CAHIERS DE
TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
CATÉGORIQUES

ARMANDO MACHADO

Quasi-variétés complexes

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 11, n° 3 (1969), p. 229-279

<http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1969__11_3_229_0>

CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE — *Vol. XI,3*

QUASI-VARIETES COMPLEXES

par Armando MACHADO (*)

TABLE DES MATIERES

(*) Boursier de l'Instituto de Alta Cultura (Lisbonne).

Je remercie Monsieur Charles Ehresmann pour l'intérêt qu'il m'a porté pendant l'élaboration de ce travail.

Je suis également reconnaissant à Madame Andrée Bastiani qui a lu le manuscrit de cet article et m'a présenté plusieurs critiques et suggestions très importantes.

Introduction.

L'objectif de ce travail est de montrer comment on peut associer à chaque variété analytique complexe V une quasi-topologie π_V sur l'ensemble $\mathbf{C} \times V$ (où $\mathbf{C}$ est le corps des complexes), et cela d'une façon qui la caractérise parfaitement.

Les notions de quasi-topologie et application quasi-continue, généralisant celles de topologie et application continue, ont été introduites dans [1] et [2] (*) et, depuis lors, ont été employées dans différentes branches comme l'Analyse Fonctionnelle ([3], [4], [5], [6], [7]), la Géométrie Différentielle ([7], [8]) et la Théorie de la Différentiation ([7], [9], [10]).

Le travail est divisé en trois parties. La première concerne la théorie des espaces quasi-topologiques, où on y présente d'une part *(1.1)* un rappel des définitions et des énoncés de quelques résultats tels qu'ils se trouvent dans les articles cités, et d'autre part *(1.2)*, on démontre certains théorèmes qui nous sont utiles dans la suite. Dans la deuxième partie on construit, pour chaque variété analytique complexe V, une quasi-topologie π_V sur $\mathbf{C} \times V$, ayant la propriété qu'une application $f : V \to V'$ est holomorphe si, et seulement si, l'application $\overline{f} = 1_{\mathbf{C}} \times f : \mathbf{C} \times V \to \mathbf{C} \times V'$ est quasi-continue pour les quasi-topologies π_V et $\pi_{V'}$. Pour cela, on commence dans le cas où V et V' sont des ouverts d'espaces numériques $\mathbf{C}^n$ et de là on procède par recollement. On étudie encore comment varient les quasi-topologies π_V quand on prend des produits de variétés, des sous-variétés et des variétés quotients. A partir des résultats de cette deuxième

(*) Les numéros entre crochets renvoient à la bibliographie à la fin.

partie on est amené à considérer une catégorie $\mathfrak{QV}$ (avec un foncteur d'oubli $p_{\mathfrak{QV}}$ vers la catégorie $\mathcal{E}ns$ des ensembles[(*)]) dont les objets sont les couples (V, π), où V est un ensemble et π une quasi-topologie sur $\mathbf{C} \times V$ (avec un certain nombre de conditions), et les morphismes de (V, π) vers (V', π') sont ceux qui sont définis par les applications $f : V \to V'$ telles que l'application $\overline{f} = 1_{\mathbf{C}} \times f : \mathbf{C} \times V \to \mathbf{C} \times V'$ soit quasi-continue pour π et π'. Les objets de cette catégorie sont appelés quasi-variétés analytiques complexes et les résultats de la deuxième partie permettent d'identifier la catégorie $\mathfrak{V}$ des variétés analytiques complexes à une sous-catégorie pleine de $\mathfrak{QV}$. La catégorie $\mathfrak{QV}$ est beaucoup plus régulière que $\mathfrak{V}$; elle admet des structures initiales et finales arbitraires (donc en particulier des structures quotients, des sous-structures ainsi que tous les types de limites inductives et projectives) et l'on voit que les produits de variétés sont des produits dans $\mathfrak{QV}$, les sous-variétés des sous-structures dans $p_{\mathfrak{QV}}$ et les variétés quotient (par submersion) des structures quotient dans $p_{\mathfrak{QV}}$. On vérifie encore la propriété (qui est valable aussi pour la catégorie $\mathfrak{QT}$ des espaces quasi-topologiques) que, étant données les quasi-variétés V et V', il existe sur l'ensemble $Hom_{\mathfrak{QV}}(V', V)$ des applications quasi-holomorphes de V dans V', une bonne structure de quasi-variété, le sens du mot «bonne» étant lié à une certaine propriété de type universel (propriété formalisée pour des cas généraux dans [11]). C'est l'étude de cette catégorie $\mathfrak{QV}$ qui constitue la troisième partie de ce travail.

En ce qui concerne les notions de théorie des catégories, on se rapporte normalement au livre [2] bien que, en particularisant toujours autant que possible pour notre cas concret les notions générales, on cherche à faciliter la compréhension du texte pour le lecteur qui n'est pas habitué à ces notions.

Seuls les faits les plus élémentaires de la théorie des fonctions analytiques de plusieurs variables complexes nous seront nécessaires et ils peuvent être trouvés par exemple dans [13].

(*) On nommera souvent une catégorie par le nom de ses objets, dès qu'il n'y a pas de confusion sur les morphismes qu'on considère.

1. Les espaces quasi-topologiques.

1.1. Définitions et propriétés générales. Structures initiales et finales. La quasi-topologie de la convergence locale.

1.1.1. Etant donné un ensemble E, on appelle filtre sur E une classe non vide F de parties de E telle que

$$A, B \in F \Longrightarrow A \cap B \in F, \quad A \in F \wedge B \supseteq A \Longrightarrow B \in F.$$

On n'exclut pas le cas où F est la classe de toutes les parties de E (ce qui est équivalent à $\phi \in F$) et F est alors appelé filtre impropre. Tous les autres filtres sont appelés propres. Une classe F' de parties de E est dite base du filtre F si

$$A \in F \Longleftrightarrow \exists B \in F' \text{ avec } A \supseteq B.$$

Une classe F' de parties de E est base d'un filtre si, et seulement si, elle est non vide et

$$A, B \in F' \Longrightarrow \exists C \in F' \text{ avec } C \subseteq A \cap B.$$

Si $x \in E$, on représente par x^{ε} le filtre de toutes les parties de E que contiennent x, c'est-à-dire celui qui admet pour base $\{\{x\}\}$. Si F et G sont des filtres sur E, $F \cap G$ est encore un filtre sur E, lequel admet pour base la classe des $A \cup B$ avec $A \in F$, $B \in G$ (*).

1.1.2. Etant donnés une application $f : E \to E'$ et un filtre F sur E, on représente par $f(F)$ le filtre sur E' qui admet pour base les $f(A)$, $A \in F$. Si F est un filtre sur E et $E' \subseteq E$, on représente par F/E' le filtre qui admet pour base l'ensemble des $A \cap E'$, $A \in F$. Si $E' \in F$, alors F/E' est aussi la classe des $A \in F$ tels que $A \subseteq E'$. En représentant par $\iota : E' \to E$ l'inclusion canonique, on voit que, si F est un filtre sur E, on a $\iota(F/E') \supseteq F$, et que $\iota(F/E') = F$ si, et seulement si, $E' \in F$. Si F' est un filtre sur E' on a $\iota(F')/E' = F'$. Si E est le produit des ensembles E_α, où $\alpha \in I$, et si F_α est un filtre sur E_α pour tout $\alpha \in I$, on définit le filtre produit $\prod_{\alpha \in I} F_\alpha$ sur E comme étant celui qui admet pour

(*) En fait $F \cap G$ coïncide avec cette classe. Assez souvent on dira qu'une certaine classe est base d'un filtre alors qu'elle coïncide avec ce filtre.

base les ensembles $\prod_{\alpha \in I} A_\alpha$, où $A_\alpha \in F_\alpha$ et, sauf pour un nombre fini d'indices, $A_\alpha = E_\alpha$.

1.1.3. On appelle *quasi-topologie* sur l'ensemble E une application π associant à chaque $x \in E$ une classe $\pi(x)$ de filtres sur E obéissant à :

QT 1) $F_1, F_2 \in \pi(x) \Longrightarrow F_1 \cap F_2 \in \pi(x)$,

QT 2) $F_1 \in \pi(x)$, $F_2 \supseteq F_1 \Longrightarrow F_2 \in \pi(x)$,

QT 3) $x \in E \Longrightarrow x^{\mathcal{E}} \in \pi(x)$.

La relation $F \in \pi(x)$ s'écrit aussi $F \underset{\pi}{\to} x$ (F converge vers x dans π). Plus précisément, le couple (E, π) est appelé *espace quasi-topologique*.

1.1.4. On appelle *application quasi-continue* un triple $((E', \pi'), f, (E, \pi))$, où (E, π) et (E', π') sont des espaces quasi-topologiques et où $f : E \to E'$ et une application telle que

$$F \underset{\pi}{\to} x \Longrightarrow f(F) \underset{\pi'}{\to} f(x).$$

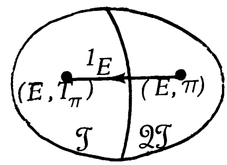
On dit alors aussi que $f : E \to E'$ est quasi-continue pour les quasi-topologies π et π'. On obtient une catégorie $\mathfrak{QT}$ des applications quasi-continues (qu'on appelle aussi catégorie des espaces quasi-topologiques), admettant la classe des espaces quasi-topologiques comme classe d'objets, et un foncteur d'oubli $p_{\mathfrak{QT}}$ de $\mathfrak{QT}$ vers la catégorie $\mathcal{E}ns$ des applications (ou «des ensembles»), lequel est un foncteur d'homomorphismes saturé (c'est-à-dire [12] vérifie les propriétés des foncteurs d'oubli usuels). Les inversibles de $\mathfrak{QT}$ sont dits aussi quasi-homéomorphismes. Toute application constante est quasi-continue.

1.1.5. Si T est une topologie sur l'ensemble E, on peut définir une quasi-topologie π_T sur E en posant $F \in \pi_T(x)$ si, et seulement si, $F \supseteq \mathcal{V}_x$ (filtre des voisinages de x pour T). La correspondance $T \rightsquigarrow \pi_T$ n'identifie pas de topologies (le filtre $\mathcal{V}_x$ étant le plus petit des filtres F tels que $F \underset{\pi_T}{\to} x$). Une application $f : E \to E'$ est continue pour les topologies T et T' si, et seulement si, elle est quasi-continue pour les quasi-topologies π_T et $\pi_{T'}$. On peut donc identifier la catégorie $\mathfrak{T}$ des espaces topologiques avec une sous-catégorie pleine de $\mathfrak{QT}$. Cela donne du sens à des affirmations telles que «cette quasi-topologie *est* une topologie».

1.1.6. Si (E, π) est un espace quasi-topologique, un ensemble $U \subseteq E$ est dit *ouvert* si

$$F \underset{\pi}{\to} x \text{ et } x \in U \Longrightarrow U \in F.$$

Si (E, π) est lui-même topologique, alors les ouverts relativement à cette définition sont précisément les ouverts de la topologie. Dans tous les cas les ouverts de (E, π) sont les ouverts d'une topologie T_π sur E. Un ensemble $A \subseteq E$ est fermé pour la topologie T_π si, et seulement si, pour tout filtre propre F dans A tel que $\iota(F) \underset{\pi}{\to} a$, on a $a \in A$ (où $\iota : A \to E$ est l'injection canonique). (E, T_π) est une projection de (E, π) dans la sous-catégorie $\mathfrak{T}$ de $\mathfrak{QT}$, la projection étant $((E, T_\pi), 1_E, (E, \pi))$. En particulier $T_\pi = \pi$ si, et seulement si, π est une topologie. Si $f : E \to E'$ est quasi-continue de π dans π', alors f est continue de T_π dans $T_{\pi'}$.



1.1.7. Soient les espaces quasi-topologiques (E_i, π_i), l'ensemble E et les applications $f_i : E \to E_i$ $(i \in I)$. Il existe alors sur E une *quasi-topologie initiale* π, c'est-à-dire une quasi-topologie telle que chaque f_i soit quasi-continue pour π et π_i et que, quels que soient l'espace quasi-topologique (E', π') et l'application $f : E' \to E$ telle que chaque $f_i . f$ soit quasi-continue pour π' et π_i, on ait f quasi-continue pour π' et π. La quasi-topologie π est définie par la condition $F \underset{\pi}{\to} x$ si, et seulement si, $f_i(F) \underset{\pi_i}{\to} f_i(x)$ pour tout $i \in I$.

$$\begin{tikzcd} & (E_i, \pi_i) \\ E \arrow[ur, "f_i"] \arrow[dr, "f_j"'] & \\ & (E_j, \pi_j) \end{tikzcd}$$

Si les (E_i, π_i) sont topologiques, la quasi-topologie initiale π est aussi une topologie, et c'est donc la topologie initiale. Remarquons cependant que, si π est la quasi-topologie initiale associée aux quasi-topologies π_i, rien ne nous dit que T_π soit la topologie initiale associée aux topologies T_{π_i} (voir cependant **1.2.4**).

1.1.8. Soient les espaces quasi-topologiques (E_i, π_i), l'ensemble E et les applications $f_i : E_i \to E$ $(i \in I)$. Il existe alors sur E une *quasi-topologie finale* π, c'est-à-dire une quasi-topologie telle que chaque

$$\begin{tikzcd} (E_i, \pi_i) \arrow[dr, "f_i"] & \\ & E \\ (E_j, \pi_j) \arrow[ur, "f_j"'] & \end{tikzcd}$$

f_i soit quasi-continue pour π_i et π et que, quels que soient l'espace quasi-topologique (E', π') et l'application $f : E \to E'$ telle que chaque $f.f_i$ soit quasi-continue pour π_i et π', on ait f quasi-continue pour π et π'.

Pour chaque $x \in E$, $\pi(x)$ est la classe des filtres F tels qu'il existe $F_1 \underset{\pi_{i_1}}{\rightarrow} x_1, F_2 \underset{\pi_{i_2}}{\rightarrow} x_2, \dots, F_k \underset{\pi_{i_k}}{\rightarrow} x_k$ avec $f_{i_j}(x_j) = x$ et

$$F \supseteq x^{\varepsilon} \cap f_{i_1}(F_1) \cap \dots \cap f_{i_k}(F_k) \ (k \geq 0).$$

Si les (E_i, π_i) étaient topologiques, rien ne nous dit que π est topologique (s'il en est ainsi, ce serait évidemment la topologie finale). Par contre si π est la quasi-topologie finale associée aux π_i, alors T_π est la topologie finale associée aux topologies T_{π_i}.

1.1.9. Etant donnés les espaces quasi-topologiques (E_i, π_i) $(i \in I)$, on peut considérer sur l'ensemble produit $E = \prod E_i$ la quasi-topologie π initiale déterminée par les projections canoniques $P_i : E \to E_i$. Alors (E, π) est un produit, dans la catégorie $\mathfrak{Q}\mathfrak{T}$, des (E_i, π_i). La quasi-topologie π peut être aussi définie par la condition $F \underset{\pi}{\rightarrow} x = (x_i)$ si, et seulement si, il existe $F_i \underset{\pi_i}{\rightarrow} x_i$ avec $F \supseteq \prod F_i$. On pose $\pi = \prod \pi_i$.

Etant donnés l'espace quasi-topologique (E, π) et l'ensemble $E' \subseteq E$, on peut considérer l'inclusion $\iota : E' \to E$ et la quasi-topologie π' initiale sur E' correspondante. Alors (E', π') est une $p\mathfrak{Q}\mathfrak{T}$-sous-structure de (E, π). π' peut aussi être définie par la condition $F' \underset{\pi'}{\rightarrow} x$ si, et seulement si, il existe $F \underset{\pi}{\rightarrow} x$ avec $F' \supseteq F/E'$. On pose $\pi' = \pi/E'$.

1.1.10. Soient les espaces quasi-topologiques (E_i, π_i) $(i \in I)$, l'ensemble E, les applications $f_i : E_i \to E$ et π la quasi-topologie finale sur E correspondante. Soient $A \subseteq E$, $A_i = f_i^{-1}(A)$ et $f'_i : A_i \to A$ la restriction de f_i. Alors π/A est la quasi-topologie finale déterminée par les π_i/A_i et les $f'_i : A_i \to A$. (Observons que ce fait n'est pas obligatoirement vrai pour les topologies finales).

DEMONSTRATION. Soit π' la quasi-topologie finale sur A déterminée par les f'_i et les π_i/A_i. Le fait que les $f'_i : A_i \to A$ soient quasi-continues pour π_i/A_i et π/A entraîne que $1_A : \pi' \to \pi/A$ est quasi-continue. On a donc à démontrer que $1_A : \pi/A \to \pi'$ est quasi-continue. Soit $F \underset{\pi/A}{\to} a$; on a (avec $\iota : A \to E$ inclusion) $\iota(F) \underset{\pi}{\to} a$ et il existe donc

$$F_1 \underset{\pi_{i_1}}{\to} a_1, \dots, F_k \underset{\pi_{i_k}}{\to} a_k \ (k \geq 0),$$

avec $f_{i_j}(a_j) = a$ et $\iota(F) \supseteq a^{\varepsilon} \cap f_{i_1}(F_1) \cap \dots \cap f_{i_k}(F_k)$; en tenant compte de l'égalité $f_{i_j}(F_j)/A = f'_{i_j}(F_j/A_{i_j})$ (parce que $f_{i_j}(B \cap A_{i_j}) = f_{i_j}(B) \cap A$) et des relations

$$\begin{aligned} F = \iota(F)/A &\supseteq (a^{\varepsilon} \cap f_{i_1}(F_1) \cap \dots \cap f_{i_k}(F_k))/A = \\ &= a^{\varepsilon}/A \cap f_{i_1}(F_1)/A \cap \dots \cap f_{i_k}(F_k)/A = \\ &= a^{\varepsilon} \cap f'_{i_1}(F_1/A_{i_1}) \cap \dots \cap f'_{i_k}(F_k/A_{i_k}), \end{aligned}$$

avec $F_j/A_{i_j} \xrightarrow[\pi_{i_j}/A_{i_j}]{} a_i$, on en déduit $F \underset{\pi'}{\to} a$.

1.1.11. Etant donnés les espaces quasi-topologiques (E, π) et (E', π'), on peut considérer l'ensemble $Hom(\pi', \pi)$ des applications quasi-continues de (E, π) vers (E', π') et l'application d'évaluation

$$\xi : Hom(\pi', \pi) \times E \to E'$$

définie par $(f, x) \rightsquigarrow f(x)$. Une quasi-topologie λ sur $Hom(\pi', \pi)$ est dite «bonne» si :

1) ξ est quasi-continue pour les quasi-topologies $\lambda \times \pi$ et π'.

2) Etant donnés l'espace quasi-topologique (E'', π'') et l'application $g : E'' \to Hom(\pi', \pi)$ telle que l'application $\tilde{g} : E'' \times E \to E'$ définie par $\tilde{g}(x'', x) = g(x'')(x)$ soit quasi-continue pour $\pi'' \times \pi$ et π', alors g est quasi-continue pour π'' et λ.

Il existe une et une seule «bonne» quasi-topologie λ sur $Hom(\pi', \pi)$, qui est définie par la condition $F \underset{\lambda}{\to} f$ si, et seulement si,

$$G \underset{\pi}{\to} x \Longrightarrow \xi(F \times G) \underset{\pi'}{\to} f(x).$$

On appelle λ la *quasi-topologie de la convergence locale.* En prenant sur les espaces $Hom(\pi'', \pi')$, $Hom(\pi', \pi)$ et $Hom(\pi'', \pi)$ cette quasi-topologie, l'application de composition

$$\eta : Hom(\pi'', \pi') \times Hom(\pi', \pi) \to Hom(\pi'', \pi), \ (g, f) \rightsquigarrow g.f,$$

est quasi-continue. Si (E', π') est topologique et si (E, π) est topologique localement compact et séparé, la quasi-topologie de la convergence locale est une topologie, à savoir la topologie compacte-ouverte.

1.2. Recollement d'espaces quasi-topologiques. Applications quasi-ouvertes.

1.2.1.

PROPOSITION. *Soient les espaces quasi-topologiques (E, π) et (E', π'), soient les ouverts A_i $(i \in I)$ de (E, π) avec $E = \cup A_i$, soit $f : E \to E'$ une application telle que, pour tout i, $f/A_i : A_i \to E'$ soit quasi-continue pour π/A_i et π'. Alors $f : E \to E'$ est quasi-continue pour π et π'.*

DEMONSTRATION. Soit $F \underset{\pi}{\to} x$. Soit $i \in I$ tel que $x \in A_i$; on a $A_i \in F$ (A_i ouvert) donc $F = \iota(F/A_i)$. Comme $F/A_i \xrightarrow[\pi/A_i]{} x$, on trouve

$$f/A_i(F/A_i) \underset{\pi'}{\to} f(x),$$

d'où

$$f(F) = f(\iota(F/A_i)) = f/A_i(F/A_i) \underset{\pi'}{\to} f(x).$$

1.2.2.

PROPOSITION. *Soient les espaces quasi-topologiques (E, π) et (E', π'), soient les fermés $E_1, E_2, \dots, E_n$ de (E, π) avec $E = \cup E_i$, soit $f : E \to E'$ une application telle que $f/E_i : E_i \to E'$ soit quasi-continue pour π/E_i et π', pour tout i. Alors f est quasi-continue pour π et π'.*

DEMONSTRATION. Soit $x \in E$ et $F \in \pi(x)$; on doit démontrer que : $f(F) \in \pi'(f(x))$. Soient $i_1, \dots, i_m$ les indices i tels que $x \in E_i$, soit A la réunion des autres E_i. Comme le complémentaire $\sim A$ de A est ouvert dans π et $x \in \sim A$, on a $\sim A \in F$. Pour chaque $k = 1, \dots, m$, on aura $F/E_{i_k} \in \pi/E_{i_k}(x)$, donc $f/E_{i_k}(F/E_{i_k}) \in \pi'(f(x))$ et

$$f/E_{i_1}(F/E_{i_1}) \cap \dots \cap f/E_{i_m}(F/E_{i_m}) \in \pi'(f(x)).$$

Le résultat sera démontré si on voit que

$$f(F) \supseteq f/E_{i_1}(F/E_{i_1}) \cap \dots \cap f/E_{i_m}(F/E_{i_m}).$$

Mais, si $B \in f/E_{i_1}(F/E_{i_1}) \cap \dots \cap f/E_{i_m}(F/E_{i_m})$ on a

$$B \supseteq f(B_1) \cup \dots \cup f(B_m), \text{ avec } B_k = E_{i_k} \cap A_k,\ A_k \in F,$$

d'où

$$B \supseteq f(B_1 \cup \dots \cup B_m) \supseteq f(A_1 \cap \dots \cap A_m \cap (\sim A)),$$
$$\text{avec } A_1 \cap \dots \cap A_m \cap (\sim A) \in F,$$

ce qui montre que $B \in f(F)$.

1.2.3.

COROLLAIRE. *Soit l'espace quasi-topologique* (E, π), *soient les* $E_i \subseteq E$ $(i \in I)$ *tels que chaque* E_i *soit ouvert ou que chaque* E_i *soit fermé et que* I *soit fini. Alors* π *est la quasi-topologie finale déterminée par les* π / E_i *et les inclusions* $\iota_i : E_i \to E$.

1.2.4.

PROPOSITION. *Soient* (E, π) *un espace quasi-topologique et* $A \subseteq E$ *un ouvert de* π. *Alors la topologie* $T_{(\pi/A)}$ *associée à* π/A *est la restriction à* A *de la topologie* T_π *associée à* π.

DEMONSTRATION. L'application $1_E : \pi \to T_\pi$ est quasi-continue, de sorte que $1_A : \pi/A \to (T_\pi)/A$ est quasi-continue, donc aussi $1_A : T_{(\pi/A)} \to (T_\pi)/A$ est continue (parce que, comme on l'a fait remarquer dans **1.1.6**, $T_{(\pi/A)}$ est une projection de π/A); il nous suffit donc de voir que $1_A : (T_\pi)/A \to T_{(\pi/A)}$ est continue. Or, si B est ouvert dans $T_{(\pi/A)}$, pour chaque $x \in B$ et $F \underset{\pi}{\to} x$, on a $A \in F$ et $F/A \xrightarrow[\pi/A]{} x$, donc $B \in F/A$, c'est-à-dire $B \supseteq C \cap A$, où $C \in F$; ceci entraîne $B \in F$, donc B est ouvert dans T_π; en particulier B est ouvert dans $(T_\pi)/A$.

1.2.5

PROPOSITION. *Soit l'ensemble* E, *les sous-ensembles* $E_i \subseteq E$ $(i \in I)$ *avec* $E = \cup E_i$. *Soient les quasi-topologies* π_i *sur* E_i *telles que, quels que soient* i, j, *on ait* $E_i \cap E_j$ *ouvert dans* π_i *et* π_j *et* $\pi_i / E_i \cap E_j = \pi_j / E_i \cap E_j$. *Alors il existe une et une seule quasi-topologie* π *sur* E *telle que chaque* E_i *soit ouvert dans* π *et que* $\pi_i = \pi / E_i$.

DEMONSTRATION. L'unicité résulte du corollaire antérieur, parce qu'il nous affirme que dans ces conditions π doit être la quasi-topologie finale déterminée par les π_i et les inclusions $\iota_i : E_i \to E$.

Soit π cette quasi-topologie finale. On sait qu'on a $F \underset{\pi}{\to} x$ si, et seulement si, il existe

$$F_1 \xrightarrow[\pi_{i_1}]{} x, \dots, F_n \xrightarrow[\pi_{i_n}]{} x \text{ avec } F \supseteq \iota_{i_1}(F_1) \cap \dots \cap \iota_{i_n}(F_n) \ (n \geq 1)$$

(la considération de x^{ε} n'est pas nécessaire parce que, si $x \in E_i$, on a $x^{\varepsilon} = \iota_i(x^{\varepsilon_i})$ avec $x^{\varepsilon_i} \underset{\pi_i}{\to} x)$. Mais, ayant fixé $x \in E$ et $i \in I$ tel que $x \in E_i$, si $F \underset{\pi_j}{\to} x$ on obtient $E_i \cap E_j \in F$ (parce que $E_i \cap E_j$ ouvert dans π_j), donc $F = \iota_{ji}(F/E_i \cap E_j)$ (avec $\iota_{ji} : E_i \cap E_j \to E_j$ inclusion) et on a $F/E_i \cap E_j \to x$ dans $\pi_j/E_i \cap E_j = \pi_i/E_i \cap E_j$; par suite, $\iota_{ij}(F/E_i \cap E_j) \underset{\pi_i}{\to} x$ avec

$$\iota_i(\iota_{ij}(F/E_i \cap E_j)) = \iota_j(\iota_{ji}(F/E_i \cap E_j)) = \iota_j(F).$$

On en déduit que $F \underset{\pi}{\to} x$ si, et seulement si, il existe $F_1 \underset{\pi_i}{\to} x, \dots, F_n \underset{\pi_i}{\to} x$ avec

$$F \supseteq \iota_i(F_1) \cap \dots \cap \iota_i(F_n) = \iota_i(F_1 \cap \dots \cap F_n),$$

ou encore si, et seulement si, $F \supseteq \iota_i(F')$ avec $F' \underset{\pi_i}{\to} x$. On a ainsi $E_i \in \iota_i(F') \subseteq F$, ce qui montre que E_i est ouvert dans π. Enfin, si $F' \underset{\pi_i}{\to} x$, on a $\iota_i(F') \underset{\pi}{\to} x$ et, si $\hat{F}'$ est un filtre dans E_i tel que $\iota_i(\hat{F}') \underset{\pi}{\to} x$, on aura $\iota_i(\hat{F}') \supseteq \iota_i(F'')$ avec $F'' \underset{\pi_i}{\to} x$, d'où

$$F' = \iota_i(\hat{F}')/E_i \supseteq \iota_i(F'')/E_i = F'',$$

$F' \underset{\pi_i}{\to} x$, ce qui montre que $\pi_i = \pi/E_i$.

1.2.6.

DEFINITION. Quand les π_i obéissent aux conditions de compatibilité de l'énoncé antérieur, on dit que ces quasi-topologies *se raccordent* et la quasi-topologie π sur E est dite un *recollement des* π_i.

1.2.7.

REMARQUE. Les deux propositions antérieures constituent l'essentiel du fait que les quasi-topologies constituent une espèce de structures locales complète (voir [7]), les éléments induits par la quasi-topologie π étant les π/E_i, où E_i est un ouvert de π.

1.2.8.

DEFINITION. Soient les espaces quasi-topologiques (E, π) et (E', π')

et l'application $f : E \to E'$. On dit que f est quasi-ouverte si, pour tout $x \in E$ et tout $F' \in \pi'(f(x))$, il existe $F \in \pi(x)$ avec $f(F) \subseteq F'$.

1.2.9.

COROLLAIRE. *Un quasi-homéomorphisme est une application quasi-ouverte.*

1.2.10.

PROPOSITION. *Si $f : (E, \pi) \to (E', \pi')$ est quasi-ouverte, alors f est ouverte pour les topologies T_π et $T_{\pi'}$.*

DEMONSTRATION. Soit U un ouvert de π et soient $y \in f(U)$, $y = f(x)$, $x \in U$ et $G \in \pi'(y)$. Si $F \in \pi(x)$ avec $f(F) \subseteq G$, on a $U \in F$, donc $f(U) \in f(F) \subseteq G$, ce qui montre que $f(U)$ est ouvert dans π'.

1.2.11.

PROPOSITION. *Si (E, π) et (E', π') sont topologiques, alors $f : E \to E'$ est quasi-ouverte si, et seulement si, elle est ouverte.*

DEMONSTRATION. Si f est quasi-ouverte, la proposition antérieure montre que f est ouverte. Supposons donc f ouverte. Etant donné $x \in E$, et notant $\mathcal{V}_x$, $\mathcal{V}'_{f(x)}$ les filtres des voisinages, on aura $f(\mathcal{V}_x) \subseteq \mathcal{V}'_{f(x)}$ (si $B \in f(\mathcal{V}_x)$, alors $B \supseteq f(A)$ avec A ouvert contenant x, donc $f(A)$ est un ouvert contenant $f(x)$, $f(A) \in \mathcal{V}'_{f(x)}$, $B \in \mathcal{V}'_{f(x)}$) et, si $F' \underset{\pi'}{\to} f(x)$, on a : $F' \supseteq \mathcal{V}'_{f(x)} \supseteq f(\mathcal{V}_x)$ avec $\mathcal{V}_x \underset{\pi}{\to} x$.

1.2.12.

PROPOSITION. *Soient les espaces quasi-topologiques (E, π) et (E', π') et $f : E \to E'$ une surjection qui soit quasi-continue et quasi-ouverte pour π et π'. Alors π' est la quasi-topologie finale déterminée par f et π.*

DEMONSTRATION. Soit (E'', π'') un espace quasi-topologique et soit $g : E' \to E''$ une application telle que $g.f : E \to E''$ soit quasi-continue pour π et π''. Etant donné $x \in E'$ et $F \in \pi'(x)$, soit $y \in E$ avec $x = f(y)$, et soit $G \in \pi(y)$ avec $f(G) \subseteq F$. On a

$$g.f(G) \in \pi''(g.f(y)) = \pi''(g(x)) \text{ et } g(F) \supseteq g(f(G)) = g.f(G),$$

donc $g(F) \in \pi''(g(x))$, et g est quasi-continue pour π' et π''.

1.2.13.

PROPOSITION. *Si* $f:(E,\pi)\to(E',\pi')$ *et* $g:(E',\pi')\to(E'',\pi'')$ *sont quasi-ouvertes,* $g.f:(E,\pi)\to(E'',\pi'')$ *est aussi quasi-ouverte.*

1.2.14.

PROPOSITION. *Si* (E,π) *est un espace quasi-topologique, si* $A\subseteq E$ *et si* $\iota: A\to E$ *est l'inclusion, alors* ι *est quasi-ouverte pour* π/A *et* π *si, et seulement si,* A *est un ouvert de* π.

DEMONSTRATION. Si A est ouvert et si $x\in A$ et $F \underset{\pi}{\to} x$, on obtient $A\in F$, donc $F=\iota(F/A)$ avec $F/A \underset{\pi/A}{\to} x$ et ι est quasi-ouverte. Si ι est quasi-ouverte, si $F\underset{\pi}{\to} x$ et $x\in A$, on montre qu'il existe $F' \underset{\pi/A}{\longrightarrow} x$ avec $\iota(F')\subseteq F$, donc $A\in F$, ce qui montre que A est ouvert.

1.2.15.

PROPOSITION. *Soient les espaces quasi-topologiques* (E,π), (E',π') *et l'application quasi-ouverte* $f: E\to E'$. *Soit* $A'\subseteq E'$ *tel que* $f(E)\subseteq A'$. *Alors la restriction* $f': E\to A'$ *de* f *est quasi-ouverte pour* π *et* π'/A'.

DEMONSTRATION. Etant donné $x\in E$ et $F' \underset{\pi'/A'}{\longrightarrow} f'(x)=f(x)$, on a $\iota(F')\underset{\pi'}{\to} f(x)$ et il existe donc $F\underset{\pi}{\to} x$ tel que $\iota . f'(F)=f(F)\subseteq \iota(F')$; comme ceci entraîne $f'(F)\subseteq F'$, on en déduit que f' est quasi-ouverte pour π et π'/A'.

1.2.16.

PROPOSITION. *Soient les espaces quasi-topologiques* (E,π) *et* (E',π') *et l'application* $f: E\to E'$ *telle que, pour tout* $x\in E$, *il existe* $A\subseteq E$ *avec* $x\in A$ *et* $f/A: A\to E'$ *quasi-ouverte pour* π/A *et* π'. *Alors* f *est quasi-ouverte pour* π *et* π'.

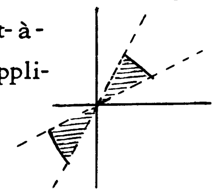
DEMONSTRATION. Etant donné $x\in E$ et $F'\in\pi'(f(x))$, soit $A\subseteq E$ avec $x\in A$ et $f/A: A\to E'$ quasi-ouverte pour π/A et π'. Il existe $F \underset{\pi/A}{\longrightarrow} x$ avec $f/A(F)\subseteq F'$ et alors $\iota(F)\underset{\pi}{\to} x$ avec $f(\iota(F))=f/A(F)\subseteq F'$, ce qui montre que f est quasi-ouverte pour π et π'.

2. La quasi-topologie π_V sur $\mathbf{C}\times V$ associée à la variété analytique complexe V.

2.1. Les quasi-topologies π_n *sur* $\mathbf{C}\times\mathbf{C}^n$.

2.1.1.

DEFINITION. Pour tout $\vec{a} \in \mathbf{C}^n$, $\vec{a} \neq \vec{0}$, soit $\mathcal{O}_{\vec{a}}$ le filtre des voisinages de $\vec{a}$ dans la topologie canonique de $\mathbf{C}^n$; soit $\mathbf{V}$ le filtre des voisinages de 0 dans $\mathbf{C}$. On représente par $F_{\vec{a}}$ le filtre $\mathbf{V}\mathcal{O}_{\vec{a}}$ (c'est-à-dire le filtre image du filtre $\mathbf{V} \times \mathcal{O}_{\vec{a}}$ sur $\mathbf{C} \times \mathbf{C}^n$ par l'application $\mathbf{C} \times \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$, $(\lambda, \vec{x}) \rightsquigarrow \lambda\vec{x}$).



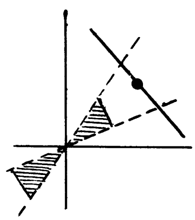
2.1.2.

PROPOSITION. *Chaque $F_{\vec{a}}$ a zéro pour limite dans la topologie canonique de $\mathbf{C}^n$.*

DEMONSTRATION. Cela résulte de la continuité de l'application: $\mathbf{C} \times \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$, $(\lambda, \vec{x}) \rightsquigarrow \lambda\vec{x}$, parce que $\mathbf{V} \to 0$ et $\mathcal{O}_{\vec{a}} \to \vec{a}$.

2.1.3.

REMARQUE. Intuitivement, dire que $\vec{x} \neq \vec{0}$ de $\mathbf{C}^n$ appartient à un petit ensemble de $F_{\vec{a}}$ signifie qu'il est voisin de zéro et que la droite complexe définie par $\vec{x}$ est voisine de celle définie par $\vec{a}$.



2.1.4.

LEMME. *Etant donné $\vec{a} \neq \vec{0}$ dans $\mathbf{C}^n$ et un hyperplan (affine complexe) r passant par $\vec{a}$ et non par $\vec{0}$, si $\mathcal{O}'_{\vec{a}}$ est le filtre des voisinages de $\vec{a}$ dans r, on a $F_{\vec{a}} = \mathbf{V}\mathcal{O}'_{\vec{a}}$.*

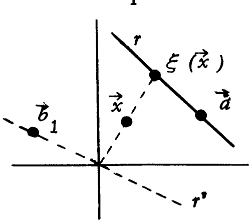
DEMONSTRATION. Si $A \in F_{\vec{a}} = \mathbf{V}\mathcal{O}_{\vec{a}}$, il existe $V \in \mathcal{O}_{\vec{a}}$ et $\delta > 0$ avec $I_\delta V \subseteq A$ (on posera toujours $I_\delta = \{\lambda \in \mathbf{C} / |\lambda| \leq \delta\}$); donc, avec $V' = V \cap r \in \mathcal{O}'_{\vec{a}}$, on a $I_\delta V' \subseteq A$, d'où $A \in \mathbf{V}\mathcal{O}'_{\vec{a}}$.

Supposons réciproquement $A \in \mathbf{V}\mathcal{O}'_{\vec{a}}$, c'est-à-dire $A \supseteq I_\delta V'$, $\delta > 0$, $V' \in \mathcal{O}'_{\vec{a}}$. Soit $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_{n-1}$ une base de l'espace vectoriel associé à r, où $\vec{b}_i = (b_{i,1}, \dots, b_{i,n})$. Soit r' l'hyperplan parallèle à r passant par l'origine. Si $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \notin r'$, il existe un et un seul $\lambda \in \mathbf{C}$ (appelons-le $\lambda_{\vec{x}}$) tel que $\lambda\vec{x} \in r$, à savoir celui déterminé par la condition qu'il existe $t_1, \dots, t_{n-1}$ dans $\mathbf{C}$ avec

$$\lambda\vec{x} = \vec{a} + t_1\vec{b}_1 + \dots + t_{n-1}\vec{b}_{n-1},$$

c'est-à-dire

$$\lambda x_i - t_1 b_{1i} - t_2 b_{2i} - \dots - t_{n-1} b_{n-1,i} = a_i;$$



par suite

$$\lambda_{\vec x} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 b_{1,1} \cdots b_{n-1,1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_n b_{1,n} \cdots b_{n-1,n} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 b_{1,1} \cdots b_{n-1,1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n b_{1,n} \cdots b_{n-1,n} \end{vmatrix}}$$

(le dénominateur est différent de zéro parce que $\vec x \notin r'$). On pose maintenant $\xi(\vec x) = \lambda_{\vec x}\vec x$ pour $\vec x \notin r'$, obtenant ainsi une fonction continue ξ: $\mathbf{C}^n - r' \to r$; comme $\mathbf{C}^n - r'$ est ouvert dans $\mathbf{C}^n$, il existe $V \in \mathcal{O}_{\vec a}$ tel que, pour $\vec x \in V$, on ait $|\lambda_{\vec x}| > \frac{1}{2}$ et $\xi(\vec x) \in V'$, et on obtient alors $I_\delta V' \supseteq I_{\delta/2} V$ (si $|\mu| \leq \delta/2$ et $\vec x \in V$, on a $\mu\vec x = \frac{\mu}{\lambda_{\vec x}}\, \xi(\vec x)$ avec $\left|\frac{\mu}{\lambda_{\vec x}}\right| = \frac{|\mu|}{|\lambda_{\vec x}|} \leq \delta$) ce qui nous montre que $A \in \mathbf{V}\mathcal{O}_{\vec a}$.

2.1.5.

LEMME. *Etant donnés $\vec a$ et $\vec b$ dans $\mathbf{C}^n - \{\vec 0\}$ on a :*

1) Si $\vec a$ et $\vec b$ appartiennent à une même droite, $F_{\vec a} = F_{\vec b}$.

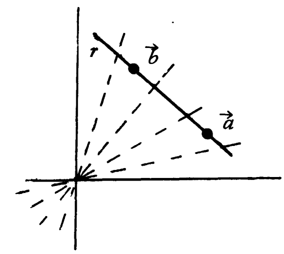
2) Sinon, il existe $A \in F_{\vec a}$ et $B \in F_{\vec b}$ avec $A \cap B = \{\vec 0\}$.

DEMONSTRATION.

1) On a $\vec a = \lambda \vec b$ avec $\lambda \neq 0$, donc $\mathcal{O}_{\vec a} = \lambda\,\mathcal{O}_{\vec b}$, car $\vec x \rightsquigarrow \lambda\,\vec x$ est un homéomorphisme; par suite

$$F_{\vec a} = \mathbf{V}\mathcal{O}_{\vec a} = \mathbf{V}\lambda\,\mathcal{O}_{\vec b} = \mathbf{V}\mathcal{O}_{\vec b} = F_{\vec b} \quad (\lambda\mathbf{V} = \mathbf{V}).$$

2) Soit r un hyperplan (affine) contenant $\vec a$ et $\vec b$ mais pas $\vec 0$ (il suffit de compléter le système de deux vecteurs indépendants $\vec a$ et $\vec b - \vec a$ dans une base $\vec a, \vec b - \vec a, \vec e_3, \ldots, \vec e_n$ de $\mathbf{C}^n$ et de prendre pour r l'hyperplan passant par $\vec a$ et dont le sous-espace vectoriel associé est engendré par $\vec b - \vec a, \vec e_3, \ldots, \vec e_n$).



Soient $V \in \mathcal{O}'_{\vec a}$ et $V' \in \mathcal{O}'_{\vec b}$ avec $V \cap V' = \emptyset$; on a alors $\mathbf{C}V \cap \mathbf{C}V' = \{\vec 0\}$ (si on avait $\lambda\vec x = \lambda'\vec y$ avec $\lambda, \lambda' \neq 0$ et $\vec x \neq \vec y$ dans r, on aurait $\vec x = \frac{\lambda'}{\lambda}\vec y$, donc $\vec 0 = \vec y + \frac{\lambda}{\lambda - \lambda'}(\vec x - \vec y) \in r$, ce qui est absurde), où $\mathbf{C}\, V \in \mathbf{V}\mathcal{O}'_{\vec{a}} = F_{\vec{a}}$, $\mathbf{C}\, V' \in \mathbf{V}\mathcal{O}'_{\vec{b}} = F_{\vec{b}}$.

2.1.6.

PROPOSITION. *Soit* $\pi_n(0,\vec{0})$ $(n \geq 0)$ *la classe des filtres* F *sur* $\mathbf{C} \times \mathbf{C}^n$ *tels qu'il existe des points* $(\lambda_1, \vec{a}_1), \dots, (\lambda_n, \vec{a}_n) \in \mathbf{C} \times \mathbf{C}^n$ *avec* $\lambda_i \neq 0$ *et* $F \supseteq F_{(\lambda_1, \vec{a}_1)} \cap \dots \cap F_{(\lambda_n, \vec{a}_n)}$. *Pour chaque* $(\lambda, \vec{a}) \in \mathbf{C} \times \mathbf{C}^n$, *soit* $\pi_n(\lambda, \vec{a})$ *la classe des filtres* $(\lambda, \vec{a}) + F$, *pour* $F \in \pi_n(0,\vec{0})$. *Alors* π_n *est une quasi-topologie sur* $\mathbf{C} \times \mathbf{C}^n$, *les translations de* $\mathbf{C} \times \mathbf{C}^n$ *étant des quasi-homéomorphismes.*

DEMONSTRATION. Le fait qu'on ait $F_{(\lambda,\vec{a})} \subseteq (0,\vec{0})^{\varepsilon}$ entraîne que $(0,\vec{0})^{\varepsilon} \in \pi_n(0,\vec{0})$ et on vérifie immédiatement que, si F et G appartiennent à $\pi_n(0,\vec{0})$, $F \cap G$ y appartient aussi, et que, si $F \in \pi_n(0,\vec{0})$ et $G \supseteq F$, alors $G \in \pi_n(0,\vec{0})$. Par translation on voit que ces propriétés se vérifient pour les $\pi_n(\lambda, \vec{a})$; on a donc bien une quasi-topologie π_n sur $\mathbf{C} \times \mathbf{C}^n$. Le fait que les translations soient des quasi-homéomorphismes est immédiat.

2.1.7.

REMARQUE. Tout filtre $F_{(\lambda,\vec{a})}$ avec $\lambda \neq 0$ peut se mettre sous la forme $F_{(1,\vec{b})}$. Il suffit de prendre $\vec{b} = \vec{a}/\lambda$ et de tenir compte de **2.1.5.**

2.1.8.

DEFINITION. On fixe la notation π_n pour la quasi-topologie sur $\mathbf{C} \times \mathbf{C}^n$ de la proposition antérieure.

2.1.9.

COROLLAIRE. *Si* T_{n+1} *est la topologie canonique de* $\mathbf{C} \times \mathbf{C}^n$, *on a l'application quasi-continue* $1_{\mathbf{C} \times \mathbf{C}^n} : \pi_n \to T_{n+1}$.

DEMONSTRATION. Cela résulte de **2.1.2.** parce que les translations sont des quasi-homéomorphismes pour les deux membres.

2.1.10.

PROPOSITION. *Soit* $q_n : \mathbf{C} \times \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$ *l'application* $(\lambda, \vec{x}) \rightsquigarrow \vec{x}$; *alors* q_n *est quasi-continue et quasi-ouverte pour la quasi-topologie* π_n *de* $\mathbf{C} \times \mathbf{C}^n$ *et la topologie canonique* T_n *de* $\mathbf{C}^n$.

DEMONSTRATION. q_n est continue pour T_{n+1} et T_n donc, par **2.1.9**,

q_n est quasi-continue pour π_n et T_n. Pour voir que q_n est quasi-ouverte il suffit, raisonnant par translation, de montrer que, si $F \to \vec{0}$ dans T_n, il existe $F' \to (0, \vec{0})$ dans π_n avec $q_n(F') \subseteq F$. Cela se vérifie si l'on voit que $q_n(F_{(1,\vec{0})}) \subseteq \mathcal{V}_{\vec{0}}$. Or, si $A \in q_n(F_{(1,\vec{0})})$, il existe $\delta > 0$ avec $A \supseteq q_n(I_\delta V_\delta(1, \vec{0}))$ (où $V_\delta(1,\vec{0})$ est la boule de centre $(1,\vec{0})$ et rayon δ) et alors, si $\|\vec{x}\| < \delta^2$, on a $\vec{x} = q_n(\delta, \vec{x})$ avec $(\delta, \vec{x}) = \delta(1, \frac{\vec{x}}{\delta})$, $\delta \in I_\delta$, $\|\frac{\vec{x}}{\delta}\| < \delta$, donc $(1, \frac{\vec{x}}{\delta}) \in V_\delta(1, \vec{0})$ (on suppose que la norme de $\mathbf{C} \times \mathbf{C}^n$ est, par exemple, $\|(\lambda, \vec{x})\| = max(|\lambda|, \|\vec{x}\|)$), d'où $\vec{x} \in \vec{A}$, ce qui montre que $A \in \mathcal{V}_{\vec{0}}$.

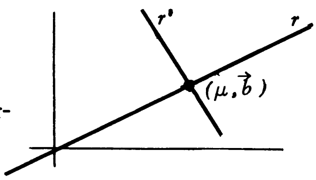
2.1.11.

COROLLAIRE. *La topologie T_n de $\mathbf{C}^n$ est la quasi-topologie finale déterminée par q_n et la quasi-topologie π_n de $\mathbf{C} \times \mathbf{C}^n$.*

2.1.12.

PROPOSITION. *Si r est une droite (affine) non verticale de $\mathbf{C} \times \mathbf{C}^n$ (c'est-à-dire qui n'est contenue dans aucun $\{\lambda\} \times \mathbf{C}^n$), on a $\pi_n/r = T_{n+1}/r$.*

DEMONSTRATION. Par **2.1.9** on obtient que $1_r : \pi_n/r \to T_{n+1}/r$ est quasi-continue, et il nous suffit de voir que, si F converge vers $(\lambda, \vec{a})$ dans T_{n+1}/r, F converge aussi vers $(\lambda, \vec{a})$ dans π_n/r, ou encore que $\mathcal{V}_{(\lambda,\vec{a})}/r$ converge vers $(\lambda, \vec{a})$ dans π_n/r. En raisonnant par translation on se ramène au cas où $(\lambda, \vec{a}) = (0, \vec{0})$. On considère alors $(\mu, \vec{b}) \neq (0, \vec{0})$ dans r (donc $\mu \neq 0$, sans quoi r serait verticale) et un hyperplan r' passant par $(\mu, \vec{b})$ et non par l'origine (par exemple l'hyperplan vertical) ; d'après **2.1.4**, si $\mathcal{V}'_{(\mu,\vec{b})}$ est le filtre des voisinages de $(\mu, \vec{b})$ dans r', on a $F_{(\mu,\vec{b})} = \mathbf{V}\mathcal{V}'_{(\mu,\vec{b})}$, d'où résulte $F_{(\mu,\vec{b})}/r = \mathbf{V}(\mu, \vec{b})$ $(I_\delta V' \cap r = I_\delta(\mu, \vec{b})$ pour $V' \in \mathcal{V}'_{(\mu,\vec{b})})$ parce que, si $(\mu', \vec{b}') \in r'$ avec $(\mu', \vec{b}') \neq (\mu, \vec{b})$, on a $(\mu', \vec{b}') \notin r$, sans quoi $r \subseteq r'$ et r' passerait par l'origine, et donc $\lambda(\mu', \vec{b}') \notin r$ pour $\lambda \neq 0$).



Mais, en tenant compte de l'homéomorphisme $\mathbf{C} \to T_{n+1}/r$, $\lambda \rightsquigarrow \lambda(\mu, \vec{b})$, on voit que $\mathbf{V}(\mu, \vec{b})$ est le filtre des voisinages de $(0, \vec{0})$ dans T_{n+1}/r et donc celui-ci va converger vers $(0, \vec{0})$ dans π_n/r.

2.1.13.

PROPOSITION. *L'application* $q'_n : \mathbf{C} \times \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}$, $(\lambda, \vec{x}) \rightsquigarrow \lambda$, *est quasi-continue pour* π_n *et* T_1.

DEMONSTRATION. q'_n est continue pour T_{n+1} et T_1 et donc, en tenant compte de **2.1.9**, q'_n est quasi-continue pour π_n et T_1.

2.1.14.

PROPOSITION. *Pour chaque* $\vec{a} \in \mathbf{C}^n$, *l'application* $q_{\vec{a}} : \mathbf{C} \to \mathbf{C} \times \mathbf{C}^n$, $\lambda \rightsquigarrow (\lambda, \vec{a})$, *est quasi-continue pour* T_1 *et* π_n.

DEMONSTRATION. Si r est la droite horizontale $\mathbf{C} \times \{\vec{a}\}$, il suffit de voir que $q_{\vec{a}}$ est quasi-continue pour T_1 et π_n / r, ce qui est vrai, en tenant compte de **2.1.12**, parce que $q_{\vec{a}}$ est continue pour T_1 et T_{n+1}.

2.2. Rapport des quasi-topologies π_n *avec les fonctions holomorphes d'un ouvert* U_m *de* $\mathbf{C}^m$ *dans* $\mathbf{C}^n$.

2.2.1.

PROPOSITION. *Soit* U_m *un ouvert de* $\mathbf{C}^m$ *et* $f : U_m \to \mathbf{C}^n$ *une fonction holomorphe. Alors l'application associée* $\bar{f} = 1_{\mathbf{C}} \times f : \mathbf{C} \times U_m \to \mathbf{C} \times \mathbf{C}^n$ *est quasi-continue pour* $\pi_m / \mathbf{C} \times U_m$ *et* π_n.

DEMONSTRATION. Pour chaque $(\lambda_o, \vec{x}_o) \in \mathbf{C} \times U_m$, on doit voir que $\bar{f}$ est quasi-continue en $(\lambda_o, \vec{x}_o)$. Utilisant une translation, on peut déjà supposer que $\vec{x}_o = \vec{0}$, $f(\vec{x}_o) = \vec{0}$ et $\lambda_o = 0$; en effet, si $g : U_m - \vec{x}_o \to \mathbf{C}^n$ associe, à $\vec{x}$, $f(\vec{x}_o + \vec{x}) - f(\vec{x}_o)$, on a $g(\vec{0}) = \vec{0}$ et g est différentiable en $\vec{0}$ si, et seulement si, f est différentiable en $\vec{x}_o$; or $\bar{g}$ est obtenue à partir de $\bar{f}$ par composition avec des translations convenables à gauche et à droite. Soit A la dérivée de f en $\vec{0}$ (qui est une application linéaire: $\mathbf{C}^m \to \mathbf{C}^n$); on a

$$f(\vec{x}) = A\vec{x} + \omega(\vec{x}), \text{ avec } \frac{\|\omega(\vec{x})\|}{\|\vec{x}\|} \xrightarrow[\|\vec{x}\| \to 0]{} 0 .$$

On va voir que, pour chaque $\vec{b} \in \mathbf{C}^m$, on a $\bar{f}(F_{(1,\vec{b})} / \mathbf{C} \times U_m) \supseteq F_{(1,A\vec{b})}$.

Compte tenu de **2.1.4**, on a

$$F_{(1,\vec{b})} = \mathbf{V}\mathcal{O}'_{(1,\vec{b})} \text{ et } F_{(1,A\vec{b})} = \mathbf{V}\mathcal{O}'_{(1,A\vec{b})},$$

où les $\mathcal{O}'_{\vec{y}}$ sont les filtres des voisinages dans les hyperplans verticaux d'abcisse 1. Si $X \in F_{(1,A\vec{b})}$, alors $X \supseteq I_{\delta}(\{1\} \times V)$, $\delta>0$, $V \in \mathcal{V}_{A\vec{b}}$ et, si $\lambda \neq 0$, on a

$$\overline{f}(\lambda, \vec{x}) = (\lambda, f(\vec{x})) = \lambda(1, A\frac{\vec{x}}{\lambda} + \frac{\omega(\vec{x})}{\lambda}).$$

Il existe $V' \in \mathcal{V}_{A\vec{b}}$ et $\delta' > 0$ tels que

$$A\frac{\vec{x}}{\lambda} + \frac{\omega(\vec{x})}{\lambda} \in V \text{ si } A\frac{\vec{x}}{\lambda} \in V' \text{ et } \frac{\|\omega(\vec{x})\|}{|\lambda|} < \delta'.$$

Il existe maintenant $W \in \mathcal{V}_{\vec{b}}$ tel que $A\frac{\vec{x}}{\lambda} \in V'$ si $\frac{\vec{x}}{\lambda} \in W$, et on suppose déjà $\|\vec{y}\| < M$ pour tout $\vec{y} \in W$, où

$$M = 1 \text{ si } \vec{b} = 0 \text{ et } M = 2\,\|\vec{b}\| \text{ si } \vec{b} \neq 0;$$

il existe aussi $\delta'' > 0$ tel que, pour $0 < \|\vec{x}\| < \delta''$, on ait $\frac{\|\omega(\vec{x})\|}{\|\vec{x}\|} < \delta'/M$, et enfin on peut choisir $\varepsilon > 0$ vérifiant $\varepsilon < \delta$ tel que, pour $|\lambda| \leq \varepsilon$ et $\frac{\vec{x}}{\lambda} \in W$, on ait $\|\vec{x}\| < \delta''$ (il suffit de choisir $\varepsilon < min(\delta, \delta''/M)$). Si $(\lambda, \vec{x}) \in I_{\varepsilon}(\{1\} \times W)$ deux cas se présentent : ou bien $\lambda = 0$ et on a $\vec{x} = 0$, donc

$$\overline{f}(\lambda,\vec{x}) = (\lambda, f(\vec{x})) = (0, \vec{0}) \in X;$$

ou bien $\lambda \neq 0$ et on obtient $|\lambda| \leq \varepsilon$, $\frac{\vec{x}}{\lambda} \in W$ $((\lambda\,\vec{x}) = \lambda(1, \frac{\vec{x}}{\lambda}))$, donc

$$\frac{\|\omega(\vec{x})\|}{|\lambda|} = \frac{\|\omega(\vec{x})\|}{\|\vec{x}\|}\frac{\|\vec{x}\|}{|\lambda|} < \frac{\delta'}{M} M = \delta'$$

(si $\vec{x} \neq 0$, mais $\frac{\|\omega(\vec{x})\|}{\lambda} = 0 < \delta'$ si $\vec{x} = 0$), et par suite

$$\overline{f}(\lambda, \vec{x}) \in I_{\delta}(\{1\} \times V) \subseteq X.$$

on a ainsi montré que $\overline{f}(I_{\varepsilon}(\{1\} \times W)) \subseteq X$; il s'ensuit $X \in \overline{f}(F_{(1,\vec{b})}/\mathbf{C} \times U_m)$, d'où $F_{(1,A\vec{b})} \subseteq \overline{f}(F_{(1,\vec{b})}/\mathbf{C} \times U_m)$ comme on le voulait.

On obtient maintenant, si $F \xrightarrow[\pi_m/\mathbf{C}\times U_m]{} (0,\vec{0})$,

$$\begin{aligned} F &\supseteq (F_{(1,\vec{b}_1)} \cap \dots \cap F_{(1,\vec{b}_k)})/\mathbf{C} \times U_m = \\ &= F_{(1,\vec{b}_1)}/\mathbf{C}\times U_m \cap \dots \cap F_{(1,\vec{b}_k)}/\mathbf{C}\times U_m, \end{aligned}$$

donc

$$\overline{f}(F) \supseteq \overline{f}(F_{(1,\vec{b}_1)}/\mathbf{C}\times U_m \cap \dots \cap F_{(1,\vec{b}_k)}/\mathbf{C}\times U_m) =$$

$$\overline{f}(F_{(1,\vec{b}_1)}/\mathbf{C}\times U_m) \cap \dots \cap \overline{f}(F_{(1,\vec{b}_k)}/\mathbf{C}\times U_m) \supseteq F_{(1,A\vec{b}_1)} \cap \dots \cap F_{(1,A\vec{b}_k)}.$$

Ceci montre $\overline{f}(F) \xrightarrow[\pi_n]{} (0,\vec{0})$, c'est-à-dire la quasi-continuité désirée. (On a utilisé les propriétés suivantes des filtres : Si $f : E \to E'$ est une application et $E'' \subseteq E$, si F et G sont des filtres sur E, on a $f(F \cap G) = f(F) \cap f(G)$ et $(F \cap G)/E'' = F/E'' \cap G/E''$. Ces propriétés résultent du fait qu'on a $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$, $(A \cup B) \cap E'' = (A \cap E'') \cup (B \cap E'')$).

2.2.2.

PROPOSITION. *Soit U_m un ouvert de $\mathbf{C}^m$ et $f : U_m \to \mathbf{C}^n$ une application telle que l'associée $\bar{f} = 1_{\mathbf{C}} \times f : \mathbf{C} \times U_m \to \mathbf{C} \times \mathbf{C}^n$ soit quasi-continue pour $\pi_m/\mathbf{C} \times U_m$ et π_n. Alors f est holomorphe.*

DEMONSTRATION. $q_m : \mathbf{C} \times \mathbf{C}^m \to \mathbf{C}^m$ étant (**2.1.10**) quasi-continue et quasi-ouverte pour π_m et T_m, on déduit de **1.2.14**, **1.2.13** et **1.2.15**, que $q_m/\mathbf{C} \times U_m : \mathbf{C} \times U_m \to U_m$ est quasi-continue et quasi-ouverte ($\mathbf{C} \times U_m$ étant ouvert dans T_{m+1}, il est ouvert dans π_m d'après **2.1.9**); donc T_m/U_m est la quasi-topologie finale déterminée par $q_m/\mathbf{C} \times U_m$ et $\pi_m/\mathbf{C} \times U_m$ (**1.2.12**). Puisque $f . q_m/\mathbf{C} \times U_m = q_n . \bar{f}$ est quasi-continue pour $\pi_m/\mathbf{C} \times U_m$ et T_n, il en résulte que $f : U_m \to \mathbf{C}^n$ est continue pour les topologies canoniques.

$$\begin{tikzcd} \mathbf{C} \times U_m \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[d, "q_m/\mathbf{C}\times U_m"'] & \mathbf{C} \times \mathbf{C}^n \arrow[d, "q_n"] \\ U_m \arrow[r, "f"] & \mathbf{C}^n \end{tikzcd}$$

On sait maintenant, d'après la théorie des fonctions analytiques de variables complexes que, pour voir que f est holomorphe, il nous suffit de voir que f admet des dérivées partielles par rapport à chaque variable dans $\mathbf{C}$ pour tout $\vec{x}_o \in U_m$. En raisonnant comme dans la démonstration de la proposition antérieure, on voit qu'on peut supposer $\vec{x}_o = \vec{0}$ et $f(\vec{x}_o) = \vec{0}$. On va voir plus généralement que f admet en $\vec{0}$ des dérivées dans la direction de n'importe quel $\vec{b} \in \mathbf{C}^m$. En effet, on a

$$F_{(1,\vec{b})}/\mathbf{C} \times U_m \xrightarrow[\pi_m/\mathbf{C} \times U_m]{} (0, \vec{0}),$$

donc $\bar{f}(F_{(1,\vec{b})}/\mathbf{C} \times U_m) \xrightarrow[\pi_n]{} (0, \vec{0})$ et par suite

$$\bar{f}(F_{(1,\vec{b})}/\mathbf{C} \times U_m) \supseteq F_{(1,\vec{b}_1)} \cap \cdots \cap F_{(1,\vec{b}_k)}$$

avec les $\vec{b}_i$ supposés déjà tous différents. Par induction à partir de la proposition **2.1.5**, on voit qu'il existe

$$A_1 \in F_{(1,\vec{b}_1)}, \dots, A_k \in F_{(1,\vec{b}_k)} \text{ avec } A_i \cap A_j = \{(0, \vec{0})\} \text{ si } i \neq j,$$

les A_i pouvant en outre être choisis de façon que les $A_i - \{(0,\vec{0})\}$ soient ouverts dans T_{n+1} (si V est un ouvert contenant $(1,\vec{b}_i)$ et non $(0,\vec{0})$ et si $\delta > 0$, on a λV ouvert pour chaque $\lambda \neq 0$, donc $I_\delta V - \{(0,\vec{0})\} = = \bigcup_{0<\lambda\leq\delta} \lambda V$ est ouvert). On a

$$A_1 \cup \ldots \cup A_k \in F_{(1,\vec{b}_1)} \cap \ldots \cap F_{(1,\vec{b}_k)}$$

et il existe donc ($\mathbf{C} \times U_m$ étant ouvert dans π_m, il appartient à $F_{(1,\vec{b})}$)

$$A \in F_{(1,\vec{b})},\ A \subseteq \mathbf{C} \times U_m,\ \text{avec } \overline{f}(A) \subseteq A_1 \cup \ldots \cup A'_k.$$

On peut déjà supposer $A - \{(0,\vec{0})\}$ connexe dans T_{m+1} et $A \cap (\{0\} \times \mathbf{C}^m) = = \{(0,\vec{0})\}$, car, si V est un ouvert connexe de T_{m+1} contenant $(1,\vec{b})$ et avec $V \cap (\{0\} \times \mathbf{C}^m) = \emptyset$, et si $\delta > 0$, alors $I_\delta V$ obéit à ces conditions, $A - \{(0,\vec{0})\} = (I_\delta - \{0\})V$ étant connexe comme image du connexe $(I_\delta - \{0\}) \times V$ par $(\lambda, \vec{x}) \rightsquigarrow \lambda\vec{x}$. Mais, f étant continue de T_m/U_m dans T_n, $\overline{f} = 1_{\mathbf{C}} \times f$ est continue de $T_{m+1}/\mathbf{C} \times U_m$ dans T_{n+1}, ce qui va entraîner que $B = \overline{f}(A - \{(0,\vec{0})\})$ est connexe dans T_{n+1}. On a aussi $B = = \overline{f}(A) - \{(0,\vec{0})\}$, donc

$$B = [B \cap (A_1 - \{(0,\vec{0})\})] \cup \ldots \cup [B \cap (A_k - \{(0,\vec{0})\})],$$

avec $[B \cap (A_i - \{(0,\vec{0})\})] \cap [B \cap (A_j - \{(0,\vec{0})\})] = \emptyset$ si $i \neq j$ et $B \cap (A_i - \{(0,\vec{0})\})$ ouvert dans B. Puisque B est connexe, il s'ensuit immédiatement qu'il existe i tel que

$$B \cap (A_j - \{0,\vec{0})\}) = \emptyset \text{ si } i \neq j \text{ et } B \cap (A_i - \{(0,\vec{0})\}) = B.$$

On va maintenant voir que $\overline{f}(F_{(1,\vec{b})}/\mathbf{C} \times U_m) \supseteq F_{(1,\vec{b}_i)}$.

Etant donné $A'_i \in F_{(1,\vec{b}_i)}$ on aura

$$A_1 \cup \ldots \cup A'_i \cup \ldots \cup A_k \in F_{(1,\vec{b}_1)} \cap \ldots \cap F_{(1,\vec{b}_k)},$$

et il existe donc $A' \in F_{(1,\vec{b})}$, qu'on peut supposer contenu dans A, tel que $\overline{f}(A') \subseteq A_1 \cup \ldots \cup A'_i \cup \ldots \cup A_k$, ce qui entraîne

$$\overline{f}(A' - \{(0,\vec{0})\}) \subseteq (A_1 - \{(0,\vec{0})\}) \cup \ldots \cup (A'_i - \{(0,\vec{0})\}) \cup \ldots \cup (A_k - \{(0,\vec{0})\});$$

donc, comme $\overline{f}(A' - \{(0,\vec{0})\}) \cap (A_j - \{(0,\vec{0})\}) = \emptyset$ ($\overline{f}(A' - \{(0,\vec{0})\}) \subseteq B$) si $i \neq j$, on obtient $\overline{f}(A' - \{(0,\vec{0})\}) \subseteq A'_i - \{(0,\vec{0})\}$, ou encore $\overline{f}(A') \subseteq A'_i$, $A'_i \in \overline{f}(F_{(1,\vec{b})}/\mathbf{C} \times U_m)$.

On va maintenant voir que $\vec{b}_i$ est la dérivée de f dans la direction de $\vec{b}$, ce qui démontrera la proposition : Or, si $W \in \mathcal{O}_{\vec{b}_i}$ on a (**2.1.4**)

$$\mathbf{C}(\{1\} \times W) \in F_{(1,\vec{b}_i)} \subseteq \overline{f}(F_{(1,\vec{b})}/\mathbf{C} \times U_m)$$

et il existe donc $A \in F_{(1,\vec{b})}$, $A \subseteq \mathbf{C} \times U_m$ ($\mathbf{C} \times U_m$ étant ouvert dans π_m, il appartient à $F_{(1,\vec{b})}$), vérifiant $\overline{f}(A) \subseteq \mathbf{C}(\{1\} \times W\})$. On a $A \supseteq I_\delta V$, $V \in \mathcal{O}_{(1,\vec{b})}$, et maintenant, si $|\lambda| \leq \delta$ avec $\lambda \neq 0$, alors $(\lambda, \lambda\vec{b}) = \lambda(1, \vec{b}) \in A$, d'où

$$\lambda(1, \frac{f(\lambda\vec{b})}{\lambda}) = (\lambda, f(\lambda\vec{b})) = \overline{f}(\lambda, \lambda\vec{b}) \in \overline{f}(A) \subseteq \mathbf{C}(\{1\} \times W),$$

de sorte que $\frac{f(\lambda\vec{b})}{\lambda} \in W$; ceci montre que $\lim_{\lambda \to 0} \frac{f(\lambda\vec{b})}{\lambda} = \vec{b}_i$.

2.2.3.

REMARQUE. Dans toute la première partie de notre travail, $\mathbf{C}$ pourrait être remplacé par le corps des réels $\mathbf{R}$. Ce n'est que dans les propositions antérieures que $\mathbf{C}$ est essentiel, d'une part pour que $I_\delta - \{0\}$ soit connexe (démonstration de **2.2.2**), et d'autre part pour avoir l'équivalence des propriétés «différentiabilité en tout point» et «continuité plus existence de dérivées partielles en tout point».

2.3. Les quasi-topologies π_V.

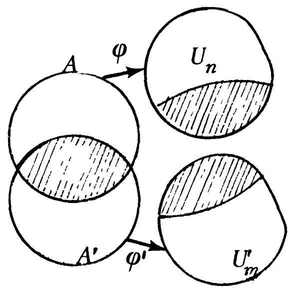
Rappelons que, pour la théorie des variétés analytiques complexes, on appelle carte locale d'un espace topologique V un homéomorphisme φ d'un ouvert A de V sur un ouvert U_n de $\mathbf{C}^n$.

Etant donnée une autre carte locale $\varphi' : A' \to U'_m$, φ et φ' sont dites compatibles si

$\varphi'/A \cap A' . (\varphi/A \cap A')^{-1} : \varphi(A \cap A') \to \varphi'(A \cap A')$

et

$\varphi/A \cap A' . (\varphi'/A \cap A')^{-1} : \varphi'(A \cap A') \to \varphi(A \cap A')$



sont holomorphes ($\varphi(A \cap A')$ et $\varphi'(A \cap A')$ sont des ouverts). On appelle atlas sur V un ensemble de cartes locales $\varphi_\alpha : A_\alpha \to U_\alpha$ compatibles deux à deux tel que $V = \cup A_\alpha$. Une structure de variété sur V est alors définie par la donnée d'un atlas maximal (c'est-à-dire qui n'est contenu strictement dans aucun autre atlas).

2.3.1.

PROPOSITION. *Soit l'espace topologique V et deux cartes locales compatibles $\varphi : A \to U_m$, $\varphi' : A' \to U'_n$. Soient π sur $\mathbf{C} \times A$ et π' sur $\mathbf{C} \times A'$ les quasi-topologies qui font des bijections $\overline{\varphi} : \mathbf{C} \times A \to \pi_m/\mathbf{C} \times U_m$, $\overline{\varphi'} : \mathbf{C} \times A' \to \pi_n/\mathbf{C} \times U'_n$ des quasi-homéomorphismes. $(\mathbf{C} \times A) \cap (\mathbf{C} \times A')$ est ouvert dans π et dans π' et $\pi/(\mathbf{C} \times A) \cap (\mathbf{C} \times A') = \pi'/(\mathbf{C} \times A) \cap (\mathbf{C} \times A')$.*

DEMONSTRATION. Pour voir que $(\mathbf{C} \times A) \cap (\mathbf{C} \times A')$ est ouvert dans π, il suffit de voir que $\overline{\varphi}((\mathbf{C} \times A) \cap (\mathbf{C} \times A')) = \mathbf{C} \times \varphi(A \cap A')$ est ouvert dans $\pi_m/\mathbf{C} \times U_m$. Mais, $A \cap A'$ étant ouvert dans A, $\varphi(A \cap A')$ est ouvert dans U_m, donc $\mathbf{C} \times \varphi(A \cap A')$ est ouvert dans $T_{m+1}/\mathbf{C} \times U_m$, et aussi dans $\pi_m/\mathbf{C} \times U_m$ (2.1.9). Symétriquement, $(\mathbf{C} \times A) \cap (\mathbf{C} \times A')$ est ouvert dans π'. Soient les restrictions $\varphi_/ : A \cap A' \to \varphi(A \cap A')$ et $\varphi'_/ : A \cap A' \to \varphi'(A \cap A')$ de φ et φ'; par définition $\varphi'_/ . \varphi_/^{-1}$ est holomorphe; il s'ensuit d'après 2.2.1 que $\overline{\varphi'_/ . \varphi_/^{-1}}$ est quasi-continue pour $\pi_m/\mathbf{C} \times \varphi(A \cap A')$ et $\pi_n/\mathbf{C} \times \varphi'(A \cap A')$, donc est aussi quasi-continue $\overline{\varphi'}_/^{-1} . \overline{\varphi'_/ . \varphi_/^{-1}} . \overline{\varphi}_/ : \pi/(\mathbf{C} \times A) \cap (\mathbf{C} \times A') \to \pi'/(\mathbf{C} \times A) \cap (\mathbf{C} \times A')$; c'est-à-dire $1_{(\mathbf{C} \times A) \cap (\mathbf{C} \times A')} : \pi/(\mathbf{C} \times A) \cap (\mathbf{C} \times A') \to \pi'/(\mathbf{C} \times A) \cap (\mathbf{C} \times A')$ est quasi-continue, et symétriquement son inverse va être quasi-continue. Ceci montre que $\pi/(\mathbf{C} \times A) \cap (\mathbf{C} \times A') = \pi'/(\mathbf{C} \times A) \cap (\mathbf{C} \times A')$.

2.3.2.

DEFINITION. Soit V une variété analytique complexe définie par un atlas maximal $\{\varphi_\alpha : A_\alpha \to U_\alpha\}$. On définit la quasi-topologie π_V sur $\mathbf{C} \times V$ comme le recollement des quasi-topologies π_α sur $\mathbf{C} \times A_\alpha$ telles que $\overline{\varphi}_\alpha : \pi_\alpha \to \pi_{n_\alpha}/\mathbf{C} \times U_\alpha$ soient des quasi-homéomorphismes.

2.3.3.

COROLLAIRE. Si on donne pour l'espace topologique V un atlas $\{\varphi_\alpha : A_\alpha \to U_\alpha\}$ (pas forcément maximal), on sait qu'il existe un et un seul atlas maximal qui le contient et on a donc une structure de variété sur V. Il est alors immédiat que π_V est le recollement des quasi-topologies π_α sur $\mathbf{C} \times A_\alpha$.

2.3.4.

COROLLAIRE. *Si* V *est un ouvert de* $\mathbf{C}^n$ *muni de sa structure canonique de variété, on a* $\pi_V = \pi_n / \mathbf{C} \times V$.

2.3.5.

PROPOSITION. *Si* V *est une variété et* A *un ouvert de* V *muni de la structure induite de variété, on a* $\pi_A = \pi_V / \mathbf{C} \times A$.

DEMONSTRATION. On sait que les cartes de A sont les cartes $\varphi : B \to U_n$ de V telles que $B \subseteq A$. Pour une telle carte, $\mathbf{C} \times B$ étant ouvert dans π_V, il sera ouvert dans $\pi_V / \mathbf{C} \times A$ (parce que l'inclusion $\iota : \mathbf{C} \times A \to V$, étant quasi-continue pour $\pi_V / \mathbf{C} \times A$ et π_V, sera continue pour les topologies associées) et on a $\pi_V / \mathbf{C} \times B = (\pi_V / \mathbf{C} \times A) / \mathbf{C} \times B$. Ceci montre que $\pi_V / \mathbf{C} \times A$ est le recollement des $\pi_V / \mathbf{C} \times B$, c'est-à-dire $\pi_V / \mathbf{C} \times A = \pi_A$.

2.3.6.

PROPOSITION. *Si* V *est une variété et* T_V *sa topologie,* $1_{\mathbf{C} \times V}$ *est quasi-continue pour* π_V *et* $\mathbf{C} \times T_V$.

DEMONSTRATION. Comme $\varphi_\alpha : A_\alpha \to U_\alpha$ est un homéomorphisme pour T_V / A_α et T_{n_α} / U_α, $\overline{\varphi}_\alpha = 1_{\mathbf{C}} \times \varphi_\alpha : \mathbf{C} \times A_\alpha \to \mathbf{C} \times U_\alpha$ est un homéomorphisme pour $(\mathbf{C} \times T_V) / \mathbf{C} \times A_\alpha$ et $T_{n_\alpha + 1} / \mathbf{C} \times U_\alpha$; puisque $\overline{\varphi}_\alpha$ est un quasi-homéomorphisme pour $\pi_V / \mathbf{C} \times A_\alpha$ et $\pi_{n_\alpha} / \mathbf{C} \times U_\alpha$ et que (**2.1.9**) $1_{\mathbf{C} \times U_\alpha}$ est quasi-continue pour $\pi_{n_\alpha} / \mathbf{C} \times U_\alpha$ et $T_{n_\alpha + 1} / \mathbf{C} \times U_\alpha$, on en déduit que $1_{\mathbf{C} \times A_\alpha}$ est quasi-continue pour $\pi_V / \mathbf{C} \times A_\alpha$ et $\mathbf{C} \times T_V / \mathbf{C} \times A_\alpha$; donc $1_{\mathbf{C} \times V} / \mathbf{C} \times A_\alpha$ est quasi-continue pour $\pi_V / \mathbf{C} \times A_\alpha$ et $\mathbf{C} \times T_V$ et finalement, d'après **1.2.1**, $1_{\mathbf{C} \times V}$ est quasi-continue pour π_V et $\mathbf{C} \times T_V$.

2.3.7.

PROPOSITION. *Etant donnée la variété* V, *l'application* $q_V : \mathbf{C} \times V \to V$, $(\lambda, x) \rightsquigarrow x$, *est quasi-continue et quasi-ouverte pour* π_V *et* T_V.

DEMONSTRATION. $q_V : \mathbf{C} \times V \to V$ est quasi-continue pour π_V et T_V, ceci résultant du fait qu'il en est ainsi pour $\mathbf{C} \times T_V$ et T_V et de la proposition antérieure. Si maintenant $(\lambda_o, x_o) \in \mathbf{C} \times V$, soit $\varphi : A \to U_m$ une carte de V avec $x_o \in A$. Considérant les projections $q_{V/} : \mathbf{C} \times A \to A$, $q_{m/} : \mathbf{C} \times U_m \to U_m$, on voit que $q_{m/}$ est quasi-ouverte pour $\pi_m / \mathbf{C} \times U_m$

et T_m/U_m ($\mathbf{C} \times U_m$ étant ouvert dans T_{m+1} est ouvert dans π_m d'après 2.1.9, on applique 2.1.10, 1.2.14, 1.2.13 et 1.2.15); puisque φ et $\overline{\varphi}$ sont des quasi-homéomorphismes, $q_{V/} : \pi_V/\mathbf{C}\times A \to T_V/A$ est quasi-ouverte, donc aussi $q_{V/} : \pi_V/\mathbf{C}\times A \to T_V$ est quasi-ouverte (parce que A est ouvert dans T_V et on tient compte de 1.2.14 et 1.2.13); enfin, d'après 1.2.15, q_V est quasi-ouverte pour π_V et T_V.

2.3.8.

COROLLAIRE. *La topologie T_V est la quasi-topologie finale déterminée par π_V et $q_V : \mathbf{C} \times V \to V$.*

DEMONSTRATION. Cela résulte de 1.2.12 et de la proposition antérieure.

2.3.9.

PROPOSITION. *Etant données les variétés V et V' et l'application $f : V \to V'$, alors f est holomorphe si, et seulement si, $\overline{f} : \mathbf{C} \times V \to \mathbf{C} \times V'$ est quasi-continue pour π_V et $\pi_{V'}$.*

DEMONSTRATION. Supposons f holomorphe. Pour tout $(\lambda_o, x_o) \in \mathbf{C} \times V$, on sait qu'on peut choisir une carte $\varphi : A \to U_m$ de V et une carte $\varphi' : A' \to U'_n$ de V' avec $x_o \in A$, $f(A) \subseteq A'$; alors, en notant $f' : A \to A'$ la restriction de f, $\varphi' . f' . \varphi^{-1} : U_m \to U'_n$ est holomorphe; donc, d'après 2.2.1,

$$\overline{\varphi'} . \overline{f'} . \overline{\varphi}^{-1} = \overline{\varphi' . f' . \varphi^{-1}} : \mathbf{C} \times U_m \to \mathbf{C} \times U'_n$$

est quasi-continue pour $\pi_m/\mathbf{C}\times U_m$ et $\pi_n/\mathbf{C}\times U'_n$; puisque $\overline{\varphi'}$ et $\overline{\varphi}$ sont des quasi-homéomorphismes, par conséquent $\overline{f'} : \pi_V/\mathbf{C}\times A \to \pi_{V'}/\mathbf{C}\times A'$ est quasi-continue; donc $\overline{f}/\mathbf{C}\times A : \mathbf{C} \times A \to \mathbf{C} \times V'$ est aussi continue pour $\pi_V/\mathbf{C}\times A$ et $\pi_{V'}$, ce qui entraîne finalement que (1.2.1) $\overline{f} : \mathbf{C} \times V \to \mathbf{C} \times V'$ est quasi-continue pour π_V et $\pi_{V'}$.

Supposons réciproquement que $\overline{f} : \pi_V \to \pi_{V'}$ est quasi-continue.

$$\begin{tikzcd} \pi_V \arrow[r, "\overline{f}"] \arrow[d, "q_V"'] & \pi_{V'} \arrow[d, "q_{V'}"] \\ T_V \arrow[r, "f"] & T_{V'} \end{tikzcd}$$

Comme $f . q_V = q_{V'} . \overline{f}$ est quasi-continue pour π_V et $T_{V'}$, le corollaire antérieur entraîne que f est continue pour T_V et $T_{V'}$. Si $x_o \in V$, on peut choisir une carte $\varphi : A \to U_m$ de V et une carte $\varphi' : A' \to U'_n$ de V' avec $x_o \in A$ et $f(A) \subseteq A'$. Alors, en notant $f' : A \to A'$ la restriction de f, on voit que $\overline{\varphi' . f' . \varphi^{-1}} = \overline{\varphi'} . \overline{f'} . \overline{\varphi}^{-1} : \mathbf{C} \times U_m \to \mathbf{C} \times U'_n$ est quasi-continue pour $\pi_m/\mathbf{C}\times U_m$ et $\pi_n/\mathbf{C}\times U'_n$; par suite $\varphi' . f' . \varphi^{-1}$ est holomorphe (2.2.2) ce qui, par définition, entraîne que f est holomorphe.

2.3.10.

PROPOSITION. *Soit* V *un ensemble et* $\tilde{\pi}_V$ *une quasi-topologie sur* $\mathbf{C} \times V$ *telle que, pour tout* $x \in V$, *il existe* $A \subseteq V$ *avec* $x \in A$ *et une bijection* $\varphi : A \to U_m$ *telle que* U_m *soit ouvert dans* $\mathbf{C}^m$, *que* $\mathbf{C} \times A$ *soit ouvert dans* $\tilde{\pi}_V$, *et que* $\overline{\varphi} : \mathbf{C} \times A \to \mathbf{C} \times U_m$ *soit un quasi-homéomorphisme pour* $\tilde{\pi}_V / \mathbf{C} \times A$ *et* $\pi_m / \mathbf{C} \times U_m$. *Il existe alors sur* V *une et une seule structure de variété telle que* $\pi_V = \tilde{\pi}_V$, *la topologie de* V *étant la quasi-topologie finale déterminée par* $\tilde{\pi}_V$ *et* $q_V : \mathbf{C} \times V \to V$ *et les cartes de son atlas maximal étant les* φ *vérifiant les conditions antérieures.*

DEMONSTRATION. Soit T_V la quasi-topologie finale sur V déterminée par $\tilde{\pi}_V$ et $q_V : \mathbf{C} \times V \to V$. Si $\varphi : A \to U_m$ vérifie les conditions de l'énoncé, A est ouvert dans T_V, car $q_V^{-1}(A) = \mathbf{C} \times A$ est ouvert dans $\tilde{\pi}_V$ et on tient compte de ce qui a été dit à la fin de **1.1.8** . D'après **1.1.10**, T_V / A est la quasi-topologie finale déterminée par $\tilde{\pi}_V / \mathbf{C} \times A$ et la restriction de q_V; donc, la topologie T_m / U_m étant la quasi-topologie finale déterminée par $\pi_m / \mathbf{C} \times U_m$ et $q_{m/} : \mathbf{C} \times U_m \to U_m$ (vu **2.1.12** et **1.1.10**) et $\overline{\varphi}$ étant un quasi-homéomorphisme, $\varphi :$ $A \to U_m$ est un quasi-homéomorphisme pour T_V / A et T_m / U_m; en particulier T_V / A est une topologie.

$$\begin{tikzcd} \tilde{\pi}_V / \mathbf{C} \times A \arrow[r, "\overline{\varphi}"] \arrow[d, "q_{V/}"'] & \pi_m / \mathbf{C} \times U_m \arrow[d, "q_{m/}"] \\ T_V / A \arrow[r, "\varphi"] & T_m / U_m \end{tikzcd}$$

Mais maintenant, T_V étant le recollement des T_V / A pour les différents $\varphi : A \to U_m$ possibles, T_V est lui-même une topologie.

Etant donnés $\varphi : A \to U_m$ et $\varphi' : A' \to U'_n$ vérifiant les conditions de l'énoncé et leurs restrictions $\varphi_/ : A \cap A' \to \varphi(A \cap A')$, $\varphi'_/ : A \cap A' \to \varphi'(A \cap A')$, en tenant compte du fait que

$$\overline{\varphi_/} : \tilde{\pi}_V / \mathbf{C} \times (A \cap A') \to \pi_m / \mathbf{C} \times \varphi(A \cap A')$$

et que

$$\overline{\varphi'_/} : \tilde{\pi}_V / \mathbf{C} \times (A \cap A') \to \pi_n / \mathbf{C} \times \varphi'(A \cap A')$$

sont des quasi-homéomorphismes, on voit que

$$\overline{\varphi'_/ \cdot \varphi_/^{-1}} : \pi_m / \mathbf{C} \times \varphi(A \cap A') \to \pi_n / \mathbf{C} \times \varphi'(A \cap A')$$

est un quasi-homéomorphisme; $A \cap A'$ étant ouvert dans A, on a $\varphi(A \cap A')$ ouvert dans U_m donc dans $\mathbf{C}^m$ et, de même, $\varphi'(A \cap A')$ ouvert dans $\mathbf{C}^n$; il s'ensuit d'après **2.2.2** que $\varphi'_/ \cdot \varphi_/^{-1} : \varphi(A \cap A') \to \varphi'(A \cap A')$ va être holomorphe de même que $\varphi_/ \cdot \varphi'^{-1}_/ : \varphi'(A \cap A') \to \varphi(A \cap A')$, ce qui montre que les cartes locales φ et φ' sont compatibles. Aussi la classe des cartes locales vérifiant les conditions de l'énoncé définit un atlas $\mathfrak{A}$ sur l'espace topologique (V, T_V), et cet atlas définit une structure de variété sur V pour laquelle on a $\pi_V = \tilde{\pi}_V$ (en tenant compte du corollaire **2.3.3**).

On va maintenant voir que $\mathfrak{A}$ est un atlas maximal et que la structure de variété est unique. Supposons donnée sur V une structure de variété telle que $\pi_V = \tilde{\pi}_V$. Du corollaire 2.3.8 il résulte que la topologie de V est exactement T_V. Si $\varphi: A \to U_m$ vérifie les conditions de l'énoncé, on sait déjà que A est ouvert dans T_V; considérons sur A la structure induite de variété; comme $\bar{\varphi}: \pi_A = \pi_V / \mathbf{C} \times A \to \pi_m / \mathbf{C} \times U_m$ est un quasi-homéomorphisme (on a tenu compte de **2.3.5**), d'après **2.3.9**, $\varphi: A \to U_m$ est holomorphe ainsi que $\varphi^{-1}: U_m \to A$, et φ est donc une carte de l'atlas maximal de la variété V. Enfin, si réciproquement $\varphi: A \to U_m$ est une carte de l'atlas maximal de la variété V, on aura A ouvert, de sorte que $\mathbf{C} \times A$ est ouvert dans π_V, car il est ouvert dans $\mathbf{C} \times T_V$ et l'on tient compte de **2.3.6**; par suite $\varphi: A \to U_m$ est holomorphe, ainsi que $\varphi^{-1}: U_m \to A$. Donc, d'après **2.3.9**, $\bar{\varphi}: \pi_A \to \pi_m / \mathbf{C} \times U_m$ est un quasi-homéomorphisme, ce qui montre (car $\pi_A = \pi_V / \mathbf{C} \times A$ vu **2.3.5**) que φ vérifie les conditions de l'énoncé.

2.3.11.

PROPOSITION. *Si V est une variété, l'application $q'_V : \mathbf{C} \times V \to \mathbf{C}$, $(\lambda, x) \rightsquigarrow \lambda$, est quasi-continue pour π_V et $\mathbf{C}$.*

DEMONSTRATION. Elle est quasi-continue pour $\mathbf{C} \times T_V$ et $\mathbf{C}$ et on tient compte de **2.3.6**.

2.3.12.

PROPOSITION. *Si V est une variété et $a \in V$, l'application $\xi_{V,a} : \mathbf{C} \to \mathbf{C} \times V$, $\lambda \rightsquigarrow (\lambda, a)$, est quasi-continue pour $\mathbf{C}$ et π_V.*

DEMONSTRATION. Soit $\varphi: A \to U_m$ une carte de V avec $a \in A$; il nous suffit de voir que $\xi_{V,a} : \mathbf{C} \to \mathbf{C} \times A$ est quasi-continue pour $\mathbf{C}$ et $\pi_V / \mathbf{C} \times A$; puisque $\overline{\varphi} : \mathbf{C} \times A \to \mathbf{C} \times U_m$ est un quasi-homéomorphisme pour $\pi_V / \mathbf{C} \times A$ et $\pi_m / \mathbf{C} \times U_m$, il nous suffit de voir que $\overline{\varphi} . \xi_{V,a} : \mathbf{C} \to \mathbf{C} \times U_m$ est quasi-continue pour $\mathbf{C}$ et $\pi_m / \mathbf{C} \times U_m$, ce qui résulte de l'égalité $\overline{\varphi} . \xi_{V,a} = q_{\varphi(\vec{a})}$ et de **2.1.15**.

2.3.13.

PROPOSITION. *Si V est une variété et $\lambda_o \in \mathbf{C}$, l'application η_{V,λ_o} : $\mathbf{C} \times V \to \mathbf{C} \times V$, $(\lambda, x) \rightsquigarrow (\lambda_o + \lambda, x)$ est quasi-continue pour π_V et π_V.*

DEMONSTRATION. Pour chaque $(\lambda_1, x_1) \in \mathbf{C} \times V$, soit $\varphi : A \to U_m$ une carte avec $x_1 \in A$. Comme $\overline{\varphi} : \mathbf{C} \times A \to \mathbf{C} \times U_m$ est un quasi-homéomorphisme pour $\pi_V / \mathbf{C} \times A$ et $\pi_m / \mathbf{C} \times U_m$, le fait que l'application η_{λ_o} : $\mathbf{C} \times U_m \to \mathbf{C} \times U_m$, $(\lambda, \vec{x}) \rightsquigarrow (\lambda_o + \lambda, \vec{x})$ soit quasi-continue pour $\pi_m / \mathbf{C} \times U_m$ et $\pi_m / \mathbf{C} \times U_m$ va entraîner que $\eta_{V,\lambda_o} / \mathbf{C} \times A : \mathbf{C} \times A \to \mathbf{C} \times A$, c'est-à-dire $\overline{\varphi}^{-1} . \eta_{\lambda_o} . \overline{\varphi}$, est quasi-continue pour $\pi_V / \mathbf{C} \times A$ et $\pi_V / \mathbf{C} \times A$, donc aussi $\eta_{V,\lambda_o} / \mathbf{C} \times A : \pi_V / \mathbf{C} \times A \to \pi_V$ est quasi-continue; finalement d'après **1.2.1**, $\eta_{V,\lambda_o} : \mathbf{C} \times V \to \mathbf{C} \times V$ est quasi-continue pour π_V et π_V.

2.4. Produit de variétés.

2.4.1.

DEFINITION. Soient les ensembles V_1, V_2 et leur produit $V_1 \times V_2$ pour les projections $P_1 : V_1 \times V_2 \to V_1$, $P_2 : V_1 \times V_2 \to V_2$. Soient $\overline{P}_1$: $\mathbf{C} \times V_1 \times V_2 \to \mathbf{C} \times V_1$, $\overline{P}_2 : \mathbf{C} \times V_1 \times V_2 \to \mathbf{C} \times V_2$ les applications correspondantes. Etant donnés les filtres F_1 sur $\mathbf{C} \times V_1$ et F_2 sur $\mathbf{C} \times V_2$, on représentera par $< F_1, F_2 >$ le filtre sur $\mathbf{C} \times V_1 \times V_2$ qui admet pour base les ensembles $\overline{P}_1^{-1}(A_1) \cap \overline{P}_2^{-1}(A_2)$, où $A_1 \in F_1$ et $A_2 \in F_2$.

2.4.2.

PROPOSITION. *Soient les quasi-topologies π_1 sur $\mathbf{C} \times V_1$ et π_2 sur $\mathbf{C} \times V_2$; soit π sur $\mathbf{C} \times V_1 \times V_2$ la quasi-topologie initiale déterminée par π_1, π_2 et les applications $\overline{P}_1 : \mathbf{C} \times V_1 \times V_2 \to \mathbf{C} \times V_1$, $\overline{P}_2 : \mathbf{C} \times V_1 \times V_2 \to \mathbf{C} \times V_2$. Alors $F \underset{\pi}{\to} (\lambda, a_1, a_2)$ si, et seulement si, il existe $F_1 \underset{\pi_1}{\to} (\lambda, a_1)$, $F_2 \underset{\pi_2}{\to} (\lambda, a_2)$ avec $F \supseteq < F_1, F_2 >$.*

DEMONSTRATION. Si $F \underset{\pi}{\to} (\lambda, a_1, a_2)$, on a $\overline{P}_1(F) \underset{\pi_1}{\to} (\lambda, a_1)$ et

$\overline{P}_2(F) \underset{\pi_2}{\rightarrow} (\lambda, a_2)$; si l'on pose $F_1 = \overline{P}_1(F)$, $F_2 = \overline{P}_2(F)$, on a $F \supseteq <F_1, F_2>$ (si $A_1 \in F_1$ et $A_2 \in F_2$, on a $A_1 \supseteq \overline{P}_1(A'_1)$, $A_2 \supseteq \overline{P}_2(A'_2)$ où $A'_1, A'_2 \in F$; par suite

$$\overline{P}_1^{-1}(A_1) \cap \overline{P}_2^{-1}(A_2) \supseteq \overline{P}_1^{-1}(\overline{P}_1(A'_1)) \cap \overline{P}_2^{-1}(\overline{P}_2(A'_2)) \supseteq A'_1 \cap A'_2 \in F,$$

d'où $\overline{P}_1^{-1}(A_1) \cap \overline{P}_2^{-1}(A_2) \in F$). Soit réciproquement $F \supseteq <F_1, F_2>$ avec $F_1 \underset{\pi_1}{\rightarrow} (\lambda, a_1)$, $F_2 \underset{\pi_2}{\rightarrow} (\lambda, a_2)$. On obtient $\overline{P}_1(F) \supseteq \overline{P}_1(<F_1, F_2>) \supseteq F_1$, car si $A_1 \in F_1$, on a $A_1 \supseteq \overline{P}_1(\overline{P}_1^{-1}(A_1) \cap \overline{P}_2^{-1}(\mathbf{C} \times V_2))$. Donc $\overline{P}_1(F) \underset{\pi_1}{\rightarrow} (\lambda, a_1)$ et, de même, $\overline{P}_2(F) \underset{\pi_2}{\rightarrow} (\lambda, a_2)$. Il s'ensuit $F \underset{\pi}{\rightarrow} (\lambda, \vec{a}_1, \vec{a}_2)$.

2.4.3.

LEMME. *Si $F_1, \dots, F_k$ sont des filtres sur $\mathbf{C} \times V_1$ et $G_1, \dots, G_l$ des filtres sur $\mathbf{C} \times V_2$, on a $<F_1 \cap \dots \cap F_k, G_1 \cap \dots \cap G_l> = \bigcap_{i,j} <F_i, G_j>$.*

DEMONSTRATION. En raisonnant par induction, il nous suffit de voir que l'on a

$$<F_1 \cap F_2, G> = <F_1, G> \cap <F_2, G>$$

et

$$<F, G_1 \cap G_2> = <F, G_1> \cap <F, G_2>;$$

démontrons par exemple la première égalité. Comme $<F_1 \cap F_2, G> \subseteq <F_1, G>$ et $<F_1 \cap F_2, G> \subseteq <F_2, G>$, on obtient $<F_1 \cap F_2, G> \subseteq <F_1, G> \cap <F_2, G>$. Réciproquement, si $A \in <F_1, G> \cap <F_2, G>$, il existe $A_1 \in F_1$, $A_2 \in F_2$, $B_1, B_2 \in G$ vérifiant

$$A \supseteq (\overline{P}_1^{-1}(A_1) \cap \overline{P}_2^{-1}(B_1)) \cup (\overline{P}_1^{-1}(A_2) \cap \overline{P}_2^{-1}(B_2)) \supseteq$$
$$\supseteq \overline{P}_1^{-1}(A_1 \cup A_2) \cap \overline{P}_2^{-1}(B_1 \cap B_2),$$

avec $A_1 \cup A_2 \in F_1 \cap F_2$, $B_1 \cap B_2 \in G$; donc $A \in <F_1 \cap F_2, G>$.

2.4.4.

PROPOSITION. *Soient les projections canoniques $P_1 : \mathbf{C}^{m+n} \to \mathbf{C}^m$, $P_2 : \mathbf{C}^{m+n} \to \mathbf{C}^n$ et les applications correspondantes $\overline{P}_1 : \mathbf{C} \times \mathbf{C}^{m+n} \to \mathbf{C} \times \mathbf{C}^m$, $\overline{P}_2 : \mathbf{C} \times \mathbf{C}^{m+n} \to \mathbf{C} \times \mathbf{C}^n$. Alors π_{m+n} est la quasi-topologie initiale sur $\mathbf{C} \times \mathbf{C}^{m+n}$ déterminée par π_m, π_n et les applications $\overline{P}_1$ et $\overline{P}_2$.*

DEMONSTRATION. Soit π'_{m+n} la quasi-topologie initiale correspondante. Si on désigne par $\xi_{\vec{x}}$ la translation $\vec{y} \rightsquigarrow \vec{x} + \vec{y}$, on a

$$\overline{P}_1 . \xi_{(\lambda,\vec{a},\vec{b})} = \xi_{(\lambda,\vec{a})} . \overline{P}_1 \text{ et } \overline{P}_2 . \xi_{(\lambda,\vec{a},\vec{b})} = \xi_{(\lambda,\vec{b})} . \overline{P}_2 ,$$

ce qui nous montre que $\xi_{(\lambda,\vec{a},\vec{b})} : \pi'_{m+n} \to \pi'_{m+n}$ est quasi-continue; évidemment c'est un quasi-homéomorphisme. Pour montrer que $\pi'_{m+n} = \pi_{m+n}$, il nous suffit de voir que $\pi'_{m+n}(0,\vec{0},\vec{0}) = \pi_{m+n}(0,\vec{0},\vec{0})$. On sait que $F \xrightarrow[\pi'_{m+n}]{} (0,\vec{0},\vec{0})$ si, et seulement si, $F \supseteq \langle F_1, F_2 \rangle$, où $F_1 \xrightarrow[\pi_m]{} (0,\vec{0})$, $F_2 \xrightarrow[\pi_m]{} (0,\vec{0})$ (Prop. **2.4.2**), donc, en tenant compte de **2.4.3**, si, et seulement si, F contient une intersection finie de filtres de de type $\langle F_{(1,\vec{a})}, F_{(1,\vec{b})} \rangle$. Ainsi notre proposition sera démontrée si on voit que $\langle F_{(1,\vec{a})}, F_{(1,\vec{b})} \rangle = F_{(1,\vec{a},\vec{b})}$. Or, si on représente par $\mathcal{V}'$ les filtres des voisinages dans les hyperplans verticaux d'abcisse 1, d'après **2.1.4**

$$F_{(1,\vec{a})} = \mathbf{V}\mathcal{V}'_{(1,\vec{a})},\quad F_{(1,\vec{b})} = \mathbf{V}\mathcal{V}'_{(1,\vec{b})},\quad F_{(1,\vec{a},\vec{b})} = \mathbf{V}\mathcal{V}'_{(1,\vec{a},\vec{b})},$$

et il nous suffit maintenant d'utiliser l'égalité

$$\overline{P}_1^{-1}(I_\delta(\{1\} \times V)) \cap \overline{P}_2^{-1}(I_\delta(\{1\} \times V')) = I_\delta(\{1\} \times V \times V').$$

2.4.5.

COROLLAIRE. *Si U_m et U'_n sont ouverts dans $\mathbf{C}^m$ et $\mathbf{C}^n$, alors la quasi-topologie $\pi_{m+n}/\mathbf{C} \times U_m \times U'_n$ de $\mathbf{C} \times U_m \times U'_n$ est la quasi-topologie initiale déterminée par les quasi-topologies $\pi_m/\mathbf{C} \times U_m$, $\pi_n/\mathbf{C} \times U'_n$ et les applications $\overline{P}_{1/} : \mathbf{C} \times U_m \times U'_n \to \mathbf{C} \times U_m$ et $\overline{P}_{2/} : \mathbf{C} \times U_m \times U'_n \to \mathbf{C} \times U'_n$.*

DEMONSTRATION. La démonstration est purement catégorique. Puisque

$$\iota_m . \overline{P}_{1/} = \overline{P}_1 . \iota_{m+n}$$

est quasi-continue, $\overline{P}_{1/}$ est quasi-continue, et de même $\overline{P}_{2/}$ est quasi-continue. Enfin, étant donné l'espace quasi-topologique (E, π) et l'application $f : E \to \mathbf{C} \times U_m \times U'_n$ telle que $\overline{P}_{1/} . f$ et $\overline{P}_{2/} . f$ soient quasi-continues, $\overline{P}_1 . \iota_{m+n} . f = \iota_m . \overline{P}_{1/} . f$ est quasi-continue ainsi que $\overline{P}_2 . \iota_{m+n} . f = \iota_n . \overline{P}_{2/} . f$, donc $\iota_{m+n} . f$ est quasi-continue et finalement f est quasi-continue.

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_m/\mathbf{C}\times U_m \arrow[r, "\iota_m"] & \pi_m \\
\pi_{m+n}/\mathbf{C}\times U_m\times U'_n \arrow[ur, "\overline{P}_{1/}"] \arrow[dr, "\overline{P}_{2/}"'] \arrow[rr, "\iota_{m+n}"] & & \pi_{m+n} \arrow[u, "\overline{P}_1"'] \arrow[d, "\overline{P}_2"] \\
 & \pi_n/\mathbf{C}\times U'_n \arrow[r, "\iota_n"'] & \pi_n
\end{tikzcd}$$

2.4.6.

PROPOSITION. *Soient les variétés* V_1, V_2 *et la variété produit* $V_1 \times V_2$ *pour les projections* $P_1 : V_1 \times V_2 \to V_1$, $P_2 : V_1 \times V_2 \to V_2$. *Alors la quasi-topologie* $\pi_{V_1 \times V_2}$ *sur* $\mathbf{C} \times V_1 \times V_2$ *est la quasi-topologie initiale déterminée par* π_{V_1}, π_{V_2} *et les applications* $\overline{P}_1 : \mathbf{C} \times V_1 \times V_2 \to \mathbf{C} \times V_1$, $\overline{P}_2 : \mathbf{C} \times V_1 \times V_2 \to \mathbf{C} \times V_2$.

DEMONSTRATION. Soit π sur $\mathbf{C} \times V_1 \times V_2$ cette quasi-topologie initiale. Pour chaque $(\lambda, x_1, x_2) \in \mathbf{C} \times V'_1 \times V_2$, on peut considérer des cartes $\varphi_1 : A_1 \to U_m$, $\varphi_2 : A_2 \to U'_n$ avec $x_1 \in A_1$, $x_2 \in A_2$; alors $\varphi_1 \times \varphi_2 : A_1 \times A_2 \to U_m \times U'_n$ est une carte locale de $V_1 \times V_2$ et, du corollaire antérieur et du fait que $\overline{\varphi}_1$, $\overline{\varphi}_2$ et $\overline{\varphi_1 \times \varphi_2}$ sont des quasi-homéomorphismes, il résulte que $\pi_{V_1 \times V_2} / \mathbf{C} \times A_1 \times A_2$ est la quasi-topologie initiale déterminée par $\pi_{V_1} / \mathbf{C} \times A_1$, $\pi_{V_2} / \mathbf{C} \times A_2$ et les applications $\overline{P}_{1/} : \mathbf{C} \times A_1 \times A_2 \to \mathbf{C} \times A_1$, $\overline{P}_{2/} : \mathbf{C} \times A_1 \times A_2 \to \mathbf{C} \times A_2$. Mais, en raisonnant comme dans la démonstration du corollaire antérieur, on voit que $\pi / \mathbf{C} \times A_1 \times A_2$ est aussi la quasi-topologie initiale déterminée par $\pi_{V_1} / \mathbf{C} \times A_1$, $\pi_{V_2} / \mathbf{C} \times A_2$ et les applications $\overline{P}_{1/}$, $\overline{P}_{2/}$, ce qui va entraîner que $\pi / \mathbf{C} \times A_1 \times A_2 = \pi_{V_1 \times V_2} / \mathbf{C} \times A_1 \times A_2$. Mais, parce que $\mathbf{C} \times A_1$ est ouvert dans π_{V_1} et $\mathbf{C} \times A_2$ est ouvert dans π_{V_2} et en tenant compte du fait que, $\overline{P}_1 : \pi \to \pi_{V_1}$ et $\overline{P}_2 : \pi \to \pi_{V_2}$ étant quasi-continues, elles sont continues pour les topologies associées, on voit que $\mathbf{C} \times A_1 \times A_2 = \overline{P}_1^{-1}(\mathbf{C} \times A_1) \cap \overline{P}_2^{-1}(\mathbf{C} \times A_2)$ est ouvert dans π, ce qui nous montre que π est le recollement des $\pi_{V_1 \times V_2} / \mathbf{C} \times A_1 \times A_2$. Donc $\pi = \pi_{V_1 \times V_2}$.

2.5. Sous-variétés.

Rappelons que, étant données les variétés analytiques complexes V et V' avec $V' \subseteq V$, on dit que V' est une sous-variété de V si V' est sous-espace topologique de V et si l'inclusion $\iota : V' \to V$ est une immersion.

2.5.1.

PROPOSITION. *Si* $m \leq n$, *la quasi-topologie* π_m *de* $\mathbf{C} \times \mathbf{C}^m$ *est la quasi-topologie initiale déterminée par* π_n *et l'application* $\xi : \mathbf{C} \times \mathbf{C}^m \to \mathbf{C} \times \mathbf{C}^n$ *définie par* $(\lambda, \vec{x}) \rightsquigarrow (\lambda, \vec{x}, \vec{0})$.

DEMONSTRATION. Soit π sur $\mathbf{C} \times \mathbf{C}^m$ cette quasi-topologie initiale; on doit voir que $\pi = \pi_m$. Si on représente par $\xi_{\vec{x}}$ la translation $\vec{y} \rightsquigarrow \vec{x} + \vec{y}$, on a $\xi_{(\lambda, \vec{x}, \vec{0})} \cdot \xi = \xi \cdot \xi_{(\lambda, \vec{x})}$, d'où résulte que chaque $\xi_{(\lambda, \vec{x})} : \pi \to \pi$ est quasi-continue, donc est aussi un quasi-homéomorphisme, de sorte qu'il nous suffit de voir que $\pi_m(0, \vec{0}) = \pi(0, \vec{0})$.

On remarque maintenant que, ξ étant injective, on peut identifier $\mathbf{C} \times \mathbf{C}^m$ à une partie de $\mathbf{C} \times \mathbf{C}^n$. Alors, pour $(\lambda, \vec{a}) \in \mathbf{C} \times \mathbf{C}^m$ avec $\lambda \neq 0$, on a $F_{(\lambda, \vec{a})} = F_{(\lambda, \vec{a}, \vec{0})}/\mathbf{C} \times \mathbf{C}^m$ et, pour $\vec{b} \in \mathbf{C}^{n-m}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$,

$$F_{(\lambda, \vec{a}, \vec{b})}/\mathbf{C} \times \mathbf{C}^m = (0, \vec{0})^{\varepsilon}$$

(on le voit facilement en tenant compte du fait que, d'après **2.1.4** avec les hyperplans verticaux d'abcisse λ, on a $F_{(\lambda, \vec{a})} = \mathbf{V}\mathcal{O}'_{(\lambda, \vec{a})}$, $F_{(\lambda, \vec{a}, \vec{b})} = \mathbf{V}\mathcal{O}'_{(\lambda, a, b)}$). Si $F \xrightarrow[\pi_m]{} (0, \vec{0})$, on a donc

$$F \supseteq F_{(\lambda_1, \vec{a}_1)} \cap \ldots \cap F_{(\lambda_k, \vec{a}_k)} = F_{(\lambda_1, \vec{a}_1, \vec{0})}/\mathbf{C} \times \mathbf{C}^m \cap \ldots \cap F_{(\lambda_k, \vec{a}_k, \vec{0})}/\mathbf{C} \times \mathbf{C}^m$$
$$= (F_{(\lambda_1, \vec{a}_1, \vec{0})} \cap \ldots \cap F_{(\lambda_k, \vec{a}_k, \vec{0})})/\mathbf{C} \times \mathbf{C}^m,$$

avec $F_{(\lambda_1, \vec{a}_1, \vec{0})} \cap \ldots \cap F_{(\lambda_k, \vec{a}_k, \vec{0})} \xrightarrow[\pi_n]{} (0, \vec{0}, \vec{0})$. Par suite $F \xrightarrow[\pi]{} (0, \vec{0})$. Réciproquement, si $F \xrightarrow[\pi]{} (0, \vec{0})$, on aura $F \supseteq G/\mathbf{C} \times \mathbf{C}^m$, $G \xrightarrow[\pi_n]{} (0, \vec{0}, \vec{0})$,

$$G \supseteq F_{(\lambda_1, \vec{a}_1, \vec{0})} \cap \ldots \cap F_{(\lambda_k, \vec{a}_k, \vec{0})} \cap F_{(\lambda_{k+1}, \vec{a}_{k+1}, \vec{b}_{k+1})} \cap \ldots \cap F_{(\lambda_l, \vec{a}_l, \vec{b}_l)}$$

$(\vec{b}_{k+i} \neq \vec{0}$, mais peut-être $k = 0)$, d'où

$$F \supseteq F_{(\lambda_1, \vec{a}_1, \vec{0})}/\mathbf{C} \times \mathbf{C}^m \cap \ldots \cap F_{(\lambda_k, \vec{a}_k, \vec{0})}/\mathbf{C} \times \mathbf{C}^m \cap$$
$$\cap F_{(\lambda_{k+1}, \vec{a}_{k+1}, \vec{b}_{k+1})}/\mathbf{C} \times \mathbf{C}^m \cap \ldots \cap F_{(\lambda_l, \vec{a}_l, \vec{b}_l)}/\mathbf{C} \times \mathbf{C}^m,$$

ce qui donne $F \supseteq F_{(\lambda_1, \vec{a}_1)} \cap \ldots \cap F_{(\lambda_k, \vec{a}_k)}$ si $k \neq 0$ et $F \supseteq (0, \vec{0})^{\varepsilon}$ si $k = 0$; dans tous les cas $F \xrightarrow[\pi_m]{} (0, \vec{0})$.

2.5.2.

COROLLAIRE. *Si $m \leq n$ et si U_m est un ouvert de $\mathbf{C}^m$ et U'_n un ouvert de $\mathbf{C}^n$ avec $U_m \times \{\vec{0}\} \subseteq U'_n$, alors $\pi_m/\mathbf{C} \times U_m$ est la quasi-topologie initiale définie par $\pi_n/\mathbf{C} \times U'_n$ et $\xi_/ : \mathbf{C} \times U_m \to \mathbf{C} \times U'_n$.*

La démonstration est purement catégorique et du même type que celle faite dans **2.4.5.**

2.5.3.

PROPOSITION. *Si V' est une sous-variété de V, alors $\pi_{V'}$ est la quasi-topologie induite sur $\mathbf{C} \times V'$ par π_V.*

DEMONSTRATION. Pour chaque $(\lambda, x) \in \mathbf{C} \times V'$, soient $\underline{\varphi}' : \underline{A}' \to \underline{U}'_m$, $\underline{\varphi} : \underline{A} \to \underline{U}_n$, avec $\underline{A}' \subseteq \underline{A}$, des cartes locales de V' et V avec $x \in \underline{A}'$. Si $\underline{\iota} : \underline{A}' \to \underline{A}$ est l'inclusion, alors $\underline{\varphi} . \underline{\varphi}'^{-1} : \underline{U}'_m \to \underline{U}_n$ sera différentiable et (par définition d'une immersion) de matrice jacobienne de rang m en tout point. Le théorème du rang constant garantit maintenant qu'on peut choisir d'autres cartes locales $\varphi' : A' \to U'_m$, $\varphi : A \to U_n$ avec $x \in A' \subset A$, telles que $\varphi . \varphi'^{-1} : U'_m \to U_n$ soit de la forme

$$y_1 = x_1, \dots, y_m = x_m, \; y_{m+1} = 0, \dots, y_n = 0,$$

d'où résulte, d'après le corollaire antérieur, que $\pi_m / \mathbf{C} \times U'_m$ est la quasi-topologie initiale déterminée par $\pi_n / \mathbf{C} \times U_n$ et $\overline{\varphi} . \overline{\varphi}'^{-1} = \overline{\varphi . \varphi'^{-1}} : \mathbf{C} \times U'_m \to \mathbf{C} \times U_n$. Donc, $\overline{\varphi}'$ et $\overline{\varphi}$ étant des quasi-homéomorphismes, $\pi_{V'} / \mathbf{C} \times A'$ est la quasi-topologie initiale déterminée par $\pi_V / \mathbf{C} \times A$ et l'inclusion $\iota : \mathbf{C} \times A' \hookrightarrow \mathbf{C} \times A$. Il s'ensuit que $\pi_{V'} / \mathbf{C} \times A'$ est la quasi-topologie initiale déterminée par π_V et l'inclusion $\iota : \mathbf{C} \times A' \to \mathbf{C} \times V$. Si π est la quasi-topologie induite sur $\mathbf{C} \times V'$ par π_V, on trouve encore (par un raisonnement de type catégorique) que $\pi_{V'} / \mathbf{C} \times A'$ est la quasi-topologie initiale déterminée par π et l'inclusion $\iota : \mathbf{C} \times A' \to \mathbf{C} \times V'$ et, V' ayant la topologie induite par celle de V et A' étant ouvert dans V', on aura $A' = A'' \cap V'$ avec A'' ouvert de V; par suite $\mathbf{C} \times A''$ est un ouvert de π_V (car il est ouvert dans $\mathbf{C} \times T_V$ et on tient compte de **2.3.6**); donc $\mathbf{C} \times A' = (\mathbf{C} \times V') \cap (\mathbf{C} \times A'')$ sera ouvert dans π, puisque l'application $\iota : \mathbf{C} \times V' \to \mathbf{C} \times V$ étant quasi-continue pour π et π_V, elle est continue pour les topologies associées. Ceci montre que π est le recollement des $\pi_{V'} / \mathbf{C} \times A'$ donc $\pi = \pi_{V'}$.

2.6. Variétés quotient.

Rappelons que, étant données une variété analytique complexe V et une relation d'équivalence ρ dans V, on appelle variété quotient de V par ρ une structure de variété sur l'ensemble V/ρ telle que l'application canonique $\tilde{\rho} : V \to V/\rho$ soit une submersion.

2.6.1.

LEMME. *Soit* U_m *un ouvert de* $\mathbf{C}^m$ *et* $f : U_m \to \mathbf{C}^n$ *une application telle que* $\bar{f} = 1_{\mathbf{C}} \times f : \mathbf{C} \times U_m \to \mathbf{C} \times \mathbf{C}^n$ *soit quasi-continue et quasi-ouverte pour* $\pi_m / \mathbf{C} \times U_m$ *et* π_n. *Alors* f *est une submersion.*

DEMONSTRATION. D'après **2.2.2** on sait déjà que f est holomorphe et on doit donc voir que, pour chaque $\vec{x}_o \in U_m$, l'application linéaire dérivée $A : \mathbf{C}^m \to \mathbf{C}^n$ est surjective; en raisonnant par translation, on peut supposer $\vec{x}_o = \vec{0}$, $f(\vec{x}_o) = \vec{0}$. Etant donné $\vec{b} \in \mathbf{C}^n$, on aura $F_{(1,\vec{b})} \underset{n}{\vec{\pi}} (0,\vec{0})$, donc, puisque $\bar{f}$ est quasi-ouverte, il existe $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_k \in \mathbf{C}^m$ avec

$$\bar{f}((F_{(1,\vec{b}_1)} \cap \dots \cap F_{(1,\vec{b}_k)}) / \mathbf{C} \times U_m) \subseteq F_{(1,\vec{b})},$$

c'est-à-dire

$$\bar{f}(F_{(1,\vec{b}_1)} / \mathbf{C} \times U_m) \cap \dots \cap \bar{f}(F_{(1,\vec{b}_k)} / \mathbf{C} \times U_m) \subseteq F_{(1,\vec{b})}.$$

Mais, comme on a vu dans la démonstration de la proposition 2.2.1, on a $\bar{f}(F_{(1,\vec{b}_i)} / \mathbf{C} \times U_m) \supseteq F_{(1,A\vec{b}_i)}$ et on obtient donc que

$$F_{(1,A\vec{b}_1)} \cap \dots \cap F_{(1,A\vec{b}_k)} \subseteq F_{(1,\vec{b})}.$$

Or, si, pour tout i, on avait $A\vec{b}_i \neq \vec{b}$, il existerait d'après **2.1.5** des $B_i \in F_{(1,A\vec{b}_i)}$ et $C_i \in F_{(1,\vec{b})}$ tels que $B_i \cap C_i = \{(0,\vec{0})\}$, d'où $\{(0,\vec{0})\} = (B_1 \cup \dots \cup B_k) \cap (C_1 \cap \dots \cap C_k)$, avec

$$B_1 \cup \dots \cup B_k \in F_{(1,A\vec{b}_1)} \cap \dots \cap F_{(1,A\vec{b}_k)} \subseteq F_{(1,\vec{b})},$$
$$C_1 \cap \dots \cap C_k \in F_{(1,\vec{b})};$$

donc $\{(0,\vec{0})\} \in F_{(1,b)}$, ce qui est absurde. Il existe donc un i vérifiant $A\vec{b}_i = \vec{b}$, ce qui montre que A est surjective.

2.6.2.

PROPOSITION. *Soient les variétés* V *et* V'; *soit* $f : V \to V'$ *une application telle que* $\bar{f} = 1_{\mathbf{C}} \times f : \mathbf{C} \times V \to \mathbf{C} \times V'$ *soit quasi-continue et quasi-ouverte pour* π_V *et* $\pi_{V'}$. *Alors* f *est une submersion.*

DEMONSTRATION. On sait déjà (**2.3.9**) que f est holomorphe. Etant donné $x_o \in V$, soit $\varphi : A \to U_m$ une carte de V et soit $\varphi' : A' \to U'_n$ une carte de V' avec $x_o \in A$ et $f(A) \subseteq A'$; soit $f' : A \to A'$ la restriction de f. Comme

$\mathbf{C} \times A$ est ouvert dans π_V et en vertu de **1.2.13**, **1.2.12** et **1.2.14**, $\overline{f'}$: $\mathbf{C} \times A \to \mathbf{C} \times A'$ est quasi-ouverte et quasi-continue pour $\pi_V/\mathbf{C}\times A$ et $\pi_{V'}/\mathbf{C}\times A'$, donc, $\overline{\varphi}$ et $\overline{\varphi'}$ étant des quasi-homéomorphismes,

$$\overline{\varphi' . f' . \varphi^{-1}} = \overline{\varphi'} . \overline{f'} . \overline{\varphi}^{-1}$$

est quasi-continue et quasi-ouverte pour $\pi_m/\mathbf{C}\times U_m$ et $\pi_n/\mathbf{C}\times U'_n$. En tenant compte du fait que $\mathbf{C} \times U'_n$ est ouvert dans π_n, il résulte de **1.2.14** et **1.2.13** que $\overline{\varphi' . f' . \varphi^{-1}}$ est encore quasi-continue et quasi-ouverte lorsque, dans le deuxième membre, on considère π_n; ce qui par le lemme antérieur entraîne que $\varphi' . f' . \varphi^{-1}$ est une submersion, c'est-à-dire f est lui-même une submersion.

2.6.3.

LEMME. *Si* $m \geq n$, *l'application* $\eta : \mathbf{C} \times \mathbf{C}^m \to \mathbf{C} \times \mathbf{C}^n$ *définie par* $(\lambda, \vec{x}, \vec{y}) \to (\lambda, \vec{x})$ *est quasi-continue et quasi-ouverte pour* π_m *et* π_n.

DEMONSTRATION. En tenant compte du fait que les translations dans π_m et π_n sont des quasi-homéomorphismes, on voit qu'il suffit de considérer le cas où $(\lambda, \vec{x}, \vec{y}) = (0, \vec{0}, \vec{0})$. Or, si $\mathcal{O}_{\vec{x}}$ et $\mathcal{O}_{\vec{y}}$ sont les filtres des voisinages de $\vec{x}$ dans $\mathbf{C}^n$ et de $\vec{y}$ dans $\mathbf{C}^{m-n}$, d'après 2.1.4 $F_{(1, \vec{x}, \vec{y})}$ admet pour base les

$$I_\delta(\{1\} \times V \times V'), \quad \delta > 0, \quad V \in \mathcal{O}_{\vec{x}}, \quad V' \in \mathcal{O}_{\vec{y}},$$

donc $\eta(F_{(1,\vec{x},\vec{y})})$ admet pour base les $\eta(I_\delta(\{1\}\times V\times V')) = I_\delta(\{1\} \times V)$; ceci montre que $\eta(F_{(1,\vec{x},\vec{y})}) = F_{(1,\vec{x})}$, donc aussi

$$\eta(F_{(1,\vec{x}_1,\vec{y}_1)} \cap \dots \cap F_{(1,\vec{x}_k,\vec{y}_k)}) = F_{(1,\vec{x}_1)} \cap \dots \cap F_{(1,\vec{x}_k)},$$

d'où il résulte que η est quasi-continue et quasi-ouverte dans $(0, \vec{0}, \vec{0})$.

2.6.4.

PROPOSITION. *Etant données les variétés* V *et* V' *et la submersion* f : $V \to V'$, *alors* $\overline{f} : \mathbf{C} \times V \to \mathbf{C} \times V'$ *est quasi-continue et quasi-ouverte pour* π_V *et* $\pi_{V'}$.

DEMONSTRATION. Etant donné $(\lambda_o, x_o) \in \mathbf{C} \times V$, soient des cartes $\underline{\varphi} : \underline{A} \to \underline{U}_m$ de V, $\underline{\varphi'} : \underline{A'} \to \underline{U'_n}$ de V' avec $x_o \in \underline{A}$ et $f(\underline{A}) \subseteq \underline{A'}$. Alors $\underline{\varphi'} . f_/ . \underline{\varphi}^{-1} : \underline{U}_m \to \underline{U'_n}$ est différentiable et de matrice jacobienne de rang n

en tout point, et le théorème de rang constant affirme qu'on peut choisir des cartes $\varphi: A \to U_m$ de V et $\varphi' : A' \to U'_n$ de V' avec $x_o \in A$, $\varphi(A) \subseteq A'$ et telles que, en notant $f' : A \to A'$ la restriction de f, $\varphi' . f' . \varphi^{-1} : U_m \to U'_n$ soit de la forme: $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2, \ldots, y_n = x_n$. Comme $\mathbf{C} \times U_m$ est ouvert dans π_m, en tenant compte de **1.2.14**, **1.2.13** et **1.2.15** ainsi que du lemme antérieur, on voit que $\overline{\varphi'} . \overline{f'} . \overline{\varphi}^{-1} = \overline{\varphi' . f' . \varphi^{-1}}$ est quasi-continue et quasi-ouverte pour $\pi_m / \mathbf{C} \times U_m$ et $\pi_n / \mathbf{C} \times U'_n$; donc, puisque $\overline{\varphi'}$ et $\overline{\varphi}$ sont des quasi-homéomorphismes, $\overline{f'} : \mathbf{C} \times A \to \mathbf{C} \times A'$ est quasi-continue et quasi-ouverte pour $\pi_V / \mathbf{C} \times A$ et $\pi_{V'} / \mathbf{C} \times A'$; comme $\mathbf{C} \times A'$ est ouvert dans $\pi_{V'}$, il s'ensuit que $\overline{f}_{/} : \mathbf{C} \times A \to \mathbf{C} \times V'$ est quasi-continue et quasi-ouverte pour $\pi_V / \mathbf{C} \times A$ et $\pi_{V'}$ (**1.2.14** et **1.2.13**), de sorte que $\overline{f} : \mathbf{C} \times V \to \mathbf{C} \times V'$ est quasi-continue et quasi-ouverte pour π_V et $\pi_{V'}$, car $\mathbf{C} \times A$ est ouvert dans π_V et l'on utilise **1.2.1** et **1.2.16**.

2.6.5.

COROLLAIRE. *Si V/ρ est une variété quotient de la variété V par la relation d'équivalence ρ, et si $\tilde{\rho}: V \to V/\rho$ est l'application canonique, alors π_V/ρ est la quasi-topologie finale déterminée par π_V et l'application $\overline{\tilde{\rho}} = 1_{\mathbf{C}} \times \tilde{\rho} : \mathbf{C} \times V \to \mathbf{C} \times V/\rho$.*

Ceci résulte de la proposition antérieure et de **1.2.12**.

3. Les quasi-variétés analytiques complexes.

3.1. Quasi-variétés. Applications quasi-holomorphes.

3.1.1.

DEFINITION. On appellera *quasi-variété sur l'ensemble* V un couple (V, π), où π est une quasi-topologie sur $\mathbf{C} \times V$ telle que :

QV 1) L'application $q'_V : \mathbf{C} \times V \to \mathbf{C}$, $(\lambda, x) \rightsquigarrow \lambda$, est quasi-continue pour π et $\mathbf{C}$.

QV 2) Pour chaque $a \in V$, l'application $\xi_{V,a} : \mathbf{C} \to \mathbf{C} \times V$, $\lambda \rightsquigarrow (\lambda, a)$, est quasi-continue de $\mathbf{C}$ dans π.

QV 3) Pour chaque $\lambda_o \in \mathbf{C}$, l'application $\eta_{V, \lambda_o} : \mathbf{C} \times V \to \mathbf{C} \times V$, $(\lambda, x) \rightsquigarrow (\lambda_o + \lambda, x)$, est quasi-continue de π dans π.

3.1.2.

COROLLAIRE. *L'application $\xi_{V,a}$ définit alors un quasi-homéomorphisme* *de* $\dot{\mathbf{C}}$ *sur* $\pi/\mathbf{C}\times\{a\}$.

3.1.3.

COROLLAIRE. *L'application* η_{V,λ_o} *est alors un quasi-homéomorphisme.*

3.1.4.

COROLLAIRE. *L'application* q'_V *est alors quasi-ouverte de* π *dans* $\mathbf{C}$.

DEMONSTRATION. En effet, sa restriction à chaque $\mathbf{C}\times\{a\}$ est un quasi-homéomorphisme, donc est quasi-ouverte, et l'on tient compte de **1.2.16**.

3.1.5.

PROPOSITION. *Si* V *est une variété analytique complexe,* (V, π_V) *est une quasi-variété.*

Ceci n'est qu'une reformulation des propositions 2.3.11, 2.3.12 et 2.3.13.

3.1.6.

DEFINITION. Etant données les quasi-variétés (V,π) et (V',π'), on dit qu'une application $f: V \to V'$ est *quasi-holomorphe pour* (V,π) *et* (V',π') si l'application $\bar{f} = 1_{\mathbf{C}} \times f : \mathbf{C}\times V \to \mathbf{C}\times V'$ est quasi-continue pour π et π'.

On appelle *application quasi-holomorphe* un triplet $((V',\pi'),f,(V,\pi))$ où (V,π) et (V',π') sont des quasi-variétés et $f: V\to V'$ une application quasi-holomorphe pour (V,π) et (V',π').

3.1.7.

COROLLAIRE. *La classe des applications quasi-holomorphes, munie de l'opération évidente, est une catégorie* $\mathcal{QV}$ *admettant la classe des quasi-variétés pour classe d'objets, et on a un foncteur d'oubli* $p_{\mathcal{QV}}$ *de* $\mathcal{QV}$ *vers la catégorie* $\mathcal{E}ns$ *des ensembles;* $p_{\mathcal{QV}}$ *est un foncteur d'homomorphismes saturé.*

3.1.8.

DEFINITION. On fixe les notations $\mathcal{QV}$ et $p_{\mathcal{QV}}$ pour la catégorie du corollaire antérieur et son foncteur d'oubli. On représente par $\mathcal{V}$ la catégorie des applications holomorphes entre variétés analytiques complexes et par $p_{\mathcal{V}}$ son foncteur d'oubli vers $\mathcal{E}ns$.

3.1.9.

COROLLAIRE. *L'application qui associe à chaque variété V la quasi-variété (V, π_V) identifie $\mathcal{V}$ à une sous-catégorie pleine de $\mathcal{QV}$, d'une façon compatible avec les foncteurs d'oubli.*

DEMONSTRATION. La proposition **2.3.10** garantit qu'on n'identifie pas d'unités et la proposition **2.3.9** montre que l'image de $\mathcal{V}$ est une sous-catégorie pleine de $\mathcal{QV}$.

3.1.10.

PROPOSITION. *Etant données les quasi-variétés (V, π) et (V', π'), toute application constante $f : V \to V'$ est quasi-holomorphe.*

DEMONSTRATION. On peut déjà écarter le cas trivial où V est vide. Si a est la valeur constante de f, alors $\overline{f} : \mathbf{C} \times V \to \mathbf{C} \times V'$ est la composée de $q'_V : \mathbf{C} \times V \to \mathbf{C}$ (quasi-continue : $\pi \to \mathbf{C}$) et $\xi_{V', a} : \mathbf{C} \to \mathbf{C} \times V'$ (quasi-continue : $\mathbf{C} \to \pi'$), donc $\overline{f}$ est quasi-continue de π dans π', c'est-à-dire f est quasi-holomorphe pour (V, π) et (V', π').

3.2. Les quasi-variétés initiales et finales.

Les notions de structure initiale et de structure finale ont un sens en rapport avec un foncteur fidèle $p : \mathcal{L}^{\cdot} \to \mathcal{D}^{\cdot}$ et ont de très bonnes propriétés quand ce foncteur est d'homomorphismes saturé (voir par exemple [11], où l'on appelle catégorie d'ensembles structurés une catégorie munie d'un foncteur d'homomorphismes saturé vers $\mathcal{E}ns$, ou, de façon moins explicitement catégorique, [15]). Pour nous, les mots «quasi-variété initiale» et «quasi-variété finale» signifieront structure initiale et structure finale associées au foncteur $p_{\mathcal{QV}} : \mathcal{QV} \to \mathcal{E}ns$. On sait que les structures initiales vont donner, comme cas particuliers, des sous-structures et des limites projectives compatibles avec le foncteur d'oubli et, de façon duale, les structures finales vont donner des structures quotient et des limites inductives compatibles avec le foncteur d'oubli.

3.2.1.

PROPOSITION. *Soient les quasi-variétés (V_i, π_i), $i \in I$, l'ensemble V et les applications $f_i : V \to V_i$. Soit π sur $\mathbf{C} \times V$ la quasi-topologie initiale* *déterminée par les π_i sur $\mathbf{C} \times V_i$ et la topologie de $\mathbf{C}$ et les applications $\overline{f}_i$: $\mathbf{C} \times V \to \mathbf{C} \times V_i$, $q'_V : \mathbf{C} \times V \to \mathbf{C}$. Alors (V, π) est une quasi-variété initiale déterminée par les (V_i, π_i) et les f_i : $V \to V_i$.*

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbf{C}\times V_i \\
\mathbf{C}\times V \arrow[ur, "\overline{f}_i"] \arrow[r, "\overline{f}_j"] \arrow[dr, "q'_V"'] & \mathbf{C}\times V_j \\
 & \mathbf{C}
\end{tikzcd}$$

DEMONSTRATION. Voyons, pour commencer, que (V, π) est une quasi-variété : La propriété $(QV\,1)$ est évidente. En ce qui concerne $(QV\,2)$, pour chaque $a \in V$, $\overline{f}_i . \xi_{V,a} = \xi_{V_i, f_i(a)}$ est quasi-continue pour $\mathbf{C}$ et π_i et $q'_V . \xi_{V,a} = 1_{\mathbf{C}}$, ce qui montre que $\xi_{V,a}$ est quasi-continue pour $\mathbf{C}$ et π. Enfin, en ce qui concerne $(QV\,3)$, pour chaque $\lambda_o \in \mathbf{C}$, $\overline{f}_i . \eta_{V,\lambda_o} = \eta_{V_i, \lambda_o} . \overline{f}_i$ est quasi-continue pour π et π_i et $q'_V . \eta_{V,\lambda_o} = \eta_{\lambda_o} . q'_V$ (où $\eta_{\lambda_o} : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, $\lambda \rightsquigarrow \lambda_o + \lambda$) est quasi-continue pour π et $\mathbf{C}$, ce qui montre que η_{V,λ_o} est quasi-continue pour π et π. Il est maintenant clair que les $f_i : V \to V_i$ sont quasi-holomorphes pour (V, π) et (V_i, π_i). Soit enfin une quasi-variété (V', π') et une application $f : V' \to V$ telle que chaque $f_i . f$ soit quasi-holomorphe pour (V', π') et (V_i, π_i); alors $\overline{f}_i . \overline{f} = \overline{f_i . f}$ est quasi-continue pour π' et π_i et $q'_V . \overline{f} = q'_{V'}$ est quasi-continue pour π' et $\mathbf{C}$, donc $\overline{f}$ est quasi-continue pour π' et π, c'est-à-dire f est quasi-holomorphe pour (V', π') et (V, π).

3.2.2.

COROLLAIRE. *Si $I \neq \emptyset$, π est aussi la quasi-topologie initiale déterminée pour les π_i et les $\overline{f}_i : \mathbf{C} \times V \to \mathbf{C} \times V_i$.*

DEMONSTRATION. Il suffit de remarquer que, étant donné un espace quasi-topologique (E, λ) et une application $g : E \to \mathbf{C} \times V$ telle que chaque $\overline{f}_i . g$ soit quasi-continue pour λ et π_i, alors $q'_V . g = q'_{V_i} . \overline{f}_i . g$ est quasi-continue pour λ et $\mathbf{C}$, donc g est quasi-continue pour λ et π.

3.2.3.

PROPOSITION. *Soient les quasi-variétés (V_i, π_i), $i \in I$, l'ensemble V et les applications $f_i : V_i \to V$. Soit π sur $\mathbf{C} \times V$ la quasi-topologie finale* *déterminée par les applications* $\overline{f}_i : \mathbf{C} \times V_i \to \mathbf{C} \times V$, $\xi_{V,a} : \mathbf{C} \to \mathbf{C} \times V$ $(i \in I,\ a \in V)$, *et les quasi-topologies* π_i *et* $\mathbf{C}$. *Alors* (V, π) *est une quasi-variété finale déterminée par les* (V_i, π_i) *et les* $f_i : V_i \to V$.

$$\begin{tikzcd}
(\mathbf{C}\times V_i, \pi_i) \arrow[dr, "\overline{f}_i"] & \\
(\mathbf{C}\times V_j, \pi_j) \arrow[r, "\overline{f}_j"] & \mathbf{C}\times V \\
\arrow[ur, "\xi_{V,a}"'] &
\end{tikzcd}$$

DEMONSTRATION. Voyons, pour commencer, que (V, π) est une quasi-variété : En ce qui concerne $(QV\ 1)$, $q'_V \cdot \overline{f}_i = q'_{V_i}$ est quasi-continue de π_i dans $\mathbf{C}$ et $q'_V \cdot \xi_{V,a} = 1_{\mathbf{C}}$, donc q'_V est quasi-continue de π dans $\mathbf{C}$; La propriété $(QV\ 2)$ est évidente. Enfin, en ce qui concerne $(QV\ 3)$, pour chaque $\lambda_o \in \mathbf{C}$, $\eta_{V,\lambda_o} \cdot \overline{f}_i = \overline{f}_i \cdot \eta_{V_i, \lambda_o}$ est quasi-continue pour π_i et π et $\eta_{V,\lambda_o} \cdot \xi_{V,a} = \xi_{V,a} \cdot \eta_{\lambda_o}$ (où $\eta_{\lambda_o} : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, $\lambda \rightsquigarrow \lambda_o + \lambda$) quasi-continue de $\mathbf{C}$ dans π, donc η_{V,λ_o} est quasi-continue de π dans π. Il est clair que chaque $f_i : V_i \to V$ est quasi-holomorphe pour (V_i, π_i) et (V, π). Soit enfin une quasi-variété (V', π') et une application $f : V \to V'$ telle que chaque $f.f_i$ soit quasi-holomorphe pour (V_i, π_i) et (V', π'). Alors $\overline{f}.\overline{f}_i = \overline{f.f_i}$ est quasi-continue pour π_i et π' et $\overline{f}.\xi_{V,a} = \xi_{V', f(a)}$ est quasi-continue pour $\mathbf{C}$ et π', donc $\overline{f}$ est quasi-continue pour π et π', c'est-à-dire $f : V \to V'$ est quasi-holomorphe pour (V, π) et (V', π').

3.2.4.

COROLLAIRE. π *est aussi la quasi-topologie finale déterminée par les applications* $\overline{f}_i : \mathbf{C} \times V_i \to \mathbf{C} \times V$ *et* $\xi_{V,a} : \mathbf{C} \to \mathbf{C} \times V$ *où* $i \in I$, $a \in V - \bigcup_i f_i(V_i)$, *et les quasi-topologies* π_i *sur* $\mathbf{C} \times V_i$ *et* $\mathbf{C}$.

DEMONSTRATION. Il suffit de remarquer que, étant donné un espace quasi-topologique (E, λ) et une application $g : \mathbf{C} \times V \to E$ telle que chaque $g.\overline{f}_i$ $(i \in I)$ soit quasi-continue pour π_i et λ et chaque $g.\xi_{V,a}$ $(a \notin \bigcup_i f_i(V_i))$ quasi-continue pour $\mathbf{C}$ et λ, pour chaque $a \in \bigcup_i f_i(V_i)$, $a = f_i(a_i)$, $g.\xi_{V,a} = g.\overline{f}_i.\xi_{V_i, a_i}$ est quasi-continue pour $\mathbf{C}$ et λ, donc g est quasi-continue pour π et λ.

3.3. La structure canonique de quasi-variété sur l'espace $Hom((V', \pi'), (V, \pi))$ *des applications quasi-holomorphes de* (V, π) dans (V', π').

On va voir qu'on peut munir chaque espace fonctionnel $Hom((V', \pi'), (V, \pi))$ d'une structure de quasi-variété canonique. La raison pour laquelle cette structure est canonique est empruntée à [11] (dans le langage duquel la catégorie $\mathfrak{Q}\mathfrak{V}$ avec son foncteur d'oubli $p_{\mathfrak{Q}\mathfrak{V}}$ vers $\mathfrak{Ens}$ sera une «catégorie d'ensembles structurés *fermée*»).

Dans ce qui suit, et pour simplifier les notations, on désignera l'ensemble $Hom((V', \pi'),(V, \pi))$ des applications quasi-holomorphes de (V, π) dans (V', π') simplement par $Hom(V', V)$. On notera ξ l'application d'évaluation : $Hom(V', V) \times V \to V'$, $(f, x) \rightsquigarrow f(x)$.

3.3.1.

DEFINITION. Soient les quasi-variétés $(V, \pi),(V', \pi')$. On appelle *structure canonique de quasi-variété sur* $Hom(V', V)$ une quasi-variété $(Hom(V', V), \bar{\pi})$ telle que :

1) L'application $\xi : Hom(V', V) \times V \to V'$ soit quasi-holomorphe.

2) Etant données une quasi-variété (V'', π'') et une application $f : V'' \to Hom(V', V)$ telle que l'application $\tilde{f} : V'' \times V \to V'$, $(x'', x) \rightsquigarrow f(x'')(x)$, soit quasi-holomorphe, f est quasi-holomorphe.

3.3.2.

PROPOSITION. *S'il existe une telle structure, elle est unique.*

DEMONSTRATION. Supposons que l'on ait deux structures canoniques $(Hom(V', V), \bar{\pi})$ et $(Hom(V', V), \bar{\pi}')$. Considérant l'application $1_{Hom(V', V)} : Hom(V', V) \to Hom(V', V)$, l'application $\tilde{1}_{Hom(V', V)}$: $Hom(V', V) \times V \to V'$ est définie par $(f, x) \rightsquigarrow f(x)$ et est donc quasi-holomorphe de $(Hom(V', V), \bar{\pi}) \times (V, \pi)$ dans (V', π'), ce qui entraîne que $1_{Hom(V', V)}$ est quasi-holomorphe de $(Hom(V', V), \bar{\pi})$ dans $(Hom(V', V), \bar{\pi}')$; et symétriquement aussi $1_{Hom(V', V)}$ est quasi-holomorphe de $(Hom(V', V), \bar{\pi}')$ dans $(Hom(V', V), \bar{\pi})$; donc $\bar{\pi}' = \bar{\pi}$.

3.3.3.

PROPOSITION. *Soient les quasi-variétés* $(V, \pi),(V', \pi')$. *Pour chaque* $(\lambda, f) \in \mathbf{C} \times Hom(V', V)$ *notons* $\hat{\pi}(\lambda, f)$ *la classe des filtres* F *sur* $\mathbf{C} \times Hom(V', V)$ *tels que, pour chaque* $a \in V$ *et* $G \underset{\pi}{\to} (\lambda, a)$, *on ait* $\bar{\xi}(<F, G>) \underset{\pi'}{\to} (\lambda, f(a))$, *avec* $\bar{\xi} = 1_{\mathbf{C}} \times \xi : \mathbf{C} \times Hom(V', V) \times V \to \mathbf{C} \times V'$. *Alors* $\hat{\pi}$ *est une quasi-topologie sur* $\mathbf{C} \times Hom(V', V)$; *si* $\bar{\pi}$ *est la quasi-*

topologie initiale sur $\mathbf{C} \times Hom(V', V)$ *déterminée par les applications* $1_{\mathbf{C} \times Hom(V',V)}$ *et* $q'_{Hom(V',V)}$ *et les quasi-topologies* $\hat{\pi}$ *et* $\mathbf{C}$, *alors* $\bar{\pi}$ *définit sur* $Hom(V', V)$ *une structure canonique de quasi-variété.*

$$\begin{tikzcd} & (\mathbf{C} \times Hom(V', V), \hat{\pi}) \\ \mathbf{C} \times Hom(V', V) \arrow[ur, "1_{\mathbf{C} \times Hom(V', V)}"] \arrow[r, "q'_{Hom(V', V)}"'] & \mathbf{C} \end{tikzcd}$$

DEMONSTRATION.

1) Nous allons voir que $\hat{\pi}$ est une quasi-topologie sur $\mathbf{C} \times Hom(V', V)$. Etant donné $(\lambda, f) \in \mathbf{C} \times Hom(V', V)$, si $a \in V$ et $F \underset{\pi}{\to} (\lambda, a)$, on obtient $\bar{\xi}(<(\lambda, f)^{\varepsilon}, F>) \supseteq \bar{f}(F)$, parce que $\bar{f}(A) \supseteq \bar{\xi}(\bar{P}_1^{-1}(\{(\lambda, f)\}) \cap \bar{P}_2^{-1}(A))$ pour chaque $A \in F$, un élément de $\bar{P}_1^{-1}(\{(\lambda, f)\}) \cap \bar{P}_2^{-1}(A)$ ayant la forme (λ, f, x) avec $(\lambda, x) \in A$, d'où $\bar{\xi}(\lambda, f, x) = (\lambda, f(x)) = \bar{f}(\lambda, x)$. Donc, comme $\bar{f}(F) \underset{\pi'}{\to} (\lambda, f(a))$ (f quasi-holomorphe), on a

$$\bar{\xi}(<(\lambda, f)^{\varepsilon}, F>) \underset{\pi'}{\to} (\lambda, f(a)),$$

ce qui montre que $(\lambda, f)^{\varepsilon} \underset{\hat{\pi}}{\to} (\lambda, f)$. En tenant compte du fait que

$$\bar{\xi}(<F_1 \cap F_2, G>) = \bar{\xi}(<F_1, G> \cap <F_2, G>) = \bar{\xi}(<F_1, G>) \cap \bar{\xi}(<F_2, G>)$$

(voir **2.4.3**), on voit que, si $F_1, F_2 \underset{\hat{\pi}}{\to} (\lambda, f)$, alors $F_1 \cap F_2 \underset{\hat{\pi}}{\to} (\lambda, f)$. Enfin, il est immédiat que, si $F_1 \underset{\hat{\pi}}{\to} (\lambda, f)$ et $F_2 \supseteq F_1$, on a $F_2 \underset{\hat{\pi}}{\to} (\lambda, f)$.

2) Soit donc $\bar{\pi}$ la quasi-topologie sur $\mathbf{C} \times Hom(V', V)$ définie dans l'énoncé. Si $\bar{\hat{\pi}}$ sur $\mathbf{C} \times Hom(V', V) \times V$ est la quasi-topologie initiale déterminée par les projections :

$$\mathbf{C} \times Hom(V', V) \times V \to (\mathbf{C} \times Hom(V', V), \hat{\pi});$$

$$\mathbf{C} \times Hom(V', V) \times V \to (\mathbf{C} \times V, \pi)$$

compte tenu de **2.4.2**, $\bar{\xi} : \mathbf{C} \times Hom(V', V) \times V \to \mathbf{C} \times V'$ est quasi-continue pour $\bar{\hat{\pi}}$ et π'. Si $\bar{\bar{\pi}}$ sur $\mathbf{C} \times Hom(V', V) \times V$ est la quasi-topologie initiale déterminée par les projections :

$$\mathbf{C} \times Hom(V', V) \times V \to (\mathbf{C} \times Hom(V', V), \bar{\pi}),$$

$$\mathbf{C} \times Hom(V', V) \times V \to (\mathbf{C} \times V, \pi),$$

on obtient que $1_{\mathbf{C} \times Hom(V', V) \times V}$ est quasi-continue de $\bar{\bar{\pi}}$ dans $\bar{\hat{\pi}}$, et donc $\bar{\xi}$ est aussi quasi-continue pour $\bar{\bar{\pi}}$ et π', ce qui voudra précisément dire que $\xi : Hom(V', V) \times V \to V'$ est quasi-holomorphe, dès qu'on aura démontré (ce qui reste à faire) que $\overline{\pi}$ définit une structure de quasi-variété sur $Hom(V', V)$.

3) Soit (V'', π'') une quasi-variété et $f : V'' \to Hom(V', V)$ une application telle que, si $\tilde{f} : V'' \times V \to V'$ est l'application $(x'', x) \rightsquigarrow f(x'')(x)$, alors $\tilde{\tilde{f}} = 1_{\mathbf{C}} \times \tilde{f} : \mathbf{C} \times V'' \times V \to \mathbf{C} \times V'$ soit quasi-continue de $\tilde{\pi}$ dans π', où $\tilde{\pi}$ est la quasi-topologie initiale sur $\mathbf{C} \times V'' \times V$ déterminée par les projections $\mathbf{C} \times V'' \times V \to (\mathbf{C} \times V'', \pi'')$ et $\mathbf{C} \times V'' \times V \to (\mathbf{C} \times V, \pi)$ (c'est-à-dire $\tilde{f} : V'' \times V \to V'$ quasi-holomorphe). On va voir que l'application $\overline{f} : \mathbf{C} \times V'' \to \mathbf{C} \times Hom(V', V)$ est quasi-continue pour π'' et $\overline{\pi}$; en tenant compte du fait que $q'_{Hom(V', V)} \cdot \overline{f} = q'_{V''} : \mathbf{C} \times V'' \to \mathbf{C}$ est quasi-continue pour π'' et $\mathbf{C}$, il nous suffit de voir que $\overline{f}$ est quasi-continue pour π'' et $\hat{\pi}$. Soit $F \underset{\pi''}{\to} (\lambda, b)$; on doit voir que $\overline{f}(F) \underset{\hat{\pi}}{\to} (\lambda, f(b))$, c'est-à-dire que, pour tout $a \in V$ et $G \underset{\pi}{\to} (\lambda, a)$, on a $\overline{\xi}(<\overline{f}(F), G>) \underset{\pi'}{\to} (\lambda, f(b)(a))$; il nous suffit de voir que $\overline{\xi}(<\overline{f}(F), G>) \supseteq f(<F, G>)$ (tenir compte de **2.4.2**). Or, ceci est vrai, car pour $A \in F$ et $B \in G$, on a $\tilde{\tilde{f}}(\overline{P}_1^{-1}(A) \cap \overline{P}_2^{-1}(B)) \supseteq \overline{\xi}(\overline{P}_1^{-1}(\overline{f}(A)) \cap \overline{P}_2^{-1}(B))$, un élément de $\overline{P}_1^{-1}(\overline{f}(A)) \cap \overline{P}_2^{-1}(B)$ ayant la forme $(\lambda', f(x), y)$, avec $(\lambda', x) \in A$ $(\lambda', y) \in B$, de sorte que $\overline{\xi}(\lambda', f(x), y) = (\lambda', f(x)(y)) = (\lambda', \tilde{f}(x, y)) = \tilde{\tilde{f}}(\lambda', x, y)$ avec $(\lambda', x, y) \in \overline{P}_1^{-1}(A) \cap \overline{P}_2^{-1}(B)$. Mais ceci n'est que la propriété 2) de la définition 3.3.1, dès qu'on aura vu que $\overline{\pi}$ définit sur $Hom(V', V)$ une structure de quasi-variété.

4) On va maintenant voir que $\overline{\pi}$ définit sur $Hom(V', V)$ une structure de quasi-variété, ce que terminera la démonstration de notre proposition. La propriété $(QV\ 1)$ est évidente. En ce qui concerne $(QV\ 2)$, étant donné $f \in Hom(V', V)$, on peut considérer sur $\{f\}$ sa structure de variété (dimension zéro) à laquelle correspond la structure de quasi-variété $(\{f\}, \pi_{\{f\}})$ qui, par **3.1.10**, est un $\emptyset$-produit de la catégorie $\mathfrak{QV}$, ce qui entraîne que la quasi-variété produit $\{f\} \times V$ est isomorphe dans $\mathfrak{QV}$ à V par $(f, x) \rightsquigarrow x$, et on a donc une application quasi-holomorphe $\{f\} \times V \to V'$ définie par $(f, x) \rightsquigarrow f(x)$; ceci (partie 3) entraîne que, étant donné $\theta : \{f\} \to Hom(V', V)$, $f \rightsquigarrow f$, alors $\overline{\theta} : \mathbf{C} \times \{f\} \to \mathbf{C} \times Hom(V', V)$ est quasi-continue pour $\pi_{\{f\}}$ et $\overline{\pi}$, donc $\xi_{Hom(V', V), f} = \overline{\theta} \cdot \xi_{\{f\}, f}$ est quasi-continue de $\mathbf{C}$ dans

$\overline{\pi}$. Enfin, en ce qui concerne $(QV\,3)$, si $\lambda_o \in \mathbf{C}$, pour voir que l'application $\eta_{Hom(V',V),\lambda_o} : \mathbf{C} \times Hom(V',V) \to \mathbf{C} \times Hom(V',V)$ est quasi-continue de $\overline{\pi}$ dans $\overline{\pi}$, on remarque qu'il suffit de voir qu'elle est quasi-continue de $\hat{\pi}$ dans $\hat{\pi}$, car alors elle le sera de $\overline{\pi}$ dans $\hat{\pi}$ et sa composée avec $q'_{Hom(V',V)} : \mathbf{C} \times Hom(V',V) \to \mathbf{C}$, c'est-à-dire $\eta_{\lambda_o} \cdot q'_{Hom(V',V)}$ ($\eta_{\lambda_o} : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, $\lambda \rightsquigarrow \lambda_o + \lambda$) sera quasi-continue de $\overline{\pi}$ dans $\mathbf{C}$. Or, si $F \underset{\hat{\pi}}{\rightarrow} (\lambda, f)$, pour chaque $G \underset{\pi}{\rightarrow} (\lambda + \lambda_o, a)$ on a $G = \eta_{V,\lambda_o}(G')$ avec $G' \underset{\pi}{\rightarrow} (\lambda, a)$ $(G' = \eta_{V,-\lambda_o}(G))$ et alors

$$\langle \eta_{Hom(V',V),\lambda_o}(F), G \rangle = \langle \eta_{Hom(V',V),\lambda_o}(F), \eta_{V,\lambda_o}(G')\rangle = $$
$$= \eta_{Hom(V',V)\times V,\lambda_o}(\langle F, G'\rangle),$$
$$\overline{\xi}(\langle \eta_{Hom(V',V),\lambda_o}(F), G\rangle = \overline{\xi}(\eta_{Hom(V',V)\times V,\lambda_o}(\langle F, G'\rangle)) =$$
$$= \eta_{V',\lambda_o}(\overline{\xi}(\langle F, G'\rangle)) \underset{\pi'}{\rightarrow} (\lambda + \lambda_o, f(a))$$

(car $\overline{\xi}(\langle F, G'\rangle) \underset{\pi'}{\rightarrow} (\lambda, f(a))$, ce qui montre que

$$\eta_{Hom(V',V),\lambda_o}(F) \underset{\hat{\pi}}{\rightarrow} (\lambda + \lambda_o, f).$$

3.3.4.

PROPOSITION. *Soient les quasi-variétés* (V, π), (V', π') *et* (V'', π''). *En considérant sur les espaces fonctionnels les structures canoniques de quasi-variété, on a une application quasi-holomorphe* $\eta : Hom(V'', V') \times Hom(V', V) \to Hom(V'', V)$, $(g, f) \rightsquigarrow g.f$.

DEMONSTRATION. Pour voir que η est quasi-holomorphe, il suffit de voir que l'application

$$Hom(V'', V') \times Hom(V', V) \times V \to V'', \quad (g, f, x) \rightsquigarrow g.f(x)$$

est quasi-holomorphe, ce qui résulte de sa décomposition :

$$Hom(V'', V') \times Hom(V', V) \times V \to Hom(V'', V') \times V') \to V'',$$
$$(g, f, x) \to (g, f(x)) \to g(f(x)).$$

3.3.5.

REMARQUE. Pour la démonstration de la proposition antérieure on n'a pas utilisé la construction explicite de la structure canonique de quasi-variété sur $Hom(V', V)$, mais seulement sa définition «universelle», et c'est pourquoi la démonstration est identique à celle du fait analogue pour les quasi-topologies. D'autres résultats des quasi-topologies sont aussi valables pour les quasi-variétés avec la même démonstration.

3.4. Propriétés de compatibilité du foncteur inclusion $\iota : \mathfrak{V} \to \mathfrak{Q}\mathfrak{V}$.

3.4.1.

PROPOSITION. *Le foncteur* $\iota : \mathfrak{V} \to \mathfrak{Q}\mathfrak{V}$ *est compatible avec les produits finis.*

Ceci résulte de la proposition 2.4.6 et du corollaire 3.2.2.

3.4.2.

PROPOSITION. *Le foncteur* $\iota : \mathfrak{V} \to \mathfrak{Q}\mathfrak{V}$ *est compatible avec les «bonnes» sous-structures.*

DEMONSTRATION. Dans la catégorie $\mathfrak{V}$ des variétés analytiques complexes on appelle «bonnes» sous-structures, les sous-variétés. Notre proposition résulte alors de la proposition 2.5.3 et du corollaire 3.2.2.

3.4.3.

PROPOSITION. *Le foncteur* $\iota : \mathfrak{V} \to \mathfrak{Q}\mathfrak{V}$ *est compatible avec les «bonnes» structures quotients.*

DEMONSTRATION. Dans la catégorie $\mathfrak{V}$ des variétés analytiques complexes, on appelle «bonnes» structures quotients les variétés quotients. Notre proposition résulte alors des corollaires 2.6.5 et 3.2.4.

3.5. La quasi-topologie d'une quasi-variété. Le recollement de quasi-variétés.

3.5.1.

DEFINITION. Etant donné la quasi-variété analytique complexe (V, π), on appelle: *quasi-topologie associée* la quasi-topologie finale T sur V déterminée par la quasi-topologie π sur $\mathbf{C} \times V$ et l'application q_V : $\mathbf{C} \times V \to V$, $(\lambda, x) \rightsquigarrow x$.

3.5.2.

COROLLAIRE. *Si* V *est une variété analytique complexe, alors la quasi-topologie associée à la quasi-variété* (V, π_V) *est la topologie* T_V *de* V.

Ceci résulte de 2.3.8.

3.5.3.

COROLLAIRE. *Etant donnés les quasi-variétés* (V,π), (V',π') *et* $f: V \to V'$ *quasi-holomorphe pour* (V,π) *et* (V',π'), *alors* f *est quasi-continue pour les quasi-topologies associées* T *et* T'.

$$\begin{tikzcd} \mathbf{C}\times V \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[d, "q_V"'] & \mathbf{C}\times V' \arrow[d, "q_{V'}"] \\ V \arrow[r, "f"'] & V' \end{tikzcd}$$

DEMONSTRATION. On a $f.q_V = q_{V'}.\bar{f}$ quasi-continue pour T' et π_V, donc par définition de structure finale, $f: V \to V'$ est quasi-continue pour T et T'.

3.5.4.

PROPOSITION. *Soit* (V,π) *une quasi-variété,* T *la quasi-topologie associée,* $V' \subseteq V$, (V',π') *la quasi-variété induite et* T' *la quasi-topologie associée à* (V',π'). *Alors* T' *est la quasi-topologie induite par* T.

DEMONSTRATION. D'après **3.2.2**, $\pi' = \pi/\mathbf{C}\times V'$ et, en posant $T' = T/V'$, d'après **1.1.10** T' est la quasi-topologie finale déterminée par π' et $q_{V'}: \mathbf{C}\times V' \to V'$, donc T' est la quasi-topologie associée à (V',π').

3.5.5.

REMARQUE. Cependant, si (V_1,π_1) et (V_2,π_2) sont des quasi-variétés avec les quasi-topologies T_1 et T_2, et si $(V_1\times V_2,\pi)$ est la quasi-variété produit avec la quasi-topologie T, alors T peut ne pas être la quasi-topologie produit $T_1\times T_2$. Ceci est évidemment vrai si (V_1,π_1) et (V_2,π_2) sont des variétés.

3.5.6.

PROPOSITION. *Si* (V,π) *est une quasi-variété de quasi-topologie* T, *alors* $A \subseteq V$ *est ouvert (respectivement fermé) dans* T *si, et seulement si,* $\mathbf{C}\times A$ *est ouvert (respectivement fermé) dans* π.

DEMONSTRATION. Il suffit de remarquer que $\mathbf{C}\times A = q_V^{-1}(A)$ et que, comme on a dit dans **1.1.8**, la topologie associée à T est la topologie finale déterminée par la topologie associée à π et l'application $q_V: \mathbf{C}\times V \to V$.

3.5.7.

PROPOSITION. *Si* (V,π) *est une quasi-variété de quasi-topologie* T, *alors* $1_{\mathbf{C}\times V} : \pi \to \mathbf{C}\times T$ *est quasi-continue.*

DEMONSTRATION. Ceci résulte du fait que les projections $q'_V : \mathbf{C}\times V \to \mathbf{C}$, $q_V : \mathbf{C}\times V \to V$ sont quasi-continues de π dans $\mathbf{C}$ et de π dans T.

3.5.8.

PROPOSITION. *Si* (V, π) *est une quasi-variété de quasi-topologie* T, *alors* $q_V : \mathbf{C}\times V \to V$ *est quasi-ouverte pour* π *et* T.

DEMONSTRATION. Commençons par remarquer que, si $\lambda_o \in \mathbf{C}$ et $F \underset{\pi}{\to} (\lambda, a)$, il existe $G \underset{\pi}{\to} (\lambda_o, a)$ avec $q_V(G) = q_V(F)$. Il suffit de poser $G = \eta_{V,\lambda_o - \lambda}(F)$ (propriété $(QV\,3)$ de la définition 3.1.1). Maintenant si $(\lambda_o, a) \in \mathbf{C}\times V$ et $F' \underset{T}{\to} a$, il existe par définition de la structure finale $F_1 \underset{\pi}{\to} (\lambda_1, a), \ldots, F_k \underset{\pi}{\to} (\lambda_k, a)$ avec $F' \supseteq q_V(F_1) \cap \ldots \cap q_V(F_k) = q_V(F_1 \cap \ldots \cap F_k)$; comme on l'a vu, on peut supposer $\lambda_1 = \ldots = \lambda_k = \lambda_o$ et alors $F_1 \cap \ldots \cap F_k \underset{\pi}{\to} (\lambda_o, a)$, ce qui montre que q_V est quasi-ouverte.

3.5.9.

PROPOSITION. *Soient les quasi-variétés* $(V, \pi), (V', \pi')$, *les ensembles ouverts* $A_i \subseteq V$ *avec* $V = \cup A_i$ *et les structures induites de quasi-variétés* (A_i, π_i). *Soit* $f : V \to V'$ *une application telle que chaque* $f/A_i : A_i \to V'$ *soit quasi-holomorphe pour* (A_i, π_i) *et* (V', π'). *Alors* f *est quasi-holomorphe pour* (V, π) *et* (V', π').

DEMONSTRATION. D'après **3.2.2**, on a $\pi_i = \pi / \mathbf{C}\times A_i$, les $\mathbf{C}\times A_i$ étant ouverts dans π (**3.5.6**), et la proposition résulte alors de **1.2.1**.

3.5.10.

PROPOSITION. *Soient les quasi-variétés* (V, π), (V', π'), *les ensembles fermés* $E_1, E_2, \ldots, E_n$ *dans* V *avec* $V = E_1 \cup \ldots \cup E_n$, *et soient* (E_i, π_i) *les structures induites de quasi-variétés. Soit* $f : V \to V'$ *une application telle que chaque* $f/E_i : E_i \to V'$ *soit quasi-holomorphe pour* (E_i, π_i) *et* (V', π'). *Alors* f *est quasi-holomorphe pour* (V, π) *et* (V', π').

DEMONSTRATION. D'après **3.2.2**, on a $\pi_i = \pi / \mathbf{C}\times E_i$, les $\mathbf{C}\times E_i$ étant fermés dans π (**3.5.6**), et la proposition résulte alors de **1.2.2**.

3.5.11.

PROPOSITION. *Soit V un ensemble, soient $V_\alpha \subseteq V$ $(\alpha \in I)$ avec $V = \cup V_\alpha$ et soient des structures de quasi-variétés (V_α, π_α) telles que, pour $\alpha, \beta \in I$, on ait $V_\alpha \cap V_\beta$ ouvert dans V_α et V_β et les structures de quasi-variétés induites sur $V_\alpha \cap V_\beta$ par (V_α, π_α) et (V_β, π_β) identiques. Il existe alors une et une seule structure de quasi-variété (V, π) telle que chaque V_α soit ouvert dans V et que (V_α, π_α) soit la quasi-variété induite par (V, π).*

DEMONSTRATION. L'unicité résulte de ce que, si elle existe, une telle structure doit être (**3.5.9**) la quasi-variété finale déterminée par les (V_α, π_α) et les inclusions $\iota_\alpha : V_\alpha \to V$.

D'après **3.2.2**, $\pi_\alpha / \mathbf{C} \times (V_\alpha \cap V_\beta) = \pi_\beta / \mathbf{C} \times (V_\alpha \cap V_\beta)$ et $\mathbf{C} \times (V_\alpha \cap V_\beta)$ est ouvert dans π_α et π_β (**3.5.6**). On peut donc considérer sur $\mathbf{C} \times V$ la quasi-topologie π recollement des $(\mathbf{C} \times V_\alpha, \pi_\alpha)$ (définition **1.2.6**). Montrons que (V, π) est une quasi-variété. L'application q'_V : $\mathbf{C} \times V \to \mathbf{C}$ ayant une restriction $q'_{V_\alpha} : \mathbf{C} \times V_\alpha \to \mathbf{C}$ quasi-continue pour π_α et $\mathbf{C}$ pour chaque α, d'après **1.2.1** q'_V est quasi-continue pour π et $\mathbf{C}$, ce qui vérifie *(QV 1)*. La propriété *(QV 2)* est immédiate et, en ce qui concerne *(QV 3)*, pour chaque α, $\eta_{V, \lambda_o} / : \mathbf{C} \times V_\alpha \to \mathbf{C} \times V_\alpha$, c'est-à-dire $\eta_{V_\alpha, \lambda_o}$, est quasi-continue pour π_α et π_α, donc $\eta_{V, \lambda_o} / : \mathbf{C} \times V_\alpha \to \mathbf{C} \times V$ est quasi-continue pour π_α et π ; il s'ensuit d'après **1.2.1** que $\eta_{V, \lambda_o} : \mathbf{C} \times V \to \mathbf{C} \times V$ est quasi-continue pour π et π.

D'après **3.2.2**, chaque (V_α, π_α) est induit par (V, π) et (**3.5.6**) V_α est ouvert dans V, ce qui termine la démonstration.

3.5.12.

DEFINITION. Quand les structures de quasi-variété (V_α, π_α) vérifient les conditions de la proposition antérieure, on dit qu'elles *se raccordent*, et alors (V, π) est dit *recollement des* (V_α, π_α).

3.5.13.

REMARQUE. La proposition antérieure (ainsi que le fait que, si (V, π) est une quasi-variété et (V', π') une quasi-variété induite avec V' ouvert dans V, d'après **3.5.4** et **1.2.4**, les ouverts de V' sont les ouverts de V

contenus dans V') entraîne que les quasi-variétés constituent une espèce de structures locales [14], les éléments induits d'une quasi-variété (V, π) étant les quasi-variétés (V', π') induites par (V, π) sur des ouverts V' de V.

Rua Correia Teles 82, 2º esq.
LISBOA - 3, Portugal.

BIBLIOGRAPHIE

[1] KOWALSKY H.J., Limesräume und Kompletierung, *Math. Nach. 12* (1954) p. 301-340.

[2] FISCHER H.R., Limesräume, *Math. Ann.* 137 (1959), p. 269-303.

[3] COOK C.H. et FISCHER H.R., On equicontinuity and continuous convergence, *Math. Ann.* 159 (1965), p. 94-104.

[4] COOK C.H. et FISCHER H.R., Uniform convergent structures, *Math. Ann.* 173 (1967), p. 290-306.

[5] BINZ E. et KELLER H.H., Funktionenräume in der Kategorie der Limesräume, *Ann. Acad. Sci. Fenn.* (Finlande) A 1, 383 (1966).

[6] BINZ E., Bemerkungen zu limitierten Funktionenalgebren, *Math. Ann.* 175 (1968), p. 169-184.

[7] BASTIANI A., Applications différentiables et variétés différentiables de dimension infinie, *Jour. Analyse Math.* Jérusalem, 13 (1964), p. 1-114.

[8] EHRESMANN C., Catégories Topologiques I, II, III, *Koninkl. Nederl. Akad. van Wetenschappen,* Proceeding Series A 69, N° 1 (1966).

[9] BINZ E., Ein Differenzierbarkeitsbegriff in limitierten Vektorräumen, *Comm. Math. Helv.* 41 (1966-67).

[10] FRÖLICHER A. et BUCHER W., *Calculus in Vector Spaces without norm,* Lecture Notes in Math., Springer (1966).

[11] ANTOINE P., Etude élémentaire des catégories d'ensembles structurés, *Bull. Soc. Math. Belge,* 2 et 4 (1966).

[12] EHRESMANN C., *Catégories et Structures,* Dunod, Paris (1965).

[13] CARTAN H., *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes,* Hermann, Paris (1961).

[14] EHRESMANN C., Gattungen von lokalen Strukturen, *Jahresbericht d. DMV,* 60 (1957), p. 49-77.

[15] BOURBAKI N., *Théorie des Ensembles,* Chapitre 4, A.S.I 1258, Hermann, Paris (1966).

[16] MACHADO A., Caractérisation à l'aide de quasi-topologies de la structure de variété analytique complexe, *C.R.A.S. Paris 268 (1969),* p.1402-1405.