CAHIERS DE
TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
CATÉGORIQUES

FRANÇOIS FOLTZ

# Sur la catégorie des foncteurs dominés

*Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques*, tome 11, nº 2 (1969), p. 101-130

<http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1969__11_2_101_0>

*CAHIERS DE TOPOLOGIE*
*ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE*

*Vol. XI,2*

# SUR LA CATEGORIE DES FONCTEURS DOMINES

*par François FOLTZ*

## Introduction.

Deux méthodes se présentent pour structurer une catégorie : L'une consiste à mettre une structure de l'espèce voulue sur l'ensemble sous-jacent à la catégorie, de sorte que les applications source, but et loi de composition soient «compatibles» avec la structure. Ceci conduit à la notion de catégorie structurée (dont les catégories doubles, les catégories topologiques, les catégories différentiables sont des exemples). L'autre part de l'idée (classique) que la catégorie est la réunion des ensembles de morphismes joignant deux objets; on met alors une structure sur chacun de ces ensembles, de sorte que la composition à droite ou à gauche par un morphisme soit «compatible» avec ces structures. On obtient ainsi la notion générale de catégorie $q$-dominée, $q$ étant un foncteur vers la catégorie des applications (les catégories préadditives en sont un exemple).

Dans cet article, nous étudions la catégorie des foncteurs $q$-dominés et ses foncteurs d'oubli, lorsque $q$ est un foncteur donné, «assez» régulier. Ces foncteurs d'oubli ont de «bonnes» propriétés algébriques (existence de limites, de structures quasi-quotients,...). Toute partie $M$ d'une catégorie $q$-dominée engendre une sous-catégorie $q$-dominée associée au même univers que $M$. Utilisant les produits tensoriels introduits dans un article antérieur [5], on peut construire explicitement une catégorie $q$-dominée libre associée à un graphe $q$-dominé ou à une catégorie. Soient $E$ et $\hat{E}$ deux catégories $q$-dominées. A un foncteur entre les catégories sous-jacentes est associé d'une manière «universelle» un foncteur $q$-dominé de $E$ vers $\hat{E}$ (ce qui généralise les extensions de Kan). A un foncteur $q$-dominé de $E$ vers $\hat{E}$ est «universellement» associé un foncteur $q$-dominé transformant certaines transformations naturelles données en limites naturalisées «compatibles» avec la domination.

Une partie des résultats de ce travail ont été indiqués dans une Note aux Comptes -rendus [ 7 ] .

## TABLE DES MATIERES

Nous reprenons la terminologie et les notations de [ 1 ] et [ 2 ], pour les quasi-catégories, voir aussi [ 3 ].

Soit $\mathfrak{M}_o$ un univers, $\mathfrak{M}$ la catégorie pleine d'applications associée, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}'$ et $\mathfrak{G}$ les catégories au-dessus de $\mathfrak{M}$ des foncteurs, des quasi-foncteurs et des homomorphismes entre graphes orientés, $p_{\mathfrak{F}}$, $p_{\mathfrak{F}'}$ et $p_{\mathfrak{G}}$ leurs foncteurs d'oubli vers $\mathfrak{M}$.

## 1. Définitions.

Soit $\mathfrak{M}_o$ un univers et $\mathfrak{M}$ la catégorie pleine d'applications associée.

*1. NOTATIONS.*

Si $[C]$ est un graphe orienté, nous noterons $C_o$ l'ensemble de ses sommets et $H_{[C]}(e, e')$ l'ensemble des flèches de $[C]$ ayant $e$ pour but et $e'$ pour source. $[C]$ est un $\mathfrak{M}_o$-graphe orienté, si $H_{[C]}(e, e')$ est un élément de $\mathfrak{M}_o$ quel que soit le couple de sommets $(e, e')$. Nous désignerons par $H_{[C]}$ l'application de $C_o \times C_o$ dans $\mathfrak{M}_o$ qui, à $(e, e')$, associe $H_{[C]}(e, e')$.

Une quasi-catégorie $\langle C \rangle = (C^\bullet, \beta, \alpha)$ est une $\mathfrak{M}_o$-quasi-catégorie si $[C] = (C, \beta, \alpha)$ est un $\mathfrak{M}_o$-graphe orienté. $H_{\langle C \rangle}$ désigne alors l'homomorphisme de systèmes multiplicatifs $(\mathfrak{M}, \underline{H}_{\langle C \rangle}, C^\bullet \times C^*)$, où $\underline{H}_{\langle C \rangle}(\underline{x}, x')$ est l'application de $H_{[C]}(\alpha x, \beta x')$ dans $H_{[C]}(\beta x, \alpha x')$ qui à $\bar{x}$ associe $x . \bar{x} . x'$. Dans le cas d'une catégorie, $H_{[C]}(e, e') = H_{\langle C \rangle}(e, e')$, si $(e, e')$ est un couple d'unités.

*2. HOMOMORPHISMES DE GRAPHES ORIENTES ET QUASI-FONCTEURS q-DOMINES.*

Désignons par $q = (\mathfrak{M}, \underline{q}, K^\bullet)$ un foncteur d'homomorphismes saturé (*).

DEFINITION 1.

a) Un *graphe orienté q-dominé* est un couple $E = (\varepsilon, [C])$ où :

- $[C]$ est un $\mathfrak{M}_o$-graphe orienté,

(*) Ces définitions s'étendent au cas où $q$ est quelconque.

- $\varepsilon$ est une application de $C_o \times C_o$ dans $K_o^\bullet$ tel que $\underline{q}(\varepsilon(e,e')) = H_{[C]}(e,e')$.

b) Une *quasi-catégorie q-dominée* est un couple $E = (\varepsilon, \langle C \rangle)$ où :

-$\langle C \rangle = (C^\bullet, \beta, \alpha)$ est une quasi-catégorie,

-$[E] = (\varepsilon, [C])$ est un graphe orienté $q$-dominé, où $[C] = (C, \beta, \alpha)$.

-Il existe un homomorphisme de systèmes multiplicatifs $\varepsilon_{\langle C \rangle} = (K^\bullet, \underline{\varepsilon}_{\langle C \rangle}, C^\bullet \times C^*)$ tel que $q.\varepsilon_{\langle C \rangle} = H_{\langle C \rangle}$ et tel que $\underline{\varepsilon}_{\langle C \rangle}(x,x')$ appartienne à $\varepsilon(\beta x, \alpha x').K.\varepsilon(\alpha x, \beta x')$, pour tout $(x,x')$ de $C \times C$.

DEFINITION 2.

a) Un *homomorphisme de graphes orientés q*-dominés est un triplet $\overline{f} = (E', \underline{f}, E)$ tel que :

-$E' = (\varepsilon', [C'])$ et $E = (\varepsilon, [C])$ sont des graphes orientés $q$-dominés.

-$f = ([C'], \underline{f}, [C])$ est un homomorphisme de graphes orientés.

-Il existe une application de $C_o \times C_o$ dans $K$, qui à $(e,e')$ associe $\overline{f}(e,e')$, élément de $\varepsilon'(\underline{f}(e), \underline{f}(e')).K.\varepsilon(e,e')$ tel que $\underline{q}(\overline{f}(e,e'))$ soit l'application qui à $x$ associe $\underline{f}(x)$.

b) Un *quasi-foncteur q-dominé* est un triplet $\overline{f} = (E', \underline{f}, E)$ tel que :

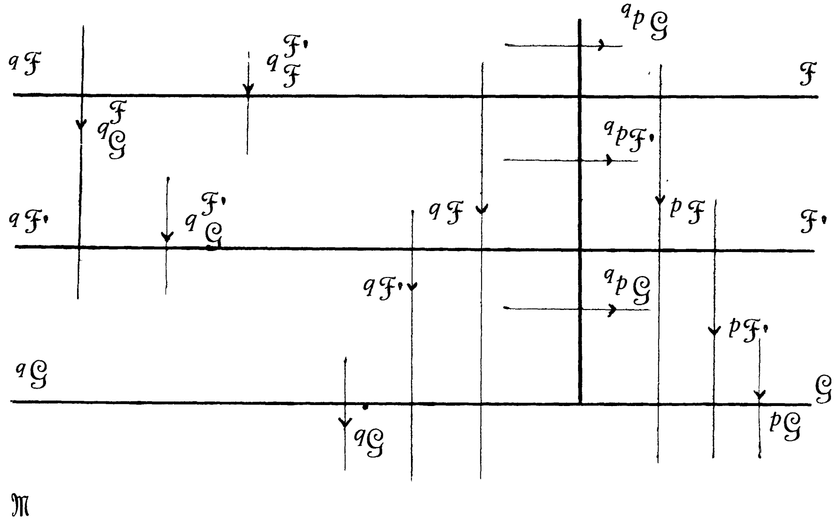
-$E' = (\varepsilon', \langle C' \rangle)$ et $E = (\varepsilon, \langle C \rangle)$ sont des quasi-catégories $q$-dominées.

-$f = (\langle C' \rangle, \underline{f}, \langle C \rangle)$ est un quasi-foncteur.

-$[\overline{f}] = ([E'], \underline{f}, [E])$ est un homomorphisme de graphes orientés $q$-dominés.

Nous désignerons par ${}^q\mathcal{G}$ (resp. ${}^q\mathcal{F}'$, resp. ${}^q\mathcal{F}$) la catégorie des homomorphismes entre graphes orientés (resp. des quasi-foncteurs, resp. des foncteurs) $q$-dominés au-dessus de $\mathfrak{M}$, par ${}^qp_{\mathcal{G}}$ (resp. ${}^qp_{\mathcal{F}'}$, resp. ${}^qp_{\mathcal{F}}$) son foncteur d'oubli vers $\mathcal{G}$ (resp. $\mathcal{F}'$, resp. $\mathcal{F}$), par $q_{\mathcal{G}}^{\mathcal{F}'}$ (resp. $q_{\mathcal{G}}^{\mathcal{F}}$, resp. $q_{\mathcal{F}'}^{\mathcal{F}}$) le foncteur d'oubli de ${}^q\mathcal{F}'$ (resp. ${}^q\mathcal{F}$) vers ${}^q\mathcal{G}$ (resp. ${}^q\mathcal{G}$, resp. ${}^q\mathcal{F}'$). Posons aussi :

$$q_{\mathcal{G}} = p_{\mathcal{G}}.{}^qp_{\mathcal{G}} \text{ (resp. } q_{\mathcal{F}'} = q_{\mathcal{G}}.q_{\mathcal{G}}^{\mathcal{F}'}, \text{ resp. } q_{\mathcal{F}} = q_{\mathcal{G}}.q_{\mathcal{G}}^{\mathcal{F}}).$$




## 2. Propriétés.

NOTATION. Nous représenterons souvent l'un des symboles $\mathcal{G}$, $\mathcal{F}'$, $\mathcal{F}$ par $\bullet$.

PROPOSITION 1. *Le foncteur* $q_\bullet$ *est un foncteur d'homomorphismes saturé.*

PROPOSITION 2. *L'ensemble* $X^q$ *(resp.* $Y^q$*) formé des* $\bar{f}$ *de* $^q\bullet$ *tels que* $f = {}^q\underline{p}_\bullet(\bar{f})$ *est une* $p_\bullet$*-injection (resp.* $p_\bullet$*-surjection) et tels que* $\bar{f}(e,e')$ *est une* $q$*-injection (resp.* $q$*-surjection), quel que soit le couple de sommets (unités) de* $\alpha(f)$*, est contenu dans l'ensemble des* $q_\bullet$*-injections (resp.* $q_\bullet$*-surjections).*

DEMONSTRATION. D'après la définition 2-b, il suffit de le montrer pour $\bullet = \mathcal{G}$.

Soient $\bar{f}$ un élément de $X^q$ et $\bar{g}$ un élément de $\beta(\bar{f}).{}^q\mathcal{G}$. Supposons que $g = f.h$, où $f = {}^q\underline{p}_{\mathcal{G}}(\bar{f})$, où $g = {}^q\underline{p}_{\mathcal{G}}(\bar{g})$ et où $h = (C^\bullet, \underline{h}, \bar{C}^\bullet)$. Si $(e,e') \in \bar{C}^\bullet_o \times \bar{C}^\bullet_o$, $\bar{f}(\underline{h}(e), \underline{h}(e'))$ est une $q$-injection. Posons

$$\alpha(\bar{g}) = (\bar{\varepsilon}, \bar{C}^\bullet) \text{ et } \alpha(\bar{f}) = (\varepsilon, C^\bullet).$$

Il existe un élément bien déterminé $\bar{h}(e,e')$ dans $\varepsilon(\underline{h}(e), \underline{h}(e')).K.\bar{\varepsilon}(e,e')$ vérifiant

$$\overline{g}(e, e') = \overline{f}(\underline{h}(e), \underline{h}(e')).\overline{h}(e, e').$$

Ainsi le triplet $\overline{h} = (\alpha(\overline{f}), \underline{h}, \alpha(\overline{g}))$ appartient à ${}^q\mathcal{G}$ et $\overline{f}$ est une ${}^q p_{\mathcal{G}}$-injection, donc une $q_{\mathcal{G}}$-injection. ■

DEFINITION 3. Si $(E, \underline{\iota}, E')$ appartient à $X^q$, on dira que $E'$ est un *sous-graphe orienté* (resp. une *sous-quasi-catégorie*, resp. *sous-catégorie*) *q-dominée* de $E$.

Si $[C]$ est un graphe orienté et $r$ une relation sur $C$, on notera $r_{(e,e')}$ la restriction de $r$ à $H_{[C]}(e, e')$, où $(e, e') \in C_0 \times C_0$.

COROLLAIRE 1. *Soit $E$ un élément de ${}^q\bullet$ et $r$ une relation $p_\bullet$-régulière* [2] *pour ${}^q p_\bullet(E)$. Si, pour tout couple $(e', e)$ de sommets (unités), $r_{(e,e')}$ est $q$-régulière pour $\varepsilon(e, e')$, et si $r$ est élémentaire, il existe une $q_\bullet$- structure quotient de $E$ par $r$.*

DEFINITION 4. $q$ est *régulier* si l'intersection de relations d'équivalences $q$-régulières pour $a$ dans $K_0^{\cdot}$ est $q$-régulière pour $a$ et si la relation d'équivalence associée à un élément $k$ de $K$ est $q$-régulière pour $\alpha(k)$.

COROLLAIRE 2. *Supposons que $q$ est régulier et à objet final. Toute relation élémentaire $r$ sur $E$ élément de ${}^q\mathcal{F}'_0$ (resp. ${}^q\mathcal{F}_0$) engendre une relation d'équivalence $q_{\mathcal{F}'}$- (resp. $q_{\mathcal{F}}$-) régulière $\overline{r}$ pour $E$.*

En effet, soit $F$ la famille des relations d'équivalences $r_i$ compatibles, élémentaires, contenant $r$ et vérifiant : $r_i(e, e')$ est $q$-régulière. $F$ contient la relation identifiant toutes les flèches ayant même source et même but. $F$ admet une intersection $\overline{r}$. Si $\alpha(\overline{f}) = E$ et si $\overline{f}$ est une $q_{\mathcal{F}'}$- (resp. $q_{\mathcal{F}}$-) quasi-surjection associée à $r$, la relation $r_{\overline{f}}$ appartient à $F$. ■

COROLLAIRE 3. *Avec les mêmes hypothèses, $q^{\mathcal{F}}_{\mathcal{F}'}$ admet un adjoint.*

Si $E = (\varepsilon, \langle C \rangle) \in {}^q\mathcal{F}'_0$, $E$ admet une $q_{\mathcal{F}'}$-structure quotient par la relation $\overline{r}$, $q_\bullet$-régulière pour $E$, engendrée par la relation $r$ qui identifie $x.\alpha x$ et $\beta x.x$ avec $x$. ■

PROPOSITION 3. *Si $\dot{K}$ est à $\mathfrak{M}_0$-sommes et si $q$ est à structures quasi-quotients, $q_{\mathcal{G}}$ est à structures quasi-quotients* [3].

DEMONSTRATION. Soit $E = (\varepsilon, [C])$ un élément de ${}^q\mathcal{G}_o$ et $r$ une relation $p_{\mathcal{G}}$-régulière pour $[C]$. Une $q_{\mathcal{G}}$-structure-quasi-quotient $\overline{E} = (\overline{\varepsilon}, [\overline{C}])$ de $E$ par $r$ a la forme suivante :

- $\overline{C}_o$ s'identifie à $C_o/r_o$, où $r_o$ = restriction de $r$ à $C_o$.

- Si $e$ (resp. $e'$) est un sommet de $[C]$ et $\overline{e}$ (resp. $\overline{e}'$) sa classe d'équivalence, désignons par $(a, (\sigma_{(e,e')})_{e \in \overline{e},\, e' \in \overline{e}'})$ (resp. $(M, (\sigma_{(e,e')})_{e \in \overline{e},\, e' \in \overline{e}'})$) une somme dans $K^{\bullet}$ de $(\varepsilon(e,e'))_{e \in \overline{e},\, e' \in \overline{e}'}$ (resp. dans $\mathfrak{M}$ de $(H_{[C]}(e,e'))_{e \in \overline{e},\, e' \in \overline{e}'}$). La relation $r$ induit une relation $\overline{r}$ sur $M$ et il existe une application $g$ vérifiant $g.\sigma_{(e,e')} = \underline{q}(\overline{\sigma}_{(e,e')})$. Alors $\overline{\varepsilon}(\overline{e}, \overline{e}')$ est une $q$-structure quasi-quotient de $a$ par la relation $\underline{g} \times \underline{g}(\overline{r})$. ■

PROPOSITION 4. *Si $q$ est régulier, à objet final et si $q^{\bullet}_{\mathcal{G}}$ admet un adjoint, $q^{\bullet}_{\mathcal{G}}$ est à quasi-surjections* [3].

DEMONSTRATION. Soient $E = (\varepsilon, \langle C \rangle)$ (resp. $E' = (\varepsilon', [C']))$ un élément de ${}^q\mathcal{F}'_o$ (resp. ${}^q\mathcal{G}_o$) et $\overline{f} = (E', f, [E])$ un élément de ${}^q\mathcal{G}$. A $E'$ est associé un $q^{\bullet}_{\mathcal{G}}$-projecteur $(\overline{E}, \overline{g})$. La relation $r$ identifiant les couples de la forme $(\underline{g}\underline{f}(x.x'), \underline{g}\underline{f}(x).\underline{g}\underline{f}(x'))$, où $(x,x') \in C^{\bullet} * C^{\bullet}$, engendre une relation $q_{\bullet}$-régulière pour $\overline{E}$. Il existe un $q_{\bullet}$-épimorphisme $\overline{\rho} = (\tilde{E}, \rho, \overline{E})$ associé. Le triplet $(\tilde{E}, \underline{\rho}\, \underline{g}\, \underline{f}, E)$ est une $q^{\bullet}_{\mathcal{G}}$- surjection associée à $\overline{f}$. ■

COROLLAIRE 1. *Avec les mêmes hypothèses, $q_{\bullet}$ est à structures quasi-quotients.*

Soient $E = (\varepsilon, C^{\bullet}) \in {}^q\mathcal{F}_o$ et $S \subset C$. Notons $E_S$ le sous-ensemble de ${}^q\mathcal{F} \times {}^q\mathcal{F}.E \times {}^q\mathcal{F}.E$ formé des $(\overline{h}, \overline{f}', \overline{f})$ tels que $\overline{h}.\overline{f} = \overline{f}'$ et tels que $f(S)$ (resp. $f'(S))$ soit un ensemble d'inversibles pour $\alpha(\overline{h})$ (resp. $\beta(\overline{h})$). On a une catégorie $E^{\bullet}_S$ pour la loi :

$$(\overline{h}_1, \overline{f}'_1, \overline{f}_1).(\overline{h}, \overline{f}', \overline{f}) \text{ est défini et égal à } (\overline{h}_1.\overline{h}, \overline{f}'_1, \overline{f})$$

$$\text{si, et seulement si, } \overline{f}_1 = \overline{f}'.$$

COROLLAIRE 2. *Si, de plus, $q$ admet un adjoint et si $K^{\bullet}$ est à sommes finies, la catégorie $E_S$ admet un objet initial* [2].

PROPOSITION 5. *Soit $J \subset \mathcal{F}_o$. Si $q$ est à $J$-limites projectives, ${}^q p_{\bullet}$ est à $J$-limites projectives.*

DEMONSTRATION. Soit $\varphi = ({}^q\mathcal{G}, \varphi, I^\cdot)$ un foncteur, où $I^\cdot \in J$. Le foncteur ${}^q p_{\mathcal{G}} . \varphi$ admet une limite projective naturalisée canonique $({}^q p_{\mathcal{G}} . \varphi, \tau, [C])$. Si $x \in C$, posons $x_i = \underline{\tau}(i)(x)$, où $i \in I^\cdot_o$. Si $(e', e)$ est un couple de sommets, le foncteur $\varphi^{(e',e)} = (K^\cdot, \underline{\varphi}^{(e',e)}, I^\cdot)$, défini par $\underline{\varphi}^{(e',e)}(j) = \varphi(j)(e, e')$, admet une limite projective naturalisée canonique $(\varphi^{(e,e')}, \tau^{(e,e')}, \varepsilon(e,e'))$ et $\underline{q}(\varepsilon(e,e')) = H_{[C]}(e,e')$. De plus $\underline{q}(\tau^{(e,e')}(i))$ est l'application de $H_{[C]}(e,e')$ dans $H_{[C_i]}(e_i, e'_i)$ qui à $x$ associe $x_i$. Donc $E = (\varepsilon, [C])$ appartient à ${}^q\mathcal{G}_o$ et $\tau(i) = (\varphi(i), \underline{\tau(i)}, E)$ appartient à ${}^q\mathcal{G}$. Ainsi le triplet $(\varphi, \tau, E)$ est une transformation naturelle.

Soit $(\varphi, \bar{\sigma}, \bar{E})$ une transformation naturelle dont la source est un foncteur constant. Posons $\sigma = {}^q \underline{p}_{\mathcal{G}}(\bar{\sigma})$ et $\bar{E} = (\bar{\varepsilon}, [\bar{C}])$. Il existe un élément unique $h$ de $\mathcal{G}$ vérifiant $\sigma(i) = \tau(i) . h$, pour tout $i$ de $I^\cdot_o$. Soit $(\bar{e}, \bar{e}')$ un couple de sommets de $[\bar{C}]$ tels que $\underline{h}(\bar{e}) = e$ et $\underline{h}(\bar{e}') = e'$. Si $\underline{\sigma}^{(\bar{e},\bar{e}')}(i) = \underline{\sigma(i)}(\bar{e}, \bar{e}')$, le triplet $(\varphi^{(e,e')}, \sigma^{(\bar{e},\bar{e}')}, \bar{\varepsilon}(\bar{e}, \bar{e}'))$ est une transformation naturelle dont la source est un foncteur constant. Il lui est associé un élément $\bar{h}(\bar{e}, \bar{e}')$ tel que

$$\bar{\sigma}^{(\bar{e},\bar{e}')}(i) = \bar{\tau}^{(\bar{e},\bar{e}')}(i) . \bar{h}(\bar{e}, \bar{e}').$$

Par suite, $\bar{h} = (E, \underline{h}, \bar{E})$ appartient à ${}^q\mathcal{G}$ et vérifie $\bar{\sigma}(i) = \bar{\tau}(i) . \bar{h}$, pour tout $i$ de $I^\cdot_o$.

Soit $\bar{\varphi} = ({}^q\mathcal{F}', \bar{\underline{\varphi}}, I^\cdot)$ un foncteur. Le foncteur ${}^q p_{\mathcal{F}'} . \bar{\varphi}$ admet une limite projective canonique $<C>$ et, si $\varphi = q^{\mathcal{F}'}_{\mathcal{G}} . \bar{\varphi}$, le graphe orienté sous-jacent à $<C>$ est $[C]$. A un élément $(x, x')$ de $C \times C$ est associée une transformation naturelle $(\varphi^{(\beta x, \alpha x')}, \bar{\tau}^{(x,x')}, \varphi^{(\alpha x, \beta x')})$ telle que $\bar{\tau}^{(x,x')}(i)(\bar{x}_i) = x_i . \bar{x}_i . x'_i$. On en déduit l'existence d'un élément unique $\underline{\varepsilon}_{<C>}(x, x')$ vérifiant :

$$\bar{\tau}^{(\beta x, \alpha x')}(i) . \underline{\varepsilon}_{<C>}(x, x') = \bar{\tau}^{(x,x')}(i) . \bar{\tau}^{(\alpha x, \beta x')}(i).$$

La surjection $\underline{\varepsilon}_{<C>}$ définit un homomorphisme de systèmes multiplicatifs $\varepsilon_{<C>} = (K^\cdot, \underline{\varepsilon}_{<C>}, C^\cdot \times C^*)$ et $(\varepsilon, <C>)$ appartient à ${}^q\mathcal{F}'$. La fin de la proposition s'en déduit. ■

COROLLAIRE. *Les foncteurs* $q_\bullet$ *et* $q^\bullet_\bullet$ *sont à* $J$*-limites projectives.*

Si $\lambda$ est un ordinal strictement inférieur à l'ordinal associé à $\mathfrak{M}_o$, désignons par $\lambda^\bullet$ la catégorie dont les éléments sont les couples d'ordinaux $(\mu, \mu')$, tels que $\mu' \leq \mu < \lambda$ et dont la loi de composition est définie par l'ordre.

PROPOSITION 6. *Si $q$ est à $\{\lambda^\bullet\}$-limites inductives, ${}^q p_\bullet$ est à $\{\lambda^\bullet\}$-limites inductives.*

DEMONSTRATION. Soit $\varphi = ({}^q\mathcal{G}, \underline{\varphi}, \lambda^\bullet)$ un foncteur et $([C], \tau, {}^q p\,\mathcal{G}.\varphi)$ une limite inductive naturalisée canonique dans $p\,\mathcal{G}$. Posons $[C_\mu] = \underline{\varphi}(\mu)$.

Si $(e, e_1) \in C_o \times C_o$, il existe $\mu < \lambda$ et $(e^\mu, e_1^\mu)$ dans $C_{\mu o} \times C_{\mu o}$ tels que $e = \underline{\tau}(\mu)(e^\mu)$ et $e_1 = \underline{\tau}(\mu)(e_1^\mu)$. Posons

$$e^{\mu'} = \underline{\varphi}((\mu', \mu))(e^\mu) \text{ et } e_1^{\mu'} = \underline{\varphi}((\mu', \mu))(e_1^\mu).$$

Il existe un foncteur $\varphi^{(e,e_1)} = (K^\bullet, \varphi^{(e,e_1)}, \lambda^\bullet)$ tel que

$$\underline{\varphi}^{(e,e_1)}((\mu'', \mu')) = \begin{cases} \varphi(\mu)(e^\mu, e_1^\mu) & \text{si } \mu'' \leq \mu \\ \varphi((\mu'', \mu))(e^\mu, e_1^\mu) & \text{si } \mu' \leq \mu \leq \mu'' \\ \varphi((\mu'', \mu'))(e^{\mu'}, e_1^{\mu'}) & \text{si } \mu \leq \mu'. \end{cases}$$

Ce foncteur admet une limite inductive naturalisée canonique $(\varepsilon(e, e_1), \tau^{(e,e_1)}, \varphi^{(e,e_1)})$ dans $q$. On vérifie que $\varepsilon(e, e_1)$ ne dépend pas de $\mu$. Comme $\underline{q}(\varepsilon(e, e_1)) = H_{[C]}(e, e_1)$, le couple $E = (\bar{\varepsilon}, [C])$ appartient à ${}^q\mathcal{G}_o$.

Posons

$$\bar{\tau}(\mu')((e^{\mu'}, e_1^{\mu'})) = \tau^{(e,e_1)}(\mu)((e^{\mu'}, e_1^{\mu'})),$$

si $\mu' \leq \mu$. Si $\mu' \leq \mu$, si $\underline{\varphi}((\mu, \mu'))(\bar{e}) = e^\mu$ et si $\underline{\varphi}((\mu, \mu'))(\bar{e}_1) = e_1^\mu$, posons

$$\bar{\tau}(\mu')((\bar{e}, \bar{e}_1)) = \bar{\tau}(\mu)((e^\mu, e_1^\mu)).\varphi((\mu, \mu'))(\bar{e}, \bar{e}_1).$$

Les triplets $\bar{\tau}(\mu') = (E, \underline{\tau(\mu')}, \varphi(\mu))$ appartiennent à ${}^q\mathcal{G}$, où $\underline{\tau(\mu')}$ est la surjection sous-jacente à $\bar{\tau}(\mu')$, et ces triplets sont indépendants du choix de $\mu$. On vérifie que le triplet $(E, \bar{\tau}, \varphi)$, ainsi défini, est une limite inductive dans ${}^q p\,\mathcal{G}$.

Soient $\bar{\varphi} = ({}^q\mathcal{F}', \underline{\varphi}, \lambda^\bullet)$ un foncteur et $\langle C \rangle$ la limite inductive canonique de ${}^{q}p_{\mathcal{G}'} . \varphi$. Si $\varphi = q_{\mathcal{G}}^{\mathcal{F}'} . \bar{\varphi}$, le graphe sous-jacent à $<C>$ est $[C]$. Si $(x, x_1)$ est dans $C \times C$, il existe $\mu < \lambda$ et $(x^{\mu}, x_1^{\mu})$ dans $C_{\mu} \times \dot{C}_{\mu}$ tels que

$$x = \underline{\tau(\mu)}(x^{\mu}) \text{ et } x_1 = \underline{\tau(\mu)}(e_1^{\mu}).$$

Si $\sigma^{(x, x_1)}(\mu') = \varepsilon_{<C_{\mu'}>}(x^{\mu'}, x_1^{\mu'})$, le triplet

$$(\varphi^{(\beta x, \alpha x_1)}, \sigma^{(x, x_1)}, \varphi^{(\alpha x, \beta x_1)})$$

est une transformation naturelle. Par suite, il existe un élément bien déterminé $\underline{\varepsilon}_{<C>}(x, x_1)$ vérifiant :

$$\tau^{(\beta x, \alpha x_1)}(\mu') . \sigma^{(x, x_1)}(\mu') = \underline{\varepsilon}_{<C>}(x, x_1) . \tau^{(\alpha x, \beta x_1)}(\mu'),$$

pour tout $\mu \leq \mu' \leq \lambda$. La surjection $\underline{\varepsilon}_{<C>}$ définit un homomorphisme de systèmes multiplicatifs $\varepsilon_{<C>} = (K^{\cdot}, \underline{\varepsilon}_{<C>}, C^{\cdot} \times C^{*})$, indépendant du $\mu$ choisi. On en déduit que $(\varepsilon, <C>)$ est une quasi-catégorie $q$-dominée. ■

Soit $I^{\cdot} \in \mathfrak{F}_o$. Supposons que $\lambda$ est régulier et est strictement supérieur à l'ordinal associé à $I$.

PROPOSITION 7. *Si $q$ est à $\{\lambda^{\cdot}\}$-limites inductives et à $\{\lambda^{\cdot}\}$- limites projectives, il y a commutativité entre les $\{I^{\cdot}\}$-limites projectives et les $\{\lambda^{\cdot}\}$-limites inductives dans ${}^{q}\bullet$.*

## 3. Catégorie $q$-dominée libre.

### 1. EXISTENCE.

Soit $\hat{\mathfrak{M}}_o$ un univers, tel que $\mathfrak{M}_o \in \hat{\mathfrak{M}}_o$ et $\mathfrak{M}_o \subset \hat{\mathfrak{M}}_o$, et $\hat{\mathfrak{M}}$ la catégorie pleine d'applications associée à $\hat{\mathfrak{M}}_o$. Notons $\tilde{\mathfrak{M}}$ la saturante de $\mathfrak{M}$ dans $\hat{\mathfrak{M}}$. Désignons par $\hat{q} = (\hat{\mathfrak{M}}, \underline{\hat{q}}, \hat{K}^{\cdot})$ un foncteur d'homomorphismes saturé admettant $q$ pour sous-foncteur. On suppose que $K^{\cdot} = \underline{\hat{q}}^{-1}(\mathfrak{M})$ et que $\underline{\hat{q}}^{-1}(M)$ est un $\mathfrak{M}_o$-ensemble si $M$ appartient à $\mathfrak{M}_o$. Le symbole ^ (resp. ~) indique qu'il s'agit de catégories ou de foncteurs relatifs à $\hat{\mathfrak{M}}$ (resp. $\tilde{\mathfrak{M}}$).

THEOREME 1. *Si $\hat{q}$ est $\nearrow$-engendrant (resp. dénombrablement $\nearrow$-engendrant) pour $\mathfrak{M}$ le foncteur $\hat{q}_{\mathcal{G}}$ (resp. $\hat{q}_{\hat{\bullet}}$) est $(\hat{\mathfrak{M}}.\mathfrak{M}_o, X^{\hat{q}}, {}^{q}\bullet)$-engendrant* [4].

DEMONSTRATION. Il est suffisant de montrer que ces foncteurs sont $(\hat{\mathfrak{M}}.\tilde{\mathfrak{M}}_o, X^{\hat{q}}, {}^{q}\tilde{\bullet})$-engendrants.

Soient $\hat{E} = (\hat{\varepsilon}, [\hat{C}])$ un élément de ${}^{\hat{q}}\mathfrak{G}_o$ et $M$ un sous-ensemble de $[\hat{C}]$, appartenant à $\tilde{\mathfrak{M}}_o$. Posons $C_o = \alpha M \cup \beta M$. Si $(e, e') \in C_o \times C_o$, l'ensemble $M \cap H_{[\hat{C}]}(e, e')$ engendre une $\hat{q}$-sous-structure $\varepsilon(e, e')$ de $\hat{\varepsilon}(e, e')$, telle que $\underline{\hat{q}}(\varepsilon(e, e')) \in \tilde{\mathfrak{M}}_o$. L'ensemble $\bigcup_{\substack{e \in C_o \\ e' \in C_o}} \underline{\hat{q}}(\varepsilon(e, e'))$ détermine un sous-graphe orienté $[C]$ de $[\hat{C}]$ et $E = (\varepsilon, [C])$ est un sous-graphe orienté $q$-dominé de $\hat{E}$. Tout autre sous-graphe orienté $q$-dominé $E' = (\varepsilon', [C'])$, tel que $M \subset C'$, contient $C_o$ ainsi que $M \cap H_{[\hat{C}]}(e, e')$. Donc $C \subset C'$.

Soit $\hat{E} = (\hat{\varepsilon}, <\hat{C}>)$ un élément de ${}^{\hat{q}}\mathfrak{F}'_o$ et $M$ un sous-ensemble de $\hat{C}$, appartenant à $\tilde{\mathfrak{M}}_o$. Définissons deux suites $(M_i)_{i \geq 1}$ et $(C_i)_{i \geq 1}$ de sous-ensembles de $\hat{C}$, en posant :

a) $M_1 = \alpha M \cup M \cup \beta M$.

b) $M_i$, s'il est défini, engendre une $p\mathfrak{F}'$-sous-structure $<C_i>$ de $<\hat{C}>$.

c) Si $C_i$ est défini et si $(e, e')$ appartient à $(C_i)_o \times (C_i)_o$, désignons par $\varepsilon_{i+1}(e, e')$ la $\hat{q}$-sous-structure de $\hat{\varepsilon}(e, e')$ engendrée par $H_{[\hat{C}]}(e, e') \cap C_i$. On pose alors $M_{i+1} = \bigcup_{\substack{e \in (C_i)_o \\ e' \in (C_i)_o}} \underline{\hat{q}}(\varepsilon_{i+1}(e, e'))$.

Comme $p\mathfrak{F}'$ est dénombrablement $\frown$-engendrant pour $\mathfrak{M}$, l'ensemble $C = \bigcup_{1 \leq i} C_i$ détermine une sous-quasi-catégorie $<C>$ de $<\hat{C}>$.

Remarquons que $\alpha(M_i) = \alpha(C_{i'})$ et $\beta(M_i) = \beta(C_{i'})$, pour $i \geq 1$ et $i' \geq 1$. De plus $C = \bigcup_{i \geq 1} M_i$. Si $(e, e')$ appartient à $C_o \times C_o$, la suite $(\varepsilon_i(e, e'))_{i \geq 1}$ de $\hat{q}$-sous-structures de $\hat{\varepsilon}(e, e')$ admet une borne supérieure $\varepsilon(e, e')$, telle que $\underline{\hat{q}}(C(e, e')) = H_{[C]}(e, e')$. Ainsi $E = (\varepsilon, <C>)$ est une sous-quasi-catégorie $\hat{q}$-dominée de $\hat{E}$.

Si $M_i$ (resp. $C_i$) appartient à $\tilde{\mathfrak{M}}_o$, il en est de même de $C_i$ (resp. $M_{i+1}$). Soit $E' = (\varepsilon', <C'>)$ une sous-quasi-catégorie de $\hat{E}$, telle que $M \subset C'$. L'on a : $M_1 \subset C'$. Si $M_i \subset C'$, l'on a $C_i \subset C'$. Si $C_i \subset C'$, alors $H_{[C_i]}(e, e') \subset H_{[C']}(e, e')$ et $M_{i+1} \subset C'$. Ainsi $(\hat{E}, \underline{\iota}, E)$ est $(\hat{q}\mathfrak{F}', X^{\hat{q}}, {}^{\tilde{q}}\tilde{\mathfrak{F}}')$. engendré par $(\hat{C}, \underline{\iota}, M)$.

Remarquons que, si $<\hat{C}>$ est une catégorie, $<C>$ en est aussi une.

COROLLAIRE. *Supposons que $\hat{q}$ est à $\mathfrak{M}_o$-produits et $q$ à noyaux. Si $\hat{q}$ est $\digamma$-engendrant (resp. dénombrablement $\digamma$-engendrant) pour $\mathfrak{M}$, le foncteur ${}^q p_{\mathcal{G}}$ (resp. ${}^q p_{\bullet}$, resp. $q^{\bullet}_{\bullet}$) admet un adjoint, le foncteur $q_{\mathcal{G}}$ (resp. $q_{\bullet}$) est à structures quasi-quotients, la catégorie ${}^q\mathcal{G}$ (resp. ${}^q\bullet$) est à $\mathcal{F}$-limites inductives.*

En effet, d'après la proposition 5, les $q_{\bullet}$-noyaux appartiennent à $X^q \subset X^{\hat{q}}$. Le corollaire est une conséquence du théorème 1 de [*4*].

## 2. *CATEGORIE $q$-DOMINEE ASSOCIEE A UN GRAPHE ORIENTE $q$-DOMINE.*

Pour la notion générale de produit tensoriel, voir [5].

THEOREME 2. *Si $K^{\cdot}$ est à $\mathfrak{M}_o$-sommes, si $q$ admet un foncteur $\mathfrak{M}_o$-produits tensoriels* [5] *associatif et compatible avec les sommes de $K^{\cdot}$, le foncteur $q^{\mathcal{F}'}_{\mathcal{G}}$ admet un adjoint.*

DEMONSTRATION. Désignons par $(\boldsymbol{\otimes}, \otimes)$ (resp. $(\amalg, \amalg)$) un foncteur $\mathfrak{M}_o$-produits tensoriels (resp. $\mathfrak{M}_o$-sommes) naturalisé.

Soient $E = (\varepsilon, [C]) \in {}^q\mathcal{G}_o$ et $(e', e) \in C_o \times C_o$. Désignons par $S(e',e)$ l'ensemble des suites finies $s = (e_i)_{i \leq n+1}$ de sommets de $[C]$, telles que $e_1 = e$ et $e_{n+1} = e'$. Posons $\varepsilon(s) = \underset{i \leq n}{\boldsymbol{\otimes}} \varepsilon(e_{i+1}, e_i)$ et $\underset{s \in S(e,e')}{\amalg} \varepsilon(s) = (\overline{\varepsilon}(e', e), (\sigma_s)_{s \in S(e,e')})$.

Comme $q$ est saturé, l'on peut toujours supposer que

$$\underline{q}(\overline{\varepsilon}(e', e)) \cap \underline{q}(\overline{\varepsilon}(e'_1, e_1)) = \emptyset, \text{ si } (e', e) \neq (e'_1, e_1).$$

Si $s = (e, e) \in S(e, e)$, on peut aussi identifier $e$ et $\underline{q}(\sigma_s)(e)$. Sur

$$\overline{C} = \bigcup_{(e,e') \in C_o \times C_o} \underline{q}(\overline{\varepsilon}(e, e')),$$

l'on a une structure de graphe orienté $q$-dominé $[\overline{E}] = (\overline{\varepsilon}, [\overline{C}])$, en posant $\alpha(x) = e$ et $\beta(x) = e'$ pour tout $x$ de $\underline{q}(\overline{\varepsilon}(e', e))$. Il existe un élément $\overline{g} = ([\overline{E}], \underline{g}, E)$ dans ${}^q\mathcal{G}$, où la restriction de $\underline{g}$ à $H_{[C]}(e', e)$ est la surjection sous-jacente à $\sigma_s$, si $s = (e', e) \in S(e', e)$.

Si $e'' \in C_o$, posons $S = S(e', e)$ et $S' = S(e'', e')$. Soit

$s' = (e'_i)_{i \leq m+1}$ (resp. $s = (e_i)_{i \leq n+1}$) un élément de $S'$ (resp. de $S$). On notera $s' + s = (e''_i)_{i \leq m+n+1}$ la suite de $S(e'', e)$ définie par $e''_i = e_i$, pour $i \leq n+1$, et $e''_{i+n} = e'_i$, pour $i \leq m+1$.

Comme $(\circledast, \otimes)$ est compatible avec les sommes de $K^{\cdot}$, il existe un isomorphisme canonique :

$$\gamma : (\coprod_{s' \in S'} \varepsilon(s')) \circledast (\coprod_{s \in S} \varepsilon(s)) \longrightarrow \coprod_{(s', s) \in S' \times S} \varepsilon(s') \circledast \varepsilon(s).$$

Comme $(\circledast, \otimes)$ est associatif, il existe un isomorphisme canonique

$$\delta_{(s', s)} : \varepsilon(s') \circledast \varepsilon(s) \longrightarrow \varepsilon(s' + s).$$

Posons :

$$\coprod_{(s', s) \in S' \times S} \varepsilon(s') \circledast \varepsilon(s) = (a, (\sigma_{(s', s)})_{(s', s) \in S' \times S}).$$

Il existe un morphisme bien déterminé $\delta$ vérifiant $\delta . \sigma_{(s', s)} = \sigma_{s' + s}$, pour tout $(s', s)$ de $S' \times S$. On désignera, alors, par $\kappa$ le $q$-bimorphisme $\delta . \gamma . \bar{\varepsilon}(e'', e') \otimes \bar{\varepsilon}(e', e)$.

Soient $T_q$ la catégorie servant à définir les $q$-produits tensoriels [5] et $Q = (\mathfrak{M}, \underline{Q}, T_q)$ le foncteur projection correspondant. $\underline{Q}(\bar{\kappa}) = \kappa(e'', e', e)$ est une application de $H_{[\bar{C}]}(e'', e') \times H_{[\bar{C}]}(e', e)$ dans $H_{[\bar{C}]}(e'', e)$. Ainsi est défini un système multiplicatif $\bar{C}^{\cdot}$; l'ensemble des couples composables est le produit fibré des applications source et but de $[\bar{C}]$. De plus si $x . y$ est défini, l'on a :

$$\alpha(x . y) = \alpha(y) \text{ et } \beta(x . y) = \beta(x).$$

Si $e'''$ est une unité de $[C]$, on définit comme précédemment une application $\kappa(e''', e'', e', e)$ de $H_{[\bar{C}]}(e''', e'') \times H_{[\bar{C}]}(e'', e') \times H_{[\bar{C}]}(e', e)$ dans $H_{[\bar{C}]}(e''', e)$ et l'on montre les relations

$$x . (y . z) = \kappa(e''', e'', e', e)((x, y, z)) = (x . y) . z.$$

Ainsi $\bar{C}^{\cdot}$ est associatif, $<\bar{C}> = (\bar{C}^{\cdot}, \beta, \alpha)$ est une quasi-catégorie et $\bar{E} = (\bar{\varepsilon}, <\bar{C}>)$ appartient à ${}^q\mathfrak{F}'_o$.

Supposons

$$\tilde{E} = (\tilde{\varepsilon}, <\tilde{C}>) \in {}^q\mathfrak{F}'_o \text{ et } \bar{f} = ([\tilde{E}], \underline{f}, E) \in {}^q\mathfrak{G}.$$

On définit un $q$-multimorphisme

$$h_s = (\tilde{\varepsilon}(\underline{f}(e'), \underline{f}(e)), \underline{h}_s, (\varepsilon(e_{i+1}, e_i))_{i \leq n}),$$

en posant

$$\underline{h}_s((x_i)_{i \leq n}) = \underline{f}(x_n) \ldots . \underline{f}(x_1), \text{ si } x_i \in H_{[C]}(e_{i+1}, e_i).$$

Il existe un élément unique $\overline{h}_s$ (resp. $\overline{h}_{(e',e)}$) dans $K^{\cdot}$ vérifiant

$$\overline{h}_s \cdot \underset{i \leq n}{\otimes} \varepsilon(e_{i+1}, e_i) = h_s$$

$$\text{(resp. } \overline{h}_{(e',e)} \cdot \sigma_s = \overline{h}_s, \text{ pour tout } s \text{ de } S_{(e',e)}).$$

En posant $\underline{h}(x) = \underline{q}(\overline{h}_{(e',e)})(x)$, pour tout $x$ de $\underline{q}(\overline{\varepsilon}(e', e))$, l'on définit un élément $[\overline{h}] = ([\overline{E}], \underline{h}, [\overline{E}])$ de ${}^q\mathcal{G}$ vérifiant $[\overline{h}].\overline{g} = \overline{f}$. En effet si $s = (e', e) \in S(e', e)$, l'on a : $f_{(e',e)} = \overline{h}_{(e',e)} \cdot \sigma_s = \overline{h}_{(e',e)} \cdot g_{(e',e)}$.

Désignons par $h_{(s',s)}$ le $q$-multimorphisme

$$(\tilde{\varepsilon}(\underline{f}(e''), \underline{f}(e)), \underline{h}_{(s',s)}, ((\varepsilon(e'_{i+1}, e'_i))_{i \leq m}, (\varepsilon(e_{i+1}, e_i))_{i \leq n}))$$

$$\text{où } \underline{h}_{(s',s)}(((x'_i)_{i \leq m}, (x_i)_{i \leq n})) = \underline{f}(x''_{m+n+1}) \ldots . \underline{f}(x''_1).$$

Il existe un élément de $K^{\cdot}$ bien déterminé $\overline{h}_{(s',s)}$ tel que :

$$\overline{h}_{(s',s)} \cdot \varepsilon(s') \otimes \varepsilon(s).(\underset{i \leq m}{\otimes} \varepsilon(e'_{i+1}, e'_i), \underset{i \leq n}{\otimes} \varepsilon(e_{i+1}, e_i)) = h_{(s',s)}.$$

Par définition de $\delta_{(s',s)}$, l'on a $\overline{h}_{s'+s} \cdot \underline{\delta}_{(s',s)} = \overline{h}_{(s',s)}$. De plus, il existe $\hat{h}$ dans $K^{\cdot}$ vérifiant $\hat{h} \cdot \sigma_{(s',s)} = \overline{h}_{(s',s)}$, pour tout $(s', s)$ de $S' \times S$. D'où $\hat{h} = \overline{h}_{(e'',e)} \cdot \delta$. Posons $\check{h} = \hat{h} \cdot \gamma$ et notons $\tilde{\kappa}$ le $q$-bimorphisme

$$(\tilde{\varepsilon}(\underline{f}(e''), \underline{f}(e)), \underline{\tilde{\kappa}}, (\tilde{\varepsilon}(\underline{f}(e''), \underline{f}(e')), \tilde{\varepsilon}(\underline{f}(e'), \underline{f}(e)))$$

$$\text{où } \underline{\tilde{\kappa}}(z, z') = z . z',.$$

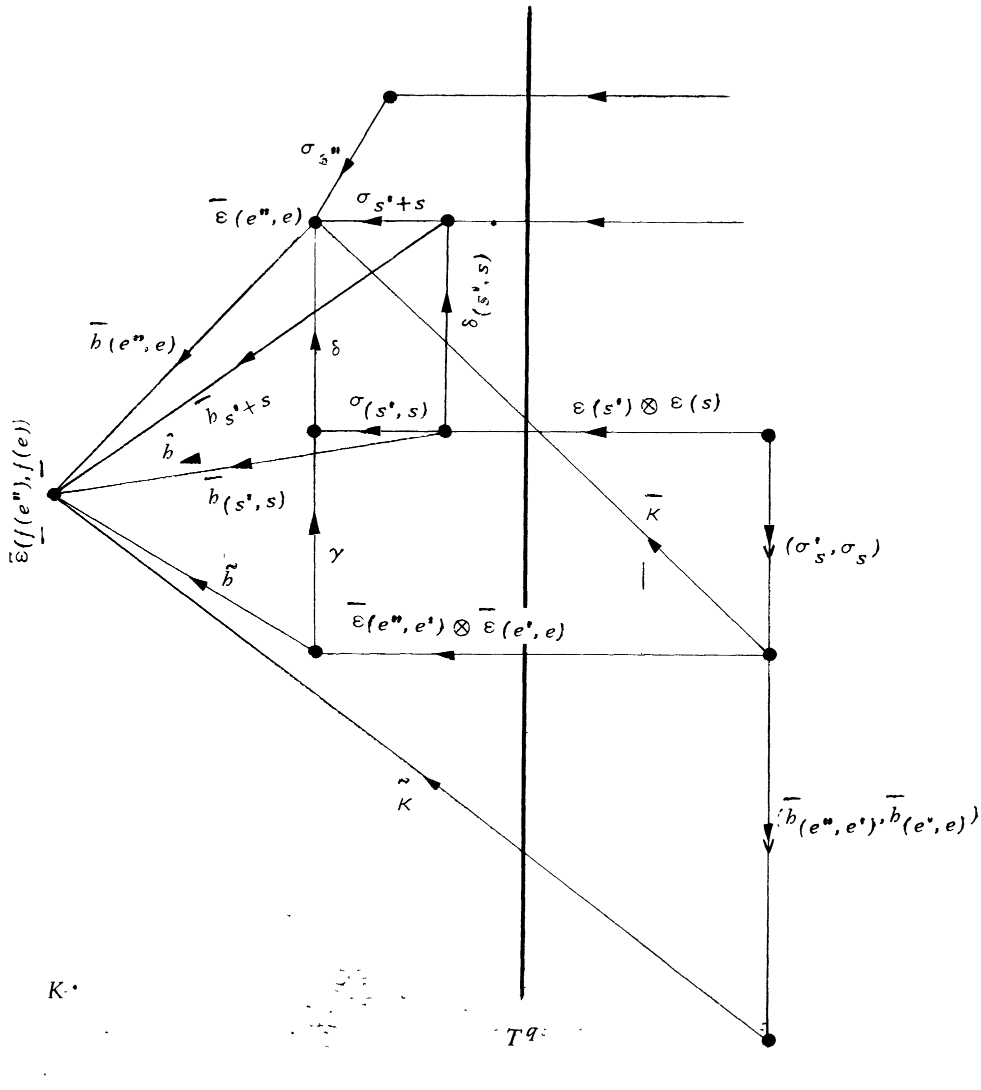
dans $<\tilde{C}>$. On a les relations

$$\tilde{\kappa}.(\overline{h}_{(e'',e')}, \overline{h}_{(e',e)}) = \tilde{h}. \overline{\varepsilon}(e'', e') \otimes \overline{\varepsilon}(e', e).$$

D'où

$$\tilde{\kappa}.(\overline{h}_{(e'',e')}, \overline{h}_{(e',e)}) = \overline{h}_{(e'',e)} . \overline{\kappa}.$$

Ainsi $\underline{h}$ est compatible avec la loi de composition de $<\overline{C}>$ et $\overline{h} = (\tilde{E}, \underline{h}, \overline{E})$ appartient à ${}^q\mathcal{F}'$. La relation $\overline{h}_{(e',e)} \cdot \sigma_s = h_s$, où $s = (e', e)$, assure l'unicité de $\overline{h}$ et $(\overline{E}, \overline{g})$ est un $q\mathcal{F}'_{\mathcal{G}}$-projecteur. ■




EXEMPLE. Si $q$ est l'identité sur $\mathfrak{M}$, on retrouve la quasi-catégorie des chemins associée à un graphe orienté.

COROLLAIRE 1. *Si de plus $q$ est régulier et admet un objet final (resp. si $q$ est à $\mathfrak{M}_0$-sommes, est régulier et admet un objet final), le foncteur*

$q_{\mathcal{G}}^{\mathcal{F}}$ *admet un adjoint et les foncteurs* $q_{\mathcal{F}'}$ *et* $q_{\mathcal{F}}$ *sont à structures quasi-quotients.*

COROLLAIRE 2. *Avec les hypothèses du corollaire précédent, si q admet un adjoint, les foncteurs* $q_{\mathcal{F}'}$ *et* $q_{\mathcal{F}}$ *admettent des adjoints et les catégories* ${}^q\mathcal{F}'$ *et* ${}^q\mathcal{F}$ *sont à* $\mathcal{F}$*-limites inductives.*

DEMONSTRATION. Il existe un $q_{\mathcal{G}}$-projecteur $(E, j)$ associé à $\{x\}$ : si $E = (\varepsilon, [C])$, l'ensemble $C_o$ se compose de deux éléments $y$ et $z$ distincts de $x$; de plus, $\varepsilon(y,y)$ (resp. $\varepsilon(z,z)$, resp. $\varepsilon(y,z)$, resp. $\varepsilon(z,y)$) est une $q$-structure libre associé à $\{y\}$ (resp. à $\{z\}$, resp. à $\{x\}$, resp. au vide).

La catégorie ${}^q\mathcal{G}$ est à $\mathfrak{M}_o$-sommes. Si $\overline{E} = (\overline{\varepsilon}, [\overline{C}])$ est une somme de $(E_i)_{i\in I}$, où $I \in \mathfrak{M}_o$ et $E_i = (\varepsilon_i, [C_i])$, l'ensemble $\overline{C}_o$ est égal à $\underline{\coprod}_{i\in I}(C_i)_o$; de plus, $\overline{\varepsilon}(e_i, e'_i)$ est isomorphe à $\varepsilon_i(e_i, e'_i)$ et $\overline{\varepsilon}(e_i, e'_j)$ est une $q$-structure libre associée au vide, si $i \neq j$.

Compte tenu de la proposition 4, ce corollaire s'en déduit.

## 3. *CATEGORIE q-DOMINEE LIBRE ASSOCIEE A UNE CATEGORIE.*

Soit $\mathfrak{M}'_o$ un univers, contenu dans $\mathfrak{M}_o$. On suppose que $K^\bullet$ est à $\mathfrak{M}_o$-sommes, qu'il existe un $q$-projecteur $(a, j)$ associé à un ensemble réduit à un élément $\overline{m}$ et qu'il existe un $q$-produit tensoriel naturalisé $\eta = (b, \underline{\eta}, (a, a, a))$. On pose

$$\tilde{m} = \underline{j}(\overline{m}) \text{ et } m = \underline{\eta}(\tilde{m}, \tilde{m}, \tilde{m}).$$

Si $I \in \mathfrak{M}_o$, notons $(S(I), (\sigma_i)_{i\in I})$ une somme naturalisée de $(b)_{i\in I}$ dans $K^\bullet$.

Considérons les conditions suivantes :

a) $\theta = (b, \underline{\theta}, (b, b))$ est un $q$-produit tensoriel naturalisé et $\underline{\theta}(m, m') = m' = \underline{\theta}(m', m)$, pour tout $m'$ de $\underline{q}(b)$.

b) Si $(I, I') \in \mathfrak{M}'_o \times \mathfrak{M}'_o$, le couple $(S(I), S(I'))$ admet $S(I\times I')$ pour $q$-produit tensoriel et $\underline{q}(S(I\times I')) \in \mathfrak{M}'_o$. De plus les $q$-produits tensoriels, définis sur les $S(I)$, où $I \in \mathfrak{M}'_o$, sont associatifs.

c) Si $(S(I), (\sigma_i)_{i\in I})$ est une somme naturalisée, la relation $\underline{\sigma}_i(m) = \underline{\sigma}_{i'}(m)$ entraîne $i = i'$.

THEOREME 3. *Si les conditions a) et b) sont vérifiées, à toute $\mathfrak{M}'_o$-catégorie $C^{\cdot}$ est associée une ${}^q p\mathfrak{F}$-structure libre $\overline{E} = (\overline{\varepsilon}, \overline{C}^{\cdot})$, telle que $\overline{C}^{\cdot}_o$ soit en bijection avec $C^{\cdot}_o$ et telle que $\overline{C}^{\cdot}$ soit une $\mathfrak{M}'_o$-catégorie. Si de plus la condition c) est vérifiée, $C^{\cdot}$ s'identifie à une sous-catégorie de $\overline{C}^{\cdot}$.*

DEMONSTRATION. Pour tout couple d'unités $(e', e)$ de $C^{\cdot}$, posons $\overline{\varepsilon}(e', e) = S(H_{C^{\cdot}}(e', e))$. Comme $q$ est saturé, l'on peut supposer que

$$\underline{q}(\overline{\varepsilon}(e', e)) \cap \underline{q}(\overline{\varepsilon}(e'_1, e_1)) = \emptyset, \text{ si } (e', e) \neq (e'_1, e_1).$$

De plus l'on peut identifier $e$ et $\underline{\sigma}_e(m) \in \underline{q}(\overline{\varepsilon}(e, e))$. Si $x \in \underline{q}(\overline{\varepsilon}(e', e))$, posons $\alpha(x) = e$ et $\beta(x) = e'$. Soit $e'' \in C^{\cdot}_o$. Notons $\zeta_{(e'', e', e)}$ le $q$-produit tensoriel naturalisé de source $(\overline{\varepsilon}(e'', e'), \overline{\varepsilon}(e', e))$ et de but $S(H_{C^{\cdot}}(e'', e') \times H_{C^{\cdot}}(e', e))$. Il existe dans $K^{\cdot}$ un élément bien déterminé $\delta_{(e'', e', e)}$ vérifiant $\delta_{(e'', e', e)} \cdot \sigma_{(y', y)} = \underline{\sigma}_{y' \cdot y}$, pour tout $(y', y)$ de $H_{C^{\cdot}}(e'', e') \times H_{C^{\cdot}}(e', e)$. L'application $\underline{Q}(\kappa_{(e'', e', e)})$, où $\kappa_{(e'', e', e)} = \delta_{(e'', e', e)} \cdot \zeta_{(e'', e', e)}$, est une application de $\underline{q}(\overline{\varepsilon}(e'', e')) \times \underline{q}(\overline{\varepsilon}(e', e))$ dans $\underline{q}(\overline{\varepsilon}(e'', e))$. On définit ainsi sur $\overline{C} = \bigcup_{(e', e) \in \overline{C}^{\cdot}_o \times \overline{C}^{\cdot}_o} \underline{q}(\overline{\varepsilon}(e', e))$ une structure de quasi-catégorie $\langle \overline{C} \rangle = (\overline{C}^{\cdot}, \beta, \alpha)$. L'associativité provient de l'associativité des $q$-produits tensoriels relatifs aux $S(I)$, où $I \in \mathfrak{M}'_o$. Comme $\kappa_{(e'', e', e)}$ est un $q$-bimorphisme, on en déduit que le couple $(\overline{\varepsilon}, \langle \overline{C} \rangle)$ appartient a ${}^q\mathfrak{F}'_o$.

Soit $y$ un élément de $e'.C.e$. Par hypothèse, on a la relation: $\sigma_{(y, e)} \cdot \theta = \zeta_{(e', e, e)} \cdot (\sigma_y, \sigma_e)$. L'application de l'ensemble $\underline{q}(\overline{\varepsilon}(e, e))$ dans $\underline{q}(\beta(\zeta_{(e', e, e)}))$, qui associe $\zeta_{(e', e, e)}(x, e)$ à $x$, est la projection d'un élément $\zeta^e_{(e', e, e)}$ dans $\beta(\zeta_{(e', e, e)}) . K^{\cdot} . \overline{\varepsilon}(e', e)$. La condition a) entraîne :

$$\delta_{(e', e, e)} \cdot \zeta^e_{(e', e, e)} \cdot \sigma_y = \delta_{(e', e, e)} \cdot \sigma_{(y, e)} \cdot \theta^m = \sigma_{y \cdot e} = \sigma_y .$$

Donc $\delta_{(e', e, e)} \cdot \zeta^e_{(e', e, e)} = \overline{\varepsilon}(e', e)$ et $e$ est une unité à droite dans $\overline{C}^{\cdot}$. On montre de même que $e$ est une unité à gauche. Ainsi $\overline{C}^{\cdot}$ est une catégorie et $\overline{E} = (\overline{\varepsilon}, \overline{C}^{\cdot})$ appartient à ${}^q\mathfrak{F}_o$.

Pour tout $y$ de $e'.C.e$, posons $\underline{f}(y) = \underline{\sigma}_y(m)$. Si $y' \in e''.C.e'$, de la relation

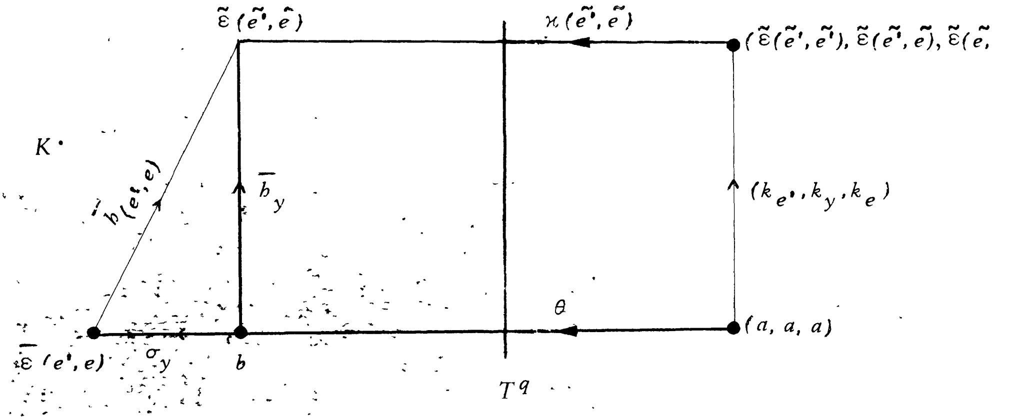
$$\bar{\varkappa}_{(3\ (e'', e', e)} . (\sigma_{y'}, \sigma_y) = \sigma_{y'.y} . \theta ,$$

l'on déduit que $\underline{f}(y').\underline{f}(y) = \underline{f}(y'.y)$. Ainsi la surjection $\underline{f}$ de $C$ dans un sous-ensemble de $\bar{C}$ définit un foncteur $f = (\bar{C}^\bullet, \underline{f}, C^\bullet)$.

Soit $\tilde{E} = (\tilde{\varepsilon}, \tilde{C}^\bullet)$ un élément de ${}^q\mathcal{F}_o$ et $g = (\tilde{\bar{C}}^\bullet, \underline{g}, C^\bullet)$ un foncteur. A tout élément $y$ de $C$ est associé un morphisme $k_y$ de source $a$, de but $\tilde{\varepsilon}(\underline{g}(\beta y), \underline{g}(\alpha y))$ et tel que $\underline{k}_y(\tilde{m}) = \underline{g}(y)$. Supposons que $\alpha(y) = e$, $\beta(y) = e'$ et $\underline{g} \times \underline{g}((e', e)) = (\tilde{e}', \tilde{e})$. Notons $\tilde{\varkappa}(\tilde{e}', \tilde{e})$ le $q$-multimorphisme de source $(\tilde{\varepsilon}(\tilde{e}', \tilde{e}'), \tilde{\varepsilon}(\tilde{e}', \tilde{e}), \tilde{\varepsilon}(\tilde{e}, \tilde{e}))$ et de but $\tilde{\varepsilon}(\tilde{e}', \tilde{e})$, qui à $(z'', z, z')$ associe $z''.z.z'$. Posons

$$h_y = \tilde{\varkappa}_{(\tilde{e}', \tilde{e})} . (k_{e'}, k_y, k_e) .$$

Il existe un élément $\bar{h}_y$ (resp. $\bar{h}_{(e', e)}$) bien déterminé vérifiant $\bar{h}_y . \theta = h_y$ (resp. $\bar{h}_{(e', e)} . \sigma_y = \bar{h}_y$, pour tout $y$ de $e'.C.e$). Posons $\underline{h}(x) = \underline{q}(\bar{h}_{(e', e)})(x)$, si $x$ appartient à $e'.\bar{C}.e$. Ainsi est définie une surjection $\underline{h}$ de $\bar{C}$ dans un sous-ensemble de $\tilde{C}$; cette surjection est compatible avec les applications source et but de $\bar{C}^\bullet$.




Soit $\varphi_i = (\tilde{a}, \underline{\varphi}_i, (b, b))$ un $q$-bimorphisme, où $i = 1, 2$. Montrons que la relation $\underline{\varphi}_1(m, m) = \underline{\varphi}_2(m, m)$ entraîne $\varphi_1 = \varphi_2$. Posons

$$\varphi_i^m = (\tilde{a}, \underline{\varphi}_i^m, b) \quad \text{et} \quad \underline{\varphi}_i^m(m') = \underline{\varphi}_i(m, m') .$$

L'on a : $\underline{\varphi}_1^m \underline{\eta}(\tilde{m}, \tilde{m}, \tilde{m}) = \underline{\varphi}_2^m \underline{\eta}(\tilde{m}, \tilde{m}, \tilde{m})$. Comme $a$ est une $q$-structure libre, l'on en déduit $\underline{\varphi}_1^m \,\underline{\eta}(\tilde{m}', \tilde{m}, \tilde{m}) = \underline{\varphi}_2^m \,\underline{\eta}(\tilde{m}', \tilde{m}, \tilde{m})$, pour tout $\tilde{m}'$ de $\underline{q}(a)$; de même, $\underline{\varphi}_1^m \,\underline{\eta}(\tilde{m}', \tilde{m}'', \tilde{m}) = \underline{\varphi}_2^m \,\underline{\eta}(\tilde{m}', \tilde{m}'', \tilde{m})$, pour tout $\tilde{m}''$ de $\underline{q}(a)$. En itérant le raisonnement, l'on trouve $\varphi_1^m . \eta = \varphi_2^m . \eta$, c'est-à-dire $\varphi_1^m = \varphi_2^m$. D'où $\underline{\varphi}_1(m, m') = \underline{\varphi}_2(m, m')$. Le même raisonnement, appliqué à $\overline{\varphi}_i^{m'} = (\tilde{a}, \overline{\underline{\varphi}}_i^{m'}, b)$, où $\overline{\underline{\varphi}}_i^{m'}(m'') = \underline{\varphi}_i(m'', m')$, montre que $\overline{\varphi}_1^{m'} = \overline{\varphi}_2^{m'}$, c'est-à-dire que $\varphi_1 = \varphi_2$.

Supposons que $y \in e'.C.e$ (resp. $y' \in e''.C.e'$) et que $\tilde{e}'' = \underline{g}(e'')$. Notons $\kappa_{(\tilde{e}'', \tilde{e}', \tilde{e})}$ de $q$-bimorphisme de source $(\tilde{\varepsilon}(\tilde{e}'', \tilde{e}'), \tilde{\varepsilon}(\tilde{e}', \tilde{e}))$ et de but $\tilde{\varepsilon}(\tilde{e}'', \tilde{e})$, qui à $(z', z)$ associe $z'.z$. Si $\varphi_1 = \overline{h}_{y'.y}.\theta$ et si $\varphi_2 = \kappa_{(\tilde{e}'', \tilde{e}', \tilde{e})}.(\overline{h}_{y'}, \overline{h}_y)$, l'on a

$$\underline{\varphi}_1(m, m) = \underline{g}(y'.y) = \underline{g}(y').\underline{g}(y) = \underline{\varphi}_2(m, m).$$

Donc $\varphi_1 = \varphi_2$ et, par suite,

$$\overline{h}_{(e'', e)} . \overline{\kappa}_{(e'', e', e)} = \kappa_{(\tilde{e}'', \tilde{e}', \tilde{e})}.(\overline{h}_{(e'', e')}, \overline{h}_{(e', e)}).$$

Ainsi $\underline{h}$ est compatible avec la loi de composition de $\overline{C}^{\bullet}$ et $\overline{h} = (\overline{E}, \underline{h}, \tilde{E})$ appartient à ${}^q\mathfrak{F}$. L'unicité de $\overline{h}$ se déduit de l'unicité des $k_y$ (resp. $h_y$, resp. $\overline{h}_y$, resp. $\overline{h}_{(e', e)}$). ■

REMARQUE. Les foncteurs $p\mathfrak{F}$, $p\mathfrak{F}_g$, $p\mathfrak{S}'$, $p\mathfrak{S}$, $p\mathfrak{G}$ et $p\mathfrak{G}^a$ [2] vérifient **les** conditions a), b) et c). Par exemple, pour la condition a) l'élément $b$ est respectivement : $N$, $Z$, $N-0$, $N$, $Z$ et $Z$ (muni de la structure additive).

## 4. Foncteur $q$-dominé associé à un foncteur.

*1. EXTENSION DE KAN.*

Soit $\hat{E} = (\hat{\varepsilon}, H^{\bullet})$ une catégorie $q$-dominée (nous ne supposons pas que $H \in \mathfrak{M}_0$). Si $e$ est une unité de $H^{\bullet}$, désignons par $\hat{\varepsilon}_e$ (resp. ${}_e\hat{\varepsilon}$) le foncteur de $H^{\bullet}$ (resp. de $H^*$) dans $K^{\bullet}$, qui à $h$ associe $\hat{\varepsilon}_H.(h, e)$ (resp. $\hat{\varepsilon}_H.(e, h)$). Soient $\varphi = (H^{\bullet}, \underline{\varphi}, I^{\bullet})$ un foncteur et $\psi$ (resp. $\psi'$) une transformation naturelle de $\overline{\mathfrak{N}}(H^{\bullet}, I^{\bullet})$ ayant pour but (resp. pour source) $\varphi$ et ayant pour source (resp. pour but) un foncteur constant.

DEFINITION 4. *Si* $\boxminus \hat{\varepsilon}_e . \psi$ *(resp.* $\boxminus_e \hat{\varepsilon}.\psi'$*) est une limite projective naturalisée dans* $K^{\bullet}$, *on dira que* $\psi$ *(resp.* $\psi'$*) est une limite projective (resp. inductive) naturalisée dans* $\hat{E}$. *Si tout foncteur de source* $I^{\bullet}$ *et de* *but $H^{\bullet}$ admet une limite projective (resp. inductive) dans $\hat{E}$, on dira que $\hat{E}$ est à $\{I^{\bullet}\}$-limites projectives (resp. inductives).*

REMARQUE. Si $\boxminus \hat{\varepsilon}_e . \psi$ (resp. $\boxminus_e \hat{\varepsilon} . \psi'$) est une limite projective naturalisée dans $q$, alors $\psi$ (resp. $\psi'$) est une limite projective (resp. inductive) naturalisée dans $H^{\bullet}$. Si de plus tout élément de $K$, se projetant sur une injection, est un $q$-monomorphisme, les deux notions coïncident.

Nous supposerons dans ce n° que $q$ admet un adjoint et que toute unité $a$ de $K^{\bullet}$ est canoniquement isomorphe à un quotient d'une $q$-structure libre associée à $\underline{q}(a)$.

Soit $E = (\varepsilon, C^{\bullet})$ un élément de ${}^q\mathcal{F}_o$. Nous allons associer à toute unité $e$ de $C^{\bullet}$ une catégorie $\mathfrak{U}_e^{\bullet}$ de la manière suivante :

Si $e'$ appartient à $C_o^{\bullet}$, notons $(a_{e'}^e, j_{e'}^e)$ un $q$-projecteur associé à $e.C.e'$. Si $y$ appartient à $e'.C$, désignons par $a_y^e = (a_{\alpha y}^e, \underline{a}_y^e, a_{\beta y}^e)$ un morphisme libre associé à l'application $H_C.(e,y)$. Il existe un $q$-épimorphisme $k_{e'}^e = (\varepsilon(e,e'), \underline{k}_{e'}^e, a_{e'}^e)$ dont la projection dans $\mathfrak{M}$ est un inverse à gauche de $j_{e'}^e$. Posons $A_{e'}^e = q(a_{e'}^e)$ et $A^e = \bigcup_{e' \in C^{\bullet}} A_{e'}^e$. Il existe une surjection $k^e = (e.C, \underline{k}^e, A^e)$, telle que $\underline{k}^e(z) = {}^o k_e^{e'}(z)$, si $z$ appartient à $A_{e'}^e$. Notons $B^e$ l'ensemble des couples $(x,y)$ tels que $\beta(x) = e$ et $\alpha(x) = \beta(y)$. L'ensemble $\mathfrak{U}_e = A^e \cup B^e$ est muni d'une structure de catégorie $\mathfrak{U}_e^{\bullet}$, pour la loi de composition :

$(e,e).z = z$, pour tout $z$ de $A^e$.

$z.(x,y)$ est défini et égal à $a_y^e(z)$ si, et seulement si, $\underline{k}^e(z) = x$, avec $z \in A^e$ et $(x,y) \in B^e$.

$(x,y).(x',y')$ est défini et égal à $(x, y.y')$, si, et seulement si, $x' = x.y$, avec $(x,y)$ et $(x',y')$ dans $B^e$.

Notons $\mathfrak{U}_E$ la famille des catégories $\mathfrak{U}_e^{\bullet}$, où $e$ appartient à $C_o^{\bullet}$, et désignons par $\mathfrak{N}(\hat{E}, E)^{\boxminus}$ la sous-catégorie pleine de $\mathfrak{N}(H^{\bullet}, C^{\bullet})^{\boxminus}$, ayant pour objets les foncteurs $q$-dominés.

PROPOSITION 8. *Si $\hat{E}$ est à $\mathfrak{U}_E$-limites inductives, la catégorie $\mathfrak{N}(H^{\bullet}, C^{\bullet})^{\boxminus}$ est à $\mathfrak{N}(\hat{E}, E)^{\boxminus}$-projections.*

DEMONSTRATION. Désignons par $f = (H^{\bullet}, \underline{f}, C^{\bullet})$ un foncteur. Soit $(e,e')$

un couple d'unités de $C^\bullet$. L'application de $e.C.e'$ vers $\underline{f}(e).H^\bullet.\underline{f}'(e)$. qui à $x$ associe $\underline{f}(x)$ se prolonge en un morphisme

$$f^e_{e'} = (\hat{\varepsilon}(\underline{f}(e), \underline{f}(e')), \underline{f}^e_{e'}, a^e_{e'})$$

de $K^\bullet$. Pour tout $z$ de $A^e$, posons $\underline{f}^e_{e'}(z) = \underline{u}_e(z)$, si $z$ appartient à $A^e_{e'}$, et, pour tout $(x, y)$ de $B^e$, posons $\underline{f}(y) = \underline{u}_e((x,y))$. La surjection $\underline{u}_e$ définit un foncteur $u_e = (H^\bullet, \underline{u}_e, \mathfrak{U}^\bullet_e)$. En effet, soit $y$ un élément de $C$; comme $f$ est un foncteur, l'on a dans $K^\bullet$:

$$f^e_{\alpha y}.a^e_y = \hat{\varepsilon}((\underline{f}(e), \underline{f}(y))).f^e_{\beta y}.$$

Par suite, si $\beta(x) = e$, si $\alpha(x) = \alpha(y)$ et si $\underline{k}^e(z) = x$, on a les relations

$$\underline{u}_e(z.(x,y)) = \underline{u}_e(\underline{a}^e_y(z)) = \underline{f}^e_{\alpha y}(\underline{a}^e_y(z)) =$$
$$= \hat{\varepsilon}((\underline{f}(e), \underline{f}(y)))(\underline{f}^e_{\beta y}(z)) = \underline{f}^e_{\beta y}(z).\underline{f}(y) = \underline{u}_e(z).\underline{u}_e((x,y)).$$

Le foncteur $u_e$ admet une limite inductive naturalisée $(\underline{g}(e), \tau_e, u_e)$ dans $\hat{E}$. Soit $\bar{x}$ un élément de $C.e$, de but $\bar{e}$. Il existe une transformation naturelle $(\underline{g}(\bar{e}), \tau_{\bar{x}}, u_e)$, définie par $\tau_{\bar{x}}((x, \alpha x)) = \tau_{\bar{e}}((\bar{x}.x, \alpha x))$. En effet, il existe un morphisme $q$-libre $a^{\bar{x}}_{e'} = (a^{\bar{e}}_{e'}, \underline{a}^{\bar{x}}_{e'}, a^e_{e'})$ associé à l'application $H_C.(\bar{x}, e')$. D'où la relation :

$$f^{\bar{e}}_{e'}.a^{\bar{x}}_{e'} = \hat{\varepsilon}((\underline{f}(\bar{x}), \underline{f}(e'))).f^e_{e'}.$$

Ainsi, si $k^e(z) = x$, l'on a :

$$\tau_{\bar{x}}((e,e)).\underline{u}_e(z) = \tau_{\bar{e}}((\bar{x}, e)).\underline{f}^e_{e'}(z) = \tau_{\bar{e}}((\bar{e}, \bar{e})).\underline{f}(\bar{x}).\underline{f}^e_{e'}(z) =$$
$$= \tau_{\bar{e}}((\bar{e}, \bar{e})).\underline{f}^{e'}_{e}(\underline{a}^{\bar{x}}_e(z)) = \tau_{\bar{e}}((\bar{x}.x, \alpha x)) = \tau_{\bar{x}}((x, \alpha x)).$$

A la transformation naturelle précédente correspond un élément bien déterminé $\underline{g}(\bar{x})$ de $H^\bullet$ vérifiant $\underline{g}(\bar{x}).\tau_e((x, \alpha x)) = \tau_{\bar{x}}((x, \alpha x))$, pour toute unité de $\mathfrak{U}^\bullet_e$. Si $\bar{x}_1$ appartient à $C.\bar{e}$ et si $\beta(\bar{x}_1) = \bar{e}'$, l'on a :

$$\underline{g}(\bar{x}_1).\underline{g}(\bar{x}).\tau_e((x, \alpha x)) = \underline{g}(\bar{x}_1).\tau_{\bar{x}}((x, \alpha x)) =$$
$$= \underline{g}(\bar{x}_1).\tau_{\bar{e}}((\bar{x}.x, \alpha x)) = \tau_{\bar{e}'}((\bar{x}_1.\bar{x}.x, \alpha x)) =$$
$$\underline{g}(\bar{x}_1.\bar{x}).\tau_e((x, \alpha x)).$$

Ainsi la surjection $\underline{g}$ définit un foncteur $g = (H^\bullet, \underline{g}, C^\bullet)$. En posant $\sigma(e) = \tau_e((e, e))$, pour tout $e$ de $C_o^{\cdot}$, on définit une transformation naturelle $\psi = (g, \sigma, f)$.

Remarquons que $\varepsilon(e, e')$ s'identifie à une $q$-structure quotient de $a_{e'}^e$ par la relation d'équivalence associée à $k_{e'}^e$ et que, si $\alpha(x) = e'$, $\beta(x) = e$ et si $\underline{k}^e(z) = x$, l'on a

$$\sigma(e) . \underline{u}_e(z) = \tau_e((x, \alpha x)) = \sigma(e) . \underline{u}_e((e, x)).$$

Par suite, la relation d'équivalence associée à $\hat{\varepsilon}(\sigma(e), e') . f_{e'}^e$ contient la relation $r$. Donc, si $\underline{l}_{e'}^e(x) = \sigma(e) . \underline{f}(x)$, le triplet

$$l_{e'}^e = (\hat{\varepsilon}(\underline{g}(e), \underline{g}(e')), \underline{l}_{e'}^e, \varepsilon(e, e'))$$

appartient à $K$.

Posons $\eta((x, \alpha x)) = l_{\alpha x}^{\bar{e}} . \varepsilon(\bar{e}, x)$ et $\underline{\xi}(z) = \hat{\varepsilon}(\underline{g}(e), \underline{u}_e(z))$ (resp. $\underline{\xi}((x, y)) = \hat{\varepsilon}(\underline{g}(e), \underline{u}_e((x, y)))$). On a les relations :

$$\underline{\xi}(z) . \eta((e, e))(\bar{x}) = \sigma(\bar{e}) . \underline{f}(\bar{x}) . \underline{u}_e(z) =$$

$$\underline{g}(\bar{x}) . \sigma(e) . \underline{u}_e(z) = \underline{g}(\bar{x}) . \sigma(e) . \underline{f}(x) =$$

$$\sigma(\bar{e}) . \underline{f}(\bar{x} . x) = \eta((x, \alpha x))(\bar{x}).$$

Et

$$\underline{\xi}((x, y)) . \eta((x, \alpha x))(\bar{x}) = \sigma(\bar{e}) . \underline{f}(\bar{x} . x) . f(y) =$$

$$\sigma(\bar{e}) . \underline{f}(\bar{x} . x . y) = \eta((x . y, \alpha y))(\bar{x}).$$

D'où la transformation naturelle $(\xi, \eta, \varepsilon(\bar{e}, e))$ de $\mathfrak{N}(K^{\cdot}, \mathfrak{U}^{\cdot})$, où $\varepsilon(\bar{e}, e)$ est identifié au foncteur constant sur $\varepsilon(\bar{e}, e)$. La définition de $\underline{g}(e)$ assure l'existence et l'unicité d'un élément $\bar{g}(\bar{e}, e)$ de $\hat{\varepsilon}(\underline{g}(\bar{e}), \underline{g}(e)) . K . \varepsilon(\bar{e}, e)$ se projetant sur l'application qui à $\bar{x}$ associe $\underline{g}(\bar{x})$. Ainsi le triplet $\bar{g} = (\hat{E}, \underline{g}, E)$ est un foncteur $q$-dominé.

Soit $\bar{g}' = (\hat{E}, \underline{g}', E)$ un foncteur $q$-dominé et $\psi' = (g', \sigma', f)$ une transformation naturelle, où $g' = (H^{\cdot}, \underline{g}', C^{\cdot})$. Des relations :

$$\underline{q}(\hat{\varepsilon}(\underline{g}'(e), \sigma'(e')) . \bar{g}'(e, e') . k_{e'}^e) . j_{e'}^e =$$

$$= \underline{q}(\hat{\varepsilon}(\underline{g}'(e), \sigma'(e')) . \bar{g}'(e, e')) = \underline{q}(\hat{\varepsilon}(\sigma'(e), f(e)) . f_{e'}^e) . j_{e'}^e,$$

l'on déduit que :

$\sigma'(e).\underline{u}_e(z) = \underline{g}'(\underline{k}^e(z)).\sigma'(e') = \underline{g}'(x).\sigma'(e') = \sigma'(e).\underline{f}(x).$

En posant $t_e((x, \alpha x)) = \sigma'(e).\underline{f}(x)$, on définit une transformation naturelle $(\underline{g}'(e), t_e, u_e)$ dans $\mathfrak{N}(H^\cdot, \mathfrak{U}_e^\cdot)$, en identifiant $\underline{g}'(e)$ et le foncteur constant sur $\underline{g}'(e)$. Il existe un élément unique $\bar{\sigma}(e)$ dans $H^\cdot$ vérifiant $\bar{\sigma}(e).\tau_e((x, \alpha x)) = t_e((x, \alpha x))$, pour toute unité de $\mathfrak{U}_e^\cdot$. En particulier $\bar{\sigma}(e).\sigma(e) = \sigma'(e)$. On vérifie aisément que $\bar{\psi} = (g', \bar{\sigma}, g)$ est une transformation naturelle bien déterminée par la relation $\bar{\psi} \boxminus \psi = \psi'$. ■

Supposons que l'on ait un élément $\bar{s} = (E, \underline{s}, \bar{E})$ dans ${}^q\mathfrak{F}$, où $\bar{E} = (\bar{\varepsilon}, \bar{C}^\cdot)$. Posons $s = (C^\cdot, \underline{s}, \bar{C}^\cdot)$ et notons $\nabla_s$ la famille des catégories des triangles $\nabla_e$ associées au foncteur $s$, pour $e$ dans $C_0^\cdot$.

Désignons par $\mathfrak{N}^*_{\bar{s}}$ le foncteur de $\mathfrak{N}(\hat{E}, E)^{\boxminus}$ dans $\mathfrak{N}(\hat{E}, \bar{E})^{\boxminus}$, qui à $\psi$ associe $\psi . s$.

COROLLAIRE. *Si $\hat{E}$ est à $\mathfrak{U}_E$-limites inductives et si $H^\cdot$ est à $\nabla_s$-limites inductives, le foncteur $\mathfrak{N}^*_{\bar{s}}$ admet un adjoint.*

Dans la suite, on posera $\nabla_{\bar{s}} = \nabla_s \cup \mathfrak{U}_E$.

## 2. *FONCTEUR COMPATIBLE AVEC DES LIMITES.*

On suppose de plus que $q$ est à $\mathfrak{F}$-limites projectives, est régulier et que le foncteur $q^{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{G}}$ admet un adjoint.

Désignons par $\mathfrak{I}$ un $\mathfrak{M}_0$-ensemble contenu dans $\mathfrak{F}$ et par $\mu$ une application d'un sous-ensemble $\alpha(\mu)$ de $C^\cdot.\mathfrak{F}.\mathfrak{I}$ dans $\bigcup_{I^\cdot \in \mathfrak{I}} \mathfrak{N}(C^\cdot, I^\cdot)$ telle que $\beta^{\boxminus}\mu(\varphi) = \varphi$ et telle que $\alpha^{\boxminus}\mu(\varphi)$ soit un foncteur constant, pour tout $\varphi$ de $\alpha(\mu)$. A $\sigma = (E, \mu)$ nous allons associer un foncteur $q$-dominé $\bar{s} = (E, \underline{s}, \bar{E})$, de la manière suivante :

Soit $w$ une bijection de $\alpha(\mu)$ sur un ensemble $W$ tel que $W \cap C_0^\cdot = \emptyset$. Posons $\tilde{C}_0 = W \cup C_0^\cdot$ et $\tilde{\varepsilon}(e, e') = \varepsilon(e, e')$, pour tout $(e, e')$ de $C_0^\cdot \times C_0^\cdot$. Désignons par $\varphi$ un élément de $\alpha(\mu)$ et posons $\tilde{e} = w(\varphi)$, $\alpha(\varphi) = I^\cdot$ et $\mu(\varphi) = (\varphi, \tau^\varphi, e^\varphi)$. On représentera par $(\tilde{\varepsilon}(\tilde{e}, \tilde{e}), g_{\tilde{e}})$ et par $(\tilde{\varepsilon}(\tilde{e}, e^\varphi), g^{\tilde{e}})$ un $q$-projecteur associé à $\{\tilde{e}\}$ ; on suppose que $\underline{g}_{\tilde{e}}(\tilde{e}) = \tilde{e}$. Désignons aussi par $(\tilde{\varepsilon}(e, \tilde{e}), g_{(e, \tilde{e})})$ un $q$-projecteur, où $\overline{\alpha(g_{(e, \tilde{e})})}$

est l'ensemble des $i$ de $I_o^\bullet$ tels que $\underline{\varphi}(i) = e \in C_o^\bullet$. Pour tout autre couple $(\tilde{e}, \tilde{e}')$ de $\tilde{C}_o \times \tilde{C}_o$, on représentera par $\tilde{\varepsilon}(\tilde{e}, \tilde{e}')$ une $q$-structure libre associée au vide. Comme $q$ est saturé, l'on peut supposer que

$$q(\tilde{\varepsilon}(\tilde{e}, \tilde{e}')) \cap q(\tilde{\varepsilon}(\tilde{e}_1, \tilde{e}'_1)) = \emptyset, \text{ si } (\tilde{e}, \tilde{e}') \neq (\tilde{e}_1, \tilde{e}'_1).$$

Pour tout $x$ de $\underline{q}(\tilde{\varepsilon}(\tilde{e}, \tilde{e}'))$, on posera $\alpha(x) = \tilde{e}'$ et $\beta(x) = \tilde{e}$. On définit ainsi un graphe orienté $q$-dominé

$$\tilde{E} = (\tilde{\varepsilon}, [\tilde{C}]), \text{ où } \tilde{C} = \bigcup_{(\tilde{e}, \tilde{e}') \in \tilde{C}_o \times \tilde{C}_o} \underline{q}(\tilde{\varepsilon}(\tilde{e}, \tilde{e}')).$$

Le triplet $\bar{\iota} = (\tilde{E}, \underline{\iota}, [E])$ appartient à ${}^q\mathcal{G}$ et il existe un quadruplet $(\bar{t}', [\bar{E}'], \bar{\iota}, \bar{t})$ définissant $\bar{t} = (\bar{E}', \underline{t}, E)$ comme $q{}^{\mathcal{F}}_{\mathcal{G}}$-quasi-surjection (prop. 4).

Si $\varphi \in \alpha(\mu)$, notons $A_\varphi$ l'ensemble des couples

$$(\underline{t}'(\underline{g}_{(e, \tilde{e})}(i)), \underline{t}'(\underline{g}^e(\tilde{e})), \underline{t}'(\tau^\varphi(i))),$$

où $i$ appartient à $I_o^\bullet$. Il existe une $q\mathcal{F}$-quasi-surjection $\bar{t}_1 = (\bar{E}, \underline{t}_1, \bar{E}')$ associée à la relation $A = \bigcup_{\varphi \in \alpha(\mu)} A_\varphi$ (corollaire 1 de la prop. 4). Montrons que $\bar{t}_1 . \bar{t}$ admet un inverse à gauche $\bar{s}$. Il existe un élément bien déterminé $\bar{s}'(e, \tilde{e})$ dans $\varepsilon(e, e^\varphi) . K . \tilde{\varepsilon}(e, \tilde{e})$ tel que

$$\underline{q}(\bar{s}'(e, \tilde{e}))(g_{(e, \tilde{e})}(i)) = \tau^\varphi(i)$$

pour tout $i$ de $I_o^\bullet$ vérifiant $\varphi(i) = e \in C_o^\bullet$. De même il existe un élément bien déterminé $\bar{s}'(\tilde{e}, \tilde{e})$ dans $\varepsilon(e^\varphi, e^\varphi) . K . \tilde{\varepsilon}(\tilde{e}, \tilde{e})$ vérifiant

$$\underline{q}(\bar{s}'(\tilde{e}, \tilde{e}))(\tilde{e}) = e^\varphi .$$

On suppose aussi que $\bar{s}'(\tilde{e}, e^\varphi)$ appartient à $\varepsilon(e^\varphi, e^\varphi) . K . \tilde{\varepsilon}(\tilde{e}, e^\varphi)$ et vérifie $\underline{q}(\bar{s}'(\tilde{e}, e^\varphi))(\tilde{e}) = e^\varphi$. Posons $\bar{s}'(e', e) = \varepsilon(e', e)$, pour tout élément $(e', e)$ de $C_o^\bullet \times C_o^\bullet$ ; posons également $s'(\tilde{e}) = e^\varphi$ ainsi que $\underline{s}'(e) = e$, pour tout $e$ de $C_o^\bullet$. Si $(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2)$ est un élément de $\tilde{C}_o \times \tilde{C}_o$ et si $\bar{s}'(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2)$ n'est pas défini, c'est que $\tilde{\varepsilon}(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2)$ est un objet initial de $K^\bullet$ et il existe un morphisme unique $\bar{s}'(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2)$ dans

$$\varepsilon(\underline{s}'(\tilde{e}_1), \underline{s}'(\tilde{e}_2)) . K . \tilde{\varepsilon}(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2).$$

En posant $\underline{s}'(z) = \underline{q}(\bar{s}'(\beta(z), \alpha(z)))(z)$, pour tout $z$ de $\tilde{C}$, on définit un élément $\overline{s'} = ([E], \underline{s}', [\tilde{E}])$ de ${}^q\mathcal{G}$, qui est un inverse à gauche de $\bar{\iota}$. Par suite, il existe dans ${}^q\mathfrak{F}$ un élément bien déterminé $\bar{s}_1$ inverse à gauche de $\bar{t}$ et vérifiant $[\bar{s}_1].\overline{t'} = \overline{s'}$. Mais il est clair que la relation d'équivalence associée à $\bar{s}_1$ contient la relation $A$. Il existe donc un élément unique $\bar{s} = (E, \underline{s}, \bar{E})$ dans ${}^q\mathfrak{F}$ vérifiant $\bar{s}.\bar{t}_1 = \bar{s}_1$. ∎

Pour simplifier les notations, on suppose que $H \in \mathfrak{M}_o$, mais on peut étendre le résultat au cas inverse. On note $g$ le foncteur sous-jacent à un foncteur $q$-dominé $\bar{g}$.

Désignons par $\mathfrak{R}(\hat{E}, \sigma)^{\boxminus}$ la sous-catégorie pleine de $\mathfrak{R}(\hat{E}, E)^{\boxminus}$, ayant pour objets les foncteurs $q$-dominés $\bar{g} = (\hat{E}, \underline{g}, E)$, tels que $\boxminus g.\mu(\varphi)$ soit une limite projective naturalisée dans $\hat{E}$, pour tout $\varphi$ de $\alpha(\mu)$.

Soit $\Lambda$ un ordinal de seconde espèce strictement inférieur à l'ordinal associé à $\mathfrak{M}_o$ et strictement supérieur à l'ordinal de $I$ pour tout $I \in \mathfrak{I}$, et $\mathfrak{L}$ la famille des catégories $\lambda^{\bullet}$, où $\lambda \leq \Lambda$.

THEOREME 4. *Si $\hat{E}$ est à $\mathfrak{I}$-limites projectives et aussi à $\nabla_{\mathfrak{s}} \cup \mathfrak{L}$-limites inductives et si les $\mathfrak{I}$-limites projectives et les $\Lambda^{\bullet}$-limites inductives dans $\hat{E}$ commutent, la catégorie $\mathfrak{R}(\hat{E}, E)^{\boxminus}$ est à $\mathfrak{R}(\hat{E}, \sigma)^{\boxminus}$-projections.*

DEMONSTRATION. Soit $\bar{f} = (\hat{E}, \underline{f}, E)$ un foncteur $q$-dominé. On va lui associer, par récurrence, une famille de transformations naturelles $(\theta_{(\lambda', \lambda)})_{\lambda \leq \lambda' < \Lambda}$ appartenant à $\mathfrak{R}(\hat{E}, E)$ telle que

$\theta_{(\lambda'', \lambda')} \boxminus \theta_{(\lambda', \lambda)}$ soit définie et égale à $\theta_{(\lambda'', \lambda)}$,

$\alpha^{\boxminus}(\theta_{(\lambda, 1)}) = \bar{f}$.

Posons $\theta_{(\lambda', \lambda)} = (f_{\lambda'}, \eta_{(\lambda', \lambda)}, f_\lambda)$ et notons $\bar{f}_\lambda$ le foncteur $q$-dominé $(\hat{E}, \underline{f}_\lambda, E)$.

$\alpha$) Soit $\nu < \Lambda$. Supposons que $\theta_{(\lambda', \lambda)}$ soit défini, pour tout $\lambda \leq \lambda' \leq \nu$, et désignons par $S_\nu^\varphi = (f_\nu . \varphi, \sigma_\nu^\varphi, a_\nu^\varphi)$ une limite projective naturalisée dans $\hat{E}$, où $\varphi \in \alpha(\mu)$. Il existe un homomorphisme de graphes orientés $q$-dominés

$$\bar{g}'_\nu = ([\hat{E}], \underline{g}'_\nu, \tilde{E}) \text{ tel que } \bar{g}'_\nu . \bar{\iota} = [\bar{f}_\nu].$$

En effet, avec les notations précédant le théorème, on pose :

a') $\bar{g}'_\nu(e, e') = \bar{f}_\nu(e, e')$, pour tout $(e, e')$ de $C_o^{\bullet} \times C_o^{\bullet}$.

b•) Il existe un morphisme unique $\overline{g}'_\nu(e, \tilde{e})$ dans

$$\hat{\varepsilon}(f_\nu(e), a_\nu^\varphi).K.\tilde{\varepsilon}(e, \tilde{e}),$$

tel que $\underline{q}(\overline{g}'_\nu(e, \tilde{e})).g_{(e,\tilde{e})}$ soit l'application qui,à $i$ dans $I_o^\bullet$ vérifiant $\underline{\varphi}(i) = e$, associe $\sigma_\nu^\varphi(i)$.

c•) Il existe un élément bien déterminé $\overline{g}'_\nu(\tilde{e}, \tilde{e})$ dans

$$\hat{\varepsilon}(a_\nu^\varphi, a_\nu^\varphi).K.\tilde{\varepsilon}(\tilde{e}, \tilde{e})$$

tel que $\underline{q}(\overline{g}'_\nu(\tilde{e}, \tilde{e}))(\tilde{e}) = a_\nu^\varphi$.

d•) Il existe un élément bien déterminé $\overline{g}'_\nu(\tilde{e}, e^\varphi)$ dans

$$\tilde{\varepsilon}(a_\nu^\varphi, \underline{f}_\nu(e^\varphi)).K \quad .\tilde{\varepsilon}(\tilde{e}, e^\varphi)$$

tel que, si $\underline{q}(\overline{g}'_\nu(\tilde{e}, e^\varphi))(\underline{g}^{\tilde{e}}(\tilde{e})) = h_\nu^\varphi$, l'on ait $\sigma_\nu^\varphi(i).h_\nu^\varphi = \underline{f}_\nu(\tau^\varphi(i))$ dans $H^\bullet$, pour tout $i$ de $I_o^\bullet$.

e•) Autrement $\overline{g}'_\nu(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2)$ est l'unique morphisme de

$$\hat{\varepsilon}(\underline{g}'_\nu(\tilde{e}_1), \underline{g}'_\nu(\tilde{e}_2)).K.\tilde{\varepsilon}(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2),$$

où $\underline{g}'_\nu(\tilde{e}) = a_\nu^\varphi$, et où $\underline{g}'_\nu(e) = \underline{f}_\nu(e)$, pour tout $e$ de $C_o^\bullet$.

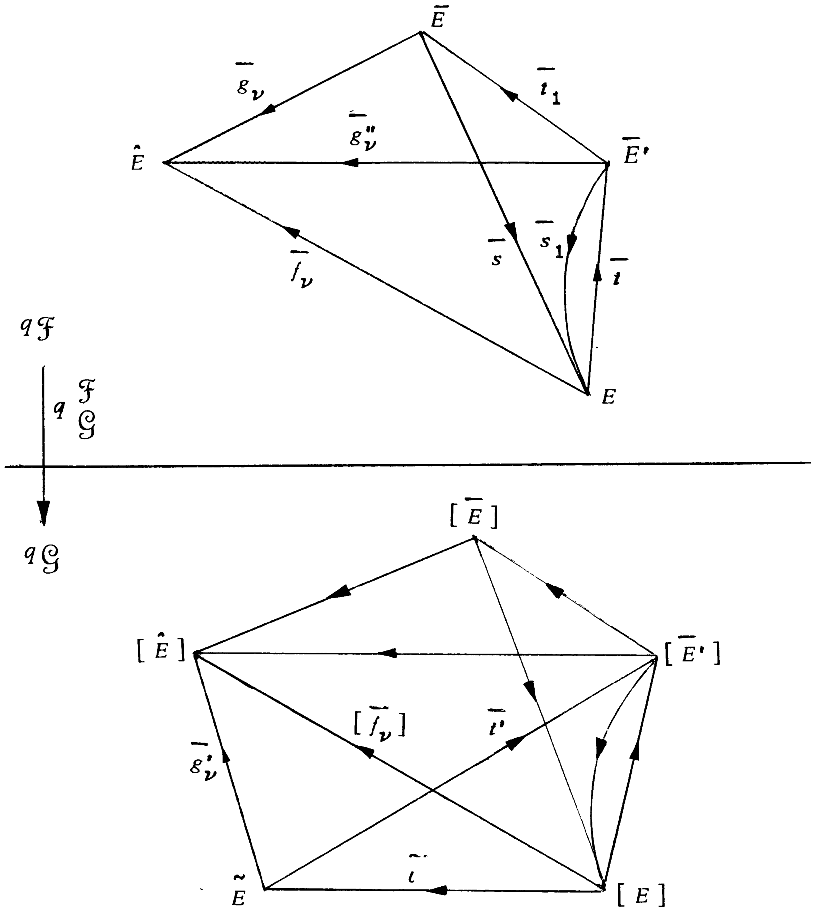
On en déduit l'existence et l'unicité d'un foncteur $q$-dominé $\overline{g}''_\nu = (\hat{E}, \underline{g}''_\nu, \overline{E}')$ tel que $\overline{g}''_\nu.\overline{\overline{t}} = \overline{f}_\nu$. Le d•) entraîne que la relation d'équivalence associée à $\overline{g}''_\nu$ contient la relation $A$. Par suite, il existe un unique foncteur $q$-dominé $\overline{g}_\nu$ vérifiant $\overline{g}_\nu.\overline{t}_1 = \overline{g}''_\nu$. D'après le corollaire de la proposition 8, il existe un $\mathfrak{N}_{\bar{s}}^*$-projecteur $(\overline{f}_{\nu+1}, \theta'_{(\nu+1,\nu)})$ de source $g_\nu$. La transformation naturelle $\theta_{(\nu+1,\nu)} = \theta'_{(\nu+1,\nu)}.t_1.t$ a pour objet source $\overline{f}_\nu$ et pour objet but $\overline{f}_{\nu+1}$. On posera

$$\theta_{(\nu+1,\lambda)} = \theta_{(\nu+1,\nu)} \boxbox \theta_{(\nu,\lambda)}, \text{ pour tout } \lambda \leq \nu .$$

$\beta$) Soit $\nu \leq \Lambda$. Supposons que $\nu$ est de seconde espèce et que $\theta_{(\lambda',\lambda)}$ est défini pour tout $\lambda' < \nu$. Il existe un foncteur

$$\omega_\nu = (\mathfrak{N}(\hat{E}, E)^{\boxbox}, \underline{\omega}_\nu, \nu^\bullet),$$

tel que $\underline{\omega}_\nu(\lambda', \lambda) = \theta_{(\lambda',\lambda)}$. Comme $\hat{E}$ est à $\mathfrak{L}$-limites inductives, le foncteur $\omega_\nu$ admet une limite inductive naturalisée $(f_\nu, \theta_\nu, \omega_\nu)$. On posera $\theta_{(\nu,\lambda)} = \theta_\nu(\lambda)$, pour tout $\lambda < \nu$, et $\overline{f}_\nu = (\hat{E}, \underline{f}_\nu, E)$.



Définissons maintenant comme suit une transformation naturelle $\xi_n$ de $\mathfrak{N}(\mathfrak{N}(H^\bullet, I^\bullet), \Lambda^\bullet)$, où $n = 1, 2$ :

a') $\beta^{\square\square}\xi_n((\lambda, \lambda')) = \theta_{(\lambda, \lambda')} \cdot \varphi$.

b') $\alpha^{\square\square}\xi_n((\lambda, \lambda'))$ est une transformation naturelle constante et $\alpha^{\square\square}\xi_1((\lambda, \lambda'))$ est défini par $\eta_{(\lambda, \lambda')}(e^{\varphi})_{\varphi}$.

c') $\xi_1(\lambda) = \boxminus f_\lambda . \mu(\varphi)$ et $\xi_2(\lambda) = S_\lambda$.

Par hypothèse, la limite inductive $\zeta_2$ de $\xi_2$ est une limite projective naturalisée dans $\hat{E}$. En utilisant le d'), on montre facilement que la limite inductive $\boxminus f_\Lambda . \mu(\varphi)$ de $\xi_1$ est isomorphe à $\zeta_2$. Ainsi $f_\Lambda$ appartient à $\mathfrak{N}(\hat{E}, \sigma)^{\square\square}_o$.

Soit $\overline{h} = (\hat{E}, \underline{h}, E)$ un foncteur $q$-dominé tel que $h \in \mathfrak{N}(\hat{E}, \sigma)^{\square\square}_o$

et $\psi_1 = (h \ , \kappa_1, f)$ une transformation naturelle.

$\alpha$·) Supposons que $\nu < \Lambda$ et que, pour tout $\lambda \leq \nu$, il existe une transformation naturelle unique $\psi_\lambda$ vérifiant :

$$\psi_\lambda \boxminus \theta_{(\lambda, \lambda')} = \psi_{\lambda'}, \text{ pour tout } \lambda' \leq \lambda .$$

Posons $\psi_\lambda = (h, \kappa_\lambda, f_\lambda)$. Il existe un homomorphisme de graphes orientés $q$-dominés unique $\overline{h'} = ([\hat{E}], \underline{h}', \tilde{E})$ vérifiant :

$$[\overline{h}] = \overline{h'} . \overline{\iota},$$

$$\underline{h}'(\tilde{e}) = \underline{h}(e^{\varphi}), \qquad \underline{h}'(\underline{g}^{\tilde{e}}(\tilde{e})) = \underline{h}(e^{\varphi}),$$

$$\underline{h}'(\underline{g}_{(e, \tilde{e})}(i)) = \underline{h}(\overline{\tau}^{\varphi}(i)) \text{ si } \varphi(i) = e .$$

Il existe un foncteur $q$-dominé $\overline{k}_1$ (resp. $\overline{k}$) bien déterminé vérifiant:

$$\overline{k}_1 . \overline{t} = \overline{h} \text{ et } [\overline{k}_1] . \overline{t'} = \overline{h'} \text{ (resp. } \overline{k}_1 = \overline{k} . \overline{t}_1) .$$

Il existe une transformation naturelle $\overline{\psi}_\nu = (k, \overline{\kappa}_\nu, g_\nu)$ telle que :

$\overline{\kappa}_\nu(\underline{t}_1 \underline{t}'(e)) = \kappa_\nu(e)$, si $e \in C_o^\bullet$,

$\overline{\kappa}_\nu(\underline{t}_1 \underline{t}'(\tilde{e}))$ est l'unique morphisme $m$ de $H^\bullet$ vérifiant

$$(\boxminus h . \mu(\varphi)) \boxminus m = (\psi_\nu . \varphi) \boxminus S_\nu^\varphi .$$

Remarquons que $\overline{\psi}_\nu . t_1 . t = \psi_\nu$. Comme $(\overline{f}_{\nu+1}, \theta'_{(\nu+1, \nu)})$ est un $\mathfrak{N}^*_{\mathfrak{s}}$- projecteur de source $g_\nu$, il existe une transformation naturelle bien déterminée $\psi_{\nu+1}$ de source $f_{\nu+1}$, de but $h$, vérifiant

$$(\psi_{\nu+1} . s) \boxminus \theta'_{(\nu+1, \nu)} = \overline{\psi}_\nu .$$

En multipliant par $t_1 . t$, l'on obtient

$$\psi_{\nu+1} \boxminus \theta_{(\nu+1, \nu)} = \psi_\nu .$$

De plus cette équation détermine $\psi_{\nu+1}$ de manière unique.

$\beta$·) Soit $\nu \leq \Lambda$. Supposons que $\nu$ est de seconde espèce et que, pour tout $\lambda < \nu$, il existe une transformation naturelle unique $\psi_\lambda$ vérifiant :

$$\psi_\lambda \boxminus \theta_{(\lambda, \lambda')} = \psi_{\lambda'}, \text{ pour tout } \lambda' \leq \lambda .$$

Le triplet $(h, \Phi^\nu, \omega_\nu)$, où $\Phi^\nu(\lambda) = \psi_\lambda$, est une transformation naturelle, dont le but est un foncteur constant. Comme $f_\nu$ est une limite inductive du foncteur $\omega_\nu$, il existe un élément bien déterminé $\psi_\nu$ de $\mathfrak{N}(\hat{E}, E)$ vérifiant :

$$\psi_\nu \boxminus \theta_{(\nu, \lambda)} = \psi_\lambda, \text{ pour tout } \lambda < \nu .$$

Ainsi, il existe une transformation naturelle unique $\psi_\Lambda$, vérifiant $\psi_\Lambda \boxminus \theta_{(\Lambda, 1)} = \psi_1$ et $\theta_{(\Lambda, 1)}$ est un projecteur.

APPLICATION. Dans le cas où $q$ est le foncteur identité sur $\mathfrak{M}$, le théorème 4 donne des conditions permettant d'associer à un foncteur une réalisation «vague» de la préesquisse $\sigma$ [6] .

## BIBLIOGRAPHIE

[1] C. EHRESMANN, *Catégories et structures*, Dunod 1965, Paris.

[2] C. EHRESMANN, *Maîtrise de Mathématiques $C_3$ (Algèbre)*, Les Cours de Sorbonne, C.D.U., 1968, Paris.

[3] C. EHRESMANN, Structures quasi-quotients, *Math. Ann.* 171, p. 293-363, 1967.

[4] C. EHRESMANN, Sur l'existence de structures libres et de foncteurs adjoints. *Cahiers de Topologie et Géométrie différentielle*, IX, p. 33-181, Dunod, 1967.

[5] F. FOLTZ, Produit tensoriel généralisé, *Cahiers de Topologie et Géométrie différentielle*, X, Dunod, 1968.

[6] C. EHRESMANN, Esquisses et types des structures algébriques. *Buletinul Institutului Politehnic*, XIV, Fasc. 1-2, 1968.

*F. FOLTZ*

*Faculté des Sciences*

*Département de Mathématiques*

*9, quai St Bernard*

*PARIS V ème*