'$ de $(\bar{n}, \bar{n}')$ dans $\mathfrak{A}^l(\mathfrak{T})^o$ et $\bar{j}'$ appartient à X et est aussi un noyau de $(\bar{n}, \bar{n}')$ dans $\mathfrak{A}(\mathfrak{T})^o$(paragraphe I). Comme $\bar{n} \circ \bar{m}' = \bar{m}_i = \bar{n}' \circ \bar{m}'$ par hypothèse, par définition d'un noyau il existe un unique $\bar{m}''$ tel que $\bar{m}' = \bar{j}' \circ \bar{m}''$. L'élément $\bar{j} \circ \bar{j}'$ de X a pour but $\hat{\eta}$, sa source appartient à $\mathfrak{A}^l(\mathfrak{T})_o$ et

$$B = P^l(\bar{m})(C \times E) = P^l(\bar{j} \circ \bar{j}')(P^l(\bar{m}'')(C \times E))$$

est contenu dans l'image de $P^l(\bar{j} \circ \bar{j}')$. Puisque $\bar{j}$ est un $(X \circ \mathfrak{A}^l(\mathfrak{T})_o, P^l)$-sous-morphisme de $\hat{\eta}$ engendré par $(C \times E, \iota, B)$, il s'ensuit qu'il existe $\bar{j}''$ tel que

$$(\bar{j} \circ \bar{j}') \circ \bar{j}'' = \bar{j}, \quad \text{d'où} \quad \bar{j}' \circ \bar{j}'' = \alpha(\bar{j}).$$

$\overline{j'}$ étant un monomorphisme, $\overline{j'}$ admet $\overline{j''}$ pour inverse. Donc $\overline{n} = \overline{n'}$. Ainsi $\tilde{\eta}$ est une $(\mathfrak{A}^l(\mathcal{T}), \mathfrak{A}(\mathcal{T})^o)$-projection de $\overline{\eta}$, pour $l = e$ ou g. Le théorème en résulte.

4. COROLLAIRES.

a) Soient $\mathfrak{N}^\bullet(\mathcal{T})^o$ la catégorie des néofoncteurs continus associée à l'univers $\mathfrak{M}_o$ et $\mathcal{F}^l(\mathcal{T})^o$ sa sous-catégorie pleine formée des foncteurs continus entre catégories topologiques si $l = e$, entre groupoïdes topologiques si $l = g$. Notons $\mathcal{F}^{lo}$ la catégorie $\mathcal{F}^o$ des foncteurs si $l = e$, sa sous-catégorie pleine ayant pour objets les groupoïdes si $l = g$.

Si $(C^\bullet, T)$ est un noyau de catégorie et si $C \in \mathfrak{M}_o$, il existe une $(\mathcal{F}^l(\mathcal{T}), \mathfrak{N}^\bullet(\mathcal{T})^o)$-projection de $(C^\bullet, T)$ de la forme $(\tilde{C}^\bullet, \tilde{T})$, où $\tilde{C}^\bullet$ est une $(\mathcal{F}^l, \mathfrak{N}^{\bullet o})$-projection de $C^\bullet$. Le projecteur correspondant est injectif si, et seulement si, $C^\bullet$ est une base de catégorie si $l = e$, une base de groupoïde si $l = g$.

En effet on définit un noyau d'espèce de structures $\overline{\eta} = [(C^\bullet, T), T', \kappa']$, notée $\eta(C^\bullet, T)$, en posant $T' = T_o = T / C^\bullet_o$ et en prenant pour κ' l'application:

$$(f, e) \to \beta(f), \text{ où } (f, e) \in C \times E, \text{ si et seulement si } e = \alpha(f).$$

Comme $\overline{\eta}$ appartient à $\mathfrak{A}(\mathcal{T})_o$, d'après le théorème de projection il existe un $(\mathfrak{A}^l(\mathcal{T}), \mathfrak{A}(\mathcal{T})^o)$-projecteur

$$\overline{m}' = (\tilde{\eta}, \overline{\Delta}, \overline{\delta}, \overline{\eta}), \text{ où } \tilde{\eta} = [(\tilde{C}^\bullet, \tilde{T}), \tilde{T}', \tilde{\kappa}'] .$$

$(\tilde{C}^\bullet, \tilde{T})$ est une catégorie topologique si $l = e$, un groupoïde topologique si $l = g$. Montrons que $\overline{\Delta}$ est un $(\mathcal{F}^l(\mathcal{T}), \mathfrak{N}^\bullet(\mathcal{T})^o)$-projecteur. Soit

$$\overline{F} = ((C^\bullet_1, T_1), \underline{F}, (C^\bullet, T)) \in \mathcal{F}^l(\mathcal{T})_o \circ \mathfrak{N}^\bullet(\mathcal{T}).$$

Alors, si $\overline{f}$ est l'application continue de T_o vers T_{1o} restriction de $\overline{F}$,

$$\overline{m}_i = (\eta(C^\bullet_1, T_1), \overline{F}, \overline{f}, \eta(C^\bullet, T)) \in \mathfrak{A}^l(\mathcal{T})_o \circ \mathfrak{A}(\mathcal{T}).$$

Par hypothèse, il existe un et un seul $\overline{n}$ tel que $\overline{m}_i = \overline{n} \circ \overline{m}'$; si

$$\overline{n} = (\eta(C^\bullet, T), \overline{F}', \overline{f}', \tilde{\eta}), \text{ on a } \overline{F} = \overline{F}' \circ \overline{\Delta},$$

et $\overline{F}'$ est l'unique foncteur continu vérifiant cette égalité. Donc $(\tilde{C}^\bullet, \tilde{T})$ est une projection de $(C^\bullet, T)$.

Si $\overline{\Delta}$ est injectif, $C^{\cdot}$ est isomorphe à un sous-graphe multiplicatif de la catégorie $\tilde{C}^{\cdot}$, de sorte que $C^{\cdot}$ est une base de catégorie; si $l = g$, $\tilde{C}^{\cdot}$ est un groupoïde, et $C^{\cdot}$ est alors une base de groupoïde.

Montrons que $\tilde{C}^{\cdot}$ est une $(\mathfrak{F}^l, \mathfrak{N}'^{\circ})$-projection de $C^{\cdot}$. Il en résultera en particulier que, si $C^{\cdot}$ est une base de catégorie et si $l = e$ (resp. si $C^{\cdot}$ est une base de groupoïde et si $l = g$), alors $\overline{\Delta}$ est injectif. Soit $F = (K^{\cdot}, \underline{F}, C^{\cdot})$ un néofoncteur, où $K^{\cdot}$ est une catégorie (resp. un groupoïde si $l = g$). Si T_g est la topologie grossière sur K, le couple $(K^{\cdot}, T_g)$ est une catégorie topologique (resp. un groupoïde topologique); de plus

$$\overline{F} = ((K^{\cdot}, T_g), \underline{F}, (C^{\cdot}, T)) \in \mathfrak{F}^l(\mathfrak{T})_o \circ \mathfrak{N}^{\bullet}(\mathfrak{T}),$$

Donc, $\overline{\Delta}$ étant un projecteur, il existe un unique foncteur continu $\overline{F}'$ tel que $\overline{F} = \overline{F}' \circ \overline{\Delta}$. Si F' et Δ sont les néofoncteurs définissant $\overline{F}'$ et $\overline{\Delta}$, on a $F = F' \circ \Delta$. On en déduit que $\overline{\Delta}$ est un $(\mathfrak{F}^l, \mathfrak{N}'^{\circ})$-projecteur.

Compléments. Si $C^{\cdot}$ est une base de catégorie, on montre que T_o est homéomorphe à $\tilde{T}_o$. S'il existe un néofoncteur continu

$$\overline{F} = ((K^{\cdot}, T'), \underline{F}, (C^{\cdot}, T))$$

dont le but soit une catégorie topologique si $l = e$, un groupoïde topologique si $l = g$, et tel que $\underline{F}$ définisse un homéomorphisme de T sur la topologie $T'' = T'/F(C)$ induite par T', on montre que T est homéomorphe à la topologie $\tilde{T}/\Delta(C)$.

b) Soient $C^{\cdot}$ une catégorie, $\mathfrak{A}_{C^{\cdot}}(\mathfrak{T})^{\circ}$ la sous-catégorie de $\mathfrak{A}(\mathfrak{T})^{\circ}$ formée des $(\overline{\eta}_1, \overline{\Phi}, \overline{\varphi}, \overline{\eta}) \in \mathfrak{A}(\mathfrak{T})$ tels que le néofoncteur définissant $\overline{\Phi}$ soit le néofoncteur identique de $C^{\cdot}$ et $\mathfrak{A}^l(\mathfrak{T})^{\circ}$ la sous-catégorie de $\mathfrak{A}(\mathfrak{T})^{\circ}$ telle que $\mathfrak{A}^l_{C^{\cdot}}(\mathfrak{T}) = \mathfrak{A}^l(\mathfrak{T}) \cap \mathfrak{A}_{C^{\cdot}}(\mathfrak{T})$, pour $l = e$ ou g.

Le foncteur injection canonique de $\mathfrak{A}^l_{C^{\cdot}}(\mathfrak{T})^{\circ}$ *vers* $\mathfrak{A}_{C^{\cdot}}(\mathfrak{T})^{\circ}$ *admet un adjoint pour* $l = e$ *ou* g.

On reprend la même construction que dans le théorème 3, avec

$$\mathfrak{I} = \mathfrak{A}^l_{C^{\cdot}}(\mathfrak{T})_o \circ \mathfrak{A}_{C^{\cdot}}(\mathfrak{T}) \circ \overline{\eta}, \quad \text{si} \quad \overline{\eta} \in \mathfrak{A}_{C^{\cdot}}(\mathfrak{T})_o.$$

c) *Si* $\overline{\eta} \in \mathfrak{A}(\mathfrak{T})_o$ *et si* r *est une relation d'équivalence sur* $P(\overline{\eta})$, *il existe une* $(\mathfrak{A}^l(\mathfrak{T}), p)$*-structure quasi-quotient de* $\overline{\eta}$ *par* r, *où* $l = e$ *ou* g.

La construction est analogue à celle du théorème 3 en prenant pour $\mathcal{J}$ l'ensemble des $\overline{m} \in \mathfrak{A}^l(\mathcal{T})_o \circ \mathfrak{A}(\mathcal{T})$ de source η tels que $P(\overline{m})$ soit compatible avec r.

d) Soient $(C^\cdot, T)$ un noyau de catégorie où $C \in \mathfrak{M}_o$, et $\mathfrak{B}$ la sous-catégorie de $\mathfrak{A}(\mathcal{T})^o$ formée des $(\overline{\eta}_1, \overline{\Phi}, \overline{\varphi}, \overline{\eta}) \in \mathfrak{A}(\mathcal{T})$ pour lesquels $\overline{\Phi}$ est le néofoncteur continu identique de $(C^\cdot, T)$. Désignons par $\mathfrak{B}'$ la sous-catégorie pleine de $\mathfrak{B}$ ayant pour objets les n. e. s.

$$\overline{\eta} = ((C^\cdot, T), T', \kappa') \in \mathfrak{A}'(\mathcal{T})_o.$$

Le foncteur injection canonique de $\mathfrak{B}'$ vers $\mathfrak{B}$ admet un adjoint.

En effet, on montre facilement que $\mathfrak{B}'$ est une catégorie à I-produits, pour tout élément I de $\mathfrak{M}_o$, et à noyaux. La construction d'une $(\mathfrak{B}', \mathfrak{B})$-projection de $\overline{\eta} \in \mathfrak{B}_o$ est analogue à celle faite pour prouver le théorème 3: On prend $\mathcal{J} = \mathfrak{B}' \circ \mathfrak{B} \circ \overline{\eta}$; il existe un produit $\hat{\eta}$ de $(\beta(\overline{m}_i))_{\overline{m}_i \in \mathcal{J}}$ dans la catègorie $\hat{\mathfrak{B}}'$ associée à l'univers $\hat{\mathfrak{M}}_o$. D'après la proposition du complément (appliquée dans un cas où B est de la forme $C \times E'_1$), il existe aussi un (Y, P')-sous-morphisme de $\hat{\eta}$ engendré par $[\overline{m}_i]_{\overline{m}_i \in \mathcal{J}}$; sa source $\tilde{\eta}$ appartient à $\mathfrak{B}'$, et c'est une $(\mathfrak{B}', \mathfrak{B})$-projection de $\overline{\eta}$.

Si $(C^\cdot, T)$ est en fait une catégorie topologique, $\mathfrak{B}'$ est une sous-catégorie de $\mathfrak{A}^e(\mathcal{T})^o$ et $\tilde{\eta}$ est une espèce de structures topologique.

REMARQUE. La méthode utilisée pour prouver le théorème 3 et ses corollaires à partir du lemme est un cas particulier de la construction faite dans le théorème général d'existence de structures libres [5] .

APPLICATION. Un système semi-dynamique [7] est un noyau d'espèce de structures $[R_+, T', \kappa']$, où R_+ est le demi-groupe topologique des réels positifs. Un système dynamique global est un n.e.s. $[R, T', \kappa']$, où R est le groupe topologique additif des réels. Le théorème 3 (cas $l = g$) affirme donc en particulier que tout système semi-dynamique «se plonge» dans un système dynamique global. Il généralise donc les résultats de [7].

Bibliographie.

1. A. BASTIANI, *Systèmes guidables et problèmes d'optimisation, parties I à V et Compléments,* Laboratoire d'Automatique de Caen (Multigraphié), 1963 - 1964 - 1965.

2. C. EHRESMANN, *Catégories et Structures,* Dunod, Paris, 1965.

3. C. EHRESMANN, Catégories topologiques I à III, *Indigationes Math. 28,* Amsterdam (1966).

4. C. EHRESMANN, *Algèbre 1ère partie,* C. D. U., Paris, 1968.

5. C. EHRESMANN, Structures quasi-quotients, *Math. Ann. 171* (1967).

6. C. EHRESMANN, Construction de structures libres, *Lecture Notes in Math. 92,* Springer (1969).

7. O. HAJEK, Structure of dynamical systems, *Comm. Math. Univ. Carolinae 6 - 1,* Prague (1965).

8. A. BASTIANI - C. EHRESMANN, Catégories de foncteurs structurés, *Cahiers de Topo. et Géo. diff. XI - 3* (1969).

Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
33 rue Saint-Leu
80 - AMIENS