CAHIERS DE
TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
CATÉGORIQUES

CONSTANTINO M. DE BARROS

Sur les catégories ordonnées régulières

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 11, n° 1 (1969), p. 23-55

<http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1969__11_1_23_0>

CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE
Vol. XI, 1

SUR LES CATEGORIES ORDONNEES REGULIERES(*)

par Constantino M. de BARROS

Dans de nombreuses constructions de la théorie des groupoïdes ou catégories ordonnés un rôle important est joué par le pseudoproduit associé (cf. [5], [6], [7], [11]).

Dans ce travail on résoud les deux problèmes suivants : caractériser les classes multiplicatives dont la loi de composition est le pseudoproduit associé à une catégorie ordonnée régulière (resp. vérifiant en plus l'hypothèse suivante : la classe des unités est héréditaire). On montre que les objets introduits sous le nom de pseudomonoïdes totalement réguliers donnent une réponse très satisfaisante à la deuxième question posée.

En passant on fait une étude des pseudogroupoïdes. Ces objets sont solutions du deuxième problème quand la catégorie sous-jacente est un groupoïde. Un demi-groupe inverse (cf. [3], [9]) est un pseudogroupoïde dont la loi de composition est partout définie. Quelques résultats établis pour les pseudogroupoïdes donnent comme corollaire des théorèmes connus pour les demi-groupes inverses (voir [3], chap. 1, § 1.9, chap. 7 et [9] chap. 2, § 7).

La solution du deuxième problème contient comme cas particuliers les solutions obtenues auparavant :

(1) pour les groupoïdes inductifs et sous-préinductifs (Ehresmann [4], [5]);

(2) pour les groupoïdes fonctoriellement ordonnés dont la classe des unités est préinductive (= toute classe formée de deux unités admet une borne inférieure) (Dubikajtis [4]);

(3) pour les catégories ordonnées régulières dont la classe des unités est héréditaire et, munie de l'ordre induit, est préinductive ou sous-

(*) Ce travail a été financé par le Conselho Nacional de Pesquisas (Brésil) contract TC 8233. Il développe l'exposé fait par l'auteur à l'occasion des Journées sur l'Algèbre des Catégories (Paris-Dijon 1967).

préinductive (= toute classe constituée de deux unités et majorée par une unité admet une borne inférieure), [1], [2].

Les notations et la terminologie qui ne sont pas indiquées explicitement dans le texte sont conformes à celles d'Ehresmann [8]. *

1. Soit $C^\circ = (C, \circ)$ un *système multiplicatif*, c'est-à-dire C est une classe munie d'une loi de composition interne partiellement définie, notée $\circ$. On indique par $C^\circ * C^\circ$ la classe des couples composables. Si (g, f) est un couple composable, on note $g \circ f$ le composé de f et g. On dit que $g \circ f$ *est défini* si $(g, f) \in C^\circ * C^\circ$. On note κ° la fonction de $C^\circ * C^\circ$ dans C définie par $(g, f) \mapsto g \circ f$. On note C_o la classe des éléments idempotents, i.e.

$$C_o = \{ e \mid e \in C,\ e \circ e \text{ est défini et } e \circ e = e \}.$$

On note C°_o la classe des éléments *unités* de C°, i.e.

$$C^\circ_o = \{ e \mid e \in C_o \text{ et } f \circ e = f, \text{ resp. } e \circ f = f, \text{ si } f \circ e, \text{ resp. } e \circ f, \text{ est défini} \}.$$

On dira que $(C, \circ)$ est un *pseudomonoïde* si $(C, \circ)$ est un système multiplicatif vérifiant l'axiome suivant :

(PM) Si $f, g, h \in C$, si $h \circ g$ et $g \circ f$ sont définis, alors $h \circ (g \circ f)$ est défini si, et seulement si, $(h \circ g) \circ f$ est défini; dans ce cas

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Soit C° un système multiplicatif. On dira qu'une sous-classe U de C est *symétrique*, resp. *stable, commutative*, si U vérifie l'axiome (SY), resp. (ST), (CO), ci-dessous :

(SY) Pour tout $(e, e') \in U \times U$, si $e \circ e'$ est défini, alors $e' \circ e$ est défini.

(ST) Pour tout $(e, e') \in U \times U$, si $e \circ e'$ est défini, alors $e \circ e' \in U$.

(CO) Pour tout $(e, e') \in U \times U$, si $e \circ e'$ et $e' \circ e$ sont définis, alors $e \circ e' = e' \circ e$.

LEMME 1.1. *Soit $(C, \circ, U)$ un triplet satisfaisant l'axiome suivant :*

(μ_1) *$(C, \circ)$ est un pseudomonoïde et U est une sous-classe de*

---

* En particulier, on écrira « φ est une surjection de M dans $\hat{M}$ » au lieu de « $(\hat{M}, \varphi, M)$ est une application de M dans M » (Cf. [8], p. 22).

C_o *telle que :* (ξ) *Si* $e_1, e_2 \in U$, *si* $e_1 \circ e_2$ *et* $e_2 \circ e_1$ *sont définis, alors* $e_1 = e_1 \circ e_2$ *si, et seulement si,* $e_1 = e_2 \circ e_1$.

Si $e, e' \in U$ *et si l'on pose* $e \leq e'$ *lorsque* $e \circ e'$ *est défini et que* $e = e \circ e'$, *alors*

(1) $(U, \leq)$ *est un système ordonné;*

(2) *Si de plus* U *est symétrique, pour tout* $e, e' \in U$ *tels que* $e \circ e'$ *soit défini et que* $e \circ e' \in U$, *alors* $e \circ e'$ *est la borne inférieure de* e *et* e' *dans* $(U, \leq)$.

DEMONSTRATION.

(1) Soient $e_1, e_2 \in U$ tels que $e_1 \leq e_2$ et $e_2 \leq e_1$. On a

$$e_1 \circ e_2 \text{ est défini et } e_1 = e_1 \circ e_2,$$

$$e_2 \circ e_1 \text{ est défini et } e_2 = e_2 \circ e_1.$$

Donc $e_1 = e_1 \circ e_2 = e_2 \circ e_1 = e_2$ en vertu de (ξ).

Soient $e_1, e_2, e_3 \in U$ tels que $e_1 \leq e_2$ et $e_2 \leq e_3$. Alors

$$e_1 \circ e_2 \text{ est défini et } e_1 = e_1 \circ e_2,$$

$$e_2 \circ e_3 \text{ est défini et } e_2 = e_2 \circ e_3.$$

En faisant usage de *(PM)* on peut écrire

$$e_1 = e_1 \circ e_2 = e_1 \circ (e_2 \circ e_3) = (e_1 \circ e_2) \circ e_3 = e_1 \circ e_3,$$

donc $e_1 \leq e_3$.

(2) Soient $e, e' \in U$. Supposons $e \circ e'$ défini et $e \circ e' \in U$. On a $e \circ e' \leq e, e'$. En effet, en faisant usage de *(PM)* on peut écrire

$$e \circ e' = e \circ (e' \circ e') = (e \circ e') \circ e',$$

donc $e \circ e' \leq e'$. On a $e \circ e' = (e \circ e) \circ e' = e \circ (e \circ e')$, donc $(e \circ e') \circ e$ est défini puisque U est symétrique. On a aussi $e \circ e' = (e \circ e') \circ e$ à cause de (ξ). Par suite $e \circ e' \leq e$.

Soit $e_1 \in U$ tel que $e_1 \leq e', e$. Alors $e_1 \leq e \circ e'$; en effet, $e_1 \leq e', e$ entraîne

$$e_1 \circ e' \text{ est défini et } e_1 = e_1 \circ e',$$

$$e_1 \circ e \text{ est défini et } e_1 = e_1 \circ e.$$

Comme , par hypothèse, $e \circ e'$ est défini, en faisant usage de (PM) on a

$$e_1 = e_1 \circ e' = (e_1 \circ e) \circ e' = e_1 \circ (e \circ e'),$$

donc $e_1 \leq e \circ e'$. ■

· Dorénavant, chaque fois que l'on considérera un triplet $(C, \circ, U)$ vérifiant l'axiome (μ_1), on supposera toujours la classe U munie de l'ordre défini ci-dessus.

REMARQUE 1.1. La donnée d'un système ordonné $(U, \leq)$ est équivalente à la donnée d'un pseudomonoïde $(U, \circ)$ commutatif, symétrique, tel que $U = U_0$ et que, de plus, si $(e, e') \in U \times U$ et si la borne inférieure $e \wedge e'$ de e et e' (par rapport à l'ordre associé à $(U, \circ)$) est définie, alors $e \circ e'$ est défini.

2. On dit qu'un triplet $F = ((\hat{M}, \leq), \varphi, (M, \leq))$ est un *morphisme ordonné* si $(\hat{M}, \leq)$ et $(M, \leq)$ sont des systèmes ordonnés et φ est une surjection de M dans $\hat{M}$ telle que

(σ) Si $x, x' \in M$ et si $x \leq x'$, alors $\varphi(x) \leq \varphi(x')$.

On dira qu'un morphisme ordonné F est *de classe* (σ'), resp. (σ''), (σ_2), s'il vérifie en plus l'axiome (σ'), resp. (σ''), (σ_2), ci-dessous :

(σ') Si $x, x' \in M$, si $x \leq x'$ et si $\varphi(x) = \varphi(x')$, alors $x = x'$, i.e. F est strictement croissant.

(σ'') Pour tout $a \in M$, si $y \leq \varphi(a)$, alors il existe $x \in M$ tel que $x \leq a$ et $\varphi(x) = y$.

(σ_2) Pour tout $a \in M$, si $y \leq \varphi(a)$, alors la classe des éléments x de M tels que $x \leq a$ et $\varphi(x) \leq y$ admet un plus grand élément, noté $\varphi_a^*(y)$, tel que $\varphi(\varphi_a^*(y)) = y$.

3. Soit $(C, \cdot, \leq)$ un triplet tel que $C^\cdot$ soit un système multiplicatif et $(C, \leq)$ un système ordonné. Si $(g, f) \in C \times C$ et si la classe des couples $(g', f') \in C^\cdot * C^\cdot$ tels que $g' \leq g$ et $f' \leq f$ est non vide et admet un plus grand élément $(\bar{g}, \bar{f})$ dans $(C^\cdot * C^\cdot, \leq)$, on dira que g et f ont $\bar{g} \cdot \bar{f}$ *pour pseudoproduit* dans $(C^\cdot, \leq)$ et l'on posera $g \odot f = \bar{g} \cdot \bar{f}$.

Si $((C, \leq), \kappa^\cdot, (C^\cdot * C^\cdot, \leq))$ est un morphisme ordonné et si $g \odot f$

est défini, alors $g \odot f$ est le plus grand élément de la classe

$$\{ h \mid \text{il existe } (g', f') \in C^\bullet * C^\bullet \text{ tel que } h = g'.f' \text{ et } g' \leq g,\ f' \leq f \}.$$

4. Si $C^\bullet$ est une catégorie, les fonctions source et but qui associent à un élément f de C son unité à droite et son unité à gauche respectivement seront notées α et β. On notera $[\beta, \alpha]$ la fonction de C dans $C_o^\bullet \times C_o^\bullet$ définie par $f \mapsto (\beta(f), \alpha(f))$.

On dit qu'un triplet $(C, ., \leq)$ est une *catégorie ordonnée régulière* [7] si $C^\bullet$ est une catégorie et si $(C^\bullet, \leq)$ vérifie les trois axiomes ci-dessous :

(CR 1) Les triplets $((C_o^\bullet, \leq), \alpha, (C, \leq))$ et $((C_o^\bullet, \leq), \beta, (C, \leq))$ sont des morphismes ordonnés de classe (σ_2).

(CR 2) $((C, \leq), \kappa^\bullet, (C^\bullet * C^\bullet, \leq))$ est un morphisme ordonné de classe (σ'').

(CR 3) $((C_o^\bullet \times C_o^\bullet, \leq), [\beta, \alpha], (C, \leq))$ est un morphisme ordonné de classe (σ').

Soit $(C^\bullet, \leq)$ une catégorie ordonnée régulière. On a les résultats suivants (cf. [7], propositions 4, 8, 9 et 10 du §2) :

(ε_1) Soient $f \in C$ et $e, e' \in C_o^\bullet$ tels que $e \leq \alpha(f)$ et $e' \leq \beta(f)$; si $f \odot e$ (resp. $e' \odot f$) est défini, alors $f \odot e = \alpha_f^*(e)$ (resp. $e' \odot f = \beta_f^*(e')$).

(ε_2) Soient $e, e' \in C_o^\bullet$; la borne inférieure de e et e' dans $(C_o^\bullet, \leq)$, notée $e \wedge e'$, est définie si, et seulement si, e et e' admettent une borne inférieure $\bar{e}$ dans $(C, \leq)$, et l'on a : $\bar{e} = e \wedge e'$.

(ε_3) Soient $g, f \in C$; le pseudoproduit $g \odot f$ est défini si, et seulement si, $\alpha(g) \wedge \beta(f)$ est défini; dans ce cas, on a

$$g \odot f = (g \odot \bar{e}).(\bar{e} \odot f), \text{ où } \bar{e} = \alpha(g) \wedge \beta(f).$$

(ε_4) Soient $f, f_1, f_2 \in C$. Si $f_1, f_2 \leq f$, si $\alpha(f_1) = \alpha(f_2)$ et $\beta(f_1) = \beta(f_2)$, alors $f_1 = f_2$.

De (ε_1), (ε_2) et tenant compte que $e = \alpha(e) = \beta(e)$ si $e \in C_o^\bullet$, on déduit

(ε_5) Si $e, e' \in C_o^\bullet$, alors $e \odot e'$ est défini si, et seulement si, $e \wedge e'$ est défini.

De la définition du pseudoproduit on déduit aisément les deux propriétés suivantes :

(ε_6) Si $f, g \in C$ et si $g \odot f$ est défini, alors

$$\alpha(g \odot f) \leq \alpha(f) \quad \text{et} \quad \beta(g \odot f) \leq \beta(g).$$

(ε_7) Le triplet $((C, \leq), \kappa^{\odot}, (C^{\odot} * C^{\odot}, \leq))$ est un morphisme ordonné.

LEMME 4.1. *Soit $(C^{\bullet}, \leq)$ une catégorie ordonnée régulière. Le système multiplicatif $(C, \odot)$ est un pseudomonoïde.*

DEMONSTRATION. Soient $h, g, f \in C$ tels que $h \odot g$, $g \odot f$ et $(h \odot g) \odot f$ sont définis. On a

$$h \odot g = \overline{h} . \overline{g}, \text{ où } \overline{h} = h \odot \overline{e}, \ \overline{g} = \overline{e} \circ g \text{ et } \overline{e} = \alpha(h) \wedge \beta(g).$$

Donc $\alpha(\overline{h} . \overline{g}) \wedge \beta(f)$ est défini en vertu de (ε_3). Or $\alpha(\overline{h} . \overline{g}) = \alpha(\overline{g})$, donc $\alpha(\overline{g}) \wedge \beta(f)$ est défini. Par conséquent $\overline{g} \odot f$ est défini à cause de (ε_3). Or $\alpha(\overline{h}) = \beta(\overline{g})$ et $\beta(\overline{g} \odot f) \leq \beta(\overline{g})$, donc $\alpha(\overline{h}) \wedge \beta(\overline{g} \odot f)$ est défini à cause aussi de (ε_3). Par suite $\overline{h} \odot (\overline{g} \odot f)$ est défini. De plus $\overline{h} \leq h$ et $\overline{g} \odot f \leq g \odot f$ en vertu de (ε_7).

Soient $h', k \in C$ tels que $h'.k$ est défini, $h' \leq h$ et $k \leq \overline{g} \odot f$. L'axiome $(CR2)$ entraîne qu'il existe $(g', f') \in C^{\bullet} * C^{\bullet}$ tel que $g' \leq \overline{g}$, $f' \leq f$ et $k = g'.f'$. Donc $h'.k = h'.(g'.f')$, par conséquent $h'.g'$ est défini, d'où $h' \leq \overline{h}$ et $g' \leq \overline{g}$ à cause de la définition de $\overline{h}.\overline{g}$. Par suite $h' \leq \overline{h}$ et $g'.f' \leq \overline{g} \odot f$ en vertu de la définition de pseudoproduit. Mais $h'.(g'.f')$ est défini, donc $h'.(g'.f') \leq \overline{h} \odot (\overline{g} \odot f)$ par la même raison. Par suite $\overline{h} \odot (\overline{g} \odot f)$ est le pseudoproduit de h et $g \odot f$.

De même $(h \odot g) \odot f$ est défini si $h \odot g$, $g \odot f$ et $h \odot (g \odot f)$ sont définis.

Supposons maintenant que $h \odot g$, $g \odot f$, $(h \odot g) \odot f$ et $h \odot (g \odot f)$ sont définis. On a $(h \odot g) \odot f = k_1 . f_1$, où $k_1 \leq h \odot g$ et $f_1 \leq f$, d'où :

$$k_1 = h_1 . g_1, \quad h_1 \leq h \quad \text{et} \quad g_1 \leq g.$$

Par suite $g_1 . f_1 \leq g \odot f$ et $(h \odot g) \odot f = h_1 . g_1 . f_1 \leq h \odot (g \odot f)$.

De même $h \odot (g \odot f) \leq (h \odot g) \odot f$. ■

LEMME 4.2. *Soit* $(C^{\bullet}, \leq)$ *une catégorie ordonnée régulière. Soient* $f, g \in C$. *Pour que l'on ait* $g \leq f$, *il faut et il suffit que:* $\alpha(g) \leq \alpha(f)$, $\beta(g) \leq \beta(f)$, $\beta(g) \odot (f \odot \alpha(g))$ *est défini et* $g = \beta(g) \odot (f \odot \alpha(g))$.

DEMONSTRATION. Supposons $g \leq f$. Alors $\alpha(g) \leq \alpha(f)$ et $\beta(g) \leq \beta(f)$. Donc $\alpha^2(f) \wedge \alpha^2(g)$ et $\beta^2(g) \wedge \beta^2(f)$ sont définis. De la propriété (ε_5) il en résulte que $\alpha(f) \odot \alpha(g)$ et $\beta(g) \odot \beta(f)$ sont définis; de même $\alpha(f) \odot \beta(\alpha(g))$ et $\alpha(\beta(g)) \odot \beta(f)$. Par suite $f \odot \alpha(g)$ et $\beta(g) \odot f$ sont définis à cause de (ε_2) et (ε_3).

En vertu de (ε_1) et des conditions $g \leq f$ et $\beta(g) \leq \beta(f)$ on peut écrire $\beta(g) \odot f = \beta_f^*(\beta(g))$. Donc $g \leq \beta(g) \odot f$. Par conséquent $\alpha(g) \leq \alpha(\beta(g) \odot f)$. Par suite $\alpha(\beta(g) \odot f) \wedge \beta(\alpha(g))$ est défini, donc $(\beta(g) \odot f) \odot \alpha(g)$ est défini à cause de (ε_3).

En faisant usage de (ε_7) on peut écrire $g = g \odot \alpha(g) \leq f \odot \alpha(g)$ et

$$g = \beta(g) \odot g \leq \beta(g) \odot (f \odot \alpha(g)). \tag{4.1}$$

La propriété (ε_6) entraîne

$$\alpha(\beta(g) \odot (f \odot \alpha(g))) \leq \alpha(f \odot \alpha(g)) \leq \alpha(g), \tag{4.2}$$

$$\beta(\beta(g) \odot (f \odot \alpha(g))) \leq \beta(g). \tag{4.3}$$

Soit $f' = \beta(g) \odot (f \odot \alpha(g))$. On a $g \leq f'$ en vertu de la formule (4.1), donc $\alpha(g) \leq \alpha(f')$ et $\beta(g) \leq \beta(f')$. Par suite $\alpha(g) = \alpha(f')$ et $\beta(g) = \beta(f')$ à cause des formules (4.2) et (4.3). Par suite $g = f'$ en vertu de la propriété (ε_4).

Réciproquement, supposons $\alpha(g) \leq \alpha(f)$, $\beta(g) \leq \beta(f)$ et $(\beta(g) \odot f) \odot \alpha(g)$ défini. Alors $\beta(g) \odot f \leq \beta(f) \odot f = f$ en vertu de (ε_7). Par suite $g = (\beta(g) \odot f) \odot \alpha(g) \leq f \odot \alpha(f) = f$. ∎

5. Etant donné un triplet $(C, \circ, \leq)$ tel que $(C, \circ)$ soit un système multiplicatif et $(C, \leq)$ un système ordonné, on dit que U est une classe de *pseudounités* de $(C^{\circ}, \leq)$ si U satisfait les deux conditions suivantes :

(PU 1) U est une sous-classe de C_o;

(PU 2) Pour tout $f \in C$ la classe

$$\{ e \mid e \in U, (f, e) \in C^{\circ} * C^{\circ} \text{ et } f \circ e = f \},$$

resp.

$$\{ e' \mid e' \in U, (e', f) \in C^{\circ} * C^{\circ} \text{ et } e' \circ f = f \},$$

est non vide et admet un plus petit élément, noté $\alpha(f)$, resp. $\beta(f)$. De plus $e \leq \alpha(e)$, $\beta(e)$ si $e \in U$.

Si U est une classe de pseudounités de $(C^{\circ}, \leq)$, on note $C^{\bullet}$ le système multiplicatif tel que, si $g, f \in C$, alors $g \bullet f$ est défini si, et seulement si, $\alpha(g) = \beta(f)$ et $g \circ f$ défini; dans ce cas $g \bullet f = g \circ f$.

On dira qu'un triplet $(C^{\circ}, \leq, U)$ est un *pseudomonoïde ordonné régulier* s'il vérifie les quatre axiomes suivants :

$(POR1)$ C° est un pseudomonoïde et $(C, \leq)$ est un système ordonné.

$(POR2)$ a. U est une classe de pseudounités de $(C^{\circ}, \leq)$;

b. Si $(g, f) \in C \times C$, alors $g \circ f$ est défini si, et seulement si, $\alpha(g) \wedge \beta(f)$ est défini et appartient à U.

$(POR3)$ a. Si $(f, e) \in C \times U$ et si $e \leq \alpha(f)$, alors $\alpha(f \circ e) = e$;

b. Si $(e', f) \in U \times C$ et si $e' \leq \beta(f)$, alors $\beta(e' \circ f) = e'$.

$(POR4)$ a. $((C, \leq), \kappa^{\circ}, (C^{\circ} * C^{\circ}, \leq))$ est un morphisme ordonné; si $g \circ f$ est défini, il existe $g' \leq g$, $f' \leq f$ tels que $g \circ f = g' \bullet f'$.

b. Si $(g, f) \in C \times C$ et si $\alpha(g) = \beta(f)$, alors

$$\alpha(g \circ f) = \alpha(f) \text{ et } \beta(g \circ f) = \beta(g).$$

c. Si $(g, f) \in C \times C$, alors $g \leq f$ si, et seulement si, $\alpha(g) \leq \alpha(f)$, $\beta(g) \leq \beta(f)$, $\beta(g) \circ (f \circ \alpha(g))$ est défini et $g = \beta(g) \circ (f \circ \alpha(g))$.

Des axiomes $(POR1)$ et $(POR2)$, il résulte

$$e = \alpha(e) = \beta(e) \text{ si } e \in U,$$

$$\alpha(g \circ f) \leq \alpha(f) \text{ et } \beta(g \circ f) \leq \beta(g) \text{ si } (g, f) \in C^{\circ} * C^{\circ}.$$

LEMME 5.1. *Soit $(C^{\circ}, \leq, U)$ vérifiant $(POR1)$, $(POR2)$, $(POR4)$a et :*

(R^*) Si $e, e' \in U$, si $f \in C$, si $e \leq \alpha(f)$ et si $e' \leq \beta(f)$, on a

$$f \circ e = \alpha^*_f(e) \text{ et } e' \circ f = \beta^*_f(e').$$

Alors :

(1) $U = C_o^{\bullet}$;

(2) *si* $(g, f) \in C^o * C^o$, *alors* $g \odot f$ *est défini et* $g \circ f = g \bullet f$.

DEMONSTRATION.

(1) Soit $e \in U$. Alors $e \bullet e$ est défini et $e \bullet e = e$ puisque $e \circ e$ est défini et

$$e = \alpha(e) = \alpha(e \circ e) = \beta(e) = \beta(e \circ e).$$

Si $f \in C$ et si $f \bullet e$ est défini, alors $f \bullet e = f \circ e$ et $\alpha(f) = \beta(e) = e$, donc $f \bullet e = f \circ e = f \circ \alpha(f) = f$.

De même, si $e \bullet f$ est défini, alors $e \bullet f = f$.

Par conséquent $U \subset C_o^{\bullet}$.

Soit maintenant $e \in C_o^{\bullet}$. Alors $e \bullet e$ est défini et $e \bullet e = e$, donc $e = \alpha(e) = \beta(e)$. Par suite $e \in U$.

(2) Soit $(g, f) \in C^o * C^o$. A cause de $(POR2)$b, $\bar{e} = \alpha(g) \wedge \beta(f)$ est défini. Or $\bar{e} \leq \alpha(g), \beta(f)$; donc $\alpha(g) \wedge \bar{e}$ et $\bar{e} \wedge \beta(f)$ sont définis, par conséquent $g \circ \bar{e}$ et $\bar{e} \circ f$ sont définis en vertu de $(POR2)$b. Posons $\bar{g} = g \circ \bar{e}$ et $\bar{f} = \bar{e} \circ f$. A cause de (R^*) on a $\alpha(\bar{g}) = \bar{e}$ et $\beta(\bar{f}) = \bar{e}$. Donc $\bar{g} \bullet \bar{f}$ est défini; $\bar{g} \bullet \bar{f}$ est le pseudoproduit de g et f par rapport à $(C, \bullet, \leq)$. En effet, soient $g', f' \in C$ tels que $g' \leq g$, $f' \leq f$ et que $g' \bullet f'$ est défini. La condition (R^*) entraîne $\bar{g} = \alpha_g^*(\bar{e})$ et $\bar{f} = \beta_f^*(\bar{e})$. Donc $g' \leq \bar{g}$ et $f' \leq \bar{f}$. On a aussi $g \circ f = \bar{g} \circ \bar{f}$. En effet si de plus $g' \bullet f' = g \circ f$, l'axiome $(POR4)$a entraîne

$$g \circ f = g' \bullet f' = g' \circ f' \leq \bar{g} \circ \bar{f} \leq g \circ f,$$

d'où $g \circ f = \bar{g} \circ \bar{f}$. ∎

LEMME 5.2. *Si* $(C^o, \leq, U)$ *est un pseudomonoïde ordonné régulier, alors il vérifie la condition* (R^*). *Par suite* $((U, \leq), \alpha, (C, \leq))$ *et* $((U, \leq), \beta, (C, \leq))$ *sont des morphismes ordonnés de classe* (σ_2).

DEMONSTRATION. Soit $(f, e) \in C \times U$ tel que $e \leq \alpha(f)$. L'axiome $(POR4)$a entraîne $f \circ e \leq f \circ \alpha(f) = f$. Supposons $g \leq f$ et $\alpha(g) \leq e$; le même axiome entraîne $g = g \circ \alpha(g) \leq f \circ e$.

De même $e' \circ f = \beta^*(e')$ si $(e', f) \in U \times C$ et $e' \leq \beta(f)$. ∎

THEOREME 5.1. *Si* $(C^{\bullet}, \leq)$ *est une catégorie ordonnée régulière, alors* $(C^{\odot}, \leq, C^{\bullet}_{o})$ *est un pseudomonoïde ordonné régulier. Si* $(C, \circ, \leq, U)$ *est un pseudomonoïde ordonné régulier, il existe une unique catégorie* $C^{\bullet}$ *telle que* $(C^{\bullet}, \leq)$ *soit une catégorie ordonnée régulière, que* $U = C^{\bullet}_{o}$ *et que* $\circ$ *soit le pseudoproduit associé à* $(C^{\bullet}, \leq)$.

DEMONSTRATION. Soit $(C^{\bullet}, \leq)$ une catégorie ordonnée régulière. La définition du pseudoproduit entraîne que $C^{\bullet}_{o}$ est une classe de pseudo-unités de $(C, \odot)$. Les axiomes $(POR\,1)$, $(POR\,2)$, $(POR\,3)$ et $(POR\,4)$c sont satisfaits en vertu des lemmes 4.1, 4.2 et des propriétés (ε_1) et (ε_3). Les conditions a et b de $(POR\,4)$ sont des conséquences immédiates de la définition de pseudoproduit et de l'axiome $(CR\,2)$.

Supposons maintenant que $(C^{\circ}, \leq, U)$ est un pseudomonoïde ordonné régulier. De $(POR\,4)$b il résulte $\alpha(g \bullet f) = \alpha(f)$ et $\beta(g \bullet f) = \beta(g)$ si $g \bullet f$ est défini. De cela, de l'associativité (PM) et de (1) du lemme 5.1, on déduit que $(C, \bullet)$ est une catégorie telle que $C^{\bullet}_{o} = U$. Du lemme 5.2, de l'axiome (POR)a et de (2) du lemme 5.1, il en résulte que $(C, \bullet, \leq)$ est une catégorie ordonnée régulière.

Pour montrer $(C, \circ, U) = (C, \odot, U)$ il suffit de montrer, d'après (2) du lemme 5.1, que, si $g, f \in C$ et si $g \odot f$ est défini, alors $g \circ f$ est défini.

Supposons $g \odot f$ défini. En appliquant (ε_3) pour le pseudoproduit associé à $(C, \bullet, \leq)$, on voit que $\alpha(g) \wedge \beta(f)$ est défini, donc $g \circ f$ est défini à cause de $(POR\,2)$b.

Il reste à montrer l'unicité.

Soient $(C, ., \leq)$ et $(\hat{C}, \bullet, \leq)$ des catégories ordonnées régulières telles que $(C, \odot, \leq, C^{\cdot}_{o}) = (\hat{C}, \odot, \leq, \hat{C}^{\bullet}_{o})$. En vertu de la définition de pseudoproduit on a $(C, .) = (\hat{C}, \bullet)$. ■

6. Si $(C, \leq)$ est un système ordonné et si U est une sous-classe de C, on dit que U est *héréditaire* dans $(C, \leq)$ si, pour tout $(h, e) \in C \times U$ tel que $h \leq e$, on a $h \in U$.

LEMME 6.1. *Soit* $(C^{\bullet}, \leq)$ *une catégorie ordonnée régulière. Les quatre conditions ci-dessous sont équivalentes.*

(H) $C_o^{\bullet}$ *est héréditaire dans* $(C, \leq)$.

(S) Si $e_1, e_2 \in C_o^{\bullet}$ *et si* $e_2 \odot e_1$ *est défini, alors* $e_2 \odot e_1 \in C_o^{\bullet}$.

(C) ξ_1. *Si* $e_1, e_2 \in C_o^{\bullet}$, *si* $e_2 \odot e_1$ *est défini, alors* $e_2 = e_2 \odot e_1$ *si, et seulement si,* $e_2 = e_1 \odot e_2$;

ξ_2. *Si* $e_1, e_2 \in C_o^{\bullet}$, *alors* $e_2 \leq e_1$ *si, et seulement si,* $e_2 = e_2 \odot e_1$.

$(\hat{C})$ *Si* $e_2, e_1 \in C_o^{\bullet}$ *et si* $e_2 \odot e_1$ *est défini, alors* $e_2 \odot e_1 = e_2 \wedge e_1$.

DEMONSTRATION. *(H)* entraîne *(S)*. En effet, soient $e_1, e_2 \in C_o^{\bullet}$ tels que $e_2 \odot e_1$ est défini. On a $e_2 \odot e_1 = \bar{e}_2 . \bar{e}_1$, où $\bar{e}_2 \leq e_2$ et $\bar{e}_1 \leq e_1$, en vertu de la définition de pseudoproduit. Donc $\bar{e}_2, \bar{e}_1 \in C_o^{\bullet}$ à cause de *(H)*. Par conséquent

$$e = \bar{e}_2 = \bar{e}_1, \text{ donc } e_2 \odot e_1 = e.$$

Donc $e_2 \odot e_1 \in C_o^{\bullet}$.

(S) entraîne *(H)*. Soit $(h, e) \in C \times C_o^{\bullet}$ tel que $h \leq e$. Alors $\beta(h), \alpha(h) \leq e = \alpha(e) = \beta(e)$. En faisant usage du lemme 2 on peut écrire $h = \beta(h) \odot (e \odot \alpha(h))$, donc $h \in C_o^{\bullet}$.

(S) entraîne ξ_1 de *(C)*. En effet, soient $e_1, e_2 \in C_o^{\bullet}$ et supposons $e_2 \odot e_1$ défini et $e_2 = e_2 \odot e_1$. Alors

$$e_2 = (e_2 \odot e_1) \odot e_2 = e_2 \odot (e_1 \odot e_2).$$

Donc

$$\alpha(e_2) = e_2 \leq \alpha(e_1 \odot e_2) = e_1 \odot e_2 \leq \alpha(e_2) = e_2,$$

puisque $e_1 \odot e_2$ appartient à $C_o^{\bullet}$ en vertu de *(S)*. Par suite $e_2 = e_1 \odot e_2$.

De même $e_2 = e_1 \odot e_2$ entraîne $e_2 = e_2 \odot e_1$.

(H) et *(S)* entraînent ξ_2 de *(C)*. En effet, on a $e_2 \leq e_1$ si, et seulement si,

$$e_2 = e_2 \odot (e_1 \odot e_2) = (e_1 \odot e_2) \odot e_2 = e_1 \odot e_2 = e_2 \odot e_1 = e_2.$$

(C) entraîne $(\hat{C})$. En effet, en vertu de (ε_3) on a :

$$e_2 \odot e_1 = (e_2 \odot (e_2 \wedge e_1)).((e_2 \wedge e_1) \odot e_1).$$

Or $e_2 \wedge e_1 \leq e_2, e_1$, donc

$$e_2 \wedge e_1 = (e_2 \wedge e_1) \odot e_2 = e_2 \odot (e_2 \wedge e_1) \text{ et } e_2 \wedge e_1 = (e_2 \wedge e_1) \odot e_1$$

en vertu de (C). Par suite

$$e_2 \odot e_1 = (e_2 \wedge e_1).(e_2 \wedge e_1) = e_2 \wedge e_1.$$

$(\hat{C})$ entraîne (S) trivialement. ∎

On dit que $(C, ., \leq)$ est une *catégorie ordonnée totalement régulière* si $(C^\bullet, \leq)$ est une catégorie ordonnée régulière telle que $C_o^\bullet$ soit héréditaire dans $(C, \leq)$.

Un *morphisme de catégories ordonnées régulières* est un triplet $((\hat{C}^\bullet, \leq), \varphi, (C^\bullet, \leq))$ tel que $(\hat{C}^\bullet, \leq)$ et $(C^\bullet, \leq)$ sont des catégories ordonnées régulières et φ une surjection de C dans $\hat{C}$, ces données satisfaisant les trois conditions suivantes :

$(MC1)$ $(\hat{C}^\bullet, \varphi, C^\bullet)$ est un foncteur (covariant);

$(MC2)$ $((\hat{C}, \leq), \varphi, (C, \leq))$ est un morphisme ordonné;

$(MC3)$ Pour tout $e, e' \in C_o^\bullet$, on a :

(γ_1) si $e \wedge e'$ est défini, alors $\varphi(e) \wedge \varphi(e')$ est défini et

$$\varphi(e \wedge e') = \varphi(e) \wedge \varphi(e');$$

(γ_2) si $f \in C$, si $e, e' \in C_o^\bullet$, si $e \leq \alpha(f)$ et si $e' \leq \beta(f)$, alors

$$\varphi(\alpha_f^*(e)) = \alpha_{\varphi(f)}^*(\varphi(e)) \text{ et } \varphi(\beta_f^*(e')) = \beta_{\varphi(f)}^*(\varphi(e')).$$

LEMME 6.2. *Soit φ une surjection de C dans $\hat{C}$. Si $((\hat{C}^\bullet, \leq), \varphi, (C^\bullet, \leq))$ est un morphisme de catégories ordonnées régulières, alors*

$(M1)$ Si $f, g \in C$ et si $g \odot f$ est défini, alors $\varphi(g) \odot \varphi(f)$ est défini et $\varphi(g \odot f) = \varphi(g) \odot \varphi(f)$;

$(M2)$ Pour tout $f \in C$, on a

$$\alpha(\varphi(f)) = \varphi(\alpha(f)) \text{ et } \beta(\varphi(f)) = \varphi(\beta(f)).$$

Si $(\hat{C}^\bullet, \leq)$ et $(C^\bullet, \leq)$ sont des catégories ordonnées totalement régulières et si φ vérifie $(M1)$ et $(M2)$, alors $((\hat{C}^\bullet, \leq), \varphi, (C, \leq))$ est un morphisme de catégories ordonnées régulières.

DEMONSTRATION. Soit $((\hat{C}^\bullet, \leq), \varphi, (C^\bullet, \leq))$ un morphisme de catégories ordonnées régulières. En faisant usage de (ε_1) et (ε_3) on peut écrire:

$$\varphi(g \odot f) = \varphi(\overline{g}) \cdot \varphi(\overline{f}) = \varphi(\alpha_g^*(e)) \cdot \varphi(\beta_f^*(e))$$
$$= \alpha^*_{\varphi(g)}(\varphi(e)) \cdot \beta^*_{\varphi(f)}(\varphi(e)) = \overline{\varphi(g)} \cdot \overline{\varphi(f)} = \varphi(g) \odot \varphi(f),$$

où $e = \alpha(g) \wedge \beta(f)$.

Soit φ vérifiant $(M1)$ et $(M2)$. Supposons que $(\hat{C}^\bullet, \leq)$ et $(C^\bullet, \leq)$ sont des catégories ordonnées totalement régulières. De la définition du pseudoproduit $\odot$ et de $(M1)$ et $(M2)$, il résulte que $(\hat{C}^\bullet, \varphi, C^\bullet)$ est un foncteur. La condition $(\hat{C})$ du lemme 6.1 entraîne (γ_1) de $(MC3)$. La propriété (ε_1) et la condition $(M1)$ entraînent (γ_2) de $(MC3)$. ■

On note $\mathfrak{M}_o$ une classe de classes contenant, avec une classe toutes ses sous-classes, avec deux classes leur produit cartésien. On note $\mathfrak{M}$ la catégorie dont les éléments sont les applications $(\hat{M}, \varphi, M)$, où $\hat{M}, M \in \mathfrak{M}_o$.

On note Γ_o la classe constituée par toutes les catégories ordonnées totalement régulières $(C^\bullet, \leq)$ telles que $C \in \mathfrak{M}_o$. On note Γ la catégorie ayant Γ_o pour classe d'objets et dont les éléments sont les morphismes de catégories ordonnées régulières.

On note $(\mathfrak{M}, p_\Gamma, \Gamma)$ le foncteur d'oubli de Γ vers $\mathfrak{M}$; c'est un foncteur d'homomorphismes saturé (Cf. [8], Chap. 2, § 3).

7. On dira qu'un triplet $(C, \circ, U)$ est un *pseudomonoïde fléché* s'il vérifie, en plus de l'axiome (μ_1), les axiomes (μ_2) et (μ_3) ci-dessous :

(μ_2) a. Pour tout $f \in C$, la classe des éléments $e \in U$ (resp. $e' \in U$) tels que $f \circ e$ (resp. $e' \circ f$) est défini et $f \circ e = f$ (resp. $e' \circ f = f$) est non vide et admet un plus petit élément noté $\alpha(f)$ (resp. $\beta(f)$). On note α (resp. β) la fonction de C dans U définie par $f \mapsto \alpha(f)$ (resp. $f \mapsto \beta(f)$).

b. Si $f, g \in C$, alors $g \circ f$ est défini si, et seulement si, $\alpha(g) \wedge \beta(f)$ est défini dans $(U, \leq)$. De plus U est stable.

(μ_3) Pour tout $f \in C$, on a :

(Rd) Si $e \in U$, si $e \leq \alpha(f)$ et si $f \circ e$ est défini, alors $\alpha(f \circ e) = e$;

(Rg) Si $e' \in U$, si $e' \leq \beta(f)$ et si $e' \circ f$ est défini, alors $\beta(e' \circ f) = e'$.

LEMME 7.1. *Soit* $(C, \circ, U)$ *un pseudomonoïde fléché. Si* $e_2, e_1 \in U$ *et si* $e_2 \circ e_1$ *est défini* (donc $e_2 \wedge e_1$ est aussi défini), *on a alors* $e_1 \circ e_2 = e_2 \circ e_1 = e_2 \wedge e_1$. *Par suite* U *est stable, symétrique et commutative.*

DEMONSTRATION. En effet, $\beta(e_2 \circ e_1) \leq e_2$ et $\alpha(e_2 \circ e_1) \leq e_1$. Donc

$$\beta(e_2 \circ e_1) = \beta(e_2 \circ e_1) \circ e_2 \quad \text{et} \quad \alpha(e_2 \circ e_1) = e_1 \circ \alpha(e_2 \circ e_1).$$

En faisant usage de l'associativité (PM) on peut écrire

$$\begin{aligned} e_2 \circ e_1 &= (e_2 \circ e_1) \circ \alpha(e_2 \circ e_1) = (\beta(e_2 \circ e_1) \circ (e_2 \circ e_1)) \circ \alpha(e_2 \circ e_1) \\ &= ((\beta(e_2 \circ e_1) \circ e_2) \circ e_1) \circ \alpha(e_2 \circ e_1) = \\ &= (\beta(e_2 \circ e_1) \circ e_1) \circ \alpha(e_2 \circ e_1). \end{aligned}$$

Par conséquent $e_2 \circ e_1 \leq e_1$, d'après $e_2 \circ e_1 \in U$ et (μ_1).

De même $e_2 \circ e_1 \leq e_2$.

En faisant usage de l'axiome (μ_1) on peut écrire

$$\begin{aligned} e_2 \wedge e_1 &= (e_2 \wedge e_1) \circ (e_2 \wedge e_1) = ((e_2 \wedge e_1) \circ e_2) \circ (e_1 \circ (e_2 \wedge e_1)) \\ &= ((e_2 \wedge e_1) \circ (e_2 \circ e_1)) \circ (e_2 \wedge e_1) = (e_2 \wedge e_1) \circ (e_2 \circ e_1). \end{aligned}$$

Par suite $e_2 \wedge e_1 \leq e_2 \circ e_1$. ■

LEMME 7.2. *Soit* $(C, \circ, U)$ *un pseudomonoïde fléché. Alors*

(1) Il existe une relation unique d'ordre sur C, *notée aussi* $\leq$, *qui induise dans* U *la relation d'ordre sur* U *définie par le lemme 1.1 et telle que, pour* $g, f \in C$, *on ait* $g \leq f$ *si, et seulement si,* $\alpha(g) \leq \alpha(f)$, $\beta(g) \leq \beta(f)$, $\beta(g) \circ (f \circ \alpha(g))$ *est défini et* $g = \beta(g) \circ (f \circ \alpha(g))$;

(2) U *est une classe de pseudounités de* $(C, \circ, \leq)$;

(3) U *est héréditaire dans* $(C, \leq)$.

DEMONSTRATION. (1) L'anti-symétrie est conséquence de la définition de $(C, \leq)$, de l'associativité (PM) et de la condition (ξ) de (μ_1). La transitivité de $(C, \leq)$ résulte de l'associativité (PM).

De (ξ), de l'axiome (μ_1) et du lemme 7.1 on déduit : si $e_1, e_2 \in U$, alors $e_1 = e_1 \circ e_2$ si, et seulement si, $e_1 = e_1 \circ (e_2 \circ e_1)$.

L'unicité est évidente.

(2) est une conséquence de *(1)* et de l'axiome (μ_2) a.

Le lemme 7.1 entraîne que U est héréditaire. En effet, si $(h,e) \in C \times U$ et si $h \leq e$, alors $h = \beta(h) \circ (e \circ \alpha(h))$. ∎

LEMME 7.3. *Soit* $(C, \circ, U)$ *un pseudomonoïde fléché. Alors* $(C, \circ, \leq, U)$ *satisfait les axiomes* $(POR1)$, $(POR2)$, $(POR3)$, $(POR4)c$ *et la condition* (R^*). *De plus :*

(1) $((U, \leq), \alpha, (C, \leq))$ *et* $((U, \leq), \beta, (C, \leq))$ *sont des morphismes ordonnés de classe* (σ_2).

(2) $((U \times U, \leq), [\beta, \alpha], (C, \leq))$ *est de classe* (σ').

DEMONSTRATION. Du lemme 7.2 et des axiomes (μ_2) et (μ_3) il résulte que $(C^\circ, \leq, U)$ vérifie les axiomes $(POR1)$, $(POR2)$, $(POR3)$ et $(POR4)$ c. La propriété *(1)* est une conséquence de (R^*). La propriété *(2)* est immédiate d'après la définition de $(C, \leq)$. Il reste à montrer (R^*).

Soit $(e, f) \in U \times C$ tel que $e \leq \alpha(f)$. Donc $\alpha(f) \circ e$ est défini et $e = \beta(e)$. Par conséquent $f \circ e$ est défini en vertu de (μ_2)b. Par suite $\alpha(f \circ e) = e$ à cause de (Rd). On a $f \circ e \leq f$; en effet,

$$f \circ e = \beta(f \circ e) \circ (f \circ e) = \beta(f \circ e) \circ (f \circ \alpha(f \circ e))$$
$$\text{et } \beta(f) \circ (f \circ e) = f \circ e.$$

Donc $\beta(f \circ e) \leq \beta(f)$.

Soit $g \in C$ tel que $g \leq f$ et $\alpha(g) \leq e$. Alors $\beta(g) \circ f$, $f \circ \alpha(g)$, $\alpha(g) \circ e$ et $\beta(g) \circ (f \circ \alpha(g))$ sont définis et $\alpha(g) = \alpha(g) \circ e$ et $g = \beta(g) \circ (f \circ \alpha(g))$. Or, en vertu du lemme 7.1, U est commutative et symétrique, donc $g = \beta(g) \circ (f \circ \alpha(g)) = \beta(g) \circ (f \circ (e \circ \alpha(g)))$ et $\beta(g) \circ (f \circ e)$, $(f \circ e) \circ \alpha(g)$ sont définis. Par suite $g \leq f \circ e$. Par conséquent $f \circ e = \alpha^*_f(e)$.

De même on a $e' \circ f = \beta^*_f(e')$ si $e' \leq \beta(f)$. ∎

PROPOSITION 7.1. *Pour qu'un triplet* $(C, \circ, U)$ *soit un pseudomonoïde fléché, il faut et il suffit qu'il vérifie les axiomes* (μ_1), (μ'_2) *et* (μ'_3), *où*

(μ'_2) *a. Il existe des fonctions* α *et* β *de* C *dans* U *telles que*

(i_1) *Si* $f \in C$, *alors* $f \circ \alpha(f)$, $\beta(f) \circ f$ *sont définis et* $f = f \circ \alpha(f) = \beta(f) \circ f$;

(i_2) *Si* $e \in U$, *alors* $e = \alpha(e) = \beta(e)$;

(i_3) *Si* $f, g \in C$ *et si* $g \circ f$ *est défini, alors* $\alpha(g \circ f) \leq \alpha(f)$ *et* $\beta(g \circ f) \leq \beta(g)$;

b. Si $e, e' \in U$, *alors* $e \circ e'$ *est défini si, et seulement si,* $e \wedge e'$ *est défini dans* $(U, \leq)$. *Si* $f, g \in C$, *alors* $g \circ f$ *est défini si, et seulement si,* $\alpha(g) \circ \beta(f)$ *est défini.*

(μ'_3) *Pour tout* $f \in C$, *on a :*

$(\overset{\circ}{R}d)$ *Si* $(f, e) \in C \times U$ *et si* $f \circ e$ *est défini (donc* $\alpha(f) \circ e$ *est défini en vertu de* $(\mu'_2)b$*), alors* $\alpha(f \circ e) = \alpha(f) \circ e$;

$(\overset{\circ}{R}g)$ *Si* $(e', f) \in U \times C$ *et si* $e' \circ f$ *est défini, alors* $\beta(e' \circ f) = e' \circ \beta(f)$.

DEMONSTRATION. (μ_1) et (μ_2) entraînent (μ'_2). En effet, (i_1) et (i_2) en sont des conséquences immédiates, en vertu des définitions de $\alpha(f)$ et $\beta(f)$. Montrons (i_3). Soient $g, f \in C$ tels que $g \circ f$ est défini; donc $g \circ (f \circ \alpha(f))$ est défini. En tenant compte de l'associativité (PM) on peut écrire $g \circ f = g \circ (f \circ \alpha(f)) = (g \circ f) \circ \alpha(f)$, donc $\alpha(g \circ f) \leq \alpha(f)$.

De même $\beta(g \circ f) \leq \beta(g)$.

La condition b de (μ'_2) est une conséquence immédiate de (μ_2)b en vertu de (i_2).

(μ_1), (μ_2) et (μ_3) entraînent (μ'_3). En effet, soit $(f, e) \in C \times U$ tel que $f \circ e$ est défini; alors $\alpha(f) \circ e \in U$ à cause du lemme 7.2, donc $\alpha(f) \circ e \leq \alpha(f)$, en vertu aussi du lemme 7.2. Par conséquent

$$\alpha(f \circ e) = \alpha(f \circ (\alpha(f) \circ e)) = \alpha(f) \circ e$$

à cause de (Rd).

De même on a $(\overset{\circ}{R}g)$.

(μ'_2)a entraîne (μ_2)a trivialement.

L'équivalence entre les axiomes (μ_2)b et (μ'_2)b est évidente, puisque $e = \alpha(e) = \beta(e)$ si $e \in U$. ∎

Du lemme 7.1 et de la proposition 7.1 on déduit aisément :

PROPOSITION 7.2. *Pour qu'un triplet* $(C, \circ, U)$ *soit un pseudomonoïde fléché, il faut et il suffit que* $(C, \circ, U)$ *satisfasse les deux axiomes suivants :*

$(\overset{\circ}{\mu}_1)$ $(C, \circ)$ *est un pseudomonoïde et* U *est une sous-classe de*

C_o *stable, symétrique et commutative.*

$(\overset{\circ}{\mu}_2)$ *Pour tout* $f \in C$ *il existe d'uniques éléments de* U, *notés* $\alpha(f)$ *et* $\beta(f)$, *tels que*

a. $f \circ \alpha(f)$, $\beta(f) \circ f$ *sont définis et* $f = f \circ \alpha(f) = \beta(f) \circ f$;

b. Si $g \in C$ *et si* $\alpha(g) \circ \beta(f)$ *est défini, alors* $g \circ f$ *est défini; si* $e \wedge e'$ *existe dans* $(U, <)$, $e \circ e'$ *est défini.*

c. Si $g \in C$ *et si* $g \circ f$ *est défini, alors* $\alpha(g) \circ f$ *et* $g \circ \beta(f)$ *sont définis;*

d. Si $e, e' \in U$, *si* $f \circ e$ *et* $e' \circ f$ *sont définis, alors* $\alpha(f) \circ e$ *et* $e' \circ \beta(f)$ *sont définis,* $\alpha(f \circ e) = \alpha(f) \circ e$ *et* $\beta(e' \circ f) =$ $= e' \circ \beta(f)$.

LEMME 7.4. *Soit* $(C, \circ, U)$ *un pseudomonoïde fléché. Alors*

(1) $U = C_o^{\bullet}$;

(2) *Si* $(g, f) \in C^{\circ} * C^{\circ}$, *alors* $g \odot f$ *est défini et* $g \circ f = g \odot f$.

DEMONSTRATION. Du lemme 7.3 il résulte que $(C^{\circ}, \leq, U)$ satisfait les conditions, la preuve du lemme 5.1 étant applicable. ■

8. On dit qu'un triplet $(C, \circ, U)$ est un *pseudomonoïde totalement régulier* si $(C, \circ, U)$ est un pseudomonoïde fléché satisfaisant en plus l'axiome suivant :

(μ_4) a. Si g, g', f et f' sont des éléments de C tels que $g' \leq f'$, $g \leq f$ et $g' \circ g$, $f' \circ f$ sont définis, alors $g' \circ g \leq f' \circ f$;

b. Si $f, g \in C$ et si $\alpha(g) = \beta(f)$, alors

$$\alpha(f) \leq \alpha(g \circ f) \text{ et } \beta(g) \leq \beta(g \circ f).$$

Un *morphisme de pseudomonoïdes totalement réguliers* est un triplet $((\hat{C}^{\circ}, \hat{U}), \varphi, (C^{\circ}, U))$ tel que $(\hat{C}, \varphi, C)$ soit une application, $(\hat{C}^{\circ}, \hat{U})$ et (C°, U) des pseudomonoïdes totalement réguliers vérifiant :

(MP 1) Si $f, g \in C$ et si $g \circ f$ est défini, alors $\varphi(g) \circ \varphi(f)$ est aussi défini et $\varphi(g \circ f) = \varphi(g) \circ \varphi(f)$;

(MP 2) Pour tout $f \in C$ on a

$$\alpha(\varphi(f)) = \varphi(\alpha(f)) \text{ et } \beta(\varphi(f)) = \varphi(\beta(f)).$$

THEOREME 8.1. *Si* $(C^{\cdot}, \leq)$ *est une catégorie ordonnée totalement régulière, alors* $(C, \odot, C_o^{\cdot})$ *est un pseudomonoïde totalement régulier. Si* $(C, \circ, U)$ *est un pseudomonoïde totalement régulier, il existe une catégorie unique ordonnée totalement régulière* $(C^{\bullet}, \leq)$ *telle que* $(C, \odot, C_o^{\bullet}) = (C, \circ, U)$. *Soient* $(\hat{C}^{\cdot}, \leq)$ *et* $(C^{\cdot}, \leq)$ *des catégories ordonnées totalement régulières et* φ *une surjection de* C *dans* $\hat{C}$; *alors* $((\hat{C}^{\cdot}, \leq), \varphi, (C^{\cdot}, \leq))$ *est un morphisme de catégories ordonnées régulières si, et seulement si,* $((\hat{C}, \odot, \hat{C}_o^{\cdot}), \varphi, (C, \odot, C_o^{\cdot}))$ *est un morphisme de pseudomonoïdes totalement réguliers.*

DEMONSTRATION. Soit $(C^{\cdot}, \leq)$ une catégorie ordonnée totalement régulière. Les lemmes 4.1, 6.1 et les propriétés (ε_1), (ε_3) et (ε_7) entraînent que $(C, \odot, C_o^{\cdot})$ est un pseudomonoïde totalement régulier.

Soit $(C, \circ, U)$ un pseudomonoïde totalement régulier. De (μ_4)b il résulte que $\alpha(g \bullet f) = \alpha(f)$ et $\beta(g \bullet f) = \beta(g)$ si $g \bullet f$ est défini. De cela, de l'associativité *(PM)* et de *(1)* du lemme 7.4 on déduit que $(C, \bullet)$ est une catégorie telle que $C_o^{\bullet} = U$. De *(1)* et *(2)* du lemme 7.3 et de (μ_4)a, il en résulte que $(C^{\bullet}, \leq)$ est une catégorie ordonnée régulière, où $(C, \leq)$ est le système ordonné associé à (C°, U). $C_o^{\bullet}$ est héréditaire; en effet, soit $(h, e) \in C \times C_o^{\cdot}$ tel que $h \leq e$. Donc $h = \beta(h) \circ (e \circ \alpha(h))$. Or $C_o^{\bullet} = U$ en vertu de *(1)* du lemme 7.4, donc $h \in C_o^{\bullet}$ à cause des lemmes 6.1 et 7.1.

Les relations d'ordre associées à $(C, \odot, C_o^{\bullet})$ et à $(C, \circ, U)$ coïncident en vertu du lemme 4.2 et de la définition de la relation d'ordre associée à $(C, \circ, U)$.

Pour montrer que $(C, \circ, U) = (C, \odot, C_o^{\bullet})$ il reste, d'après le lemme 7.4, à montrer que, si $g, f \in C$ et si $g \odot f$ est défini, alors $g \circ f$ est défini et $g \odot f = g \circ f$.

Supposons $g \odot f$ défini. En appliquant (ε_3) pour le pseudoproduit associé à $(C^{\bullet}, \leq)$, on voit que $\alpha(g) \wedge \beta(f)$ est défini, donc que $g \circ f$ est défini à cause de la condition b de *(POR 2)*.

Il reste à montrer l'unicité.

Soient $(C^{\cdot}, \leq)$ et $(\hat{C}^{\bullet}, \leq)$ des catégories ordonnées régulières telles que $(C, \odot, C_o^{\bullet}) = (\hat{C}, \odot, \hat{C}_o^{\bullet})$. En vertu de la définition du pseudo-produit, on a $(C, .) = (\hat{C}, \bullet)$. Du lemme 4.2 il en résulte $(C, \leq) = (\hat{C}, \leq)$.

La dernière partie du théorème est conséquence du lemme 6.2. ∎

On note Λ_o la classe des pseudomonoïdes totalement réguliers (C°, U) tels que C appartienne à $\mathfrak{M}_o$.

On note Λ la catégorie dont les éléments sont les morphismes de pseudomonoïdes totalement réguliers $((\hat{C}^\circ, \hat{U}), \varphi, (C^\circ, U))$ tels que $\hat{C}$ et C appartiennent à $\mathfrak{M}_o$. On note $(\mathfrak{M}, p_\Lambda, \Lambda)$ le foncteur d'oubli défini par

$$((\hat{C}^\circ, \hat{U}), \varphi, (C^\circ, U)) \mapsto (\hat{C}, \varphi, C).$$

Du théorème 7.1 on déduit

THEOREME 7.2. *Le procédé de déduction* $(C^{\bullet}, \leq) \mapsto (C, \odot, C_o^{\bullet})$ *définit une bijection de* Γ_o *sur* Λ_o. *Plus précisément le procédé de déduction*

$$((\hat{C}^{\bullet}, \leq), \varphi, (C^{\bullet}, \leq)) \mapsto ((\hat{C}, \odot, \hat{C}_o^{\bullet}), \varphi, (C, \odot, C_o^{\bullet}))$$

définit un isomorphisme covariant (cf. [8], *p. 60) du foncteur d'oubli* $(\mathfrak{M}, p_\Gamma, \Gamma)$ *sur* $(\mathfrak{M}, p_\Lambda, \Lambda)$.

9. Soit $(C, \circ)$ un pseudomonoïde. Soient $g, f \in C$.

On dit que g et f sont *régulièrement conjugués* si $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ (g \circ f)$ et $g \circ (f \circ g)$ sont définis et si

$$f = f \circ (g \circ f) \quad \text{et} \quad g = g \circ (f \circ g).$$

Si g et f sont régulièrement conjugués, alors $f \circ g$, $g \circ f \in C_o$. En effet, si $e' = f \circ g$, alors

$$e' = f \circ g = ((f \circ g) \circ f) \circ g = (f \circ g) \circ (f \circ g),$$

donc $e' \in C_o$. De même $g \circ f$ est idempotent.

LEMME 9.1. *Soit* $(C, \circ)$ *un pseudomonoïde. Soient* $e, e' \in C_o$ *tels que* $e \circ e'$ *et* $e' \circ e$ *sont définis. Si* $e \circ e'$ *et* $e' \circ e$ *sont régulièrement conjugués, alors* $e \circ e'$, $e' \circ e \in C_o$.

DEMONSTRATION. En effet,

$$\begin{aligned} e \circ e' &= ((e \circ e') \circ (e' \circ e)) \circ (e \circ e') = (((e \circ e') \circ e') \circ e) \circ (e \circ e') \\ &= ((e \circ e') \circ e) \circ (e \circ e') = (e \circ e') \circ (e \circ (e \circ e')) = (e \circ e') \circ (e \circ e'). \end{aligned}$$

De même on montre que $e' \circ e \in C_o$. ■

On dira que la classe C_o est *effective* si, pour tout $(e, e') \in C_o \times C_o$ tel que e et e' sont régulièrement conjugués, on a $e = e'$.

LEMME 9.2. *Soit $(C, \circ)$ un pseudomonoïde. Pour que C_o soit commutatif, il faut et il suffit que C_o soit effectif et que $e \circ e' \in C_o$ si $e, e' \in C_o$ et si $e \circ e'$, $e' \circ e$ sont définis.*

DEMONSTRATION. Les conditions sont nécessaires. En effet, soient $e, e' \in C_o$ tels que $e \circ e'$ et $e' \circ e$ sont définis. A cause de la commutativité de C_o et de l'associativité (PM) on peut écrire

$$e \circ e' = (e \circ e) \circ e' = e \circ (e \circ e') = e \circ (e' \circ e) = e \circ (e' \circ (e' \circ e))$$

$$= (e \circ e') \circ (e' \circ e) = (e \circ e') \circ (e \circ e').$$

Supposons $e = e \circ (e' \circ e)$ et $e' = e' \circ (e \circ e')$. Alors

$$e = (e \circ e') \circ e = (e' \circ e) \circ e = e' \circ e \quad \text{et} \quad e' = e' \circ (e \circ e') = e' \circ (e' \circ e) = e' \circ e.$$

Par conséquent $e = e'$.

La condition est suffisante. Soient $e, e' \in C_o$ tels que $e \circ e'$ et $e' \circ e$ sont définis, donc $e \circ e'$, $e' \circ e \in C_o$.

En faisant usage de l'associativité (PM) on peut écrire

$$e \circ e' = (e \circ e') \circ (e \circ e') = (e \circ e') \circ (e \circ (e \circ e'))$$

$$= ((e \circ e') \circ e) \circ (e \circ e') = (((e \circ e') \circ e') \circ e) \circ (e \circ e')$$

$$= ((e \circ e') \circ (e' \circ e)) \circ (e \circ e').$$

De même $e' \circ e = ((e' \circ e) \circ (e \circ e')) \circ (e' \circ e)$. Or C_o est effective, donc $e \circ e' = e' \circ e$. ■

COROLLAIRE 9.1. *Si C_o est symétrique, alors C_o est commutative si, et seulement si, C_o est stable et effective.*

PROPOSITION 9.1. *Soit $(C, \circ)$ un pseudomonoïde satisfaisant l'axiome suivant :*

(PG)a. Pour tout $f \in C$ il existe un élément unique de C, noté $f^{\#}$, tel que f et $f^{\#}$ sont régulièrement conjugués;

b. Si $(g, f) \in C \times C$ et si $g \circ f$ est défini, alors $f^{\#} \circ g^{\#}$ est défini et $(g \circ f)^{\#} = f^{\#} \circ g^{\#}$.

Alors C_o *est symétrique et commutatif.*

DEMONSTRATION. Soit $e \in C_o$. Les égalités

$$(e \circ e) \circ e = e = e \circ (e \circ e)$$

entraînent que e est régulièrement conjugué à e, donc $e = e^{\#}$. Si $e' \in C_o$ et si $e \circ e'$ est défini, $e' \circ e = e'^{\#} \circ e^{\#}$ est défini et égal à $(e \circ e')^{\#}$, d'après (PG). Le lemme 9.1 montre que $e \circ e' \in C_o$, donc

$$e \circ e' = (e \circ e')^{\#} = e' \circ e. \blacksquare$$

LEMME 9.3. *Soit* $(C, \circ)$ *un pseudomonoïde tel que* C_o *soit commutatif. Pour tout* $f \in C$, *il existe au plus un élément régulièrement conjugué à* f.

DEMONSTRATION. Soient $g, g', f \in C$ tels que g et f (resp. g' et f) sont régulièrement conjugués. Alors $f = f \circ (g \circ f) = (f \circ g) \circ f$, donc

$$g' \circ f = g' \circ (f \circ (g \circ f)) = (g' \circ f) \circ (g \circ f),$$

$$f \circ g' = ((f \circ g) \circ f) \circ g' = (f \circ g) \circ (f \circ g').$$

Or $f = f \circ (g' \circ f) = (f \circ g') \circ f$, donc $g' \circ f$, $g \circ f$, $f \circ g$, $f \circ g'$ appartiennent à C_o. En faisant usage de la commutativité de C_o on peut écrire

$$g \circ f = g \circ (f \circ (g' \circ f)) = (g \circ f) \circ (g' \circ f) = (g' \circ f) \circ (g \circ f) = g' \circ f,$$

$$f \circ g = ((f \circ g') \circ f) \circ g = (f \circ g') \circ (f \circ g) = (f \circ g) \circ (f \circ g') = f \circ g'.$$

Mais $g = g \circ (f \circ g)$ et $g' = (g' \circ f) \circ g'$. Par conséquent

$$g = g \circ (f \circ g) = g \circ (f \circ g') = (g \circ f) \circ g' = (g' \circ f) \circ g' = g'. \blacksquare$$

PROPOSITION 9.2. *La donnée d'un pseudomonoïde* $(C, \circ)$ *vérifiant l'axiome* (PG) *est équivalente à la donnée d'un triplet* $(C, \circ, \#)$ *tel que* $(C, \circ)$ *est un pseudomonoïde,* C_o *est commutative et* $\#$ *est une surjection de* C *dans* C *définissant un anti-automorphisme involutif et conjugué de* $(C, \circ)$, *c'est-à-dire :*

(AA 1) Si $(g, f) \in C \times C$ *et si* $g \circ f$ *est défini, alors* $\#(f) \circ \#(g)$ *est défini et* $\#(g \circ f) = \#(f) \circ \#(g)$;

(AA 2) Si $f \in C$, *alors* $f = \#(\#(f))$;

(AA 3) Si $f \in C$, *alors* $f \circ \#(f)$ *et* $f \circ (\#(f) \circ f)$ *sont définis (donc aussi* $\#(f) \circ f$ *est défini) et* $f = f \circ (\#(f) \circ f)$.

DEMONSTRATION. Soit $(C, \circ)$ un pseudomonoïde satisfaisant l'axiome (PG). Alors C_o est commutative en vertu de la proposition 9.1. Pour montrer que la surjection $\#$ de C dans C définie par $f \mapsto f^{\#}$ est un anti-automorphisme involutif et conjugué il suffit, d'après l'axiome (PG), de montrer que $f = (f^{\#})^{\#}$ pour tout $f \in C$, mais cela est vrai puisque f et $f^{\#}$ sont régulièrement conjugués.

Soit $(C, \circ)$ un pseudomonoïde muni d'un anti-automorphisme involutif et conjugué $\# : C \to C$. Des conditions $(AA\,1)$, $(AA\,2)$ et $(AA\,3)$ on déduit que f et $\#(f)$ sont régulièrement conjugués.

C_o étant commutative, le lemme 9.3 entraîne que $\#(f)$ est l'unique élément de C tel que f et $\#(f)$ soient régulièrement conjugués. ■

PROPOSITION 9.3. *Soit $(C, \circ)$ un pseudomonoïde et soit $\#$ une surjection de C dans C définissant un anti-automorphisme involutif et conjugué. Les trois conditions ci-dessous sont équivalentes :*

(1) C_o est commutative;

(2) C_o est effective;

(3) Si $e \in C_o$, alors $e = \#(e)$.

DEMONSTRATION. (1) entraîne (2) en vertu de la proposition 9.3. (2) entraîne (3) trivialement. (3) entraîne (1). En effet, C_o étant symétrique il suffit, d'après le corollaire 9.1, de montrer que C_o est stable. Soient $e_1, e_2 \in C_o$ tels que $e_1 \circ e_2$ est défini. Alors

$$\begin{aligned} e_1 \circ e_2 &= (e_1 \circ e_2) \circ (\#(e_1 \circ e_2) \circ (e_1 \circ e_2)) = (e_1 \circ e_2) \circ ((e_2 \circ e_1) \circ (e_1 \circ e_2)) \\ &= (e_1 \circ e_2) \circ (e_2 \circ (e_1 \circ (e_1 \circ e_2))) = (e_1 \circ e_2) \circ (e_2 \circ (e_1 \circ e_2)) \\ &= ((e_1 \circ e_2) \circ e_2) \circ (e_1 \circ e_2) = (e_1 \circ e_2) \circ (e_1 \circ e_2). \ ■ \end{aligned}$$

LEMME 9.4. *Soit $(C, \circ)$ un pseudomonoïde. Alors C_o est effectif si, et seulement si, C_o satisfait la condition suivante :*

$(\mathcal{E})$ Si $e, e' \in C_o$, si $e \circ e'$ et $e' \circ e$ sont définis et $e = e \circ e'$, et si $e' \circ e \in C_o$, alors $e = e' \circ e$.

DEMONSTRATION. Supposons que C_o est effective. Si $e = e \circ e'$, alors

$$e = e \circ e = (e \circ e') \circ e = e \circ (e' \circ e) = e \circ ((e' \circ e) \circ e),$$

$$\begin{aligned} e' \circ e &= e' \circ (e \circ e) = e' \circ ((e \circ e') \circ e) = e' \circ (e \circ (e' \circ e)) \\ &= e' \circ ((e \circ e) \circ (e' \circ e)) = (e' \circ (e \circ e)) \circ (e' \circ e) \\ &= ((e' \circ e) \circ e) \circ (e' \circ e) = (e' \circ e) \circ (e \circ (e' \circ e)), \end{aligned}$$

or $e, e' \circ e \in C_o$, donc $e = e' \circ e$.

Réciproquement, supposons $(\mathcal{E})$. Soient $e_1, e_2 \in C_o$ tels que e_1 et e_2 sont régulièrement conjugués. On a $e_1 = e_1 \circ (e_2 \circ e_1)$ et $e_2 = e_2 \circ (e_1 \circ e_2)$. Soit $e = e_1 \circ e_2$ et soit $e' = e_2 \circ e_1$. Alors $e, e' \in C_o$. De plus

$$e_1 = e_1 \circ e' = e' \circ e_1 = (e_2 \circ e_1) \circ e_1 = e_2 \circ e_1 = e_1 \circ e_2,$$
$$e_2 = e_2 \circ e = e \circ e_2 = (e_1 \circ e_2) \circ e_2 = e_1 \circ e_2.$$

Par suite $e_1 = e_2$. ■

On dira que $(C, \circ)$ est un *pseudogroupoïde* si $(C, \circ)$ est un pseudomonoïde vérifiant l'axiome (PG) et l'axiome suivant :

(AB) Si $(g, f) \in C \times C$, alors $g \circ f$ est défini si, et seulement si, $\alpha^{\#}(g) \circ \beta^{\#}(f)$ est défini, où $\alpha^{\#}(g) = g^{\#} \circ g$ et $\beta^{\#}(f) = f \circ f^{\#}$.

Des propositions 9.2, 9.3 et du lemme 9.4 il résulte :

THEOREME 9.1. *La donnée d'un pseudogroupoïde $(C, \circ)$ est équivalente à la donnée d'un triplet $(C, \circ, \#)$ tel que $(C, \circ)$ soit un pseudomonoïde, $\#$ une fonction de C dans C définissant un anti-automorphisme involutif et conjugué de $(C, \circ)$ vérifiant l'axiome (AB) et que C_o satisfasse une des conditions suivantes : (i) C_o est commutative; (ii) C_o est effective; (iii) si $e \in C_o$, alors $e = \#(e)$; (iv) C_o vérifie la condition $(\mathcal{E})$.*

Un *morphisme de pseudogroupoïdes* est un triplet $((\hat{C}, \circ), \varphi, (C, \circ))$ tel que $(\hat{C}, \circ), (C, \circ)$ sont des pseudogroupoïdes et φ une surjection de C dans $\hat{C}$ telle que, pour tout $(g, f) \in C^{\circ} * C^{\circ}$, $\varphi(g) \circ \varphi(f)$ soit défini et $\varphi(g \circ f) = \varphi(g) \circ \varphi(f)$.

LEMME 9.5. *Soit $((\hat{C}, \circ), \varphi, (C, \circ))$ un morphisme de pseudogroupoïdes. Alors*

(1) Si $f \in C$, alors $\varphi(f^{\#}) = (\varphi(f))^{\#}$;

(2) Si $f \in C$, alors $\varphi(\alpha^{\#}(f)) = \alpha^{\#}(\varphi(f))$ et $\varphi(\beta^{\#}(f)) = \beta^{\#}(\varphi(f))$;

(3) $\varphi(C_o) \subset \hat{C}_o$;

(4) Si $\hat{S} \subset \hat{C}$ *et si* $\hat{S} \cap \varphi(C)$ *est un sous-pseudogroupoïde de* $\hat{C}^{\circ}$, *alors* $\varphi^{-1}(\hat{S})$ *est un sous-pseudogroupoïde de* C°. En particulier $\varphi^{-1}(\hat{e})$, où $\hat{e} \in \hat{C}_o \cap \varphi(C)$, et $Ker\ \varphi$ sont des sous-pseudogroupoïdes, où $Ker\ \varphi = \varphi^{-1}(\hat{C}_o)$.

DEMONSTRATION. *(1)* est une conséquence immédiate de l'axiome *(PG)*. *(2)* résulte de *(1)*. *(3)* est évident.

Montrons *(4)*. Soient $f, g \in \varphi^{-1}(\hat{S})$. Si $g \circ f$ est défini, alors $\varphi(g) \circ \varphi(f)$ est défini et appartient à $\hat{S}$. Or $\varphi(g \circ f) = \varphi(g) \circ \varphi(f)$, donc $g \circ f \in \varphi^{-1}(\hat{S})$.

Soit $f \in \varphi^{-1}(\hat{S})$. En faisant usage de *(1)*, on a $f^{\#} \in \varphi^{-1}(\hat{S})$ puisque $(\varphi(f))^{\#} \in \hat{S}$ et $\varphi(f^{\#}) = (\varphi(f))^{\#}$. ■

THEOREME 9.2. *Soit* $((\hat{C}, \circ), \varphi, (C, \circ))$ *un morphisme de pseudogroupoïdes. Les trois conditions ci-dessous sont équivalentes :*

(I_1) $\varphi : C \to \hat{C}$ *est injective;*

(I_2) $\varphi |\ Ker\ \varphi : Ker\ \varphi \to \hat{C}$ *est injective;*

(I_3) $C_o = Ker\ \varphi$ *et* $\varphi |\ C_o : C_o \to \hat{C}$ *est injective.*

DEMONSTRATION. (I_2) entraîne (I_3), c'est-à-dire $C_o = Ker\ \varphi$. En effet, à cause de *(4)* du lemme 9.5, $C_o \cap \varphi^{-1}(\hat{e})$ est non vide si $\hat{e} \in \varphi(C)$.

(I_3) entraîne (I_1). En effet, soient $g, f \in C$ tels que $\varphi(g) = \varphi(f)$. Alors $\varphi(\alpha^{\#}(g)) = \varphi(\alpha^{\#}(f)) = \varphi(\beta^{\#}(f^{\#}))$. Par conséquent $\alpha^{\#}(g) = \beta^{\#}(f^{\#})$, par suite $g \circ f^{\#}$ est défini en vertu de *(AB)*.

De même $f^{\#} \circ g$ est défini. Par conséquent

$$\varphi(g \circ f^{\#}) = \varphi(g) \circ \varphi(f^{\#}) = \varphi(g) \circ (\varphi(f))^{\#} = \varphi(g \circ g^{\#}),$$

$$\varphi(f^{\#} \circ g) = \varphi(f^{\#}) \circ \varphi(g) = (\varphi(f))^{\#} \circ \varphi(g),$$

$$= (\varphi(f))^{\#} \circ \varphi(f) = \varphi(f^{\#} \circ f).$$

Donc $g \circ f^{\#}$, $f^{\#} \circ g \in Ker\ \varphi$. Par suite $g \circ f^{\#} = g \circ g^{\#}$ et $f^{\#} \circ g = f^{\#} \circ f$ en vertu de (I_3), et

$$g = (g \circ g^{\#}) \circ g = (g \circ f^{\#}) \circ g \quad \text{et} \quad f^{\#} = (f^{\#} \circ f) \circ f^{\#} = (f^{\#} \circ g) \circ f^{\#},$$

c'est-à-dire g et $f^{\#}$ sont régulièrement conjugués. Donc $f^{\#} = g^{\#}$, i.e. $g = f$. ■

Soit $(C, \circ)$ un pseudogroupoïde. On a

(9.1) $\alpha^{\#}(\alpha^{\#}(f)) = \alpha^{\#}(f)$ et $\beta^{\#}(\beta^{\#}(f)) = \beta^{\#}(f)$ si $f \in C$,

(9.2) $\alpha^{\#}(f) = \beta^{\#}(f^{\#})$ et $\beta^{\#}(f) = \alpha^{\#}(f^{\#})$ si $f \in C$.

Des formules (9.1) et de l'axiome (AB) on déduit :

LEMME 9.6. *Soit $(C, \circ)$ un pseudogroupoïde. Si $g, f \in C$, alors les trois conditions ci-dessous sont équivalentes :*

(1) $g \circ f$ est défini;

(2) $\alpha^{\#}(g) \circ f$ est défini;

(3) $g \circ \beta^{\#}(f)$ est défini.

LEMME 9.7. *Soit $(C, \circ)$ un pseudogroupoïde. Soient $g, f \in C$. Les six conditions ci-dessous sont équivalentes :*

(0_1) $\beta^{\#}(g) \circ f$, $f \circ \alpha^{\#}(g)$, $\beta^{\#}(g) \circ (f \circ \alpha^{\#}(g))$ sont définis et $g = \beta^{\#}(g) \circ (f \circ \alpha^{\#}(g))$;

(0_2) $g \circ f^{\#}$, $f^{\#} \circ g$, $g \circ (f^{\#} \circ g)$ sont définis et $g = g \circ (f^{\#} \circ g)$;

(0_3) $g^{\#} \circ f$ est défini et $g = \beta^{\#}(g) \circ f$;

(0_4) $f \circ g^{\#}$ est défini et $g = f \circ \alpha^{\#}(g)$;

(0_5) $g^{\#} \circ f$ est défini et $\alpha^{\#}(g) = g^{\#} \circ f$ $(= f^{\#} \circ g)$;

(0_6) $f \circ g^{\#}$ est défini et $\beta^{\#}(g) = f \circ g^{\#}$ $(= g \circ f^{\#})$.

Dans le cas où une des conditions ci-dessus est définie, on a :

(1) $\alpha^{\#}(g) \circ \alpha^{\#}(f)$ est défini et $\alpha^{\#}(g) = \alpha^{\#}(g) \circ \alpha^{\#}(f)$;

$\beta^{\#}(g) \circ \beta^{\#}(f)$ est défini et $\beta^{\#}(g) = \beta^{\#}(g) \circ \beta^{\#}(f)$;

(2) $f^{\#} \circ g$ et $g \circ f^{\#}$ sont définis et $f^{\#} \circ g = g^{\#} \circ f$ et $g \circ f^{\#} = f \circ g^{\#}$.

DEMONSTRATION. (0_1) est équivalent à (0_2). En effet, en faisant usage du lemme 9.6, de (AA 1), (AA 2), des formules (9.1), (9.2) et du fait que C_0 est symétrique, on obtient :

$\beta^{\#}(g) \circ f$ est défini si, et seulement si, $\alpha^{\#}(g^{\#}) \circ f$ est défini, c'est-à-dire si, et seulement si, $g^{\#} \circ f$ est défini, ce qui équivaut à $f^{\#} \circ g$ défini.

$f \circ \alpha^{\#}(g)$ est défini équivaut à $f \circ \beta^{\#}(g^{\#})$ défini, c'est-à-dire à $f \circ g^{\#}$ défini, ou encore à $g \circ f^{\#}$ défini.

$\beta^{\#}(g) \circ (f \circ \alpha^{\#}(g))$ est défini si, et seulement si, il en est ainsi pour $\alpha^{\#}(g^{\#})\circ(f\circ\alpha^{\#}(g))$, c'est-à-dire pour $g^{\#}\circ(f\circ\alpha^{\#}(g))$, ou encore pour $(f\circ\alpha^{\#}(g))^{\#}\circ g$, i.e. pour $(\alpha^{\#}(g)\circ f^{\#})\circ g$, c'est-à-dire pour $\alpha^{\#}(g)\circ(f^{\#}\circ g)$, et enfin pour $g\circ(f^{\#}\circ g)$.

Supposons $g = \beta^{\#}(g)\circ(f\circ\alpha^{\#}(g))$. Alors

$$\begin{aligned} g^{\#}\circ g &= g^{\#}\circ(\beta^{\#}(g)\circ(f\circ\alpha^{\#}(g))) = g^{\#}\circ(\alpha^{\#}(g^{\#})\circ(f\circ\alpha^{\#}(g))) \\ &= (g^{\#}\circ\alpha^{\#}(g^{\#}))\circ(f\circ\alpha^{\#}(g))) = g^{\#}\circ(f\circ\beta^{\#}(g^{\#})) \\ &= (g^{\#}\circ f)\circ\beta^{\#}(g^{\#}), \end{aligned}$$

donc

$$g^{\#} = (g^{\#}\circ g)\circ g^{\#} = ((g^{\#}\circ f)\circ\beta^{\#}(g^{\#}))\circ g^{\#} = (g^{\#}\circ f)\circ g^{\#}.$$

Par suite $g = g\circ(f^{\#}\circ g)$.

Supposons $g = g\circ(f^{\#}\circ g)$. Alors

$$g^{\#} = (f^{\#}\circ g)^{\#}\circ g^{\#} = (g^{\#}\circ f)\circ g^{\#} \text{ et } \beta^{\#}(g)\circ f = g\circ(g^{\#}\circ f).$$

Donc

$$\begin{aligned} g &= g\circ(g^{\#}\circ g) = g\circ(((g^{\#}\circ f)\circ g^{\#})\circ g) = g\circ((g^{\#}\circ f)\circ(g^{\#}\circ g)) \\ &= (g\circ(g^{\#}\circ f))\circ(g^{\#}\circ g) = ((g\circ g^{\#})\circ f)\circ(g^{\#}\circ g) = (\beta^{\#}(g)\circ f)\circ\alpha^{\#}(g). \end{aligned}$$

(0_2) entraîne (2). En effet, si $g = g\circ(f^{\#}\circ g)$, alors

$$g^{\#} = g^{\#}\circ(f\circ g^{\#}) \text{ et } f^{\#}\circ g,\ f\circ g^{\#}\in C_0,$$

donc

$$\begin{aligned} f^{\#}\circ g &= (f^{\#}\circ g)^{\#} = g^{\#}\circ(f^{\#})^{\#} = g^{\#}\circ f, \\ g\circ f^{\#} &= (g^{\#})^{\#}\circ f^{\#} = (f\circ g^{\#})^{\#} = f\circ g^{\#}. \end{aligned}$$

(0_2) entraîne (0_3), (0_4). Soient $g, f\in C$ vérifiant (0_2). A cause de (2), on peut écrire

$$\begin{aligned} g &= g\circ(f^{\#}\circ g) = g\circ(g^{\#}\circ f) = (g\circ g^{\#})\circ f = \beta^{\#}(g)\circ f, \\ g &= (g\circ f^{\#})\circ g = (f\circ g^{\#})\circ g = f\circ(g^{\#}\circ g) = f\circ\alpha^{\#}(g). \end{aligned}$$

(0_3) entraîne (0_2). Supposons $g^{\#}\circ f$ défini. Alors $f^{\#}\circ g$ est défini à cause des conditions $(AA\,1)$ et $(AA\,2)$. De l'axiome (AB) et du lemme 9.6 il résulte que $(g\circ g^{\#})\circ(f\circ f^{\#})$ et $(g\circ g^{\#})\circ f$ sont définis. En faisant usage de l'associativité (PM) on peut écrire

$$(g \circ g^{\#}) \circ (f \circ f^{\#}) = ((g \circ g^{\#}) \circ f) \circ f^{\#} = g \circ f^{\#}.$$

Soient $g, f \in C$ vérifiant (0_3). On a $g^{\#} \circ f \in C_0$; en effet

$$f^{\#} \circ g = f^{\#} \circ (g \circ (g^{\#} \circ f)) = (f^{\#} \circ g) \circ (f^{\#} \circ g)^{\#},$$

par conséquent

$$f^{\#} \circ g = ((f^{\#} \circ g) \circ (f^{\#} \circ g)^{\#}) \circ (f^{\#} \circ g) = (f^{\#} \circ g) \circ (f^{\#} \circ g).$$

Donc $f^{\#} \circ g = (f^{\#} \circ g)^{\#} = g^{\#} \circ f$. Par suite $g = g \circ (g^{\#} \circ f) = g \circ (f^{\#} \circ g)$.

(0_4) entraîne (0_2). Soit $(g, f) \in C \times C$ vérifiant (0_4). $g^{\#} \circ f$ est défini. En effet, $g \circ f^{\#}$ étant défini à cause de l'axiome (AB) et du lemme 9.6, $(g^{\#} \circ g) \circ f^{\#}$ et $(g^{\#} \circ g) \circ (f^{\#} \circ f)$ sont définis, donc

$$(g^{\#} \circ g) \circ (f^{\#} \circ f) = ((g^{\#} \circ g) \circ f^{\#}) \circ f.$$

En faisant usage de $(AA\,1)$ et $(AA\,2)$ on peut écrire

$$f^{\#} \circ ((g^{\#} \circ g) \circ f^{\#})^{\#} = f^{\#} \circ (f \circ (g^{\#} \circ g)) = f^{\#} \circ g.$$

Or $g = f \circ (g^{\#} \circ g)$, donc

$$g \circ g^{\#} = (f \circ (g^{\#} \circ g)) \circ g^{\#} = f \circ ((g^{\#} \circ g) \circ g^{\#}) = f \circ g^{\#}.$$

Par conséquent $g \circ f^{\#} = (f \circ g^{\#})^{\#} = f \circ g^{\#}$. Par suite

$$g = f \circ (g^{\#} \circ g) = (f \circ g^{\#}) \circ g = (g \circ f^{\#}) \circ g.$$

(0_3) est équivalent à (0_5). En effet,

$$g = g \circ (g^{\#} \circ f) \Longleftrightarrow g^{\#} \circ g = g^{\#} \circ (g \circ (g^{\#} \circ f)) = g^{\#} \circ ((g \circ g^{\#}) \circ f)$$
$$= (g^{\#} \circ (g \circ g^{\#})) \circ f = g^{\#} \circ f.$$

De même (0_4) est équivalent à (0_6).

(0_5) et (0_6) entraînent (1). ∎

LEMME 9.8. *Soit $(C, \circ)$ un pseudogroupoïde. On a :*

(1) Si $e, e' \in C_0$, si $f \in C$, si $f \circ e$ et $e' \circ f$ sont définis, alors $\alpha^{\#}(f) \circ e$ et $e' \circ \beta^{\#}(f)$ sont définis,

$$\alpha^{\#}(f \circ e) = \alpha^{\#}(f) \circ e \quad et \quad \beta^{\#}(e' \circ f) = e' \circ \beta^{\#}(f).$$

(2) Si $f, g \in C$ et si $\alpha^{\#}(g) = \beta^{\#}(f)$, alors

$$\alpha^{\#}(g \circ f) = \alpha^{\#}(f) \quad et \quad \beta^{\#}(g \circ f) = \beta^{\#}(g).$$

DEMONSTRATION. Soit $(f,e) \in C \times C_o$ satisfaisant les hypothèses de (1). Or $f^\# \circ f,\ e \in C_o$, donc

$$\alpha^\#(f \circ e) = (f \circ e)^\# \circ (f \circ e) = (e \circ f^\#) \circ (f \circ e) = e \circ ((f^\# \circ f) \circ e)$$

$$= (e \circ (f^\# \circ f)) \circ e = ((f^\# \circ f) \circ e) \circ e = (f^\# \circ f) \circ e = \alpha^\#(f) \circ e.$$

De même $\beta^\#(e' \circ f) = e' \circ \beta^\#(f)$.

Supposons $\alpha^\#(g) = \beta^\#(f)$, i.e. $g^\# \circ g = f \circ f^\#$. Alors

$$\alpha^\#(g \circ f) = (g \circ f)^\# \circ (g \circ f) = (f^\# \circ g^\#) \circ (g \circ f),$$

mais $g^\# \circ (g \circ f)$ est défini, donc

$$\alpha^\#(g \circ f) = f^\# \circ ((g^\# \circ g) \circ f) = f^\# \circ ((f \circ f^\#) \circ f) = f^\# \circ f.$$

De même $\beta^\#(g \circ f) = \beta^\#(g)$. ■

THEOREME 9.3. *Pour qu'un système multiplicatif $(C, \circ)$ soit un pseudo-groupoïde, il faut et il suffit que $(C, \circ, C_o)$ soit un pseudomonoïde totalement régulier satisfaisant de plus l'axiome suivant :*

(μ_5) Pour tout $f \in C$ il existe g tel que $f \circ g$, $g \circ f$ sont définis,

$$f \circ g = \beta(f) \ \text{ et } \ g \circ f = \alpha(f).$$

De plus la relation d'ordre sous-jacente à un pseudogroupoïde C° est caractérisée de la façon suivante : Si $(g,f) \in C \times C$, on a $g \leq f$ si, et seulement si, le couple (g,f) vérifie une des conditions $(0_1), \dots, (0_6)$ du lemme 9.7.

DEMONSTRATION. Supposons que $(C, \circ)$ est un pseudogroupoïde. Du théorème 9.1 et de (1) du lemme 9.8, il résulte que $(C, \circ)$ vérifie les axiomes $(\mathring{\mu}_1)$ et $(\mathring{\mu}_2)$, donc $(C, \circ)$ est un pseudomonoïde fléché en vertu de la proposition 7.2. Il reste à montrer l'axiome (μ_4). Si $g, f \in C$, du lemme 9.7 on déduit que $g \leq f$ si, et seulement si, (g,f) vérifie (0_2). De (2) du lemme 9.7, il résulte que C° satisfait (μ_4) b.

(I) Si $(g,f), (f,f') \in C^\circ * C^\circ$ et si $g \leq f$, alors $g \circ f' \leq f \circ f'$.

En effet, $g \circ (f' \circ f'^\#)$ est défini. En faisant usage de l'associativité (PM) on peut écrire :

$$g \circ f' = (g \circ (f^\# \circ g)) \circ f' = (g \circ (f^\# \circ g)) \circ ((f' \circ f'^\#) \circ f')$$

$$= ((g \circ (f^\# \circ g)) \circ (f' \circ f'^\#)) \circ f' = (g \circ ((f^\# \circ g) \circ (f' \circ f'^\#))) \circ f'$$

$$= (g \circ ((f' \circ f'^{\#}) \circ (f^{\#} \circ g))) \circ f' = (g \circ (((f' \circ f'^{\#}) \circ f^{\#}) \circ g)) \circ f'$$

$$= (((g \circ (f' \circ f'^{\#}) \circ f^{\#}) \circ g) \circ f' = ((((g \circ f') \circ f'^{\#}) \circ f^{\#}) \circ g) \circ f'$$

$$= (((g \circ f') \circ (f'^{\#} \circ f^{\#})) \circ g) \circ f' = (((g \circ f') \circ (f \circ f')^{\#}) \circ g) \circ f'$$

$$= ((g \circ f') \circ (f \circ f')^{\#}) \circ (g \circ f'),$$

donc $g \circ f' \leq f \circ f'$, puisque (O_1) et (O_2) sont équivalents.

De même on obtient

(II) Si $(f', g), (f', f) \in C^{\circ} * C^{\circ}$ et si $g \leq f$, alors $f' \circ g \leq f' \circ f$.

De (I) et (II) on déduit aisément (μ_4) a.

Réciproquement, supposons que $(C, \circ, C_o)$ est un pseudomonoïde totalement régulier vérifiant en plus l'axiome (μ_5). L'axiome (PG) a est conséquence de l'axiome (μ_5) et des lemmes 7.1 et 9.3. L'axiome (AB) est conséquence de (μ_2) b. Si $f \in C$, notons f^{-1} l'unique élément de C tel que f^{-1} et f sont régulièrement conjugués. Alors $f = (f^{-1})^{-1}$, donc $\alpha(f) = \beta(f^{-1})$ et $\beta(f) = \alpha(f^{-1})$ en vertu de l'axiome (μ_5).

Montrons maintenant l'axiome (PG) b.

Soit $(g, f) \in C^{\circ} * C^{\circ}$; alors $\alpha(g) \circ \beta(f)$ est défini, à cause de l'axiome (μ_2) b. Donc $\beta(f) \circ \alpha(g)$ est défini en vertu du lemme 7.1. Par conséquent $\alpha(f^{-1}) \circ \beta(g^{-1})$ est défini. Par suite $f^{-1} \circ g^{-1}$ est aussi défini en vertu de (μ_2) b. Pour achever la preuve, il suffit de montrer que $g \circ f$ et $f^{-1} \circ g^{-1}$ sont régulièrement conjugués.

Si $(e', f) \in C_o \times C$ et si $e' \circ f$ est défini, alors $e' \circ f \leq f$. En effet, en faisant usage de $(\overset{\circ}{R}g)$, de (μ'_3), de (μ_2) b et de l'associativité (PM), on peut écrire

$$e' \circ f = (e' \circ f) \circ \alpha(e' \circ f) = (e' \circ (\beta(f) \circ f)) \circ \alpha(e' \circ f)$$

$$= ((e' \circ \beta(f)) \circ f) \circ \alpha(e' \circ f) = (\beta(e' \circ f) \circ f) \circ \alpha(e' \circ f).$$

Supposons $g \circ f$ défini, alors $f^{-1} \circ g^{-1}$ est défini, donc $(f \circ f^{-1}) \circ g^{-1}$ est défini. Par conséquent $(f \circ f^{-1}) \circ g^{-1} \leq g^{-1}$, donc $\beta(g^{-1}) \circ \beta(((f \circ f^{-1}) \circ g^{-1}))$ est défini. Or $\beta(g^{-1}) = \alpha(g)$, par suite $g \circ ((f \circ f^{-1}) \circ g^{-1})$ est défini, i.e. $g \circ (f \circ (f^{-1} \circ g^{-1}))$ est défini.

On voit aussi que $(g^{-1} \circ g) \circ f$, $(g^{-1} \circ g) \circ (f \circ f^{-1})$ et $(f \circ f^{-1}) \circ g^{-1}$ sont définis.

En faisant usage de l'associativité (PM), on peut écrire :

$$g\circ f = (g\circ(g^{-1}\circ g))\circ((f\circ f^{-1})\circ f) = g\circ((g^{-1}\circ g)\circ((f\circ f^{-1})\circ f))$$
$$= g\circ(((g^{-1}\circ g)\circ(f\circ f^{-1}))\circ f) = g\circ(((f\circ f^{-1})\circ(g^{-1}\circ g)\circ f))$$
$$= g\circ((f\circ f^{-1})\circ((g^{-1}\circ g)\circ f)) = g\circ((f\circ f^{-1})\circ(g^{-1}\circ(g\circ f)))$$
$$= g\circ(((f\circ f^{-1})\circ g^{-1})\circ(g\circ f)) = g\circ((f\circ(f^{-1}\circ g^{-1}))\circ(g\circ f))$$
$$= (g\circ(f\circ(f^{-1}\circ g^{-1})))\circ(g\circ f) = ((g\circ f)\circ(f^{-1}\circ g^{-1}))\circ(g\circ f).$$

De même on peut écrire :

$$f^{-1}\circ g^{-1} = ((f^{-1}\circ g^{-1})\circ(g\circ f))\circ(f^{-1}\circ g^{-1}). \blacksquare$$

REMARQUE 9.1. La théorie des pseudogroupoïdes quotients peut être développée de façon analogue à celle des demi-groupes inverses quotient (cf. [10]).

10. Un groupoïde est une catégorie telle que tout élément est inversible. Si $C^{\bullet}$ est un groupoïde, on note γ la surjection de C dans C définie par $f \mapsto f^{-1}$. On a $\alpha = \beta\circ\gamma$.

On dit qu'un morphisme ordonné $((\hat{C}, \leq), \varphi, (C, \leq))$ est de classe (σ_e) s'il vérifie la condition suivante :

(σ_e). Pour tout $a \in C$, si $y \leq \varphi(a)$, alors il existe un élément unique x de C tel que $x \leq a$ et $\varphi(x) = y$.

On dira que $(C^{\bullet}, \leq)$ est un *groupoïde ordonné totalement régulier* (= groupoïde fonctoriellement ordonné) si $(C^{\bullet}, \leq)$ est une catégorie ordonnée totalement régulière et $C^{\bullet}$ un groupoïde.

LEMME 10.1. *Soit $C^{\bullet}$ un groupoïde et $\leq$ une relation d'ordre sur C. Les trois conditions ci-dessous sont équivalentes :*

(FO_1) $C^{\bullet}_0$ est héréditaire dans $(C, \leq)$ et $((C, \leq), \kappa^{\bullet}, (C^{\bullet} * C^{\bullet}, \leq))$ est un morphisme ordonné de classe (σ'').

(FO_2) $((C^{\bullet}_0, \leq), \alpha, (C, \leq))$ est un morphisme ordonné de classe (σ_e) et $((C, \leq), \kappa^{\bullet}, (C^{\bullet} * C^{\bullet}, \leq))$, $((C, \leq), \gamma, (C, \leq))$ sont des morphismes ordonnés.

(FO_3) $(C^{\bullet}, \leq)$ est un groupoïde ordonné totalement régulier.

DEMONSTRATION. (FO_1) entraîne (FO_2). $((C_o^\bullet, \leq), \alpha, (C, \leq))$ est un morphisme ordonné. En effet, soient $g, f \in C$. Si $g \leq f = f.\alpha(f)$, alors $g = g'.h$, où $g' \leq f$ et $h \leq \alpha(f)$. Donc $h \in C_o^\bullet$, par conséquent $h = \alpha(g')$. Par suite $g = g'$ et $\alpha(g) = \alpha(g')$ et $\alpha(g') \leq \alpha(f)$.

$((C, \leq), \gamma, (C, \leq))$ est un morphisme ordonné. En effet, si $g \leq f$, alors $\alpha(g) \leq \alpha(f) = f^{-1}.f$, donc $\alpha(g) = h_1.f_1$, où $h_1 \leq f^{-1}$ et $f_1 \leq f$. Par conséquent $g.h_1$ est défini. Donc $g.h_1 \leq f.f^{-1} = \beta(f)$, d'où $g.h_1 \in C_o^\bullet$. Par suite

$$g = g.\alpha(g) = (g.h_1).f_1 = f_1 \text{ et } g.h_1 = \beta(g).$$

Par conséquent $h_1 = g^{-1}$.

$((C_o^\bullet, \leq), \alpha, (C, \leq))$ est de classe (σ_e). En effet, soit $e \in C_o$ tel que $e \leq \alpha(f)$. Alors $e \leq f^{-1}.f$, donc $e = h_1.f_1$, où $h_1 \leq f^{-1}$ et $f_1 \leq f$. Par conséquent $f_1 \leq f$ et $e = \alpha(f_1)$.

Soient $f_1, f_2 \in C$ tels que $f_1, f_2 \leq f$ et $\alpha(f_1) = \alpha(f_2) = e \leq \alpha(f)$. Alors $\beta(f_1^{-1}) = \beta(f_2)$ et $\alpha(f_2) = \beta(f_2^{-1})$. Donc $f_2.f_1^{-1} \leq f.f^{-1} = \beta(f)$, d'où $f_2.f_1^{-1} \in C_o$. Par suite $f_2.f_1^{-1} = \alpha(f_1^{-1}) = \beta(f_2)$, donc $f_1^{-1}.f_2$ est défini et $f_1^{-1}.f_2 = \alpha(f_2) \leq f^{-1}.f$. Par conséquent $f_2.f_1^{-1} = \beta(f_2)$ et $f_1^{-1}.f_2 = \alpha(f_2)$, i.e. $f_1^{-1} = f_2^{-1}$, donc $f_1 = f_2$.

(FO_2) entraîne (FO_1). Supposons $g.f$ défini et $h \leq g.f$. Alors $e = \alpha(h) \leq \alpha(g.f) = \alpha(f)$, $((C_o^\bullet, \leq), \alpha, (C, \leq))$ et $((C_o^\bullet, \leq), \beta, (C, \leq))$ sont de classe (σ_e) puisque $\beta = \gamma \circ \alpha$ et $((C, \leq), \gamma, (C, \leq))$ est un isomorphisme ordonné. Donc il existe un unique $f' \in C$ tel que $f' \leq f$ et $\alpha(f') = e$, $e' = \beta(f') \leq \beta(f) = \alpha(f^{-1})$. Par conséquent il existe un élément unique f' tel que $f' \leq f$, $\alpha(f') = e$ et il existe un unique $g' \in C$ tel que $g' \leq g$ et $\alpha(g') = e' = \beta(f')$. Par suite il existe $g', f' \in C$ tel que $g'.f'$ est défini et $g' \leq g$, $f' \leq f$. Donc $h, g'.f' \leq g.f$, Or

$$\alpha(h) = e = \alpha(f') = \alpha(g'.f') \leq \alpha(g.f) = \alpha(f),$$

donc $h = g'.f'$ puisque $((C_o^\bullet, \leq), \alpha, (C, \leq))$ est de classe (σ_e).

Soit $(h, e) \in C \times C_o$ tel que $h \leq e$. Alors $h^{-1} \leq e$. Or $e = e.e$, donc $\alpha(h) = h^{-1}.h \leq e$. Mais $h, \alpha(h) \leq h^{-1}.h \leq e$ et $\alpha(h) = \alpha^2(h) \leq \alpha(e) = e$. Par suite $h = \alpha(h)$.

L'équivalence entre (FO_1) et (FO_2) entraîne que (FO_2) et (FO_3) sont équivalents. ■

Des théorèmes 8.1, 9.3 et du lemme 9.5 on déduit :

THEOREME 10.1. *Si* $(C^{\bullet}, \leq)$ *est un groupoïde ordonné totalement régulier, alors* $(C, \odot)$ *est un pseudogroupoïde tel que* $C_o = C_o^{\bullet}$. *Si* $(C, \circ)$ *est un pseudogroupoïde, alors il existe un groupoïde unique ordonné totalement régulier* $(C, \bullet, \leq)$ *tel que* $(C, \circledbullet) = (C, \circ)$ *et* $C_o^{\bullet} = C_o$. *Soient* $(\hat{C}^{\bullet}, \leq)$ *et* $(C^{\bullet}, \leq)$ *des groupoïdes ordonnés totalement réguliers et* φ *une surjection de* C *dans* $\hat{C}$; *alors* $((\hat{C}^{\bullet}, \leq), \varphi, (C^{\bullet}, \leq))$ *est un morphisme de groupoïdes ordonnés réguliers si, et seulement si,* $((\hat{C}, \circledbullet), \varphi, (C, \odot))$ *est un morphisme de pseudogroupoïdes.*

BIBLIOGRAPHIE

[1] de BARROS, C.M., Catégories ordonnées régulières, groupoïdes ordonnés réguliers et groupes généralisés, *C.R. Acad. Sc. Paris, Sér. A*, t. 264 (1967), 813-816.

[2] de BARROS, C.M., Quelques structures algébriques définies par des lois de compositions partielles et associatives, *C.R. Acad. Sc. Paris, Sér. A*, t. 265 (1967), 163-166.

[3] CLIFFORD, A.H. and PRESTON, G.B., The algebraic theory of semigroups, vol. 1, 2 (*Math. Surveys*, n° 7, *Amer. Math. Soc.*), Providence, 1961, 1967).

[4] DUBIKAJTIS, L., Certaines extensions de la notion de groupoïde inductif et de celle de pseudogroupe, *Coll. Math.*, t. 12 (1964), 163-185.

[5] EHRESMANN, C., Catégories inductives et pseudogroupes, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, t. 10 (1960), 307-336.

[6] EHRESMANN, C., Groupoïdes sous-inductifs, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, t. 13 (1963), 1-60.

[7] EHRESMANN, C., Catégories ordonnées, holonomie et cohomologie, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, t. 14 (1964), 205-268.

[8] EHRESMANN, C., *Catégories et structures*, Dunod, Paris, 1965.

[9] LJAPIN, E.S., *Semigroups*, Transl. of Math., Monographs, vol. 3, Amer. Math. Soc., Providence, 1963.

[10] TALLINE, G.B., Sulla structura algebrica della transformazioni tra parti di un insieme, *Ann. Math. Pura Appl., Ser. 4*, t. 71 (1966), 295-332.

[11] RINOW, W., Vervollständigung geordneter Kategorien, *Math. Nachr.*, Bd. 33 (1966), 129-175.

Instituto de Matemática,
Universidade Federal Fluminense,
Niteroi, E. do Rio de Janeiro (Brésil).