CAHIERS DE
TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
CATÉGORIQUES

PAUL JAFFARD

Produits fibrés généralisés et associativité des limites projectives

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 10, n° 3 (1968), p. 333-345

<http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1968__10_3_333_0>

CAHIERS DE TOPOLOGIE Vol. X, 3
ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE

PRODUITS FIBRES GENERALISES ET ASSOCIATIVITE DES LIMITES PROJECTIVES

par *Paul JAFFARD*

1. Introduction.

Considérons un foncteur $F : I \to \mathcal{C}$, I désignant une petite catégorie. Pour construire la limite projective de F on peut souvent opérer associativement à partir de limites projectives partielles. Donnons ici trois exemples assez différents :

EXEMPLE 1. $(a_i)_{i \in I}$ étant une famille d'objets de $\mathcal{C}$ et $I = \bigcup_{p \in P} I_p$ étant une partition de I (avec $I_p \neq \emptyset$ $(\forall p \in P)$), supposons que pour tout $p \in P$ les flèches $(\lambda_i^p : L^p \to a_i)_{i \in I_p}$ fassent de L^p le produit direct $\prod_{i \in I_p} a_i$. Supposons d'autre part que les flèches $(\lambda^p : L \to L^p)_{p \in P}$ fassent de L le produit direct $\prod_{p \in P} L^p$. Alors les flèches

$$(\lambda_i^p \lambda^p : L \to a_i)_{(i \in I_p,\, p \in P)}$$

font de L le produit direct $\prod_{i \in I} a_i$.

EXEMPLE 2. Soient l'ensemble $\{h, i, j, k, l\}$ partiellement ordonné par les relations d'ordre

$$h < i < j, \qquad\qquad l < k < j$$

et la catégorie I associée à cet ensemble ordonné. Un foncteur $F : I \to \mathcal{C}$ sera représenté par le diagramme de la figure 1.

(*Fig. 1*)

$$\begin{array}{ccccc} & & & & F(l) \\ & & & & \downarrow g \\ & & & & F(k) \\ & & & & \downarrow f \\ F(h) & \xrightarrow{v} & F(i) & \xrightarrow{u} & F(j) \end{array}$$

Pour construire $\varprojlim F$ on peut envisager en particulier deux méthodes :

1ère méthode. On construit le produit fibré $uv \wedge fg$.

2ème méthode. On construit les produits fibrés :

$$(f', u') = u \wedge f, \qquad (f'', v') = v \wedge f',$$

$$(u'', g') = g \wedge u', \qquad (g'', v'') = v' \wedge g'.$$

(*Fig.* 2)

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, "v''"'] \arrow[d, "g''"] & C \arrow[r, "u''"'] \arrow[d, "g'"] & {} \arrow[d, "g"] \\
B \arrow[r, "v'"] \arrow[d, "f''"] & A \arrow[r, "u'"] \arrow[d, "f'"] & {} \arrow[d, "f"] \\
{} \arrow[r, "v"] & {} \arrow[r, "u"] & {}
\end{tikzcd}$$

La comparaison de ces deux méthodes montre que l'on a

$$(f'' g'', u'' v'') = uv \wedge fg.$$

EXEMPLE 3. Soit la catégorie I telle que :

$Ob\ I = \{h, i, j\}$,

$Hom(x, x) = \{1_x\} \quad (\forall x \in Ob\ I)$,

$Hom(h, i) = \{\alpha, \beta\}$, $Hom(i, j) = \{\gamma, \delta\}$,

$Hom(h, j) = \{\gamma\alpha, \gamma\beta, \delta\alpha, \delta\beta\}$ (les quatre flèches étant distinctes),

$Hom(x, y) = \emptyset$ dans tous les autres cas.

Un foncteur $F : I \to \mathcal{C}$ sera représenté par le diagramme de la figure 3 :

(*Fig.* 3) $$F(h) \overset{s}{\underset{t}{\rightrightarrows}} F(i) \overset{u}{\underset{v}{\rightrightarrows}} F(j)$$

Pour construire $\varprojlim F$ on peut envisager en particulier deux méthodes :

1ère méthode. On construit les noyaux

$$k = Ker(u, v), \qquad k' = Ker(s, t),$$

puis le produit fibré $(f, g) = k \wedge s k'$.

2ème méthode. On construit le noyau

$$k'' = Ker(us, ut, vs, vt),$$

puis le produit fibré $(p, q) = k' \wedge k''$.

(Fig. 4)
$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[rr, "f"] \arrow[d, "g"'] & & {} \arrow[d, "k"] & \\
{} \arrow[r, "k'"] \arrow[d, "p"'] & F(h) \arrow[r, shift left, "s"] \arrow[r, shift right, "t"'] & F(i) \arrow[r, shift left, "u"] \arrow[r, shift right, "v"'] & F(j) \\
{} \arrow[r, "q"'] & {} \arrow[u, "k''"'] & &
\end{tikzcd}$$

On se propose dans ce qui suit de donner un théorème général d'associativité dont se déduiront en particulier tous les exemples précédents. Ce théorème montre d'autre part comment on peut construire effectivement une limite projective $\varprojlim F$ (resp. *finie*, c'est-à-dire telle que $Fl\, I$ soit un ensemble fini) à partir de produits directs (resp. finis) et de noyaux d'ensembles de flèches (resp. de couples de flèches). Nous sommes conduits pour cela à introduire la notion de *produit fibré généralisé*, notion suffisamment générale pour que la construction de toute limite projective puisse se ramener à celle d'un tel produit fibré généralisé, mais cependant suffisamment particulière pour se prêter à des calculs aisés.

Dans ce texte nous ne supposerons nulle part que la catégorie admette des limites projectives d'un certain type. Pour éviter de nous répéter nous supposerons une fois pour toutes que les constructions intermédiaires que nous envisagerons sont possibles. Il en résultera alors l'existence des limites projectives (ou des produits fibrés généralisés) ainsi construits.

Des résultats partiels et d'autres méthodes (moins efficaces) pour calculer les limites projectives ont été exposés dans :

Paul JAFFARD : Sur le calcul des limites projectives. Séminaire Dubreil-Pisot, Fac. Sci. Paris (9 mai 1966).

2. Produits fibrés généralisés.

Nous appellerons *donnée de produit fibré généralisé* dans une catégorie $\mathcal{C}$ la donnée :

1) de deux applications

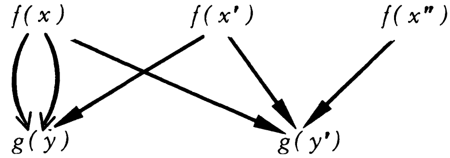
$$f : X \to Ob\,\mathcal{C}, \qquad\qquad g : Y \to Ob\,\mathcal{C},$$

X et Y étant des ensembles et X étant non vide.

2) Pour tout couple $(x, y) \in X \times Y$, d'un sous-ensemble A_{xy} de $Hom\,(f(x), g(y))$.

Une telle donnée sera désignée par $(f, g, (A_{xy})_{(x,y) \in X \times Y})$. Elle sera représentée schématiquement par un diagramme avec des points sur une ligne supérieure correspondant aux éléments de X, des points sur une ligne inférieure correspondant aux éléments de Y et des flèches, représentant les éléments des divers ensembles A_{xy}, ayant pour source un point de la ligne supérieure et pour but un point de la ligne inférieure.

(*Fig.* 5)



Soit $\Phi = (f, g, (A_{xy})_{(x,y) \in X \times Y})$ une donnée de produit fibré dans la catégorie $\mathcal{C}$. On appellera *système* Φ*-adéquat* la donnée $(\lambda_x : L \to f(x))_{x \in X}$ d'une famille de flèches de $\mathcal{C}$ indexée par X ayant toutes la même source L et telles que :

$$(Ad) \quad u \in A_{ay},\ v \in A_{by} \Longrightarrow u\,\lambda_a = v\,\lambda_b \qquad (\forall (a, b, y) \in X \times X \times Y).$$

Les systèmes Φ-adéquats forment une catégorie si on considère qu'une flèche du système Φ-adéquat $(\lambda'_x : L' \to f(x))_{x \in X}$ dans le système Φ-adéquat $(\lambda_x : L \to f(x))_{x \in X}$ est une flèche $k : L' \to L$ telle que

$$\lambda'_x = \lambda_x\, k \qquad (\forall\, x \in X).$$

Si cette catégorie possède un élément final, celui-ci sera dit un *produit fibré généralisé* de donnée Φ.

CAS PARTICULIER 1. Y a un seul élément b et pour tout $x \in X$ l'ensemble A_{xb} a un seul élément $u_x : f(x) \to g(b)$. Un produit fibré généralisé de donnée Φ s'identifie à un produit fibré (ordinaire) $\bigwedge_{x \in X} u_x$ des flèches u_x.

CAS PARTICULIER 2. Chaque ensemble A_{xy} est vide. Un produit fibré généralisé de donnée Φ s'identifie à un produit ordinaire $\prod_{x \in X} f(x)$ des objets $f(x)$.

CAS PARTICULIER 3. X a un seul élément a et Y a un seul élément b. Un produit fibré généralisé de donnée Φ s'identifie à un noyau (ordinaire) $Ker\, A_{ab}$ de l'ensemble de flèches $A_{ab} \subset Hom(f(a), g(b))$.

CAS PARTICULIER 4. Supposons plus généralement X réduit à un seul élément a. Alors la donnée Φ sera dite *donnée de noyau généralisé* et un produit fibré généralisé de donnée Φ sera dit un *noyau généralisé* de donnée Φ.

Deux données de produit fibré généralisé dans $\mathcal{C}$,

$$\Phi = (f, g, (A_{xy})_{(x,y) \in X \times Y}),$$
$$\Phi' = (f', g', (A'_{xy})_{(x,y) \in X' \times Y'})$$

seront dites *équivalentes* si, d'une part,

$$X = X' \quad \text{et} \quad f = f'$$

et, d'autre part :

Tout système Φ-adéquat est un système Φ'-adéquat et réciproquement. Lorsqu'il en est ainsi Φ et Φ' ont évidemment mêmes produits fibrés généralisés. Pour désigner Φ nous emploierons souvent la notation $(f(x), (A_{xy})_{(x,y) \in X \times Y})$ qui détermine Φ à une équivalence près.

THEOREME 1. *La construction d'une limite projective peut se ramener à celle d'un produit fibré généralisé et réciproquement.*

I étant une petite catégorie, soit un foncteur $F : I \to \mathcal{C}$. On peut lui associer une donnée de produit fibré généralisé

$$\Phi = (f, g, (A_{xy})_{(x,y) \in X \times Y})$$

de la façon suivante :

On prend pour X un sous-ensemble de $Ob\, I$ tel que :

$$\forall i \in Ob\, I \quad \exists x \in X \text{ avec } Hom(x, i) \neq \emptyset.$$

(Un tel ensemble existe toujours et en général de bien des façons. On peut prendre par exemple $X = Ob\, I$).

On prend pour Y l'ensemble $Ob\, I$.

On prend :

$f : x \rightsquigarrow F(x)$, $g : y \rightsquigarrow F(y)$, $A_{xy} = (F(u))_{u \in Hom(x,y)}$.

Soit alors un F-cône projectif $\lambda = (\lambda_i : L \to F(i))_{i \in Ob\, I}$. Les flèches $(\lambda_x : L \to F(x))_{x \in X}$ définissent un système Φ-adéquat noté $S(\lambda)$ et l'application $\lambda \rightsquigarrow S(\lambda)$ se prolonge naturellement en un foncteur S de la catégorie des F-cônes projectifs dans celle des systèmes Φ- adéquats. Le foncteur S est un isomorphisme qui admet pour inverse le foncteur T ainsi défini : Soit un système Φ-adéquat $\mu = (\mu_x : M \to F(x))_{x \in X}$. Etant donné $i \in Ob\, I$, choisissons $x \in X$ tel que $Hom(x,i) \neq \emptyset$ et $u \in Hom(x,i)$. La flèche $F(u)\,\mu_x$ qui ne dépend que de i sera notée λ_i. On voit alors que $(\lambda_i : L \to F(i))_{i \in Ob\, I}$ est un F-cône projectif qui est précisément $T(\mu)$.

La construction d'une limite projective du foncteur F revient donc à celle d'un produit fibré généralisé de donnée Φ.

Réciproquement on voit facilement que la construction d'un produit fibré généralisé peut toujours se ramener à celle d'une limite projective.

3. Le théorème d'associativité.

Soit une donnée de produit fibré généralisé dans la catégorie $\mathcal{C}$:

$$\Phi = (f, g, (A_{xy})_{(x,y) \in X \times Y}).$$

Nous appellerons *sous-donnée* de Φ toute donnée de produit fibré généralisé dans $\mathcal{C}$,

$$\Phi' = (f', g', (A'_{xy})_{(x,y) \in X' \times Y'}),$$

telle que

$$\begin{cases} X' \subset X, \quad Y' \subset Y, \\ f' \text{ est la restriction de } f \text{ à } X', \\ g' \text{ est la restriction de } g \text{ à } Y', \\ A'_{xy} \subset A_{xy} \quad (\forall (x,y) \in X' \times Y'). \end{cases}$$

A tout élément ι d'un ensemble I, associons une sous-donnée

$$\Phi^\iota = (f^\iota, g^\iota, (A^\iota_{xy})_{(x,y) \in X^\iota \times Y^\iota})$$

de $\Phi = (f, g, (A_{xy})_{(x,y) \in X \times Y})$. La famille $(\Phi^\iota)_{\iota \in I}$ sera dite *recouvrir* la donnée Φ si les deux conditions suivantes sont réalisées :

1) $X = \bigcup_{\iota \in I} X^{\iota}$;

2) $\forall (x, y) \in X \times Y$ et $\forall u \in A_{x,y}$, il existe $\iota \in I$ tel que

$$x \in X^{\iota}, \quad y \in Y^{\iota} \quad \text{et} \quad u \in A^{\iota}_{xy}.$$

On a alors le

THEOREME 2. *(Théorème d'associativité). Soient :*

1) La donnée de produit fibré généralisé dans $\mathcal{C}$ *:*

$$\Phi = (f, g, (A_{xy})_{(x,y) \in X \times Y}).$$

2) Un ensemble $(\Phi^{\iota})_{\iota \in I}$ *de sous-données recouvrant* Φ *:*

$$\Phi^{\iota} = (f^{\iota}, g^{\iota}, (A^{\iota}_{xy})_{(x,y) \in X^{\iota} \times Y^{\iota}}).$$

3) Pour tout $\iota \in I$ *un produit fibré généralisé de donnée* Φ^{ι} *:*

$$(\lambda^{\iota}_x : L^{\iota} \to f(x))_{x \in X^{\iota}}.$$

4) La donnée de produit fibré généralisé

$$\Psi = (L^{\iota}, (B_{\iota z})_{(\iota, z) \in I \times (X \amalg Y)})$$

ainsi définie : En notant $s_1 : X \to X \amalg Y$ *et* $s_2 : Y \to X \amalg Y$ *les applications canoniques de* X *et* Y *dans leur somme directe, on posera :*

$$B_{\iota, s_1(x)} = \begin{cases} \{\lambda^{\iota}_x\} & si\ x \in X^{\iota} \\ \emptyset & si\ x \notin X^{\iota} \end{cases}$$

$$B_{\iota, s_2(y)} = (u \lambda^{\iota}_x)_{(x \in X^{\iota},\, u \in A^{\iota}_{xy})}.$$

5) Un produit fibré généralisé $(\lambda^{\iota} : M \to L^{\iota})_{\iota \in I}$ *de donnée* Ψ. *Alors pour tout* $x \in X$ *la flèche* $\mu_x = \lambda^{\iota}_x \lambda^{\iota}$ *ne dépend pas de l'indice* ι *tel que* $x \in X^{\iota}$ *et la famille* $\mu = (\mu_x : M \to f(x))_{x \in X}$ *est un produit fibré généralisé de donnée* Φ.

La vérification de ce théorème se fait sans difficulté.

La donnée de produit fibré généralisé Ψ sera dite obtenue à partir de la donnée Φ en *contractant* les données $(\Phi^{\iota})_{\iota \in I}$.

4. Exemples.

Montrons comment les divers exemples indiqués au § 1 peuvent se déduire des théorèmes 1 et 2.

EXEMPLE 1. Déduction évidente.

EXEMPLE 2.

1ère méthode. Pour construire $\varprojlim F$ on applique le théorème 1 en prenant $X = \{ h, l \}$. La donnée de produit fibré généralisé obtenue Φ est représentée par le diagramme de la figure 6:

$$\begin{tikzcd}
 & F(h) \arrow[dl, "1_{F(h)}"'] \arrow[d, "v"] \arrow[dr, "uv"] & & F(l) \arrow[dl, "gf"'] \arrow[d, "g"] \arrow[dr, "1_{F(l)}"] & \\
F(h) & F(i) & F(j) & F(k) & F(l).
\end{tikzcd}$$

Φ est une donnée équivalente à la donnée Φ' obtenue en supprimant les flèches $1_{F(h)}$, v, g et $1_{F(l)}$ sur la figure 6. Or Φ' admet comme produit fibré généralisé le produit fibré $uv \wedge gf$.

2ème méthode. On applique le théorème 1 en prenant $X = \{ h, i, k, l \}$. La donnée de produit fibré généralisé obtenue est équivalente à la donnée Φ représentée sur la figure 7 :

$$\begin{tikzcd}
F(h) \arrow[dr, "v"'] & & F(i) \arrow[dl, "1_{F(i)}"] \arrow[dr, "u"] & & F(k) \arrow[dl, "f"] \arrow[dr, "1_{F(k)}"] & & F(l) \arrow[dl, "g"] \\
 & F(i) & & F(j) & & F(k) &
\end{tikzcd}$$

Recouvrons Φ par les trois données indiquées sur la figure 8 :

$$\begin{tikzcd}
F(h) \arrow[d, "v"] & & F(i) \arrow[dl, "1_{F(i)}"'] \arrow[d, "u"] & F(k) \arrow[dl, "f"] \arrow[d, "1_{F(k)}"] & F(l) \arrow[d, "g"] \\
F(i) & F(i) & F(j) & F(k) & F(k).
\end{tikzcd}$$

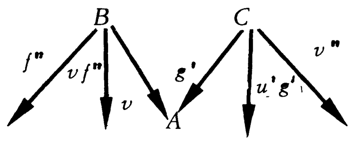
La donnée contractée obtenue est équivalente à la donnée Ψ indiquée sur la figure 9 :

$$\begin{tikzcd}
F(h) \arrow[dr, "v"'] & & A \arrow[dl, "f'"'] \arrow[dr, "u'"] & & F(l) \arrow[dl, "g"] \\
 & F(i) & & F(k) &
\end{tikzcd}$$

Recouvrons Ψ par les deux données indiquées sur la figure 10 :

$$\begin{tikzcd} F(h) \arrow[dr, "v"'] & & A \arrow[dl, "f'"] \\ & F(i) & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[dr, "u'"] & & F(l) \arrow[dl, "g"] \\ & F(k) & \end{tikzcd}$$

La donnée contractée obtenue indiquée sur la figure 11

(*Fig. 11*) 

admet pour produit fibré généralisé le produit fibré $v' \wedge g'$. D'où la deuxième méthode.

EXEMPLE 3.

1ère méthode. On applique le théorème 1 en prenant $X = \{h, i\}$. On est conduit à une donnée qui est équivalente à la donnée Φ indiquée sur la figure 12 :

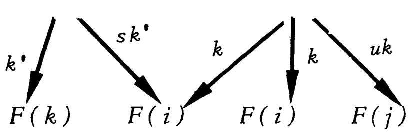
$$\begin{tikzcd} F(k) \arrow[d, shift right, "s"'] \arrow[d, shift left, "t"] & F(i) \arrow[dl, "1_{F(i)}"'] \arrow[d, shift right, "u"'] \arrow[d, shift left, "v"] \\ F(i) & F(j). \end{tikzcd}$$

En recouvrant Φ par les deux données indiquées sur la figure 13 ,

(*Fig. 13*)

$$\begin{tikzcd} F(k) \arrow[d, shift right, "s"'] \arrow[d, shift left, "t"] \\ F(i) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & F(i) \arrow[dl, "1_{F(i)}"'] \arrow[d, shift right, "u"'] \arrow[d, shift left, "v"] \\ F(i) & F(j) \end{tikzcd}$$

on est conduit à la donnée contractée indiquée sur la figure 14,

(*Fig. 14*) 

laquelle a pour produit fibré généralisé le produit fibré $sk' \wedge k$.

2ème méthode. On applique le théorème 1 en prenant $X = \{ b \}$. On est conduit à la donnée de noyau généralisé indiquée sur la figure 15 :

$$\begin{tikzcd}
 & F(b) \arrow[dl, "1_{F(b)}"'] \arrow[d, shift right=2, bend right, "s"'] \arrow[d, shift left=2, bend left, "t"] \arrow[dr, bend left=60, "us"] \arrow[dr, bend left=40, "ut"] \arrow[dr, bend left=20, "vs"] \arrow[dr, "vt"'] & \\
F(b) & F(i) & F(j)
\end{tikzcd}$$

Cette donnée est équivalente à celle obtenue en supprimant la flèche $1_{F(b)}$ sur la figure 15. Le théorème 4 exposé au paragraphe suivant conduira alors immédiatement au résultat annoncé au § 1.

5. Calcul des produits fibrés généralisés.

THEOREME 3. *Soit* $\Phi = (f(x), (A_{xy})_{(x,y) \in X \times Y})$ *une donnée de produit fibré généralisé. A tout couple* $(x, y) \in X \times Y$ *associons un sous-ensemble* A'_{xy} *de* A_{xy} *et soit* $(\lambda'_x : L' \to f(x))_{x \in X}$ *un produit fibré généralisé de donnée* $\Phi' = (f(x), (A'_{xy})_{(x,y) \in X \times Y})$. *Pour tout* $y \in Y$ *posons* $B_y =$ $= (u \lambda'_x)_{x \in X,\, u \in A_{xy}}$. *Soit* $k : L \to L'$ *un noyau généralisé de donnée* $\Xi = (L', (B_y)_{y \in Y})$. *Alors la famille* $(\lambda_x = \lambda'_x k : L \to f(x))_{x \in X}$ *est un produit fibré généralisé de donnée* Φ.

Ce théorème se vérifie directement sans difficulté. On peut également le déduire du théorème 2 de la façon suivante : Reprenons les notations du théorème 2 et posons $I = \{\omega\} \amalg V$ avec $V = \coprod_{(x,y) \in X \times Y} A_{xy}$. En notant encore ω l'élément de V correspondant à $\{\omega\}$, on posera $\Phi^{\omega} = \Phi'$. Etant donnés $(a, b) \in X \times Y$ et $v \in A_{ab}$, nous noterons (a, b, v) l'élément correspondant de I. On posera

$$\Phi^{(a,b,v)} = (f(a), \{v\}_{(x,y) \in \{a\} \times \{b\}}),$$

de telle sorte que la flèche unité $1_{f(a)}$ est produit fibré généralisé de donnée $\Phi^{(a,b,v)}$.

Il est alors facile de voir que l'on définit un isomorphisme de la catégorie des systèmes Ψ-adéquats sur celle des systèmes Ξ-adéquats de la façon suivante :

Au système Ψ-adéquat $(\mu_\iota : M \to L^\iota)_{\iota \in I}$ correspond la flèche Ξ-adéquate $\mu_\omega : M \to L^\omega = L'$.

A la flèche Ξ-adéquate $\mu : M \to L'$ correspond le système Ψ-adéquat $(\mu_\iota : M \to L^\iota)_{\iota \in I}$ ainsi défini :

$$\mu_\omega = \mu, \quad \mu_\iota = \lambda'_a \mu \quad \text{si} \quad \iota = (a, b, v).$$

D'où le théorème.

Faisons en particulier dans le théorème précédent

$$A'_{xy} = \emptyset \quad (\forall (x, y) \in X \times Y).$$

Le produit fibré généralisé de donnée Φ' s'identifie alors au produit ordinaire $\prod_{x \in X} f(x)$. On saura donc construire tout produit fibré généralisé dans la catégorie $\mathcal{C}$ si on sait construire dans cette catégorie les produits et les noyaux généralisés. En appliquant ceci au cas particulier 1 du § 2 on retrouve le résultat bien connu : Si on peut construire les produits et les noyaux, on peut construire les produits fibrés.

Ce qui précède montre le rôle joué par les noyaux généralisés. Or :

THEOREME 4. *Soient $\Phi = (a, (A_y)_{y \in Y})$ une donnée de noyau généralisé et pour tout $y \in Y$ un noyau (ordinaire) $k_y : L^y \to a$ de A_y. Soit d'autre part $(p_y : M \to L_y)_{y \in Y}$ un produit fibré des flèches k_y. Alors la flèche $k = k_y p_y$ (qui ne dépend pas de y) est un noyau généralisé de donnée Φ.*

On se ramène au théorème 2 en posant

$$I = Y, \qquad \Phi^y = (a, A_y).$$

On voit alors facilement que la donnée contractée Ψ est équivalente à la donnée de produit fibré $(L^y, (\{k_y\})_{y \in Y})$. D'où le théorème.

Il résulte des théorèmes 3 et 4 que, si dans la catégorie $\mathcal{C}$ on peut construire des noyaux ordinaires et des produits, on pourra construire des produits fibrés généralisés et, en fin de compte, la limite projective de n'importe quel foncteur $F : I \to \mathcal{C}$ (I étant une petite catégorie).

THEOREME 5. *Soient dans une catégorie $\mathcal{C}$:*

1) $A \subset Hom(a, b)$ un ensemble de flèches de source a et de but b.

2) Une partition $A = \bigcup_{p \in P} A_p$ de A $(A_p \neq \emptyset \ \forall p)$.

3) Pour tout $p \in P$ un noyau $k_p : L^p \to a$ de A_p.

4) Un produit fibré $(s_p : L \to L^p)_{p \in P}$ de la famille $(k_p)_{p \in P}$.

5) La flèche $t = k_p s_p : L \to a$ *(qui ne dépend pas de* p*).*

6) Pour tout $p \in P$ *la flèche (qui ne dépend que de* p*) :*

$$t_p = u k_p s_p = u t \quad \text{avec} \quad u \in A_p .$$

7) Le noyau $s = Ker((t_p)_{p \in P}) : M \to L$.

Alors la flèche $k = ts$ *est un noyau de* A.

Le noyau $Ker\, A$ est le produit fibré généralisé de donnée $\Phi = (a, A) = (f, g, (A_{xy})_{(x,y) \in X \times Y})$ avec $X = \{\alpha\}$, $Y = \{\beta\}$, $f : \alpha \rightsquigarrow a$, $g : \beta \rightsquigarrow b$, $A_{\alpha\beta} = A$. Nous supposerons $\alpha \neq \beta$ pour pouvoir poser $X \amalg Y = \{\alpha, \beta\}$. Les sous-données $\Phi^p = (a, A_p)$ recouvrant Φ, le théorème 2 conduit à la donnée contractée

$$\Psi = (L^p, (C_{py})_{(p,y) \in P \times \{\alpha, \beta\}}) \qquad \text{avec}$$

$$C_{p\alpha} = \{k_p\}, \qquad C_{p\beta} = \{u_p\},$$

u_p désignant la flèche uk_p $(u \in A_p)$ qui ne dépend que de p. La sous-donnée Ψ' de Ψ définie par

$$\Psi' = (L^p, (C'_{py})_{(p,y) \in P \times \{\alpha, \beta\}}) \qquad \text{avec}$$

$$C'_{p\alpha} = \{k_p\}, \qquad C'_{p\beta} = \emptyset,$$

a pour produit fibré généralisé $(s_p : L \to L^p)_{p \in P}$. Posons

$$B_\alpha = \{t\}, \qquad B_\beta = (t_p)_{p \in P}.$$

Le théorème 3 appliqué à la donnée Ψ et à sa sous-donnée Ψ' montre que, si k est un noyau généralisé de donnée $\Xi = (L, (B_y)_{y \in \{\alpha, \beta\}})$, la flèche tk est noyau de A. Mais la donnée Ξ étant équivalente à $(L, (B_y)_{y \in \{\beta\}})$ on peut prendre $k = s$, d'où le théorème.

COROLLAIRE. *Si dans la catégorie* $\mathcal{C}$ *on peut construire des produits finis et des noyaux de couples de flèches, on peut construire des noyaux ordinaires* $Ker\, A$ *lorsque l'ensemble* A *est fini.*

On le montre par récurrence sur le nombre des éléments de A en faisant une partition de la forme $A = A' \cup \{u\}$.

Ce corollaire et les théorèmes qui précèdent donnent une démonstration constructive du théorème bien connu : Si la catégorie $\mathcal{C}$ a des produits directs finis et des noyaux de couples de flèches, elle a aussi des limites projectives finies.

On sait d'autre part que, si la catégorie $\mathcal{C}$ a des produits directs et des noyaux de couples de flèches, elle a aussi des limites projectives. On peut alors se demander s'il existe une démonstration constructive de ce dernier théorème analogue à celle que nous avons donnée dans le cas des limites projectives finies. En vertu de ce qui précède, ceci revient à montrer que l'on peut construire un noyau ordinaire $Ker\, A$ (A n'étant pas nécessairement fini) lorsqu'on peut construire des produits (finis ou non) et des noyaux finis.