CAHIERS DE
TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
CATÉGORIQUES

MARIO CHARTRELLE

Sur la catégorie des applications quasi-continues

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 11, n° 2 (1969), p. 215-226

<http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1969__11_2_215_0>

CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE *Vol. XI,2*

SUR LA CATEGORIE DES APPLICATIONS QUASI-CONTINUES

par Mario CHARTRELLE

Introduction.

Les quasi-topologies s'introduisent d'une manière naturelle dès qu'on veut considérer de «bonnes» structures sur l'ensemble des applications continues entre deux espaces topologiques quelconques [2]. Dans cet article nous allons étudier les propriétés algébriques de la catégorie P^o des applications quasi-continues associée à un univers U, et de son foncteur d'oubli $\hat{\theta}$ vers la catégorie $\mathfrak{M}^o$ des applications.

Le 1^{er} paragraphe commence par rappeler les définitions relatives aux quasi-topologies (introduites par Kowalsky sous le nom de Limesraüme [8]) et les premières propriétés de la catégorie P^o [2]. Nous démontrons ensuite que toute quasi-topologie π sur $E \in U$ peut être «universellement» plongée dans une quasi-topologie séparée et dans une quasi-topologie compacte associées à U.

Le 2^{ème} paragraphe est consacré à l'étude de la quasi-topologie $\lambda(\pi', \pi)$ de la convergence locale [2] sur l'ensemble des applications quasi-continues de π vers π'. Nous montrons que celle-ci a des propriétés analogues à celles [3] de la topologie de la convergence compacte sur l'ensemble des applications continues entre espaces topologiques localement compacts (à laquelle elle s'identifie si π et π' s'identifient à des topologies et si π est localement compacte : (P^o, λ) est une catégorie fortement $\hat{\theta}$-dominée [5], $\hat{\theta}$-hyperdominée et tensoriellement $\hat{\theta}$-dominée [3]. En particulier P^o est une catégorie cartésienne fermée au sens de [7], et $(P^o, \hat{\theta})$ est un couple complet fermé selon [1] (résultat implicitement admis dans la dernière phrase de [1]).

Les notations et la terminologie sont celles de [4].

1. Quasi-topologies.

Soient E un ensemble et $(F(E), \subset)$ la classe locale de tous les filtres sur E ordonnée par la relation d'inclusion.

On appelle *idéal* de $F(E)$ un filtre de $(F(E), \subset)$, c'est-à-dire une partie I de $F(E)$ saturée par co-induction ($F \in I$ et $F \subset F'$ entraînent $F' \in I$) et telle que, si $F \in I$ et $F' \in I$, alors $F \wedge F' \in I$ (en notant $F \wedge F'$ le filtre intersection dont les éléments sont les ensembles $A \cup A'$, où $A \in F$ et $A' \in F'$).

Si (E', f, E) est une application et F un filtre sur E, on note fF le filtre sur E' engendré par $f(F)$.

1. DEFINITIONS.

a) On appelle *quasi-topologie sur* E une application π de E dans l'ensemble des idéaux de $F(E)$ telle que le filtre x^{ε} des sur-ensembles de x appartienne à $\pi(x)$ pour tout $x \in E$.

Si $F \in \pi(x)$, on dit que F *quasi-converge* vers x et on écrit $F \pi x$.

(E, π) est appelé *espace quasi-topologique.*

(b) La quasi-topologie π est *séparée* si $\pi(x) \wedge \pi(y) = \emptyset$ lorsque $x \neq y$.

(c) Point pseudo-adhérent. Ensemble pseudo-fermé : Soit (E, π) un espace quasi-topologique. Si F est un filtre sur E, tel qu'il existe un ultrafiltre F' qui contient F et qui quasi-converge vers x, on dit que x est un *point pseudo-adhérent à* F. Une partie $E' \subset E$ est dite *pseudo-fermée* (pour π) si elle contient ses points pseudo-adhérents, i.e. les points pseudo-adhérents à un filtre auquel appartient E'.

d) Quasi-topologie compacte : On dit que l'espace quasi-topologique (E, π) est *compact* si tout ultrafiltre sur E quasi-converge, si tout filtre qui admet un seul point pseudo-adhérent quasi-converge et si π est séparée.

e) On appelle *application quasi-continue* un triplet (π', f, π), où π' et π sont des quasi-topologies sur E' et E respectivement, et où (E', f, E) est une application telle que $F \pi x$ entraîne $fF \pi' f(x)$ pour tout $x \in E$. On pose :

$$\pi = \alpha(\pi', f, \pi) \text{ et } \pi' = \beta(\pi', f, \pi).$$

PROPRIETES.

a) Si π est une quasi-topologie sur E, l'ensemble des parties V de E telles que $V \in \bigwedge \pi(x)$ pour tout $x \in V$ définit une topologie $\hat{\tau}(\pi)$ sur E. Et tout filtre quasi-convergeant vers x dans π converge vers x dans $\hat{\tau}(\pi)$.

b) Si (π', f, π) est une application quasi-continue, $(\hat{\tau}(\pi'), f, \hat{\tau}(\pi))$ est continue.

2. Soient U un univers et P_o l'ensemble des espaces quasi-topologiques (E, π) tels que $E \in U$, P^o la catégorie des applications quasi-continues entre éléments de P_o munie de la loi de composition :

$$(\pi'', f', \overline{\pi}') \circ (\pi', f, \pi) = (\pi'', f' \circ f, \pi)$$

$$\text{si, et seulement si, } \overline{\pi}' = \pi'.$$

On identifie la quasi-topologie π sur E à l'unité $i_\pi = (\pi, i_E, \pi)$ de P^o. En associant (E', f, E) à une application quasi-continue (π', f, π) on définit un foncteur d'oubli $\hat{\theta}$ de P^o vers la catégorie $\mathfrak{M}^o$ dés applications associées à U.

PROPRIETES. [2]

a) $\hat{\theta}$ est un foncteur d'homomorphismes saturé.

b) P^o est à I-produits pour tout $I \in U$: Si $(\pi_i)_{i \in I}$ est une famille de quasi-topologies, et si $(E_i, \pi_i) \in P_o$ et $I \in U$, la quasi-topologie produit est $\pi = \prod_{i \in I} \pi_i$, quasi-topologie sur $E = \prod_{i \in I} E_i$ telle que l'on ait $F \pi (x_i)_{i \in I}$ si, et seulement si, $p_i F \pi_i x_i$ pour tout $i \in I$, où p_i est la projection canonique de E sur E_i. Si π_i est séparée (resp. compacte) pour tout $i \in I$, il en est de même pour π.

c) $\hat{\theta}$ est $\rightarrowtail$-étalant : Si $E' \subset E$, la $\hat{\theta}$-sous-structure π / E' de π sur E' est la quasi-topologie définie par $F \in (\pi / E')(x)$, où $x \in E'$, si, et seulement si, $\overline{F} \pi x$ (en appelant $\overline{F}$ le filtre engendré par F sur E). On l'appelle *quasi-topologie induite par* π *sur* E'. Si π est séparée (resp. si π est compacte et E' pseudo-fermé), π / E' est séparée (resp.

compacte). Si π est séparée et π / E' compact, alors E' est pseudo-fermé pour π.

d) Les propriétés b et c entraînent que $\hat{\theta}$ est un foncteur à $C^{\bullet}$-limites projectives, si $C^{\bullet}$ est une catégorie et $C \in U$. Soit $\hat{\pi}$ le foncteur de P^o vers la catégorie $\mathcal{J}^o$ des applications continues qui, à une application quasi-continue (π', f, π), associe l'application continue $(\hat{\tau}(\pi'), f, \hat{\tau}(\pi))$.

PROPOSITION. *Le foncteur* $\hat{\tau}$ *admet un coadjoint.*

PREUVE. Si T est une topologie sur E, on peut définir une quasi-topologie $\hat{\pi}(T)$ sur E comme suit :

$$\hat{\pi}(T)(x) = \{ F \in F(E) \mid V(x) \subset F \},$$

où $V(x)$ est le filtre des voisinages de x dans T, pour tout $x \in E$. Considérons

$$\hat{\tau}(\hat{\pi}(T)) = \{ M \subset E \mid M \in \wedge \hat{\pi}(T)(x), \forall x \in M \}.$$

Comme $\wedge \hat{\pi}(T)(x) = V(x)$, on a $\hat{\tau}(\hat{\pi}(T)) = T$. Soit π' une quasi-topologie sur E', et $\hat{f} = (T, f, \hat{\tau}(\pi'))$ une application continue. Montrons que $\hat{f}$ se relève dans P^o en une application quasi-continue unique de π' vers $\hat{\pi}(T)$. Si F' est un filtre appartenant à $F(E')$ tel que $F' \pi' y$, alors F' converge vers y pour $\hat{\tau}(\pi')$. $(T, f, \hat{\tau}(\pi'))$ étant continue, fF' converge vers $f(y)$ pour T. Donc fF' quasi-converge vers $f(y)$ pour $\hat{\pi}(T)$, par définition. Ainsi f se relève en une application quasi-continue $\hat{f}' = (\hat{\pi}(T), f, \pi')$. D'autre part $\hat{f}'$ est unique, car on a $f'(y) = f(y)$ pour tout $y \in \hat{\theta}(\pi')$. Ainsi $\hat{\pi}(T)$ est une $\hat{\tau}$-structure colibre associée à T. Il s'ensuit qu'il existe un foncteur $\hat{\pi}$ de $\mathcal{J}^o$ vers P^o adjoint de $\hat{\tau}$; à l'application continue (T', f, T), il associe l'application quasi-continue $(\hat{\pi}(T'), f, \hat{\pi}(T))$.

COROLLAIRE. *Le foncteur* $\hat{\pi}$ *admet* $\hat{\tau}$ *pour adjoint.*

Si π est une quasi-topologie et s'il existe une topologie T telle que $\pi = \hat{\pi}(T)$, on dit que π *s'identifie à la topologie* T.

3. En notant P^o_s (resp. P^o_c) la sous-catégorie pleine de P^o formée des

applications quasi-continues entre espaces quasi-topologiques séparés (resp. compacts), on définit un foncteur injection canonique (P^o, i, P^o_s) (resp. (P^o, i, P^o_c)).

THEOREME. *(P^o, i, P^o_s) (resp. (P^o, i, P^o_c)) admet un adjoint.*

PREUVE. Soient $\hat{U}$ un univers tel que $U \subset \hat{U}$ et $U \in \hat{U}$, et (E, π) un espace quasi-topologique tel que $E \in U$.

1°) On considère $I = \{ f \in P \mid f = (\pi', \underline{f}, \pi),\ \pi'$ séparé (resp. π' compact)$\}$.

On forme $\hat{\pi} = \prod_{f \in I} \beta(f)$; montrons que ce produit est un élément de $\hat{P}^o_o$, en notant $\hat{P}^o$ la catégorie des applications quasi-continues associée à $\hat{U}$. Pour cela, il suffit de montrer que l'ensemble $\hat{E}$ sous-jacent à $\hat{\pi}$ appartient à $\hat{U}$, ou encore, $\hat{U}$ étant un univers, que $I \in \hat{U}$. Or :

$$I \subset \bigcup_{\pi' \in P^o_o} \pi' \circ P \circ \pi \text{, où } \pi' \circ P \circ \pi = \{ f \in P \mid \alpha(f) = \pi,\ \beta(f) = \pi' \}.$$

Soit π' une quasi-topologie sur $E' \in U$; on a $\pi' \in \mathfrak{A}(E')$, en posant :

$$A_{E'} = \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(E'))) \text{ et } \mathfrak{A}(E') = A_{E'} \circ \mathfrak{M} \circ E'.$$

On a $E' \in \{E'\}$; comme $E' \in U$, alors $\{E'\} \in U$, et $A_{E'} \in U$, d'où

$$\mathfrak{A}(E') \subseteq \{A_{E'}\} \times \mathcal{P}(A_{E'} \times E') \times \{E'\} \in U,$$

c'est-à-dire $\mathfrak{A}(E') \in U$. Si $f = (\pi', \underline{f}, \pi) \in P$, on trouve

$$f \in \mathfrak{A}(E') \times \mathcal{P}(E' \times E) \times \mathfrak{A}(E) \in U,$$

car $\underline{f} \in \mathcal{P}(E' \times E)$. Il s'ensuit $\pi' \circ P \circ \pi \in U$. Par ailleurs

$$P^o_o = \{ \pi' \mid E' = \hat{\theta}(\pi') \in U \} \subset \bigcup_{E' \in U} \mathfrak{A}(E').$$

Comme $U \in \hat{U}$, on a $\bigcup_{E' \in U} \mathfrak{A}(E') \in \hat{U}$. Donc

$$P^o_o \in \hat{U} \text{ et } \bigcup_{\pi' \in P^o_o} \pi' \circ P \circ \pi \in \hat{U},$$

ce qui entraîne $I \in \hat{U}$. Il en résulte $\hat{E} \in \hat{U}$, d'où $\hat{\pi} \in \hat{P}^o_o$.

De plus $\hat{\pi}$ est séparée (resp. compacte), d'après la propriété b.

Pour tout $f \in I$, soit p_f la projection canonique de $\hat{\pi}$ vers $\beta(f)$; soit $\hat{f}$ l'unique application quasi-continue telle que $p_f \circ \hat{f} = f$.

2°) Considérons le cas des séparés : Soit $\underline{\hat{f}}(E) = \tilde{E} \subset \hat{E}$, et

$\tilde{\pi} = \hat{\pi} / \tilde{E}$. On a ainsi un sous-espace séparé $(\tilde{E}, \tilde{\pi})$ de $(\hat{E}, \hat{\pi})$. $\tilde{E}$ est équipotent à un élément E_1 de U. Soit $\underline{\varphi}$ une bijection de $\tilde{E}$ sur E_1. Prenons sur E_1 la quasi-topologie image de $\tilde{\pi}$ par $\underline{\varphi}$; notons π_1 cette quasi-topologie et $\varphi = (\pi_1, \underline{\varphi}, \tilde{\pi})$. Si $i = (\hat{\pi}, \iota, \tilde{\pi})$ désigne l'injection quasi-continue canonique et $\tilde{f} = (\tilde{\pi}, \underline{\hat{f}}, \pi)$ la restriction de $\hat{f}$ à $(\tilde{E}, \tilde{\pi})$, on a $\hat{f} = i \circ \tilde{f}$.

Soit $J = \varphi \circ \tilde{f}$. J est quasi-continue et, $\tilde{\pi}$ étant séparé, son image π_1 par φ est séparée. Donc $J \in I$.

Si $f = (\pi', \underline{f}, \pi) \in I$, considérons $f' = p_f \circ i \circ \varphi^{-1}$; on a $f' \in P$ et

$$f' \circ J = p_f \circ i \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \tilde{f} = p_f \circ \hat{f} = f.$$

Si $f'' \in P$ est telle que $f'' \circ J = f' \circ J$, on trouve :

$$f'' \circ J = f'' \circ \varphi \circ (\varphi^{-1} \circ J) = f'' \circ \varphi \circ \tilde{f} = f' \circ \varphi \circ \tilde{f}.$$

Comme $\underline{\tilde{f}}$ est une surjection sur $\tilde{E}$, $\tilde{f}$ est un épimorphisme; donc

$$f'' \circ \varphi = f' \circ \varphi$$

et, $\underline{\varphi}$ étant une bijection, on a $f'' = f'$. Ainsi (E_1, π_1) est un (P^o, i, P^o_s)-objet libre engendré par (E, π).

3°) Considérons le cas des compacts.

Soit $\bar{E}$ la pseudo-adhérence de $\hat{f}(E)$. $(\hat{E}, \hat{\pi})$ étant compact, $(\bar{E}, \hat{\pi} / \bar{E}) = (\bar{E}, \bar{\pi})$ est compact.

Soit $\tilde{U} = \{ E \in \hat{U} \mid E$ équipotent à un élément de $U \}$. Alors $\tilde{U}$ est un univers auquel appartient $\tilde{E} = \hat{f}(E)$. Si $x \in \bar{E}$, il existe un filtre F_x qui quasi-converge vers x pour $\hat{\pi}$ et auquel appartient $\tilde{E}$. Choisissons un tel filtre, et notons $\tilde{F}_x$ le filtre induit par F sur $\tilde{E}$. L'application $x \to \tilde{F}_x$ de $\bar{E}$ dans $F(\tilde{E})$ est une injection, la quasi-topologie $\hat{\pi}$ étant séparée et $\tilde{F}_x$ quasi-convergeant vers x. Donc $\bar{E}$ est équipotent à une partie de $F(\tilde{E})$. Comme $F(\tilde{E}) \subset \mathcal{P}(\mathcal{P}(\tilde{E})) \in \tilde{U}$, il s'ensuit $\bar{E} \in \tilde{U}$, de sorte qu'il existe une bijection $\underline{\hat{\varphi}}$ de $\bar{E}$ sur un élément $\bar{E}_1$ de U. Soit $\bar{\pi}_1$ la quasi-topologie image de $\bar{\pi}$ par $\underline{\hat{\varphi}}$, et $\hat{\varphi} = (\bar{\pi}_1, \underline{\hat{\varphi}}, \bar{\pi})$. Alors $(\bar{E}_1, \bar{\pi}_1)$ est compact, puisque c'est l'image par la bijection $\underline{\hat{\varphi}}$ d'un compact, et $\bar{E}_1$ est la pseudo-adhérence pour $\bar{\pi}_1$ de $\hat{\varphi}(\tilde{E})$. Soient $J = \hat{\varphi} \circ \bar{f}$, en notant $\bar{f}$ la restriction de $\hat{f}$ à $(\bar{E}, \bar{\pi})$, et $i = (\hat{\pi}, \iota, \bar{\pi})$. On a $J \in I$. Soit $f = (\pi', \underline{f}, \pi) \in I$;

on obtient $f' \circ J = f$, en posant $f' = p_f \circ i \circ \varphi^{-1}$. Si $f'' \circ J = f' \circ J$, il existe un noyau n de (f'', f') dans P^o_c; c'est l'application injection quasi-continue de (E_2, π_2) dans $(\bar{E}_1, \bar{\pi}_1)$, avec

$$E_2 = \{ x_1 \in \bar{E}_1 \mid f'(x_1) = f''(x_1) \} \text{ et } \pi_2 = \bar{\pi}_1 / E_2 .$$

E_2 contient $J(E) = \hat{\varphi}(\tilde{E})$. De plus il est pseudo-fermé dans $\bar{\pi}_1$; en effet, si F est un filtre sur E_2 tel que $F \in \pi_2(x)$, où x appartient à la pseudo-adhérence $\bar{E}_2$ de E_2, on a

$$f' F = f'' F, \quad f' F \in \pi'(f'(x)) \text{ et } f' F \in \pi'(f''(x)).$$

π' étant séparée, $f'(x) = f''(x)$, donc $x \in E_2$ c'est-à-dire $\bar{E}_2 = E_2$. Il en résulte $E_2 = \bar{E}_1$, et par suite $f' = f''$. Ainsi $(\bar{E}_1, \bar{\pi}_1)$ est un (P^o, i, P^o_c)-objet libre engendré par (E, π). Le théorème en résulte.

2. Quasi-topologie de la convergence locale.

Soient U un univers, et π et π' deux quasi-topologies sur $E \in U$ et $E' \in U$ respectivement. Si G est un filtre sur $E' \circ \mathfrak{M} \circ E$ et F un filtre sur E (où $\mathfrak{M}^o$ est la catégorie des applications associées à U), les ensembles $B(A) = \bigcup_{f \in B} f(A)$ où $B \in G$, $A \in F$, engendrent un filtre sur E', noté GF. Si G est un filtre sur $\pi' \circ P \circ \pi$, on pose $GF = \hat{\theta}(G)F$. Pour tout $f \in \pi' \circ P \circ \pi$, soit $\lambda(f)$ l'ensemble des filtres G sur $\pi' \circ P \circ \pi$ tels que, pour tout $x \in E$ et tout $F \in \pi(x)$, on ait $GF \in \pi'(f(x))$.

1. DEFINITION. L'application $f \to \lambda(f)$ définit une quasi-topologie sur $\pi' \circ P \circ \pi$, notée $\lambda(\pi', \pi)$, qui est appelée *quasi-topologie de la convergence locale* [2].

PROPRIETES. [2]

a) Si π' est séparée, $\lambda(\pi', \pi)$ est séparée.

b) Si π' et π s'identifient à des topologies T' et T respectivement et si T est localement compacte, alors $\lambda(\pi', \pi) = \lambda(T', T)$ s'identifie à la topologie de la convergence compacte.

2. Soient $E \in U$ et π une quasi-topologie sur E. Soit X_π le foncteur de P^o dans P^o qui à $h \in P$ associe $h \times i_\pi$, où i_π est l'application quasi-continue identique de π vers π.

THEOREME. *Si (E', π') est un espace quasi-topologique, la quasi-topologie $\lambda(\pi', \pi)$ est un X_π-objet colibre associé à π', le X_π-coprojecteur correspondant étant $\eta_\pi(\pi') = (i_{\lambda(\pi', \pi)}, \hat{v})$, où $\hat{\theta}(\hat{v})$ est l'application $v : (f, x) \to f(x)$ de $(\pi' \circ P \circ \pi) \times E$ dans E'. Si C_π est le foncteur coadjoint de X_π associé à η_π [4], on a : $\hat{\theta}(C_\pi(h)) = Hom_{Po}(h, i_\pi)$ pour $h \in P$.*

PREUVE.

a) Montrons [2] que v définit une application quasi-continue $\hat{v}$ de $\lambda(\pi', \pi) \times \pi$ vers π'. Soient G un filtre sur $\pi' \circ P \circ \pi$ tel que $G \in \lambda(f)$ et F un filtre sur E tel que $F \in \pi(x)$. Le filtre $v\, G \times F$ est engendré par l'ensemble des classes $B(A) = \bigcup_{f \in B} f(A)$, où $A \in F$ et $B \in G$; il est donc identique au filtre GF. Par définition de $\lambda(f)$ on a $GF \in \pi'(f(x))$, c'est-à-dire $v\, G \times F \in \pi'(v(f, x))$. Donc $\hat{v} \in P$.

b) Soient (E_1, π_1) un espace quasi-topologique et g une application quasi-continue de $\pi_1 \times \pi$ dans π'. Soit g' l'application de E_1 dans $\pi' \circ P \circ \pi$ associant à $x_1 \in E_1$ l'application quasi-continue g_{x_1} de π vers π' telle que $g_{x_1}(x) = g(x_1, x)$. Montrons [2] que g' définit une application quasi-continue $\hat{g}'$ de π_1 vers $\lambda(\pi', \pi)$. Soient F_1 un filtre sur E_1 tel que $F_1 \in \pi_1(x_1)$ et F un filtre sur E tel que $F \in \pi(x)$. Le filtre $g(F_1 \times F)$ est engendré par l'ensemble des classes $g(B_1 \times A)$, où $B_1 \in F_1$ et $A \in F$. Comme

$$g(B_1 \times A) = \bigcup_{x'_1 \in B_1} g(\{x'_1\} \times A) = \bigcup_{x'_1 \in B_1} g_{x'_1}(A) =$$
$$= \bigcup_{h' \in g'(B_1)} h'(A) = g'(B_1)(A),$$

les filtres $g(F_1 \times F)$ et $g'(F_1)F$ sont identiques. Puisque g est quasi-continue, on a $g(F_1 \times F) \in \pi'(g(x_1, x))$, c'est-à-dire $g'(F_1)(F) \in \pi'(g'(x_1)(x))$, d'où $g'(F_1) \in \lambda(g'_{x_1})$, et par conséquent $\hat{g}'$ existe.

c) On a ainsi :

$$\hat{v} \circ X_\pi(\hat{g}')(x_1, x) = v(g'(x_1), x) = g'(x_1)(x) = g(x_1, x),$$

c'est-à-dire $\hat{v} \circ X_\pi(\hat{g}') = g$. Si $\hat{v} \circ X_\pi(\hat{g}'') = g$, alors $\hat{\theta}(\hat{g}'') = \hat{\theta}(\hat{g}')$, et par suite $\hat{g}'' = \hat{g}'$. Ceci prouve que $(i_{\lambda(\pi', \pi)}, \hat{v})$ est un X_π-coprojecteur (résultat énoncé dans [3], complément 1 p. 208).

d) Soit C_π le foncteur coadjoint de X_π. Supposons de plus que l'on ait $(E'', \pi'') \in P_o^o$ et soit $\eta_{\pi''}(\pi) = (i_{\lambda(\pi'',\pi)}, \hat{v}')$. Si h est une application quasi-continue de π'' vers π', l'application quasi-continue $C_\pi(h)$ de $\lambda(\pi'',\pi)$ dans $\lambda(\pi',\pi)$ est celle qui, à $f' \in (\pi'' \circ P \circ \pi)$, fait correspondre l'application quasi-continue de π vers π' qui associe $h \circ f'(x)$ à $x \in E$. On a donc $\hat{\theta}(C_\pi(h)) = Hom_{P^o}(h, i_\pi)$.

COROLLAIRE 1. *Soient* (E,π), (E_1,π_1), (E',π') *des espaces quasi-topologiques. Une application* f *de* $E_1 \times E$ *dans* E' *est quasi-continue de* $\pi_1 \times \pi$ *vers* π' *si, et seulement si,* ([2] *et* [6])

a) Pour tout $x_1 \in E_1$, *l'application* $x \to f(x_1, x)$ *définit une application quasi-continue* f_{x_1} *de* π *vers* π'.

b) L'application $x_1 \to f_{x_1}$ *est quasi-continue de* π_1 *dans* $\lambda(\pi',\pi)$.

COROLLAIRE 2. *Si* (E,π) *et* (E',π') *sont des espaces quasi-topologiques,* $\lambda(\pi',\pi)$ *est la moins fine des quasi-topologies* $\hat{\pi}$ *sur* $\pi' \circ P \circ \pi$ *telles que l'application* $v : (f,x) \to f(x)$ *définisse une application quasi-continue de* $\hat{\pi} \times \pi$ *vers* π' [2].

PROPOSITION. *Soient* (E,π) *et* (E_i,π_i) *pour tout* $i \in I$ *des espaces quasi-topologiques. Si* (E',π') *est l'espace quasi-topologique produit de* $((E_i,\pi_i))_{i \in I}$, *l'application* $w : (f_i)_{i \in I} \to [f_i]_{i \in I}$ *définit un quasi-homéomorphisme de* $\hat{\pi} = \prod_{i \in I} \lambda(\pi_i, \pi)$ *vers* $\lambda(\pi',\pi)$ *(où* $f_i \in \pi_i \circ P \circ \pi$*).*

PREUVE. Soit p_i la projection canonique de E' vers E_i, pour tout $i \in I$, et q_i celle de $L = \prod_{i \in I} (\pi_i \circ P \circ \pi)$ sur $\pi_i \circ P \circ \pi$. L'inverse de la bijection w est l'application $w' : f = [f_i]_{i \in I} \to (p_i \circ f)_{i \in I}$. Soit G un filtre sur L. On a $G \in \hat{\pi}((f_i)_{i \in I})$ si, et seulement si, $q_i G \in \lambda(\pi_i, \pi)(f_i)$, $\forall i \in I$, c'est-à-dire si, et seulement si, pour tout $x \in E$ et tout $F \in \pi(x)$, on a $q_i GF \in \pi_i(f_i(x))$. Or ceci équivaut à $(p_i w GF) \in \pi_i(f_i(x))$, car $p_i \circ w = q_i$, $\forall i \in I$, ou encore à $wGF \in \pi'((f_i)_{i \in I}(x))$, ce qui signifie $wG \in \lambda(\pi',\pi)([f_i]_{i \in I})$. Ainsi w définit un quasi-homéomorphisme.

3. THEOREME. *Il existe une catégorie* $\hat{\theta}$*-fortement dominée* (P^o, λ), *où* λ *est le foncteur de* $P^o \times P^o$ *vers* P^o *qui à* $(\pi',\pi) \in P_o^o \times P_o^o$ *associe* $\lambda(\pi',\pi)$. *De plus* (P^o, λ) *est une catégorie* $\hat{\theta}$*-hyperdominée et tensoriellement* $\hat{\theta}$*-dominée en tout* $\pi \in P_o^o$.

RAPPELS. Soient q un foncteur d'une catégorie $K^\cdot$ vers $\mathfrak{M}^o$ et $H^\cdot$ une catégorie.

1°) Si D est un foncteur de $H^\cdot \times H^*$ (où H^* est la duale de $H^\cdot$) vers $K^\cdot$ tel que $q \circ D = Hom_{H^\cdot}$, on dit que $(H^\cdot, D)$ est une *catégorie q-dominée* [4]. Si de plus pour tout triplet (e'', e', e) d'unités de $H^\cdot$ il existe un élément k de K ayant pour source un produit s de $(D(e'', e'), D(e', e))$ dans $K^\cdot$, pour but $D(e'', e)$ et tel que $q(k)$ soit l'application $(f', f) \to f' \circ f$ de $e''.H.e' \times e'.H.e$ dans $e''.H.e$, on dit que $(H^\cdot, D)$ est *fortement q-dominée* [5].

2°) Si $(K^\cdot, D')$ est une catégorie q-dominée et $H^\cdot$ une sous-catégorie pleine de $K^\cdot$, on dit que $(H^\cdot, D')$ est une *catégorie q-hyper-dominée* [3] si, pour tout triplet (e'', e', e) d'unités de $H^\cdot$, il existe un élément k de $D'(D'(e'', e), D'(e'', e')).K.D'(e', e)$ tel que $q(k)$ applique f sur $Hom_{K^\cdot}(e'', f)$.

3°) Soient $(H^\cdot, D)$ une catégorie q-dominée, et e une unité de $H^\cdot$; nous noterons $D(., e)$ le foncteur de $H^\cdot$ vers $K^\cdot$ associant $D(f, e)$ à $f \in H$. On dit que $(H^\cdot, D)$ est une *catégorie tensoriellement q-dominée en e* si c'est une catégorie q-dominée, et s'il existe un foncteur X_e de $K^\cdot$ vers $H^\cdot$, dit *foncteur produit tensoriel par e*, vérifiant les conditions suivantes :

1) $D(., e)$ est un foncteur coadjoint de X_e; soit η l'application associant à $e' \in H^\cdot_o$ le coprojecteur $\eta(e') = (D(e', e), j_{e'})$ qui sert à définir $D(., e)$.

2) Si $s' \in K^\cdot_o$ et $e' \in H^\cdot_o$, il existe un inversible k de $K^\cdot$ de source $D(e', X_e(s'))$, de but $D(D(e', e), s')$ tel que $q(k)$ soit la bijection $\eta_{e's'}$, associant à g l'unique g' vérifiant $j_{e'}.X_e(g') = g$.

DEMONSTRATION DU THEOREME.

A) Soient $(E, \pi), (E', \pi'), (E', \pi'')$ des espaces quasi-topologiques appartenant à P_o. Montrons (voir [2] et [6]) que l'application $k : (f', f) \to f' \circ f$ est quasi-continue de $\lambda(\pi'', \pi') \times \lambda(\pi', \pi)$ vers $\lambda(\pi'', \pi)$.

Soient $f \in \pi' \circ P \circ \pi$, $f' \in \pi'' \circ P \circ \pi'$, $G' \in \lambda(\pi'', \pi')(f')$ et $G \in \lambda(\pi', \pi)(f)$. Pour tout $x \in E$ et tout $F \in \pi(x)$, on a $GF \in \pi'(f(x))$. Puisque $G' \in \lambda(\pi'', \pi')(f')$, on trouve $G'GF \in \pi''(f' \circ f(x))$, c'est-à-dire $G'G = k(G' \times G) \in \lambda(\pi'', \pi)(f' \circ f)$.

B) Soient $f \in \pi \circ P \circ \pi_1$ et $g \in \pi_1' \circ P \circ \pi'$. L'application constante sur (g, f) définissant une application quasi-continue de $\lambda(\pi', \pi)$ vers $\lambda(\pi_1', \pi') \times \lambda(\pi, \pi_1)$, il résulte de A que l'application $f' \to g \circ f' \circ f$ définit une application quasi-continue $\lambda(g, f)$ de $\lambda(\pi', \pi)$ vers $\lambda(\pi_1', \pi_1)$. Le foncteur $\hat{\theta}$ étant fidèle, il s'ensuit que (P^o, λ) est une catégorie $\hat{\theta}$-dominée et, d'après A, une catégorie fortement $\hat{\theta}$-dominée [5].

C) De la partie A et du corollaire 1, on déduit que, si π, π', et π'' sont trois quasi-topologies, l'application $f \to Hom_{P^o}(\pi'', f)$ définit une application quasi-continue k' de $\lambda(\pi', \pi)$ vers $\lambda(\lambda(\pi'', \pi), \lambda(\pi'', \pi'))$. Donc (P^o, λ) est une catégorie $\hat{\theta}$-hyperdominée.

D) Soit $\pi \in P_o^o$. Montrons que (P^o, λ) est une catégorie tensoriellement $\hat{\theta}$-dominée en π. On a vu qu'il existe un foncteur X_π de P^o vers P^o tel que $X_\pi(h) = h \times i_\pi$ pour tout $h \in P^o$, et que ce foncteur admet $\lambda(\,.\,, i_\pi)$ pour coadjoint. Donc la 1ère condition est vérifiée.

Soit $\pi' \in P_o^o$ une quasi-topologie; π' engendre un X_π-objet colibre $\lambda(\pi', \pi)$, le coprojecteur correspondant étant $\eta_\pi(\pi') = (i_{\lambda(\pi', \pi)}, \hat{v})$. Soient $\pi'' \in P_o^o$ une quasi-topologie et φ la bijection de $\pi' \circ P \circ (\pi'' \times \pi)$ sur $\lambda(\pi', \pi) \circ P \circ \pi''$ qui, à $g \in \pi' \circ P \circ \pi'' \times \pi$, associe l'unique application quasi-continue g' de π'' vers $\lambda(\pi', \pi)$ vérifiant $\hat{v} \circ X_\pi(g') = g$. Pour montrer que (P^o, λ) est tensoriellement $\hat{\theta}$-dominée en π, il suffit de prouver que φ définit un quasi-homéomorphisme de $\lambda(\pi', \pi'' \times \pi)$ vers $\lambda(\lambda(\pi', \pi), \pi'')$. Or $g' = \varphi(g)$ est l'application associant à $x'' \in \hat{\theta}(\pi'')$ l'application quasi-continue $g_{x''} : x \to g(x'', x)$ de π vers π'. Soient G un filtre sur $\pi' \circ P \circ (\pi'' \times \pi)$, F un filtre sur $\hat{\theta}(\pi)$ et F'' un filtre sur $\hat{\theta}(\pi'')$. Le filtre $G(F'' \times F)$ est engendré par l'ensemble des $m(A'' \times A) = \bigcup_{h \in M} h(A'' \times A)$ où $m \in G$, $A \in F$, $A'' \in F''$. Comme

$$h(A'' \times A) = \{ h(x'', x) \mid x'' \in A'', x \in A \} = \{ h_{x''}(x) \mid x'' \in A'', x \in A \} =$$

$$= \bigcup_{x'' \in A''} \varphi(h)(x'')(A) = (\varphi(h)(A''))(A),$$

on a $$m(A'' \times A) \doteq (\varphi(m)(A''))(A).$$

Or l'ensemble des $(\varphi(m)(A''))(A)$, où $m \in G$, $A \in F$ et $A'' \in F''$, engendre le filtre $(\varphi(G)F'')F$. Donc $G(F'' \times F) = (\varphi(G)F'')F$. On a $G \in \lambda(\pi', \pi'' \times \pi)(g)$ si, et seulement si, $G(F'' \times F) \in \pi'(g(x'', x))$, c'est-à-dire d'après ce qui précède si, et seulement si, $\varphi(G)(F'')(F) \in \pi'(\varphi(g)(x'')(x))$, pour tout $F \in \pi(x)$ et $F'' \in \pi''(x'')$. Or cette condition équivaut à $\varphi(G)F'' \in \lambda(\pi', \pi)(\varphi(g)(x''))$ pour tout $F'' \in \pi''(x'')$, donc aussi à $\varphi(G) \in \lambda(\lambda(\pi', \pi), \pi'')(\varphi(g))$. Ceci prouve que φ définit un quasi-homéomorphisme de $\lambda(\pi', \pi'' \times \pi)$ sur $\lambda(\lambda(\pi', \pi), \pi'')$

REMARQUE. Comme P^o est une catégorie à produits finis et admettant pour élément final l'unique quasi-topologie sur un ensemble $\{x\}$ à un seul élément, il résulte du théorème 2 que P^o est une catégorie cartésienne fermée au sens de [7]. On peut en déduire que (P^o, λ) est $\hat{\theta}$-hyperdominée en utilisant les résultats de [7].

Bibliographie.

[1] P. ANTOINE, Etude élémentaire des catégories d'ensembles structurés, *Bull. Soc. Math. Belgique*, XVIII, 2 et 4 (1966), p. 142 et 387.

[2] A. BASTIANI, Applications différentiables et variétés de dimension infinie, *Journal d'Analyse Math.* Jérusalem 13 (1964), p. 1.

[3] A. BASTIANI, *Topologie*, Chap. IV : Espaces fonctionnels, cours multigraphié, Amiens 1969.

[4] C. EHRESMANN, *Algèbre*, Cours du C.D.U, Paris 1968.

[5] C. EHRESMANN, Catégories structurées généralisées, *Cahiers de Topo. et Géo. diff*, X,1 (1968), p. 139.

[6] C. EHRESMANN, Catégories topologiques III, *Indag. Math.* 28,1 (1966)

[7] EILENBERG-KELLY, Closed categories, *Proc. Conf. on Categorical Algebra*, La Jolla 1965, Springer.

[8] H.J. KOWALSKY, Limesraüme und Komplettierung, *Math. Nachr.* 12, 1954, p. 301.

M. CHARTRELLE

29, rue de Beauvais

80 - AMIENS