CAHIERS DE
TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
CATÉGORIQUES

FRANÇOIS FOLTZ

Produit tensoriel généralisé

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 10, nº 3 (1968), p. 301-331

<http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1968__10_3_301_0>

CAHIERS DE TOPOLOGIE *Vol. X, 3*

ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE

PRODUIT TENSORIEL GENERALISE

par François FOLTZ

INTRODUCTION.

Le texte suivant donne une généralisation du produit tensoriel entre modules. Comme dans [3], c'est l'idée de multilinéarité qui est étendue au cas d'un foncteur fidèle vers une catégorie pleine d'applications; le produit tensoriel est alors solution d'un problème universel et possède par suite quelques propriétés à caractère « projectif ».

Notons que le « produit tensoriel entre algèbres » n'est pas un vrai produit tensoriel; il est une somme du point de vue des catégories.

NOTATIONS. Nous nous conformons aux notations et à la terminologie de [1] et [2]. En particulier :

- Une catégorie est notée $C^{\bullet}$, où « . » est sa loi de composition. On identifie généralement la classe de ses unités $C^{\bullet}_{o}$ à la classe de ses objets; α et β désignent les applications source et but, $C^{\bullet}_{\gamma}$ le groupoïde des inversibles de $C^{\bullet}$. Si e et e' sont des unités de $C^{\bullet}$, $e \,.\, C^{\bullet} \,.\, e'$ désigne la classe des morphismes de source e' et de but e.

- Si $C^{\bullet}$ admet un foncteur produit naturalisé (Π, π) et si $(e_i)_{i \in I}$ est une famille d'unités de $C^{\bullet}$,

$$\pi_{i \in I}(e_i) = (\prod_{i \in I} e_i, (\rho_i)_{i \in I}),$$

où $\prod_{i \in I} e_i$ est le produit de la famille $(e_i)_{i \in I}$ et ρ_i est la $i^{\text{ème}}$-projection canonique.

- Si $(\overline{C}^{\bullet}, C^{\bullet})$ est un couple de catégories d'opérateurs sur une classe S, la catégorie joint $H^{\bullet}$ de $\overline{C}^{\bullet}$ et $C^{\bullet}$ par S admet pour classe sous-jacente la réunion disjointe de $\overline{C}$, S et C, pour sous-catégories pleines $\overline{C}^{\bullet}$ et $C^{\bullet}$, la composition entre éléments de S et C (resp. et $\overline{C}$) correspond au fait que $C^{\bullet}$ (resp. $\overline{C}^{\bullet}$) opère sur S. Un $(C, H^{\bullet})$-projecteur est un élément h de S tel que les relations $h' \in S$ et $\alpha(h') = \alpha(h)$ entraînent l'existence et l'unicité d'un élément $g \in C$ vérifiant $h' = g \cdot h$.

- $\mathfrak{N}(\overline{C}^{\bullet}, C^{\bullet})^{\boxdot}$ désigne la catégorie des transformations naturelles de $C^{\bullet}$ vers $\overline{C}^{\bullet}$, dont les éléments sont les foncteurs de $C^{\bullet}$ vers $\boxminus \overline{C}^{\bullet}$; $\boxminus\, \overline{C}^{\bullet}$ désigne la catégorie des quatuors (ou « carrés cartésiens ») de $\overline{C}^{\bullet}$, munie de la loi longitudinale. Une limite inductive s'identifie à un $(\overline{C}, \mathfrak{N}(\overline{C}^{\bullet}, C^{\bullet})^{\boxdot})$-projecteur, où les transformations naturelles constantes sont identifiées aux éléments de $\overline{C}$.

- Un foncteur p de $C^{\bullet}$ vers $\overline{C}^{\bullet}$ est noté $(\overline{C}^{\bullet}, \underline{p}, C^{\bullet})$, où $\underline{p}$ est une surjection de C sur une sous-classe de $\overline{C}$.

- Soit $p = (\mathfrak{M}, \underline{p}, C^{\bullet})$ un foncteur, où $\mathfrak{M}$ est une catégorie pleine d'applications. Supposons que e appartienne à $C_o^{\bullet}$, que r soit une relation d'équivalence sur $\underline{p}(e)$, que $\tilde{r}$ soit la surjection associée à r. On dit que $e' \in C_o^{\bullet}$ est une p-structure quasi-quotient de e par r s'il existe $j \in e' . C^{\bullet} . e$ et $k \in \mathfrak{M}$ vérifiant :

a) $\underline{p}(j) = k . \tilde{r}$.

b) Pour tout $h \in C^{\bullet} . e$ tel que $\underline{p}(h) = h' . \tilde{r}$, il existe un h' unique dans C vérifiant $h = h' . j$.

Alors $(k, \underline{p}(e'), \tilde{r}, j)$ est appelé un p^{r}-projecteur.

1. Définitions.

Désignons par $\mathfrak{M}$ une catégorie pleine d'applications, ayant pour classe d'objets un univers $\mathfrak{M}_o$, et par (Π, π) son foncteur produit naturalisé canonique [2] .

Soient I une classe de $\mathfrak{M}_o$, $p = (\mathfrak{M}, \underline{p}, C^{\bullet})$ un foncteur fidèle, e un élément de $C_o^{\bullet}$ et $(e_i)_{i \in I}$ une famille de $C_o^{\bullet}$.

DEFINITION. *Un élément* $f = (\underline{p}(e), \underline{f}, \prod_{i \in I} \underline{p}(e_i))$ *de* $\mathfrak{M}$ *est dit* p-concordant pour $(e; (e_i)_{i \in I})$ *si, pour tout* $\overline{i}$ *dans* I *et pour tout*

$u=(x_i)_{i\in J}$ dans $N_{\bar{i}}=\prod_{i\in J}\underline{p}(e_i)$, où $J=I-\bar{i}$ *), il existe $\bar{f}^u$ dans $e.C^{\bullet}.e_{\bar{i}}$ tel que $\underline{p}(\bar{f}^u)$ soit l'application partielle

$$(\underline{p}(e),\ \underline{f}^u,\ \underline{p}(e_{\bar{i}}))=f^u, \quad \text{où} \quad \underline{f}^u(x)=\underline{f}(u\underset{i}{\vee}x),$$

$u\underset{i}{\vee}x$ représentant $(x_i)_{i\in I}$ où $x_{\bar{i}}=x$.

Soient $q=(C^{\bullet},\underline{q},\hat{C}^{\bullet})$ un foncteur et $(q_i)_{i\in I}$ une famille de foncteurs $((C^{\bullet},\underline{q}_i,\hat{C}_i^{\bullet}))_{i\in I}$. Posons $A=(p;\ q,\ (q_i)_{i\in I})$ et notons S_A la classe des triplets $\hat{f}=(\hat{e},\ \underline{f},\ (\hat{e}_i)_{i\in I})$ vérifiant :

a) $\hat{e}\in\hat{C}_o^{\bullet}$ et $\hat{e}_i\in(\hat{C}_i^{\bullet})_o$, pour tout $i\in I$.

b) $f=(\underline{p}.\underline{q}(\hat{e}),\ \underline{f},\ \prod_{i\in I}\underline{p}.\underline{q}_i(\hat{e}_i))'$ est une application p-concordante pour $(\underline{q}(\hat{e});\ (\underline{q}_i(\hat{e}_i))_{i\in I})$.

Si $\tilde{\prod}_{i\in I}\hat{C}_i^{\bullet}$ désigne le produit canonique de la famille $(\hat{C}_i^{\bullet})_{i\in I}$ de catégories, $(\hat{C}^{\bullet},\ \tilde{\prod}_{i\in I}\hat{C}_i^{\bullet})$ est un couple de catégories d'opérateurs sur la classe S_A pour les lois :

a) $\hat{g}.\hat{f}=(\beta(\hat{g}),\ \underline{p}.\underline{q}(\hat{g}).\underline{f},\ (\hat{e}_i)_{i\in I})$ si, et seulement si, $\alpha(\hat{g})=\hat{e}$.

b) $\hat{f}.(\hat{g}_i)_{i\in I}=(\hat{e},\ \underline{f}.\prod_{i\in I}\underline{p}.\underline{q}_i(\hat{g}_i),\ (\alpha(\hat{g}_i))_{i\in I})$ si, et seulement si, $\beta(\hat{g}_i)=\hat{e}_i$, pour tout $i\in I$.

Soient S' une sous- classe de S_A, stable pour ces lois et $T_{(S',A)}$ la catégorie-joint par S' des catégories $\hat{C}^{\bullet}$ et $\tilde{\prod}_{i\in I}\hat{C}_i^{\bullet}$.

DEFINITION. *Un* $(\hat{C}^{\bullet},\ T_{(S',A)})$*-projecteur* $\hat{f}$ *est dit un* (S',A)-produit tensoriel naturalisé *de* $\alpha(\hat{f})$, *et* $\beta(\hat{f})$ *un produit tensoriel de* $\alpha(\hat{f})$. *On dit que* (S',A) est à produits tensoriels *si* $T_{(S',A)}$ *est à* $\hat{C}^{\bullet}$*-projections* [1].

CONVENTION. Nous remplaçons (S',A) par A, si $S'=S_A$.

Il existe un foncteur $P_I=(\mathfrak{M},\ \underline{P}_I,\ T_{(S',A)})$, dont la restriction à S' est fidèle et admettant $p.q$ et $\prod_{i\in I}.(\tilde{\prod}_{i\in I}p.q_i)$ pour restrictions.

Soient $\mathfrak{M}'_o$ une classe de classes, contenue dans $\mathfrak{M}_o$ et $q'=(C^{\bullet},\ \underline{q}',\ \hat{C}'^{\bullet})$ un foncteur. Posons $B=(p;\ q,\ q')$ et désignons par

*) Pour simplifier, on pose $I-\bar{i}$ au lieu de $I-\{\bar{i}\}$.

$S_B^{\mathfrak{M}'_o}$ la classe réunion des S_A, par $C'^{[\mathfrak{M}'_o]}$ la catégorie somme des catégories $\tilde{\prod_{i \in I}} \hat{C}'^{\bullet}$, où $I \in \mathfrak{M}'_o$ et $A = (p\,;\, q, (q')_{i \in I})$.

CONVENTION. Nous remplaçons B par $(p\,;\, q)$ (resp. par p) si $q = q'$ (resp. si $q = q' = \alpha(p)$).

$(\hat{C}^{\bullet}, \hat{C}'^{[\mathfrak{M}'_o]})$ est un couple de catégories d'opérateurs sur la classe $S_B^{\mathfrak{M}'_o}$, pour les lois :

a) $\hat{g}.(\hat{e}, \underline{f}, (\hat{e}'_i)_{i \in I}) = (\beta(\hat{g}), \underline{p}.\underline{q}(\hat{g}).\underline{f}, (\hat{e}'_i)_{i \in I})$ si, et seulement si, $\alpha(\hat{g}) = \hat{e}$.

b) $(\hat{e}, \underline{f}, (\hat{e}'_i)_{i \in I}).(\hat{g}'_j)_{j \in J} = (\hat{e}, \underline{f}.\prod_{j \in J} \underline{p}.\underline{q}'(\hat{g}'_j), (\alpha(\hat{g}'_j))_{j \in J})$

si, et seulement si, $I = J$ et $\beta(\hat{g}'_j) = \hat{e}'_j$ pour tout j dans J.

Soit $T_B^{\mathfrak{M}'_o}$ la catégorie-joint par $S_B^{\mathfrak{M}'_o}$ des catégories $\hat{C}^{\bullet}$ et $\hat{C}'^{[\mathfrak{M}'_o]}$. Il existe un foncteur $P = (\mathfrak{M}, \underline{P}, T_B^{\mathfrak{M}'_o})$ admettant les foncteurs P_I pour restrictions, où $I \in \mathfrak{M}'_o$. Pour que $\hat{f} = (\hat{e}, \underline{f}, (\hat{e}_i)_{i \in I})$ soit un $(\hat{C}^{\bullet}, T_B^{\mathfrak{M}'_o})$-projecteur, il faut et il suffit que $\hat{f}$ soit un $(\hat{C}^{\bullet}, T_{(p\,;\, q, (q')_{i \in I})})$-projecteur.

DEFINITION. *Un $(\hat{C}^{\bullet}, T_B^{\mathfrak{M}'_o})$-projecteur $\hat{f}$ est dit un B-*produit tensoriel naturalisé *et $\beta(\hat{f})$ un B-produit tensoriel de $\alpha(\hat{f})$. On dit que B* est à $\mathfrak{M}'_o$-produits tensoriels *si $T_B^{\mathfrak{M}'_o}$ est à $\hat{C}^{\bullet}$-projections. Si $\mathfrak{M}'_o$ est la classe de toutes les parties finies des entiers naturels, on dira que B est à* produits tensoriels finis.

NOTATION. $(\boldsymbol{\otimes}, \otimes)$ désigne souvent un foncteur $(\hat{C}^{\bullet}, T_A)$(resp. $(\hat{C}^{\bullet}, T_B^{\mathfrak{M}'_o})$)-projection naturalisé et l'on dit que A (resp. B) admet $(\boldsymbol{\otimes}, \otimes)$ pour foncteur produit (resp. $\mathfrak{M}'_o$-produit) tensoriel naturalisé.

2. Propriétés.

1°) COMMUTATIVITE. Soient I et J deux classes de $\mathfrak{M}_o$, s une bijection de I sur J. Supposons que

$$A = (p\,;\, q, (q_i)_{i \in I}), \qquad A' = (p\,;\, q, (q'_j)_{j \in J})$$

$$\text{et} \quad \underline{q}'_{s(i)} = q_i, \quad \text{pour tout } i \in I.$$

Notons d la bijection de T_A sur $T_{A'}$:

$$\underline{d}((\hat{e}'_i)_{i\in I}) = (\hat{e}_j)_{j\in J}, \text{ où } \hat{e}_{\underline{s}(i)} = \hat{e}'_i.$$

PROPOSITION 1. *Si $v \in (T_A)_o$ admet un A-produit tensoriel $\hat{e}$, $d(v)$ admet un A'-produit tensoriel $\hat{e}'$ et il existe γ dans $\hat{C}^{\bullet}_{\gamma}$ tel que $\alpha(\gamma) = \hat{e}$ et $\beta(\gamma) = \hat{e}'$.*

DEMONSTRATION. Si P' est le foncteur projection vers $\mathfrak{M}$ correspondant à $T_{A'}$, il existe une bijection g de $\underline{P}(v)$ sur $\underline{P}'(\underline{d}(v))$, telle que : Si $\hat{f} = (\hat{e}, \underline{f}, v)$ appartient à S_A (resp. $\hat{f}'_1 = (\hat{e}_1, f'_1, \underline{d}(v))$ à $S_{A'}$), $\hat{f}' = (\hat{e}, \underline{f}.\underline{g}, d(v))$ appartient à $S_{A'}$ (resp. $\hat{f}_1 = (\hat{e}_1, \underline{f}_1.\underline{g}^{-1}, v)$ à S_A). Il existe donc une bijection θ de S_A sur $S_{A'}$ et, si $\hat{f} \in S_A$ et $\hat{h} \in C$, l'on a : $\underline{\theta}(\hat{h}.\hat{f}) = \hat{h}.\underline{\theta}(\hat{f})$. Donc si $\hat{f}$ est un A-produit tensoriel naturalisé, $\underline{\theta}(\hat{f})$ est un A'-produit tensoriel naturalisé et réciproquement.

2°) COMPATIBILITÉ AVEC LES LIMITES INDUCTIVES.

Soient : $A = (p; q, (q_i)_{i\in I})$; $\bar{i}$ un indice déterminé de I; $J = I - \bar{i}$; v un élément $(\hat{e}_i)_{i\in J}$ de $\widetilde{\prod_{i\in J}} \hat{C}^{\bullet}_{i\,o}$; $K^{\bullet}$ une catégorie. Supposons qu'il existe un $(\hat{C}^{\bullet}_{\bar{i}}, \mathfrak{N}(\hat{C}^{\bullet}_{\bar{i}}, K^{\bullet})^{\boxminus})$-projecteur $\psi = (\hat{s}, \tau, \varphi)$ et que A admet un foncteur produit tensoriel naturalisé $(\boldsymbol{\otimes}, \otimes)$. Notons ζ_v le foncteur $(\hat{C}^{\bullet}, \zeta_v, \hat{C}^{\bullet}_{\bar{i}})$, défini par

$$\zeta_v(\hat{h}) = \boldsymbol{\otimes}(\hat{h}_i)_{i\in I}, \text{ où } \hat{h}_{\bar{i}} = \hat{h} \text{ et } \hat{h}_i = \hat{e}_i \text{ si } i \in J,$$

et η_i l'application $(\mathfrak{M}_o, \underline{\eta}_i, \hat{C}^{\bullet}_i)$, définie par :

$$\underline{\eta}_i(\hat{h}) = \beta(\underline{h}), \text{ où } (\beta(h), \underline{h}, \alpha(h)) = \underline{p}.\underline{q}_i(\hat{h}).$$

PROPOSITION 2. *Si $\boxminus\, q_{\bar{i}}.\psi$ est un $(C^{\bullet}, \mathfrak{N}(C^{\bullet}, K^{\bullet})^{\boxminus})$-projecteur et si $\underline{p}.\underline{q}_i(\hat{s}) = \bigcup_{k\in K^{\bullet}_o} \underline{\eta}_{\bar{i}}(\tau(k))$, $\boxminus\, \zeta_v.\psi$ est un $(\hat{C}^{\bullet}, \mathfrak{N}(\hat{C}^{\bullet}, K^{\bullet})^{\boxminus})$-projecteur.*

DEMONSTRATION. Notons $(\hat{h}, v)$ l'élément $(\hat{h}_i)_{i\in I}$ de $\widetilde{\prod_{i\in I}} \hat{C}^{\bullet}_i$ défini par $\hat{h}_{\bar{i}} = \hat{h}$ et $\hat{h}_i = \hat{e}_i$ si $i \in J$; posons $\hat{f}_k = \otimes((\underline{\varphi}(k), v))$, pour tout

$k \in K_o^\bullet$. Désignons par $\psi_1 = (\hat{s}_1, \tau_1, \zeta_v . \varphi)$ un élément de $\mathfrak{N}(\hat{C}^\bullet, K^\bullet)$. Si u est un élément de $\prod_{i \in J} \underline{p} . \underline{q}_i(\hat{e}_i)$, par définition

$$(\underline{q} . \underline{\zeta}_v . \underline{\varphi})(k) . C^\bullet . (\underline{q}_{\bar{i}} . \underline{\varphi})(k)$$

contient un élément $\overline{f}_k^u$ tel que $\underline{p}(\overline{f}_k^u) = f_k^u$, où $f_k = \underline{p}(\hat{f}_k)$. Par suite $\underline{q}(\tau_1(k)) . \overline{f}_k^u$ appartient à $\underline{q}(\hat{s}_1) . C^\bullet . (\underline{q}_{\bar{i}} . \underline{\varphi})(k)$. Supposons $m \in K$, $\alpha(m) = k'$ et $\beta(m) = k''$,

$$(\underline{q} . \underline{\zeta}_v . \underline{\varphi})(m) . \overline{f}_{k'}^u = \overline{f}_{k''}^u . (\underline{q}_{\bar{i}} . \underline{\varphi})(m)$$

et

$$\tau_1(k'') . (\underline{\zeta}_v . \underline{\varphi})(m) = \tau_1(k').$$

Posons, pour tout $k \in K_o^\bullet$,

$$\overline{\tau}^u(k) = \underline{q}(\tau_1(k)) . \overline{f}_k^u .$$

Alors $\overline{\psi} = (\underline{q}(\hat{s}_1), \overline{\tau}^u, q_{\bar{i}} . \varphi)$ appartient à $\mathfrak{N}(C^\bullet, K^\bullet)$. Par hypothèse $\overline{s} = \underline{q}_{\bar{i}}(\hat{s})$ est une limite inductive de $q_{\bar{i}} . \varphi$; il existe donc un $\overline{g}^u$, unique dans $C^\bullet$, tel que : $\overline{g}^u . \boxminus q_{\bar{i}} . \psi = \overline{\psi}$. Soit $g = (\underline{p} . \underline{q}(\hat{s}_1), \underline{g}, \underline{P}((\hat{s}, v)))$ l'application définie par

$$\underline{g}(u \underset{\bar{i}}{\vee} x) = \underline{p}(\overline{g}^u)(x), \quad \text{où } x \in \underline{p}(\overline{s}).$$

Si $x'_{\bar{i}} \in \underline{p}(\overline{s})$, la condition de la proposition entraîne l'existence d'un $k \in K_o^\bullet$ et d'un $x''_{\bar{i}} \in \underline{p} . \underline{q}_{\bar{i}} . \underline{\varphi}(k)$ tels que $x'_{\bar{i}} = (\underline{p} . \underline{q}_{\bar{i}})(\tau(k))(x''_{\bar{i}})$. Donc soient : $i' \in I$ et $i' \neq \bar{i}$, $u' = (x'_i)_{i \in I - i'}$, $u'' = (x''_i)_{i \in I - i'}$, où $x'_i = x_i = x''_i \in \underline{p} . \underline{q}_i(\hat{e}_i)$ pour $i \neq i'$ et $i \neq \bar{i}$. En posant

$$\overline{g}^{u'} = \underline{q}(\tau_1(k)) . \overline{f}_k^{u''},$$

on a $g^{u'} = \underline{p}(\overline{g}^{u'})$. En effet,

$$\underline{p}(\overline{g}^{u'})(x_{i'}) = \underline{p}(\underline{q}_{\bar{i}}(\tau_1(k)) . \overline{f}_k^{u''})(x_{i'}) = \underline{p} . \underline{q}_{\bar{i}}(\tau_1(k)) . \underline{f}_k(u \underset{\bar{i}}{\vee} x''_{\bar{i}}) =$$

$$= \underline{p}(\overline{\tau}^u(k))(x''_{\bar{i}}) = \underline{p}(\overline{g}^u . \underline{q}_{\bar{i}}(\tau(k))(x''_{\bar{i}}) =$$

$$= \underline{g}^u . (\underline{p} . \underline{q}_{\bar{i}}(\tau(k)))(x''_{\bar{i}}) = \underline{g}^{u'}(x'_{\bar{i}}) = \underline{g}^u(x_{i'}).$$

Il en résulte que g est p-concordante pour $(\underline{q}(\hat{s}_1); (q_i(\hat{e}_i))_{i \in I})$, où $\hat{e}_{\bar{i}}$

est égal à $\hat{s}$, et $\hat{g} = (\hat{s}_1, \underline{g}, (\hat{s}, v))$ appartient à S_A.

Il existe donc un élément unique $\hat{\gamma}$ dans $\hat{C}$, tel que $\hat{\gamma}.\hat{f} = \hat{g}$, où $\hat{f} = \otimes((\hat{s}, v))$. Dans T_A, l'on a les relations

$$\hat{\gamma}.\underline{\zeta}_v(\tau(k)).\hat{f}_k = \hat{\gamma}.\hat{f}.((\tau(k), v)) = \hat{g}.((\tau(k), v)) = \tau_1(k).\hat{f}_k,$$

car la restriction de P_I à S_A est fidèle. Donc

$$\hat{\gamma}.\underline{\zeta}_v(\tau(k)) = \tau_1(k) \quad \text{et} \quad \psi_1 = \hat{\gamma}.\boxminus\zeta_v.\psi,$$

en identifiant $\hat{\gamma}$ à une transformation naturelle de foncteurs constants.

Supposons que $\hat{\gamma}' \in \hat{C}$ vérifie $\hat{\gamma}'.\underline{\zeta}_v(\tau(k)) = \tau_1(k)$. Donc, pour tout $k \in K_o^{\bullet}$ et tout u, l'on a :

$$\underline{q}(\hat{\gamma}'.\underline{\zeta}_v(\tau(k))).\overline{f}_k^u = \underline{q}(\hat{\gamma}.\underline{\zeta}_v(\tau(k))).\overline{f}_k^u = \overline{g}^u.\underline{q_{\bar{i}}}(\tau(k)).$$

D'où $\underline{q}(\hat{\gamma}').\overline{f}^u = \underline{q}(\hat{\gamma}).\overline{f}^u$, car $\overline{s}$ est limite inductive de $q_{\bar{i}}.\varphi$. $\underline{P}(\hat{\gamma}'.\hat{f}) = \underline{P}(\hat{\gamma}.\hat{f})$. Comme la restriction de P_I à S_A est fidèle, $\hat{\gamma}'.\hat{f} = \hat{\gamma}.\hat{f}$; donc $\hat{\gamma}' = \hat{\gamma}$ et $\underline{\zeta}_v(\hat{s})$ est limite inductive de $\zeta_v.\varphi$.

COROLLAIRE 1. *Si* $\boxminus q_{\bar{i}}.\psi$ *est un* $(C, \mathfrak{N}(C^{\bullet}, K^{\bullet})^{\boxplus})$*-projecteur, si* $K_o^{\bullet} \in \mathfrak{M}_o$ *et si* p *est à* $\mathfrak{M}_o$*-sommes et à structures quotients faibles,* $\boxminus\zeta_v.\psi$ *est un* $(\hat{C}, \mathfrak{N}(\hat{C}^{\bullet}, K^{\bullet})^{\boxplus})$*-projecteur.*

En effet, avec les notations de la proposition 2, $\overline{s}$ est isomorphe à une p-structure quotient de la somme, pour $k \in K_o^{\bullet}$, des $\underline{q_{\bar{i}}}.\underline{\varphi}(k)$.

COROLLAIRE 2. *Si* $q_{\bar{i}}$ *est compatible avec les limites inductives et si* p *est à* $\mathfrak{M}_o$*-sommes et à structures quotients faibles,* ζ_v *est compatible avec les limites inductives.*

Soit $\mathfrak{J}$ une classe de classes :

COROLLAIRE 3. *Si* $q_{\bar{i}}$ *est à* $\mathfrak{J}$*-sommes (resp. à* $\mathfrak{J}$*-sommes fibrées) et si* p *est à* $\mathfrak{J}$*-sommes (resp. et à structures quotients faibles),* ζ_v *est à* $\mathfrak{J}$*-sommes (resp. à* $\mathfrak{J}$*-sommes fibrées).*

Dans la fin de ce paragraphe supposons que I est une classe finie et que, pour tout $i \in I$, $\psi_i = (\hat{s}_i, \tau_i, \varphi_i)$ est un $(\hat{C}_i, \mathfrak{N}(\hat{C}_i^{\bullet}, K_i^{\bullet})^{\boxplus})$-projecteur :

PROPOSITION 3. *Supposons que, pour tout $i \in I$, $\boxminus q_i . \psi_i$ soit un $(C, \mathfrak{N}(C^\bullet, K_i^\bullet)^{\boxminus})$-projecteur et que $\underline{p} . \underline{q}_i(\hat{s}_i)$ soit égal à la classe $\bigcup_{k \in K_{io}^\bullet} \underline{\eta}_i(\tau_i(k))$; alors $\otimes . \widetilde{\prod_{i \in I}} \varphi_i$ admet $\otimes(\hat{s}_i)_{i \in I}$ pour limite inductive.*

DEMONSTRATION. Elle résulte de la proposition 2 et du fait qu'un foncteur d'un nombre fini de variables, compatible en chaque facteur avec une limite, est compatible avec la famille de ces limites inductives.

COROLLAIRE 1. *Si, pour tout $i \in I$, $\boxminus q_i . \psi_i$ est un $(C, \mathfrak{N}(C^\bullet, K_i^\bullet)^{\boxminus})$-projecteur, si $\underset{\sim}{K}_{io}^\bullet \in \mathfrak{M}_o$ et si p est à $\mathfrak{M}_o$-sommes et à structures quotients faibles, $\otimes . \prod_{i \in I} \varphi_i$ admet $\otimes(\hat{s}_i)_{i \in I}$ pour limite inductive.*

COROLLAIRE 2. *Si, pour tout $i \in I$, q_i est compatible avec les limites inductives, si p est à $\mathfrak{M}_o$-sommes et à structures quotients faibles, $\otimes$ est compatible avec les limites inductives.*

3°) ASSOCIATIVITE. Considérons le cas où $B = (p ; q)$ et supposons que B admet un foncteur $\mathfrak{M}'_o$-produit tensoriel naturalisé $(\boldsymbol{\otimes}, \otimes)$.

PROPOSITION 4. *Soient K une classe finie de $\mathfrak{M}'_o$, $(I_k)_{k \in K}$ une partition de la classe $I \in \mathfrak{M}'_o$ et $(\hat{e}_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de $\hat{C}_o^\bullet$. Si $\underline{P}(\otimes(\hat{e}_{i_k})_{i_k \in I_k})$ est une surjection pour tout $k \in K$, il existe $\hat{\gamma}$ dans $\hat{C}_\gamma^\bullet$ tel que*

$$\alpha(\hat{\gamma}) = \boldsymbol{\otimes}(\boldsymbol{\otimes}(\hat{e}_{i_k})_{i_k \in I_k})_{k \in K} \quad \text{et} \quad \beta(\hat{\gamma}) = \boldsymbol{\otimes}(\hat{e}_i)_{i \in I}.$$

DEMONSTRATION. Posons :

$$\hat{f} = \otimes(\hat{e}_i)_{i \in I}, \quad \underline{P}(\hat{f}) = f, \quad \hat{f}' = \otimes(\boldsymbol{\otimes}(\hat{e}_{i_k})_{i_k \in I_k})_{k \in K}, \quad \underline{P}(\hat{f}') = f',$$

$$\hat{f}_k = \otimes(\hat{e}_{i_k})_{i_k \in I_k}, \quad \underline{P}(\hat{f}_k) = f_k, \quad \beta(\hat{f}) = \hat{e}, \quad \beta(\hat{f}') = \hat{e}', \quad \beta(\hat{f}_k) = \hat{e}_k.$$

Soit φ la bijection canonique de $\prod_{i \in I} \underline{p} . \underline{q}(\hat{e}_i)$ sur $\prod_{k \in K} (\prod_{i_k \in I_k} \underline{p} . \underline{q}(\hat{e}_{i_k}))$.
L'application $g = f' . \prod_{k \in K} f_k . \varphi$ est p-concordante pour $(\underline{q}(\hat{e}') ; (\underline{q}(\hat{e}_i))_{i \in I})$:
En effet, soient $\bar{k}$ un indice déterminé de K, $i_{\bar{k}}$ un indice de $I_{\bar{k}}$,

$$u_1 = (x_i)_{i \in I - i_{\bar{k}}}, \text{ où } x_i \in \underline{p} . \dot{\underline{q}}(\hat{e}_i),$$

$$u = (x_{i_{\bar{k}}})_{i_{\bar{k}} \in I_{\bar{k}} - i_{\bar{k}}} \quad \text{et} \quad V = (\underline{f}_k((x_{i_k})_{i_k \in I_k}))_{k \in K - \bar{k}}.$$

L'on a

$$g^{u_1} = f'^V . f^u_{\overline{k}} = \underline{p}(\overline{f}'^V . \overline{f}^u_{\overline{k}})$$

et g^{u_1} appartient donc à $p(q(\hat{e}').C^{\bullet}.q(\hat{e}_{i_{\overline{k}}}))$. Par suite, il existe un $\hat{\gamma}'$ unique dans $\hat{C}$ tel que $\hat{\overline{\gamma}}'.\hat{f} = \hat{g}$, où $\hat{g}$ est défini par : $g = \underline{P}(\hat{g})$, $\beta(\hat{g}) = \hat{e}'$, $\alpha(\hat{g}) = \alpha(\hat{f})$.

Inversement, soient $U = ((x'_{i_k})_{i_k \in I_k})_{k \in K - \overline{k}}$, $u = (x''_{i_{\overline{k}}})_{i_{\overline{k}} \in I_{\overline{k}}}$ et

$(u \vee U) = (x_i)_{i \in I}$, où $x_{i_{\overline{k}}} = x''_{i_{\overline{k}}}$ et $x_{i_k} = x_{i_k}$ si $i_k \notin I_{\overline{k}}$.

L'application $h^{\overline{k}}_U = (\beta(f), \underline{h}^{\overline{k}}_U, \alpha(f_{\overline{k}}))$ définie par $\underline{h}^{\overline{k}}_U(u) = \underline{f}.\underline{\varphi}^{-1}(u \vee U))$ est p-concordante pour $(\underline{q}(\hat{e});(\underline{q}(\hat{e}_{i_{\overline{k}}}))_{i_{\overline{k}} \in I_{\overline{k}}})$. Il existe donc un $\hat{j}^{\overline{k}}_U$ unique dans $\hat{C}$ tel que :

$$\hat{j}^{\overline{k}}_U . \hat{f}_k = \hat{h}^{\overline{k}}_U, \quad \text{où} \quad \beta(\hat{h}^{\overline{k}}_U) = \hat{e} \quad \text{et} \quad \underline{P}(\hat{h}^{\overline{k}}_U) = h^{\overline{k}}_U .$$

Si U et U' vérifient

$$\prod_{k \in K - \overline{k}} \underline{f}_k(U) = \prod_{k \in K - \overline{k}} \underline{f}_k(U') = V,$$

pour tout $u \in \alpha(f_k)$,

$$\underline{f}.\underline{\varphi}^{-1}((u \vee U)) = \underline{f}.\underline{\varphi}^{-1}((u \vee U')),$$

car K est supposée finie. Il suit que

$$h^{\overline{k}}_U = h^{\overline{k}}_{U'} = h^{\overline{k}}_V \quad \text{et} \quad \hat{j}^{\overline{k}}_U = \hat{j}^{\overline{k}}_{U'} = \hat{j}^{\overline{k}}_V .$$

Donc, comme f_k est supposé surjectif pour tout k, on peut définir une application $(\beta(f), \underline{j}^{\overline{k}}, \alpha(f'))$, notée $j^{\overline{k}}$, en posant $\underline{j}^{\overline{k}}((y_k)_{k \in K}) = \hat{\underline{j}}^{\overline{k}}_V(y_{\overline{k}})$, où V est égal à $(y_k)_{k \in K - \overline{k}}$. Ainsi à tout k correspond une application j^k; mais, K étant finie, toutes ces applications sont identiques à une seule j, p-concordante par construction pour $(\underline{q}(\hat{e});(\underline{q}(\hat{e}_k))_{k \in K})$. Il existe un $\hat{\gamma}$ unique dans $\hat{C}$, vérifiant $\hat{j} = \hat{\gamma}.\hat{f}'$, où $\underline{P}(\hat{j}) = j$ et où $\beta(\hat{j}) = \hat{e}$. De plus

$$\gamma.\gamma'.f = \gamma.f'.\prod_{k \in K} f_k.\varphi = j.\prod_{k \in K} f_k.\varphi = f.\varphi^{-1}.\varphi = f.$$

D'où $\hat{\gamma}.\hat{\gamma}'.\hat{f}=\hat{f}$ et $\hat{\gamma}.\hat{\gamma}'=\beta(\hat{\gamma})$. D'autre part

$$\gamma'.\gamma.f'.\prod_{k\in K} f_k=\gamma'.j.\prod_{k\in K} f_k=\gamma'.f.\varphi^{-1}=f'.{}_{k\in K}f_k.\varphi.\varphi^{-1}=$$
$$=f'.\prod_{k\in K} f_k.$$

Comme les f_k sont surjectives, $\gamma'.\gamma.f'=f'$. Donc $\hat{\gamma}'.\hat{\gamma}=\alpha(\hat{\gamma})$ et $\hat{\gamma}'$ est l'inverse de $\hat{\gamma}$.

COROLLAIRE. *Si $(p;q)$ est à $\{\{1,2\}\}$-produits tensoriels et si, pour tout couple $(\hat{e}',\hat{e}'')$ d'éléments de $\hat{C}^{\bullet}_o$, $\underline{P}(\otimes(\hat{e}',\hat{e}''))$ est une surjection, $(p;q)$ est à produits tensoriels finis.*

3. Existence.

$a^o)$ $A=(p;q,(q_i)_{i\in I})$.

PROPOSITION 5. *Supposons que $(\underline{q}_i(\hat{e}_i))_{i\in I}$ admette un p-produit tensoriel e, où $\hat{e}_i\in\hat{C}^{\bullet}_{io}$ pour tout i dans I. Pour que $(\hat{e}_i)_{i\in I}$ admette un A-produit tensoriel $\hat{e}$, il faut et il suffit que $\hat{e}$ soit une q-structure libre de e.*

DEMONSTRATION. Soit $\hat{f}=(e,f,(q_i(\hat{e}_i))_{i\in I})$ un p-produit tensoriel naturalisé de $\overline{e}=(\underline{q}_i(\hat{e}_i))_{i\in I}$.

Supposons que $\hat{g}=(\hat{e},\underline{g},(\hat{e}_i)_{i\in I})$ soit un A-produit tensoriel naturalisé de $(\hat{e}_i)_{i\in I}$. $\underline{P}(\hat{g})$ est p-concordante pour $(q(\hat{e});\overline{e})$. Il existe un $\overline{g}$ unique dans $C^{\cdot}$, tel que $(\underline{q}(\hat{e}),\underline{g},\overline{e})=\overline{g}.\hat{f}$. Soit $\overline{h}=(q(\hat{e}'),\underline{h},e)$ un élément de C, où $\hat{e}'\in\hat{C}^{\bullet}_o$; $\hat{h}=(\hat{e}',\underline{h}.\underline{f},\alpha(\hat{g}))$ appartient à S_A et il existe un $\hat{j}$ unique dans $\hat{C}$, vérifiant $\hat{j}.\hat{g}=\hat{h}$. Posons $\overline{j}=q(\hat{j})$: l'on a $\overline{j}.\overline{g}.\hat{f}=\overline{h}.\hat{f}$, ou $\overline{j}.\overline{g}=\overline{h}$. Supposons que $\hat{j}'$, élément de $\hat{e}'.\hat{C}^{\bullet}.\hat{e}$, vérifie $\underline{q}(\hat{j}').\overline{g}=\overline{h}$. Alors

$$\underline{q}(\hat{j}').\overline{g}.\hat{f}=\overline{h}.\hat{f}\quad\text{et}\quad\hat{j}'.\hat{g}=\hat{h}=\hat{j}.\hat{g},$$

de sorte que : $\hat{j}'=\hat{j}$. Ainsi $\hat{e}$ est une structure libre de e [3].

Inversement, soit $\langle\overline{g},\hat{e}\rangle$ un q-projecteur de e, où $\hat{e}\in\hat{C}^{\bullet}_o$ et $\overline{g}\in\underline{q}(\hat{e}).C^{\bullet}.e$. Si $\hat{h}=(\hat{e}',\underline{h},(\hat{e}_i)_{i\in I})$ appartient à S_A, $\hat{k}=(\underline{q}(\hat{e}'),\underline{h},\overline{e})$ appartient à S_p; il existe donc un $\overline{h}$, unique dans C, tel que $\hat{k}=\overline{h}.\hat{f}$ et un $\hat{j}$ unique dans $\hat{e}'.C^{\bullet}.\hat{e}$, tel que $\underline{q}(\hat{j}).\overline{g}=\overline{h}$. Or $\hat{g}=(\hat{e},\underline{g}.\underline{f},\overline{e})$ est un élément de S_A et $\underline{P}(\hat{j}.\hat{g}) = \underline{P}(\hat{h})$. Comme la restriction de P à S_A est fidèle, $\hat{j}.\hat{g} = \hat{h}$. Si $\hat{j'}.\hat{g} = \hat{h}$, l'on a : $\underline{q}(\hat{j'}).\overline{g}.\hat{f} = \underline{q}(\hat{j}).\overline{g}.\hat{f} = \hat{k}$. D'où $q(\hat{j'}).\overline{g} = q(\hat{j}).\overline{g}$ et, par définition d'un q-projecteur, $\overline{\hat{j'}} = \hat{j}$. Ainsi $\hat{g}$ est un A-produit tensoriel naturalisé de $(\hat{e}_i)_{i \in I}$.

COROLLAIRE. *Si p est à $\{\{I\}\}$-produits tensoriels et, si q admet un foncteur adjoint à gauche, A est à produits tensoriels.*

$b°)$ $B = p$.

Dans ce paragraphe, supposons que p soit un sous-foncteur de $p' = (\mathfrak{M}, \underline{p}', C'^{\bullet})$, que $C^{\bullet}$ soit une sous-catégorie pleine de $C'^{\bullet}$ et que $C'^{\bullet}$ admette un foncteur $\mathfrak{M}_o$-somme naturalisé $(\amalg, \mu)$.

Soit $(e_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de $C^{\bullet}_o$. Posons : $N_{\overline{i}} = \prod_{i \in J} \underline{p}(e_i)$,

$$\mu_{u \in N_{\overline{i}}} e_{\overline{i}} = (e_{\overline{i}}, (\overline{s}^u)_{u \in N_{\overline{i}}}), \quad \text{où} \quad J = I - \overline{i},$$

$$\mu_{i \in I} \overline{e}_i = (e, (\overline{s}_i)_{i \in I}), \; s_u = \underline{p}'(\overline{s}_i . \overline{s}^u), \quad \text{où } u \text{ appartient à } N_i :$$

THEOREME. (*) *Pour que $(e_i)_{i \in I}$ admette un p-produit tensoriel, il faut et il suffit que e admette une (C, p')-structure quasi-quotient [2] par la relation σ :*

$$\sigma = (\underline{p}'(e), D, \underline{p}'(e)) \quad \textit{et} \quad (\underline{s}_u(x), \underline{s}_{u'}(x')) \in D \quad \textit{si, et seulement}$$
si, $u \underset{i}{\vee} x = u' \underset{i'}{\vee} x'$, *avec* $x \in \underline{p}(e_i)$, $u \in N_i$, $x' \in \underline{p}(e_{i'})$ *et* $u' \in N_{i'}$.

DEMONSTRATION. Soit r la relation d'équivalence sur $\underline{p}'(e)$ engendrée par σ et $\tilde{r}$ la surjection associée à r. Il existe une application

$$k = (\beta(\tilde{r}), \underline{k}, \prod_{i \in I} \underline{p}(e_i)),$$

définie par :

$$\underline{k}((x_i)_{i \in I}) = \underline{\tilde{r}}(\underline{s}_u(x_i)), \quad \text{où } u = (x_i)_{i \in I - \overline{i}}.$$

(*) Les conditions du théorème 3 de [3] assurent, vu le théorème 2 de [3], l'existence de $K^{\bullet}$-limites inductives, où $K^{\bullet} \in \mathfrak{F}_o$, donc de $\mathfrak{M}_o$-sommes, et de p-structures quasi-quotients. Dans beaucoup de cas, ce sont ces conditions qui permettent d'affirmer l'existence de p-produits tensoriels.

Supposons qu'il existe un (C, p'^r)-projecteur $(k', \underline{p}'(e'), \tilde{r}, \overline{j})$ [2] et posons $f = \underline{k}'.\underline{k}$, $j = \underline{p}'(\overline{j})$. Pour tout $u \in N_{\overline{i}}$, l'application f^u est est égale à $\underline{p}'(\overline{j}.\overline{s}_{\overline{i}}.\overline{s}^u)$, car

$$\underline{f}^u(x_{\overline{i}}) = \underline{k}'.\underline{k}(u \underset{\overline{i}}{\vee} x_{\overline{i}}) = \underline{k}'.\underline{\tilde{r}}.\underline{s}_u(x_{\overline{i}}) = \underline{j}.\underline{s}_u(x_{\overline{i}}).$$

Ainsi f est p-concordante pour $(e';(e_i)_{i\in I})$. Posons : $\hat{f} = (e', \underline{f}, (e_i)_{i\in I})$. Soit $\hat{h} = (e'', \underline{h}, \alpha(\hat{f}))$ un élément de $S_p^{\mathfrak{M}_o}$. Par définition, pour tout $\overline{i} \in I$ et tout $u \in N_{\overline{i}}$, il existe $\overline{h}^u$ dans $e''.C^{\bullet}.e_{\overline{i}}$ tel que $\underline{p}'(\overline{h}^u) = h^u$ et, par suite, il existe un $\overline{h}$, unique dans C', tel que $\overline{h}.\overline{s}_{\overline{i}}.\overline{s}^u = \overline{h}^u$, pour tout $\overline{i} \in \overline{I}$ et tout $u \in N_{\overline{i}}$. La relation d'équivalence r_h, associée à $h = \underline{p}'(\overline{h})$, contient σ, donc r. En effet, si $x_i \underset{i}{\vee} u = x'_{i'} \underset{i'}{\vee} u'$, on a

$$\underline{p}'(\overline{h}).\underline{s}_u(x_i) = \underline{h}(x_i \underset{i}{\vee} u) = \underline{h}(x'_{i'} \underset{i'}{\vee} u) = \underline{p}'(\overline{h}).\underline{s}_{u'}(x'_{i'}).$$

Il existe donc un k'' unique dans $\mathfrak{M}$, tel que $k''.\tilde{r} = \underline{p}'(\overline{h})$. D'où l'existence et l'unicité d'un $\overline{g}$ dans C, tel que $\overline{g}.\overline{j} = \overline{h}$. De plus $k''.k = \underline{P}(\hat{h})$. Donc

$$\underline{P}(\hat{h}) = \underline{p}(\overline{g}).k'.k = \underline{p}(\overline{g}).f = \underline{P}(\overline{g}.\hat{f});$$

soit $\hat{h} = \overline{g}.\hat{f}$.

Si $\hat{h} = \overline{g}'.\hat{f}$, alors, pour tout $\overline{i} \in I$ et tout u dans $N_{\overline{i}}$, l'on a : $\overline{g}'.\overline{j}.\overline{s}_{\overline{i}}.\overline{s}^u = \overline{g}.\overline{j}.\overline{s}_{\overline{i}}.\overline{s}^u$; et comme e est une somme, $\overline{g}'.\overline{j} = \overline{g}.\overline{j} = \overline{h}$; ainsi $\overline{g}'$ est identique à $\overline{g}$.

Inversement, soit $\hat{f} = (e', \underline{f}, (e_i)_{i\in I})$ un p-produit tensoriel naturalisé de $(e_i)_{i\in I}$. L'existence des $\overline{f}^u$ entraîne l'existence et l'unicité d'un $\overline{j}$ dans $e'.C'^{\bullet}.e$, vérifiant $\overline{j}.\overline{s}_{\overline{i}}.\overline{s}^u = \overline{f}^u$, pour tout $i \in I$ et tout $u \in N_{\overline{i}}$. D'après ce qui précède, la relation d'équivalence associée à $j = \underline{p}'(\overline{j})$ est compatible avec la relation r. Soit $\overline{h}$ un élément de $e''.C'^{\bullet}.e$, où $e'' \in C_o^{\bullet}$, tel qu'il existe un k'' dans $\mathfrak{M}$ vérifiant $\underline{p}'(\overline{h}) = h = k''.\tilde{r}$. L'application $k''.k$ est p-concordante pour $(e''; \alpha(\hat{f}))$, car $\underline{p}'(\overline{h}.\overline{s}_{\overline{i}}.\overline{s}^u)(x_{\overline{i}})$ est égal à

$$\underline{p}'(\overline{h}).\underline{s}_u(x_{\overline{i}}) = \underline{k}''.\underline{k}(x_{\overline{i}} \underset{\overline{i}}{\vee} u).$$

Soit $\hat{h}$ l'élément $(e'', \underline{k}''.\underline{k}, \alpha(\hat{f}))$ de $S_p^{\mathfrak{M}_o}$. Il existe un $\overline{g}$ unique dans C, tel que $\hat{h} = \overline{g}.\hat{f}$. Pour tout $\overline{i} \in I$ et tout $u \in N_{\overline{i}}$, l'on a : $\overline{g}.\overline{j}.\overline{s_{\overline{i}}}.\overline{s}^u = \overline{h}.\overline{s_{\overline{i}}}.\overline{s}^u$. Donc $\overline{g}.\overline{j} = \overline{h}$.

Si $\overline{g'}.\overline{j} = \overline{h}$, alors $g'.f = k''.k$, où $g' = \underline{p}'(\overline{g'})$ et $f = \underline{P}(\hat{f})$. Donc $\overline{g'}.\hat{f} = \hat{h}$ et $\overline{g'} = \overline{g}$.

COROLLAIRE 1. *Si de plus p' est à $\mathfrak{M}_o$-sommes et si e admet une (C,p')-structure quotient faible* [2] *par σ, $\underline{P}(\hat{f})$ est une surjection.*

DEMONSTRATION. Si p' est à $\mathfrak{M}_o$-sommes, l'application k du théorème est une bijection et, si j est une surjection, f en est aussi une.

COROLLAIRE 2. *Si $C^{\bullet}$ est à $\mathfrak{M}_o$-sommes et si p est à structures quasi-quotients, p est à $\mathfrak{M}_o$-produits tensoriels.*

PROPOSITION 6. *Supposons que $C^{\bullet}$ soit à $\mathfrak{M}_o$-sommes et p à structures quasi-quotients. Soient $(\overline{h}_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de C, telle que $\overline{h}_{\overline{i}}$ soit un p-épimorphisme et $\overline{h}_i$ appartienne à $C^{\bullet}_o$, pour tout $i \in J = I - \overline{i}$, et $\overline{h}$ un p-produit tensoriel de $(\overline{h}_i)_{i \in I}$. Alors, $\beta(\overline{h})$ est une p-structure quasi-quotient de $\alpha(\overline{h})$ par la relation d'équivalence r_h, associée à $h = \underline{p}(\overline{h})$.*

DEMONSTRATION. Soit $(k, \beta(k), \tilde{r}, \overline{j}.\alpha(\overline{h}))$ un p^r-projecteur, où $\tilde{r}$ est la surjection associée à r_h. Il existe un élément unique $\overline{\gamma}$ dans C, vérifiant $\overline{\gamma}.\overline{j} = \overline{h}$.

Soient $\hat{f}$ (resp. $\hat{f'}$) un p-produit tensoriel naturalisé de $(\alpha(\overline{h}_i))_{i \in I}$ (resp. de $(\beta(\overline{h}_i))_{i \in I}$), $\beta(\hat{f}) = \alpha(\overline{h})$, $\beta(\hat{f'}) = \beta(\overline{h})$, $\underline{P}(\hat{f}) = f$, $\underline{P}(\hat{f'}) = f'$, $h_i = \underline{p}(\overline{h}_i)$ et $j' = \underline{p}(\overline{j})$. Si $u \in N_{\overline{i}}$, $x_{\overline{i}} \in \alpha(\overline{h}_{\overline{i}})$, $x'_{\overline{i}} \in \alpha(\overline{h}_{\overline{i}})$ et $\underline{h}_{\overline{i}}(x_{\overline{i}}) = \underline{h}_{\overline{i}}(x'_{\overline{i}})$ l'on a :

$$\underline{j}.\underline{f}(u \underset{\overline{i}}{\vee} x_{\overline{i}}) = \underline{k}.\underline{\tilde{r}}.\underline{f}(u \underset{\overline{i}}{\vee} x_{\overline{i}}) = \underline{k}.\underline{\tilde{r}}.\underline{f}(u \underset{\overline{i}}{\vee} x'_{\overline{i}}) = \underline{j}.\underline{f}(u \underset{\overline{i}}{\vee} x'_{\overline{i}}).$$

Il est une application $l = (\beta(j), \underline{l}, \alpha(f'))$, définie par $\underline{l}(u \underset{\overline{i}}{\vee} \underline{h}_{\hat{\imath}}(x_{\overline{i}})) = \underline{j}.\underline{f}(u \underset{\overline{i}}{\vee} x_{\overline{i}})$. L'application l vérifie : $l^u.h_{\overline{i}} = \underline{p}(\overline{j}.\overline{f}^u)$ et il existe, dans C, un $\overline{l}^u$ unique tel que

$$\overline{j}.\overline{f}^u = \overline{l}^u.\overline{h}_{\overline{i}} \quad \text{et} \quad \underline{p}(\overline{l}^u) = l^u,$$

pour tout u dans $N_{\bar{i}}$. Soient $v \in N_{i'}$, $v' = \prod_{i \in I - i'} \underline{h}_i(v)$, où $i' \neq \bar{i}$: l'application $l^{v'}$ est égale à $j \cdot f^v$, donc à $\underline{p}(\bar{j} \cdot \bar{f}^v)$, et l est p-concordante pour $(\beta(\bar{j}); \alpha(\hat{f}'))$. Posons $\hat{l} = (\beta(\bar{j}), \underline{l}, \alpha(\hat{f}'))$; il existe un $\bar{\gamma}'$ unique dans C tel que $\bar{\gamma}' \cdot \hat{f}' = \hat{l}$.

Soit $\gamma = \underline{p}(\bar{\gamma})$ et $\gamma' = \underline{p}(\bar{\gamma}')$; on a

$$\gamma' \cdot \gamma \cdot j \cdot f = \gamma' \cdot h \cdot f = \gamma' \cdot f' \cdot \prod_{i \in I} h_i = l \cdot \prod_{i \in I} h_i = j \cdot f.$$

D'où $\bar{\gamma}' \cdot \bar{\gamma} \cdot \bar{j} = \bar{j}$, ou encore $\bar{\gamma}' \cdot \bar{\gamma} = \alpha(\bar{\gamma})$. D'autre part $\bar{\gamma} \cdot \bar{\gamma}' \cdot \hat{f}' = \hat{f}'$, car

$$f' \cdot \prod_{i \in I} h_i = h \cdot f = \gamma \cdot j \cdot f = \gamma \cdot l \cdot \prod_{i \in I} h_i = \gamma \cdot \gamma' \cdot f' \cdot \prod_{i \in I} h_i$$

et $\underline{\prod_{i \in I}} h_i$ est une surjection. Donc $\bar{\gamma} \cdot \bar{\gamma}' = \beta(\bar{\gamma})$ et $\bar{\gamma}'$ est l'inverse de $\bar{\gamma}$.

COROLLAIRE. *Avec les hypothèses de la proposition 6, supposons que $\bar{h}_i = \underline{q}_i(\hat{h}_i)$, pour tout $i \in I$, où $A = (p; q, (q_i)_{i \in I})$. Si $(\hat{h}_i)_{i \in I}$ admet un $\underline{A}$-produit tensoriel $\hat{h}$, $\beta(\hat{h})$ est une $p \cdot q$-structure quasi-quotient de $\alpha(\hat{h})$ par la relation $g(r_h)$, où $g = \underline{p}(\bar{g})$ et $\langle \bar{g} \cdot \alpha(\bar{h}), \alpha(\hat{h}) \rangle$ est un q-projecteur* [2].

DEMONSTRATION. En effet, si $(k, e, \tilde{r}, \bar{h})$ est un p^r-projecteur, si $\langle \bar{g}' \cdot \beta(\bar{h}), \beta(\hat{h}) \rangle$ et $\langle \bar{g} \cdot \alpha(\bar{h}), \alpha(\hat{h}) \rangle$ sont deux q-projecteurs et si $\hat{h}$ est une q-projection de $\bar{h}$, $(k', e', \tilde{r}', \hat{h})$ est un $(p \cdot q)^r$-projecteur, où $\tilde{r}'$ est la surjection associée à la relation image par g de la relation d'équivalence associée à r.

PROPOSITION 7. *Supposons p à $\mathfrak{M}_0$-sommes. Si pour tout $i \in I$, $\bar{h}_i$ est un p-épimorphisme, $\bar{h} = \coprod_{i \in I} (\bar{h}_i)$ est un p-épimorphisme. Si $\bar{h}_i \in \bar{e}'' \cdot C^\bullet$, pour tout $i \in I$, où $\bar{e}'' \in C_0^\bullet$, l'élément $\bar{h}'$ de $\bar{e}'' \cdot C^\bullet \cdot \bar{e}$, vérifiant $\bar{h}' \cdot \bar{s}_i = \bar{h}_i$, pour tout $i \in I$, est un p-épimorphisme, où $\coprod_{i \in I} \alpha(\bar{h}_i) = (\bar{e}, (\bar{s}_i)_{i \in I})$.*

DEMONSTRATION. Posons $\coprod_{i \in I} \beta(\bar{h}_i) = (\bar{e}', (\bar{s}'_i)_{i \in I})$. Supposons que $\bar{f} \in C$ vérifie $\alpha(\bar{f}) = \bar{e}$ et $\underline{p}(\bar{f}) = g \cdot \underline{p}(\bar{h})$. Pour tout $i \in I$, il existe un $\bar{g}_i$ unique dans C, vérifiant

$$\underline{p}(\bar{g}_i) = g \cdot \underline{p}(\bar{s}'_i) \quad \text{et} \quad \bar{g}_i \cdot \bar{h}_i = \bar{f} \cdot \bar{s}_i.$$

Il existe aussi un et un seul $\overline{g}$, vérifiant $\overline{g}.\overline{s'_i} = \overline{g}_i$, pour tout $i \in I$. Donc: $\overline{f}.\overline{s}_i = \overline{g}.\overline{s'_i}.\overline{h}_i = \overline{g}.\overline{h}.\overline{s}_i$. On en déduit que $\overline{g}$ est le seul élément de C, vérifiant $\underline{p}(\overline{g}) = g$ et $\overline{g}.\overline{h} = \overline{f}$.

Supposons $\beta(\overline{h}_i) = \overline{e}''$, pour tout $i \in I$. Soit $\overline{f'}$ un élément de C, vérifiant

$$\underline{p}(\overline{f'}) = g'.\underline{p}(\overline{h'}) \quad \text{et} \quad \alpha(\overline{f'}) = \alpha(\overline{h'}).$$

Pour tout $i \in I$, il existe un $\overline{g'_i}$ unique, tel que :

$$\overline{g'_i}.\overline{h}_i = \overline{f'}.\overline{s}_i \quad \text{et} \quad \underline{p}(\overline{g'_i}.\overline{h}_i) = g'.\underline{p}(\overline{h}_i);$$

$\overline{f'}.\overline{s}_i = \overline{g'_i}.\overline{h'}.\overline{s}_i$, donc $\overline{f'} = \overline{g'_i}.\overline{h'}$. Comme $\underline{p}(\overline{h'})$ est une surjection, $\underline{p}(\overline{g'_i}) = g'$, pour tout $i \in I$, et, p étant fidèle, $\overline{h'}$ est un p-épimorphisme.

PROPOSITION 8. *Supposons p à $\mathfrak{M}_o$-sommes et à structures quasi-quotients. Si, pour tout $i \in I$, $\overline{h}_i$ est un p-épimorphisme, et si $\overline{h}$ est un p-produit tensoriel de $(\overline{h}_i)_{i \in I}$, $\beta(\overline{h})$ est une p-structure quasi-quotient de $\alpha(\overline{h})$ par la relation d'équivalence r_h, associée à $h = p(\overline{h})$.*

DEMONSTRATION. En reprenant les notations du théorème précédent, soient : $(e, ((\overline{s}_i.\overline{s}^u)_{u \in N_i})_{i \in I}), \sigma, \tilde{r}$, (resp. $(e', ((\overline{s'_i}.\overline{s}^{u'})_{u' \in N'_i})_{i \in I}), \sigma'$, $\tilde{r}'$), la somme naturalisée, la relation, la surjection engendrée par σ (resp. par σ'), correspondant à $(\alpha(\overline{h}_i))_{i \in I}$ (resp. à $(\beta(\overline{h}))_{i \in I}$). L'élément $\overline{h'}$ de C vérifiant $\overline{s'_{\bar{i}}}.\overline{s}^{u'}.\overline{h}_{\bar{i}} = \overline{h'}.\overline{s}_{\bar{i}}.\overline{s}^u$, pour tout $\bar{i} \in I$ et tout $u \in N_i$ où u' est égal à $\prod_{i \in I - \bar{i}} \underline{h}_i(u)$, est un p-épimorphisme, vue la proposition 7. Soient

$$(k, \beta(k), \tilde{r}, \alpha(\overline{h}).\overline{j}.e), \quad (k', \beta(k'), \tilde{r}', \beta(\overline{h}).\overline{j'}.e')$$
$$\text{et} \quad (k'', \beta(k''), \tilde{r}'', \overline{j''}.\alpha(\overline{h}))$$

des p^r-projecteurs, où $\tilde{r}''$ est la surjection associée à r_h. Supposons x et x' dans $\alpha(\overline{h'})$ et $\underline{h}'(x) = \underline{h}'(x')$:

$$\underline{h}.\underline{j}(x) = \underline{j}'.\underline{h}'(x) = \underline{j}'.\underline{h}'(x') = \underline{h}.\underline{j}(x').$$

Il est une application $l = (\beta(j''), \underline{l}, \alpha(j'))$, définie par $\underline{l}(y) = \underline{j}''.\underline{j}(x)$, où $y = \underline{h}'(x)$. Comme l vérifie $l.h' = j''.j$, il existe un $\overline{l}$ unique dans C, tel que $\overline{l}.\overline{h'} = \overline{j''}.\overline{j}$. Soit h'' l'application vérifiant $h''.\tilde{r} = \tilde{r}'.h'$ et supposons y et y' dans $\beta(h')$, $y = \underline{h}'(x)$, $y' = \underline{h}'(x')$ et $\underline{\tilde{r}}'(y) = \underline{\tilde{r}}'(y')$; on a $\underline{h}''.\underline{\tilde{r}}(x) = \underline{h}''.\underline{\tilde{r}}(x')$, donc $\underline{h}.j(x) = \underline{h}.j(x')$, ou encore $\underline{\tilde{r}}''(j(x)) = \underline{\tilde{r}}''(j(x'))$. Par suite, il existe un $\overline{\gamma}'$ unique dans C, vérifiant : $\overline{j}'.\overline{\gamma}' = \overline{l}$.

D'autre part, h est compatible avec r_h et il existe un $\overline{\gamma}$ unique, tel que $\overline{\gamma}.\overline{j}'' = \overline{h}$.

L'on a :

$$\overline{\gamma}'.\overline{\gamma}.\overline{j}''.\overline{j} = \overline{\gamma}'.\overline{h}.\overline{j} = \overline{\gamma}'.\overline{j}'.\overline{h}' = \overline{l}.\overline{h}' = \overline{j}''.\overline{j}.$$

Comme $\gamma'.\gamma.j''.k = j''.k$, l'on a $\overline{\gamma}'.\overline{\gamma}.\overline{j}'' = \overline{j}''$ et $\overline{\gamma}'.\overline{\gamma} = \alpha(\overline{\gamma})$. De plus,

$$\overline{\gamma}.\overline{\gamma}'.\overline{j}'.\overline{h}' = \overline{\gamma}.\overline{l}.\overline{h}' = \overline{\gamma}.\overline{j}''.\overline{j} = \overline{h}.\overline{j} = \overline{j}'.\overline{h}'.$$

Comme $\overline{h}'$ est un épimorphisme, $\overline{\gamma}.\overline{\gamma}' = \beta(\overline{\gamma})$ et $\overline{\gamma}'$ est l'inverse de $\overline{\gamma}$.

COROLLAIRE 1. *Supposons que p est à $\mathfrak{M}_o$-sommes et à structures quotients faibles. Si $\overline{h}_i$ est un p-épimorphisme pour tout i dans I, tout p-produit tensoriel de $(\overline{h}_i)_{i\in I}$ est un p-épimorphisme.*

COROLLAIRE 2. *Avec les hypothèses de la proposition 8, si $\overline{h}_i = \underline{q}_i(\hat{h}_i)$ où $A = (p; q, (q_i)_{i\in I})$, et si $\hat{h}$ est un A-produit tensoriel de $(\hat{\hat{h}}_i)_{i\in I}$, alors $\beta(\hat{h})$ est une $p.q$-structure quasi-quotient de $\alpha(\hat{h})$ par la relation $g(r_h)$, où $g = \underline{p}(\overline{g})$, et $\langle \overline{g}.\alpha(\overline{h}), \alpha(\hat{h})\rangle$ est un q-projecteur.*

Si de plus p est à structures quotients faibles et si $p.q(\hat{h})$ est une surjection, $\hat{h}$ est un $p.q$-épimorphisme.

4. Exemples de produits tensoriels.

1°) Désignons par R un anneau et $\overline{\delta}_R$ le foncteur d'oubli de la catégorie des homomorphismes entre R-pseudo-modules à droite : *$\overline{\delta}_R$ est à $\mathfrak{M}_o$-produits tensoriels.*

Si R admet un élément unité, désignons par δ_R le sous-foncteur de $\overline{\delta}_R$, foncteur d'oubli de la catégorie des homomorphismes entre R-modules à droite : *δ_R est à $\mathfrak{M}_o$-produits tensoriels.*

Si R est commutatif, un δ_R-produit tensoriel est isomorphe au produit tensoriel de R-modules au sens usuel.

REMARQUE. Dans ces exemples les conditions des propositions 2, 3 et 4 ne sont pas vérifiées. Toutefois, en tenant compte du fait que les catégories $\alpha(\overline{\delta}_R)$ et $\alpha(\delta_R)$ sont préadditives, on peut prolonger les démonstrations de ces propositions de sorte que les conclusions soient encore vraies.

2°) Soient $((S_i)_{i\in I}; R, (T_j)_{j\in J})$ et $((S'_i)_{i\in I'}; R, (T'_j)_{j\in J'})$ deux couples de familles d'anneaux.

Notons q (resp. q_1, resp. q_2) le foncteur d'oubli de la catégorie des homomorphismes entre $((S_i)_{i\in I}, (S'_i)_{i\in I'}; (T_j)_{j\in J}, (T'_j)_{j\in J'})$- (resp. $((S_i)_{i\in I}; T, (T_j)_{j\in J})$-, resp. $((S'_i)_{i\in I'}; R, (T'_j)_{j\in J'})$-) multimodules vers la catégorie des homomorphismes entre groupes abéliens $\mathfrak{G}^a$; $p_{\mathfrak{G}^a}$ est le foncteur d'oubli de $\mathfrak{G}^a$ vers $\mathfrak{M}$.

Posons $A = (p_{\mathfrak{G}^a}; q, (q_1, q_2))$ et désignons par S' la sous-classe de S_A formée des triplets $\hat{f} = (\hat{e}, \underline{f}, (\hat{e}_1, \hat{e}_2))$ vérifiant

1) $\underline{f}(mr, n) = \underline{f}(m, rn)$,

2) $\underline{f}(b_i m, n) = b_i \underline{f}(m, n)$, $\quad \underline{f}(mc_j, n) = \underline{f}(m, n)c_j$,

3) $\underline{f}(m, b'_i n) = b'_i \underline{f}(m, n)$, $\quad \underline{f}(m, nc'_j) = \underline{f}(m, n)c'_j$,

où $m \in \underline{p}_{\mathfrak{G}^a}.\underline{q}_1(\hat{e}_1)$, $n \in \underline{p}_{\mathfrak{G}^a}.\underline{q}_2(\hat{e}_2)$, $r \in \underline{R}$, $b_i \in \underline{B}_i$, $b'_i \in \underline{B}'_i$, $c_j \in \underline{C}_j$ et $c'_j \in \underline{C}'_j$.

Alors (S', A) *est à produits tensoriels* [6].

3°) Soit θ le foncteur d'oubli [4] de la catégorie des applications continues vers $\mathfrak{M}$. θ est à $\mathfrak{M}_o$-sommes et à structures quotients, donc à $\mathfrak{M}_o$-produits tensoriels .

Le θ-produit tensoriel T d'une famille $(T_i)_{i\in I}$ de topologies peut être défini ainsi :

Un ouvert V de T est une sous-classe du produit des classes sous-jacentes aux topologies T_i, vérifiant : pour tout $(x_i)_{i\in I}$ dans V et tout $\overline{i} \in I$, il existe un voisinage $v_{\overline{i}}$ de $x_{\overline{i}}$ dans $T_{\overline{i}}$ tel que, pour tout x' de $v_{\overline{i}}$, $u \underset{\overline{i}}{\vee} x'$ appartienne à V, où $u = (x_i)_{i\in I - \overline{i}}$.

Remarquons que la topologie T est plus fine que la topologie produit. En particulier, les topologies T_i peuvent être compactes sans que T soit localement compacte : c'est le cas du θ-produit tensoriel de deux intervalles de R.

4°) Le foncteur p_Ω, foncteur d'oubli de la catégorie des applications ordonnées, est à $\mathfrak{M}_o$-produits tensoriels : Une famille $((M_i, <))_{i \in I}$ de classes ordonnées a pour p_Ω-produit tensoriel $(\prod_{i \in I} M_i, <)$, où la relation d'ordre est définie par : $(x'_i)_{i \in I} < (x_i)_{i \in I}$ si, et seulement si, il existe une sous-classe finie I' de I, telle que $x'_i < x_i$, si i appartient à I', et $x'_i = x_i$, si i appartient à $I - I'$.

Le sous-foncteur $p_{\Omega'}$, où Ω' est la catégorie des applications ordonnées strictes, est $\otimes$-stable.

Si $((M_i, <))_{i \in I}$ est une famille de classes sous-préinductives (resp. f-inductives, resp. f-sous-pré-inductives [2]), son p_Ω-produit tensoriel est une classe sous-préinductive (resp. f-inductive, resp. f-sous-préinductive). Par suite, si p est le foncteur d'oubli de l'une des catégories $\mathcal{J}^{ps}$, $\mathcal{J}^{f\cup}$, $\mathcal{J}^{fs}$, le p_Ω-produit tensoriel de $M = ((M_i, <))_{i \in I}$ est isomorphe à une p_Ω-sous-structure du p-produit tensoriel de M, dont le théorème 3 de [3] assure l'existence.

5°) Les foncteurs $p_{\mathcal{N}}$, $p_{\mathcal{N}'}$, $p_{\mathcal{G}}$, $p_{\mathcal{F}}$, $p_{\mathcal{F}_g}$, $p_{\mathfrak{S}'}$, $p_{\mathfrak{S}}$ et $p_{\mathfrak{S}^a}$ sont à $\mathfrak{M}_o$-produits tensoriels.

PROPOSITION 9. *Une famille $(M_i^\bullet)_{i \in I}$ de classes multiplicatives admet pour $p_{\mathcal{N}}$-produit tensoriel naturalisé $((\prod_{i \in I} M_i)^\bullet, \prod_{i \in I} M_i, (M_i^\bullet)_{i \in I})$, où $(\prod_{i \in I} M_i)^\bullet$ a pour loi : $(x'_i)_{i \in I} \cdot (x_i)_{i \in I}$ est défini si, et seulement si, il existe un $\bar{i}$ dans I et un u dans $N_{\bar{i}}$ tel que*

$$(x'_i)_{i \in I} = u \underset{\bar{i}}{\vee} x'_{\bar{i}}, \quad (x_i)_{i \in I} = u \underset{\bar{i}}{\vee} x_{\bar{i}}$$

et que $x'_{\bar{i}} \cdot x_{\bar{i}}$ est défini dans $M_{\bar{i}}^\bullet$. Le composé est égal à $u \underset{\bar{i}}{\vee} x'_{\bar{i}} \cdot x_{\bar{i}}$.

DEMONSTRATION. En reprenant les notations du théorème d'existence, la relation d'équivalence engendrée par σ est compatible avec la loi multiplicative de e.

PROPOSITION 10. *Soit $\hat{f}$ un $p_{\mathcal{G}}$-produit tensoriel d'une famille $([G_i])_{i \in I}$ de graphes:*

a) $\underline{p}_{\mathcal{G}}(\hat{f}) = (\beta(\hat{f}), \underline{f}, \alpha(\hat{f}))$ *est une surjection et* $(\beta(\hat{f}), \underline{f}, \prod_{i \in I}[G_i])$ *est un* $p_{\mathcal{G}}$*-épimorphisme.*

b) Si $z \in \beta(\hat{f})$, $\alpha(z) = \beta(z)$; *si* $x_{\bar{i}} \in [G_i]_o$, $\underline{f}((x_i)_{i \in I})$ *est un élément de* $(\beta(\hat{f}))_o$.

c) Soient $(x_i)_{i \in I}$ *un élément de* $\alpha(\hat{f})$, $[C_{x_i}]$ *la composante de* x_i *dans* $[G_i]$ *pour tout* i *dans* I, $[C_z]$ *la composante de* $z = \underline{f}((x_i)_{i \in I})$ *dans* $\beta(\hat{f})$ *: alors*

$$\underline{f}(\prod_{i \in I} C_{x_i}) = C_z \quad \text{et} \quad [C_z]_o = \{\alpha(z)\}.$$

DEMONSTRATION. $\hat{f}$ est une surjection, vu le corollaire 1 du théorème d'existence. Soit $(x_i)_{i \in I}$ un élément de $\alpha(\hat{f})$:

$$\alpha \underline{f}((x_i)_{i \in I}) = \beta \alpha \underline{f}((x_i)_{i \in I}) = \underline{f}((\alpha x_{i'}, \beta x_{i''}, (x_i)_{i \in I - i' - i''})) =$$

$$= \alpha \underline{f}((\beta x_{i''}, (x_i)_{i \in I - i''})) = \alpha \beta \underline{f}((x_i)_{i \in I}) = \beta \underline{f}((x_i)_{i \in I}).$$

On en déduit que, pour tout $z \in \beta(\hat{f})$, $\alpha(z) = \beta(z)$ et que $(\beta(\hat{f}))_o$ a autant d'éléments que $\beta(\hat{f})$ de composantes. De plus la relation compatible avec α et β, engendrée par la relation σ du théorème d'existence, n'identifie deux éléments $x_{i'}$ de $([G_{i'}], u')$ et $x_{i''}$ de $([G_{i''}], \underline{u}'')$ que si $u' \bigvee_{i'} x_{i'}$ et $u'' \bigvee_{i''} x_{i''}$ sont dans la même composante dans $\prod_{i \in I}[G_i]$.

PROPOSITION 11. *Soient* $(G_i^\bullet)_{i \in I}$ *une famille de graphes multiplicatifs,* $\hat{f}$ *(resp.* $\hat{f'}$*) un* $p_{\mathcal{M}'}$*-produit (resp. un* $p_{\mathcal{G}}$*-produit) tensoriel naturalisé de* $(G_i^\bullet)_{i \in I}$ *(resp. de* $([G_i^\bullet]_{i \in I})$*). Alors* $\underline{P}_{\mathcal{M}'}(\hat{f}) = \underline{P}_{\mathcal{G}}(\hat{f'})$ *et* $[\beta(\hat{f})]$ *est isomorphe à* $\beta(\hat{f'})$*. La loi de composition sur* $\alpha(\hat{f})$ *est définie par:* $\underline{f}((x_i)_{i \in I}) . \underline{f}((x'_i)_{i \in I})$ *est défini si, et seulement si, il existe* $\bar{i}$ *dans* I *et* u *dans* $N_{\bar{i}}$*, tels que*

$$(x_i)_{i \in I} = u \bigvee_{\bar{i}} x_{\bar{i}}, \quad (x'_i)_{i \in I} = u \bigvee_{\bar{i}} x'_{\bar{i}}$$

et que $x_{\bar{i}} . x'_{\bar{i}}$ *est défini dans* $G_{\bar{i}}^\bullet$*. Le composé est alors égal à* $\underline{f}(u \underset{\bar{i}}{-} x_{\bar{i}} . x'_{\bar{i}})$*. En particulier, si* $x'_{\bar{i}}$ *est un inverse à droite de* $x_{\bar{i}}$ *dans* $G_{\bar{i}}^\bullet$, $\underline{f}((x'_i)_{i \in I})$ *est un inverse à droite de* $\underline{f}((x_i)_{i \in I})$ *dans* $\beta(\hat{f})$.

DEMONSTRATION. En effet, la relation d'équivalence engendrée par σ

et compatible avec α et β est bicompatible.

Soit $J_{\mathcal{N}'}$ l'idéal usuel de $\mathcal{N}'$: $(G'^{\bullet}, \underline{h}, G^{\bullet})$ appartient à $J_{\mathcal{N}'}$ si, et seulement si, $\underline{h}(x) \in G'^{\bullet}_{o}$ quelque soit $x \in G$.

PROPOSITION 12. *Si h_i est un élément de $J_{\mathcal{N}'}$, tout $p_{\mathcal{N}'}$-produit tensoriel h de $(h_i)_{i \in I}$ appartient à $J_{\mathcal{N}'}$.*

DEMONSTRATION. Soient $\hat{f}$ (resp. $\hat{f'}$) un $p_{\mathcal{N}'}$-produit tensoriel naturalisé de $(\alpha(h_i))_{i \in I}$ (resp. $(\beta(h_i))_{i \in I}$), $f = \underline{P}_{\mathcal{N}'}(\hat{f})$, $f' = \underline{P}_{\mathcal{N}'}(\hat{f'})$ et $h' = (\beta(h), \underline{h}', \alpha(h))$ un néo-foncteur défini par $\underline{h}'(y) = \alpha(\underline{h}(y))$, où $y \in \alpha(h)$. Pour tout $(x_i)_{i \in I} \in \alpha(f)$:

$$\underline{h} . \underline{f}((x_i)_{i \in I}) = \underline{f}'((\underline{h}_i(x_i))_{i \in I}) = \underline{f}'((\underline{h}_i(x_i))_{i \in I - i} \vee_i \alpha \underline{h}_i(x_i)) =$$

$$= \alpha \underline{f}'((\underline{h}_i(x_i))_{i \in I}) = \alpha \underline{h} . \underline{f}((x_i)_{i \in I}) = \underline{h}' . \underline{f}((x_i)_{i \in I}).$$

D'où $h . \hat{f} = h' . \hat{f}$, donc $h = h' \in J_{\mathcal{N}'}$.

Soient $G^{\bullet}$ et $G'^{\bullet}$ deux graphes multiplicatifs : Notons $N(G'^{\bullet}, G^{\bullet})$ la classe des néofoncteurs h de source $G^{\bullet}$ et but $G'^{\bullet}$ vérifiant $\alpha \underline{h}(x) = \beta \underline{h}(x)$, pour tout x de G. On peut munir $N(G'^{\bullet}, G^{\bullet})$ d'une structure de graphe multiplicatif $N(G'^{\bullet}, G^{\bullet})^{\bullet}$: $h' . h$ est défini si, et seulement si, pour tout x dans G, $\underline{h}'(x) . \underline{h}(x)$ est défini et si, pour tout (x', x) dans $G^{\bullet} * G^{\bullet}$, le produit $(\underline{h}'(x') . \underline{h}(x')) . (\underline{h}'(x) . \underline{h}(x))$ est défini et égal à $(\underline{h}'(x') . \underline{h}'(x)) . (\underline{h}(x') . \underline{h}(x))$. On pose $h' . h(x) = \underline{h}'(x) . \underline{h}(x)$.

PROPOSITION 13. *Soit $G''^{\bullet}$ un autre graphe multiplicatif. Il existe $\overline{\gamma}$ dans $\mathcal{N}'_{\gamma}$ tel que*

$$\alpha(\overline{\gamma}) = N(G^{\bullet}, \overline{G}^{\bullet})^{\bullet} \quad et \quad \beta(\overline{\gamma}) = N(N(G^{\bullet}, G'^{\bullet})^{\bullet}, G''^{\bullet})^{\bullet},$$

où $\overline{G}^{\bullet}$ est un $p_{\mathcal{N}'}$-produit tensoriel de $(G'^{\bullet}, G''^{\bullet})$.

DEMONSTRATION. Notons $N(G^{\bullet}, (G'^{\bullet}, G''^{\bullet}))$ la classe $G^{\bullet} . \underline{S}^{\mathcal{M}_o}_{p_{\mathcal{N}'}} . (G'^{\bullet}, G''^{\bullet})$ et $\hat{f}$ un $p_{\mathcal{N}'}$-produit tensoriel naturalisé, de but $\overline{G}^{\bullet}$, de $(G'^{\bullet}, G''^{\bullet})$. D'après les propositions 11 et 12, $N(G^{\bullet}, \overline{G}^{\bullet})$ est égal à $Hom_{\mathcal{N}'}(G^{\bullet}, \overline{G}^{\bullet})$ et il existe une bijection d de $N(G^{\bullet}, (G'^{\bullet}, G''^{\bullet}))$ sur $N(G^{\bullet}, \overline{G}^{\bullet})$, définie par $\underline{d}(\hat{h}) = h$, où $\hat{h} = h . \hat{f}$. La bijection d induit sur $\alpha(d)$ une structure de graphe multiplicatif $N(G^{\bullet}, (G'^{\bullet}, G''^{\bullet}))^{\bullet}$. Soit $\hat{h}$ un élément $(G^{\bullet}, \underline{h}, (G'^{\bullet}, G''^{\bullet}))$

de $\alpha(d)$; il lui correspond une application $H = (N(G^\bullet, G'^\bullet), \underline{H}, G'')$, définie par $\underline{H}(y) = \bar{h}^y$. Il est clair que H est compatible avec α et β. Supposons que $y'.y$ soit défini dans $G''^\bullet$: Pour tout $x \in G'$, on a

$$\underline{h}(x, y'.y) = \underline{h}(x, y').\underline{h}(x, y),$$

et, si $x'.x$ est défini dans $G'^\bullet$,

$$\underline{h}(x'.x, y'.y) = (\underline{h}(x', y').\underline{h}(x', y)).(\underline{h}(x, y').\underline{h}(x, y)) =$$
$$= (\underline{h}(x', y').\underline{h}(x, y')).(\underline{h}(x', y).\underline{h}(x, y)).$$

Donc $\bar{h}^{y'}.\bar{h}^y$ est défini et $\underline{H}(y'.y) = \underline{H}(y').\underline{H}(y)$. Il existe donc un néofoncteur $\bar{H} = (N(G^\bullet, G'^\bullet)^\bullet, \underline{H}, G''^\bullet)$. Soit

$$d' = (N(N(G^\bullet, G'^\bullet)^\bullet, G''^\bullet), \underline{d}', N(G^\bullet, (G'^\bullet, G''^\bullet)))$$

l'application définie par $\underline{d}'(\hat{h}) = \bar{H}$. Elle est compatible avec α et β. Supposons que $\hat{h}'.\hat{h}$ est défini dans $N(G^\bullet, (G'^\bullet, G''^\bullet))^\bullet$; on a les relations :

a) $(\underline{h}'(x', y).\underline{h}(x', y)).(\underline{h}'(x, y).\underline{h}(x, y))$ est défini et égal à $(\underline{h}'(x', y).\underline{h}'(x, y)).(\underline{h}(x', y).\underline{h}(x, y))$, si $x'.x$ est défini dans $G'^\bullet$.

b) $(h'(x, y').h(x, y')).(h'(x, y).h(x, y))$ est défini et égal à $(\underline{h}'(x, y').\underline{h}'(x, y)).(\underline{h}(x, y').\underline{h}(x, y))$, si $y'.y$ est défini dans $G''^\bullet$.

c) Si $x'.x$ et $y'.y$ sont définis, le produit de

$$(\underline{h}'(x', y').\underline{h}(x', y')).(\underline{h}'(x, y').\underline{h}(x, y'))$$

par

$$(\underline{h}'(x', y).\underline{h}(x', y)).(\underline{h}'(x, y).\underline{h}(x, y))$$

est défini et égal au produit de $(\underline{h}'(x', y').\underline{h}(x', y')).(\underline{h}'(x', y).\underline{h}(x', y))$ par $(\underline{h}'(x, y').\underline{h}(x, y')).(\underline{h}'(x, y).\underline{h}(x, y))$.

De a et b on déduit que $\bar{h}'^y.\bar{h}^y$ est défini dans $N(G^\bullet, G'^\bullet)^\bullet$ et égal à $(\bar{h}'.\bar{h})^y$, pour tout $y \in G''$. De c puis a et b on déduit que, si $y'.y$ est défini, $(\bar{h}'^{y'}.\bar{h}^{y'}).(\bar{h}'^y.\bar{h}^y)$ est défini et égal à $(\bar{h}'^{y'}.\bar{h}'^y).(\bar{h}^{y'}.\bar{h}^y)$. Donc $\bar{H}'.\bar{H}$ est défini dans $N(N(G^\bullet, G'^\bullet)^\bullet, G''^\bullet)^\bullet$ et $\underline{d}'(\hat{h}'.\hat{h}) = \underline{d}'(\hat{h}').\underline{d}'(\hat{h})$. Il existe donc un néofoncteur

$$\bar{\gamma} = (N(N(G^\bullet, G'^\bullet)^\bullet, G''^\bullet)^\bullet, \underline{d}'.\underline{d}^{-1}, N(G^\bullet, \bar{G}^\bullet)^\bullet).$$

Réciproquement, soit K un élément de $N(N(G^\bullet, G'^\bullet)^\bullet, G''^\bullet)$. Posons $\underline{K}(y) = \overline{k}^y$ et $k^y = p_{\mathfrak{N}'}(\overline{k}^y)$. Soit k l'application de $\Pi(G', G'')$ vers G, définie par $\underline{k}(x,y) = \underline{k}^y(x)$. Pour x donné dans G',

$$\underline{k}(x, \alpha y) = \underline{k}^{\alpha y}(x) = (\alpha \underline{k}^y)(x) = \alpha \underline{k}(x,y).$$

De même $\underline{k}(x, \beta y) = \beta \underline{k}(x,y)$. Supposons que $y'.y$ est défini dans $G''^\bullet$, on a

$$\underline{k}(x, y'.y) = \underline{k}^{y'.y}(x) = (\underline{k^{y'}.k^y})(x) = (\underline{k}^{y'}(x)).(\underline{k}^y(x)) =$$
$$= \underline{k}(x, y').\underline{k}(x,y)$$

et k est $p_{\mathfrak{N}'}$-concordante pour $(G^\bullet; (G'^\bullet, G''^\bullet))$. Il lui correspond $\hat{k}$ dans $N(G^\bullet, (G'^\bullet, G''^\bullet))$. Soit donc d'' l'application, inverse de d', définie par $\underline{d}''(K) = \hat{k}$. Si $K'.K$ est défini dans $N(N(G^\bullet, G'^\bullet)^\bullet, G''^\bullet)^\bullet$, $\overline{k}'^y.\overline{k}^y$ est défini pour tout y dans G'', et, si $y'.y$ est défini, $(\overline{k}'^{y'}.\overline{k}^{y'}).(\overline{k}'^y.\overline{k}^y)$ est défini et égal à $(\overline{k}'^{y'}.\overline{k}'^y).(\overline{k}^{y'}.\overline{k}^y)$. Les applications k' et k correspondantes vérifient a, b et c. Comme $\underline{P}_{\mathfrak{N}'}(\hat{f})$ est une surjection, l'application d'' est bi-compatible; il existe donc un néofoncteur $\overline{\gamma}'$, inverse de $\overline{\gamma}$:

$$\overline{\gamma}' = (N(G^\bullet, \overline{G}^\bullet)^\bullet, \underline{d}.\underline{d}'', N(N(G^\bullet, G'^\bullet)^\bullet, G''^\bullet)^\bullet).$$

COROLLAIRE. *Soit $\overline{G}^\bullet$ un $p_{\mathfrak{N}'}$-produit tensoriel d'une famille finie $(G_i^\bullet)_{i \leq n}$ de graphes multiplicatifs. $N(N \ldots N(G^\bullet, G_1^\bullet)^\bullet, G_2^\bullet)^\bullet, \ldots, G_n^\bullet)^\bullet$ est isomorphe à $N(G^\bullet, \overline{G}^\bullet)^\bullet$.*

Soit (N, ν) le foncteur $(\mathfrak{F}, \mathfrak{N}')$-projection naturalisé de [1].

PROPOSITION 14. *Soient $(G_i^\bullet)_{i \in I}$ une famille de catégories, $\hat{f}'$ un $p_{\mathfrak{N}'}$-produit tensoriel naturalisé de $(G_i^\bullet)_{i \in I}$. Alors $\hat{f} = \nu(\beta(\hat{f}')).\hat{f}'$ est un $p_{\mathfrak{F}}$-produit tensoriel naturalisé de $(G_i^\bullet)_{i \in I}$ et $\beta(\hat{f})$ s'identifie à une réunion de demi-groupes; l'image, par $f = \underline{p_{\mathfrak{F}}}(\hat{f})$, de chaque composante de $\prod_{i \in I} G_i^\bullet$ engendre un demi-groupe déterminé.*

DEMONSTRATION. Le début de la proposition est une conséquence du théorème 3.1 de [2]. Soit $f' = \underline{p}_{\mathfrak{N}'}(\hat{f}')$; tout élément z de $\beta(f')$ vérifie $\alpha(z) = \beta(z)$. Un chemin $\overline{z}$ de la catégorie libre $L(\beta(\hat{f}'))^\bullet$ vérifie aussi $\alpha(\overline{z}) = \beta(\overline{z})$; les éléments de $\beta(f)$ vérifient la même propriété et la proposition 14 résulte de la proposition 11. Remarquons que, même si I est finie, l'associativité n'est pas vérifiée dans le cas du foncteur $p\mathcal{F}$.

COROLLAIRE. *$p\mathcal{F}_g$, $p\mathfrak{S}'$ et $p\mathfrak{S}$ sont $\otimes$-stables, en tant que sous-foncteurs de $p\mathcal{F}$.*

DEMONSTRATION. Si $(G_i^{\bullet})_{i\in I}$ est une famille de groupoïdes, avec les notations de la proposition 14, les éléments de $\beta(f')$ sont tous inversibles. Un élément $\bar{z} = (z_n, \dots, z_o)$ de $L(\beta(\hat{f'}))^{\bullet}$ assure l'existence d'un élément $\bar{z}' = (z_o^{-1}, \dots, z_n^{-1})$ de $L(\beta(\hat{f'}))^{\bullet}$. Soit $(\beta(\hat{f}), \underline{r}, L(\beta(\hat{f'}))^{\bullet})$ le $p\mathcal{F}$-épimorphisme canonique :

$$\underline{r}(\bar{z}'.\bar{z}) = \alpha\underline{r}(\bar{z}) \quad \text{et} \quad \underline{r}(\bar{z}.\bar{z}') = \beta\underline{r}(\bar{z}).$$

Ainsi, $\beta(\hat{f})$ est un groupoïde et $p\mathcal{F}_g$ est $\otimes$-stable.

PROPOSITION 15. *Il existe un foncteur $(\mathfrak{S}^a, \mathfrak{S})$-projection naturalisé (E, ε). Soient $(G_i^{\bullet})_{i\in I}$ une famille de groupes abéliens et $\hat{f'}$ un $p\mathcal{F}$-produit tensoriel de cette famille : $\varepsilon(\beta(\hat{f'})).\hat{f'} = \hat{f}$ est un $p\mathfrak{S}_a$-produit tensoriel naturalisé de $(G_i^{\bullet})_{i\in I}$.*

DEMONSTRATION. Si $G^{\bullet}$ est un groupe, le $p\mathcal{F}$-épimorphisme

$$\bar{r} = (G^{\bullet}/r, \underline{\tilde{r}}, G^{\bullet})$$

est un $(\mathfrak{S}^a, \mathfrak{S})$-projecteur, où $\tilde{r}$ est la surjection associée à r et r la relation bi-compatible engendrée par (G, A, G) :

$$(x', x) \in A, \text{ si et seulement si, il existe } x_1 \text{ et } x_2 \text{ dans } G,$$
$$\text{tels que } x = x_1.x_2 \text{ et } x' = x_2.x_1.$$

Remarquons que $\beta(\hat{f})$ est isomorphe au produit tensoriel usuel.

Soit $J\mathcal{F} = J\mathfrak{N}' \cap \mathcal{F}$, l'idéal usuel de $\mathcal{F}$:

PROPOSITION 16. *Soit h_i un élément de $J\mathcal{F}$. Le produit tensoriel h d'une famille $(h_i)_{i\in I}$ de foncteurs appartient à $J\mathcal{F}$.*

DEMONSTRATION. En effet, h est une $(\mathcal{F}, \mathfrak{N}')$-projection d'un néofoncteur appartenant à $J\mathfrak{N}'$ et appartient donc à $J\mathcal{F}$.

Dans ce paragraphe, supposons que I est une classe finie. Soient

$((\overline{\rho}_i, \overline{\iota}_i))_{i \in I}$ une famille de $(p\mathcal{F}, J\mathcal{F})$-suites exactes courtes, où $\overline{\iota}_i = (C_i^\bullet, \underline{\iota}_i, G_i^\bullet)$ est une $(p\mathcal{F}, \mathcal{F}_g)$-injection [1], $\hat{f}$ un $p\mathcal{F}$-produit tensoriel naturalisé de $(C_i^\bullet)_{i \in I}$, $f = \underline{p}\mathcal{F}(\hat{f})$ et h un $p\mathcal{F}$-produit tensoriel de $(\overline{\rho}_i)_{i \in I}$. Notons $M_{\overline{i}}$ le produit de $G_{\overline{i}} \prod (\prod_{i \in I - \overline{i}} C_i)$ et M la réunion $\bigcup_{i \in I} \underline{f}(M_i)$. M engendre une $(p\mathcal{F}, \mathcal{F}_g)$-injection $\overline{\iota} = (\beta(\hat{f}), \underline{\iota}, G^\bullet)$ et une $(p\mathcal{F}, J\mathcal{F})$-suite exacte courte $(\overline{r}, \overline{\iota})$. Soit $\rho_i = \underline{p}\mathcal{F}(\overline{\rho}_i)$ et $r = \underline{p}\mathcal{F}(\overline{r})$.

PROPOSITION 17. *Il existe γ dans $\mathcal{F}_\gamma$ tel que $\alpha(\gamma) = \beta(\overline{r})$ et $\beta(\gamma) = \beta(h)$.*

DEMONSTRATION. Soient $\hat{f}'$ un $p\mathcal{F}$-produit tensoriel naturalisé de $(\beta(\overline{\rho}_i))_{i \in I}$ de but $\beta(h)$, $f' = \underline{p}\mathcal{F}(\hat{f}')$ et h_i^- un $p\mathcal{F}$-produit tensoriel de $(\iota_i')_{i \in I}$, où $\iota_{\overline{i}}' = \overline{\iota}_{\overline{i}}$ et $\iota_i' = C_i^\bullet$, si $i \neq \overline{i}$. Pour tout $i \in I$, $h.h_i$ est un élément de $J\mathcal{F}$, donc $\underline{h}(x) = \alpha(\underline{h}(x))$, pour tout $x \in M$. Si $y \in G$, il existe n éléments x_j dans M tels que $y = x_n \cdot \ldots \cdot x_1$. Par suite, $\underline{h}(y) = \alpha(\underline{h}(y))$ et $h.\overline{\iota}$ appartient à $J\mathcal{F}$. Il existe un γ unique dans $\mathcal{F}$, tel que $h = \gamma . \overline{r}$.

Inversement, soient u un élément de $\prod_{i \in I - \overline{i}} C_i$, x et x' deux éléments de $C_{\overline{i}}$, y et y' des éléments de $G_{\overline{i}}$, tels que $y.x = x'.y'$:

$$\underline{f}^u(y).\underline{f}^u(x) = \underline{f}^u(x').\underline{f}^u(y').$$

D'où
$$\underline{r}.\underline{f}^u(x) = \underline{r}.\underline{f}^u(x'),$$

puisque $\underline{f}^u(y)$ et $\underline{f}^u(y')$ appartiennent à M. On déduit, du fait que la relation d'équivalence associée à $\overline{r}.\overline{f}^u$ est bicompatible, que la relation $\underline{\rho}_{\overline{i}}(x'') = \underline{\rho}_{\overline{i}}(x)$ entraîne la relation $r.f^u(x'') = r.f^u(x)$. Or I est supposée finie : si, pour tout i dans I, $\underline{\rho}_i(x_i) = \underline{\rho}_i(x_i')$, l'on a :

$$\underline{r}.\underline{f}((x_i)_{i \in I}) = \underline{r}.\underline{f}((x_i')_{i \in I}).$$

Il existe donc une application $k = (\underline{p}\mathcal{F}(\beta(\overline{r})), \underline{k}, \alpha(f'))$, définie par $\underline{k}((\underline{\rho}_i(x_i))_{i \in I}) = \underline{r}.\underline{f}((x_i)_{i \in I})$. Soient $u' = (\prod_{i \in I - \overline{i}} \underline{\rho}_i)(u)$ et $y = \underline{\rho}_{\overline{i}}(x)$:

$$\underline{k}^{u'}(\alpha y) = \underline{r}.\underline{f}^u(\alpha x) = \alpha \underline{r}.\underline{f}^u(x) = \alpha \underline{k}^{u'}(y).$$

De même, $\underline{k}^{u'}(\beta y) = \beta \underline{k}^{u'}(y)$. Soit $y' = \underline{\rho}_{\overline{i}}(x')$ un élément tel que $y'.y$ soit défini; il existe un élément z de $G_{\overline{i}}$ tel que $x'.z.x$ est défini :

$$\underline{k}^{u'}(y'.y) = \underline{r}.\underline{f}^{u}(x'.z.x) = \underline{r}.\underline{f}^{u}(x').\underline{r}.\underline{f}^{u}(x) = \underline{k}^{u'}(y').\underline{k}^{u'}(y).$$

L'application k est donc $p\mathcal{F}$-concordante pour $(\beta(\overline{r});(\beta(\overline{\rho}_i))_{i\in I})$ et il existe un γ' unique tel que $\hat{k} = \gamma'.f'$, si $\hat{k}$ est l'élément correspondant de $S^{\mathfrak{M}_o}_{p\mathcal{F}}$.

γ' est l'inverse de γ. En effet,

$$p\mathcal{F}(\gamma'.\gamma.\overline{r}).f = p\mathcal{F}(\overline{r}).f,$$

$$\text{donc} \quad \gamma'.\gamma.\overline{r} = \overline{r} \quad \text{et} \quad \gamma'.\gamma = \alpha(\gamma).$$

D'autre part

$$p\mathcal{F}(\gamma.\gamma').f'.\prod_{i\in I}\rho_i = f'.\prod_{i\in I}\rho_i, \quad \text{où} \quad \rho_i = p\mathcal{F}(\overline{\rho}_i).$$

Donc $p\mathcal{F}(\gamma.\gamma').f' = f'$, et par suite $\gamma.\gamma' = \beta(\gamma)$.

Supposons que I, toujours fini, est une sous-classe de K quelconque. Soit toujours $((\overline{\rho}_i, \overline{\iota}_i))_{i\in I}$ une famille de $(p\mathcal{F}, J\mathcal{F})$-suites exactes courtes, et posons $\overline{\rho}_k = C^{\cdot}_k \in \mathcal{F}_o$, si $k \notin I$. $\hat{f}$ (resp. h) est un $p\mathcal{F}$-produit tensoriel naturalisé de $(C^{\cdot}_k)_{k\in K}$ (resp. tensoriel de $(\overline{\rho}_k)_{k\in K}$). On pose

$$M_{\overline{i}} = G_{\overline{i}} \amalg (\prod_{k\in K - \overline{i}} C_k) \quad \text{et} \quad M = \bigcup_{i\in I-} f(M_i), \quad \text{où} \quad f = \underline{P}\mathcal{F}(\hat{f}).$$

M engendre une $(p\mathcal{F}, J\mathcal{F})$-suite exacte courte $(\overline{r}, \overline{\iota})$:

PROPOSITION 17'. *Il existe γ dans $\mathcal{F}_\gamma$ tel que $\alpha(\gamma) = \beta(h)$ et $\beta(\gamma) = \beta(\overline{r})$.*

La démonstration est analogue à celle de la proposition 17.

6°) GRAPHES MULTIPLICATIFS, CATEGORIES ET GROUPOIDES STRUCTUREES. Soient: $\hat{\mathfrak{M}}_o$ un univers, tel que $\mathfrak{M}_o \in \hat{\mathfrak{M}}_o$; $\mathfrak{M}$ une catégorie pleine d'applications sur $\mathfrak{M}_o$; $(\amalg, \mu)$ le foncteur $\mathfrak{M}_o$-somme naturalisé canonique dans $\mathfrak{M}$.

Supposons donné un foncteur $q = (\hat{\mathfrak{M}}, \underline{q}, \hat{H}^{\cdot})$ d'homomorphismes, saturé, résolvant à droite, $\hat{\pi}$-compatible, où $(\hat{\prod}, \hat{\pi})$ est le foncteur $\hat{\mathfrak{M}}_o$-produit naturalisé canonique dans $\hat{\mathfrak{M}}$, et admettant $p = (\mathfrak{M}, \underline{p}, H^{\cdot})$ pour restriction. On suppose, en outre, que $H^{\cdot}$ est une sous-catégorie pleine de $\hat{H}^{\cdot}$, que $H = \overset{-1}{q}(\mathfrak{M})$, que $H^{\cdot}_o \in \hat{\mathfrak{M}}_o$, que $H^{\cdot}$ admet un foncteur $\mathfrak{M}_o$-

somme naturalisé ($\widetilde{\amalg}$, $\tilde{\mathfrak{u}}$) et que p applique $\tilde{\mathfrak{u}}$ sur $\mathfrak{u}$.

$\mathfrak{O}(p)$ (resp. v) désigne soit $\mathfrak{K}(p)$, $\mathfrak{K}'(p)$, $\mathfrak{G}'(p)$, $\bar{\mathfrak{N}}'(p)$ (resp. $\mathfrak{N}'$); soit $\mathfrak{F}(p)$, $\mathfrak{F}_g(p)$, $\mathfrak{S}'(p)$, $\mathfrak{S}(p)$ (resp. $\mathfrak{F}$) [2].

Comme p est supposé $\mathfrak{u}$-compatible, $\mathfrak{K}(p)$ est à $\mathfrak{M}_o$-sommes.

PROPOSITION 18. *Si q est $(\mathfrak{M}, \mathfrak{O}(p))$-résolvant, $p_{\mathfrak{O}}$ est à $\mathfrak{M}_o$-produits tensoriels.*

DEMONSTRATION. $\mathfrak{O}(p)$ est une sous-catégorie pleine de $\mathfrak{K}(p)$, qui est à $\mathfrak{M}_o$-sommes. Si q est $(\mathfrak{M}, \mathfrak{O}(p))$-résolvant, le théorème (1, III) de [2] assure l'existence de $(\mathfrak{O}(p), p_{\mathfrak{K}})$-structures quasi-quotients.

PROPOSITION 19. *Si q est $\frown$-étalant, $p_{\mathfrak{O}}$ est à $\mathfrak{M}_o$-produits tensoriels.*

La démonstration est immédiate, vu la proposition (4, III) de [2].

DEFINITION. On dira que p est à $\mathfrak{M}_o$*-sommes semi-régulières* si p est $\mathfrak{u}$-compatible et si la condition suivante est vérifiée : Soit $I \in \mathfrak{M}_o$; si $(h_i)_{i \in I}$ est une famille de p-monomorphismes, toute somme de $(h_i)_{i \in I}$ est un p-monomorphisme.

Les foncteurs θ, $p_{\mathfrak{K}}$, $p_{\mathfrak{G}}$, $p_{\mathfrak{N}}$, $p_{\mathfrak{N}'}$, $p_{\mathfrak{F}}$, $p_{\mathfrak{F}_g}$ sont à $\mathfrak{M}_o$-sommes semi-régulières.

PROPOSITION 20. *Si p est à $\mathfrak{M}_o$-sommes semi-régulières, $\mathfrak{K}'(p)$ est à $\mathfrak{M}_o$-sommes.*

DEMONSTRATION. Soient I une classe de $\mathfrak{M}_o$ et $(e_i)_{i \in I}$ une famille d'unités de $\mathfrak{K}'(p)$, où $e_i = (C_i^\bullet, t_i)$. Posons :

$$\underset{i \in I}{\bar{\mathfrak{u}}} C_i^\bullet = (C^\bullet, (\bar{s}_i)_{i \in I}) \quad \text{et} \quad \underset{i \in I}{\tilde{\mathfrak{u}}} t_i = (t, (\tilde{s}_i)_{i \in I});$$

on a $\underline{p}(t) = C$ et $\underline{p}(\tilde{s}_i) = p_{\mathfrak{N}'}(\bar{s}_i)$. Posons

$$\underset{i \in I}{\tilde{\mathfrak{u}}} t_{oi} = (t_o, (\tilde{s}'_i)_{i \in I}),$$

si t_{oi} est la p-sous-structure de t_i telle que $p(t_{oi}) = C_{io}^\bullet$; alors $p(t_o) = $
$= \coprod_{i \in I} C_{io}^\bullet = C_o^\bullet$ et s'_i est un p-sous-morphisme de s_i, vu l'hypothèse. Par définition, il existe $A_i = (t_{io}, \underline{\alpha}_i, t_i)$ et $B_i = (t_{io}, \underline{\beta}_i, t_i)$ dans $\alpha(p)$, où α_i et β_i sont les applications source et but de $C_i^\bullet$:

$$\widetilde{\coprod_{i\in I}} A_i = (t_o, \underline{\alpha}_{C^\bullet}, t) \quad \text{et} \quad \widetilde{\coprod_{i\in I}} B_i = (t_o, \underline{\beta}_{C^\bullet}, t).$$

Ainsi, $e = (C^\bullet, t)$ appartient à $\mathcal{K}'(p)$ et il existe, pour tout $i \in I$, s_i dans $e.\mathcal{K}'(p).e_i$, tel que $\underline{p}^{H^\bullet}_{\mathcal{K}'}(s_i) = \tilde{s}_i$ et $\underline{p}^{\mathcal{N}'}_{\mathcal{K}'}(s_i) = \bar{s}_i$.

Supposons qu'une famille $(h_i)_{i\in I}$ d'éléments de $\mathcal{K}'(p)$ vérifie $\alpha(h_i) = e_i$ et $\beta(h_i) = e'$. Il existe un $\tilde{g}$ (resp. un $\bar{g}$) unique dans $\alpha(p)$ (resp. dans $\mathcal{N}'$) vérifiant, pour tout $i \in I$, $\tilde{g}.\tilde{s}_i = \tilde{h}_i$ (resp. $\bar{g}.\bar{s}_i = \bar{h}_i$), où $\tilde{h}_i = \underline{p}^{H^\bullet}_{\mathcal{K}'}(h_i)$ et $\bar{h}_i = \underline{p}^{\mathcal{N}'}_{\mathcal{K}'}(h_i)$. Comme $\underline{p}(\tilde{g}) = \underline{p}_{\mathcal{N}'}(\bar{g})$, il existe un et un seul g dans $\mathcal{K}'(p)$ vérifiant $g.s_i = h_i$, pour tout i dans I.

PROPOSITION 21. *Supposons : q est $\ulcorner$-étalant et p est à $\mathfrak{M}_o$-sommes semi-régulières et admet une section maximale. Si une famille $(e_i)_{i\in I}$ d'unités de $\mathcal{O}(p)$ admet e pour $\check{p}_{\mathcal{O}}$-produit tensoriel, $\check{p}_{\mathcal{O}}(e)$ est un p_v-produit tensoriel de $(\check{\underline{p}}_{\mathcal{O}}(e_i))_{i\in I}$.*

La démonstration résulte du théorème (2,IV) de [2]. Par exemple, le produit tensoriel d'une famille de graphes multiplicatifs, de catégories ou de groupoïdes topologiques (resp. ordonnés) a pour graphe multiplicatif, catégorie ou groupoïde sous-jacent un produit tensoriel des graphes multiplicatifs, catégories ou groupoïdes sous-jacents.

PROPOSITION 22. *Si q est dénombrablement engendrant pour $\mathfrak{M}$, $\check{p}_{\mathcal{O}}$ est à $\mathfrak{M}_o$-produits tensoriels.*

Le théorème (1,V) de [2] indique que q est $(\mathfrak{M}, \mathcal{O}(p))$-résolvant (voir appendice de [3]). Par exemple, la catégorie des néofoncteurs (resp. des foncteurs) doubles est à $\mathfrak{M}_o$-produits tensoriels.

Remarquons que la proposition 18 reste exacte si $\mathcal{O}(p) = \bar{\mathcal{N}}(p)$; $\bar{\mathcal{N}}(p)$ est à $\mathfrak{M}_o$-produits tensoriels si q est $\ulcorner$-engendrant ou dénombrablement engendrant pour $\mathfrak{M}$.

Soient $\hat{H}'^\bullet$ et $\hat{H}''^\bullet$ deux sous-catégories de $\hat{H}^\bullet$, contenant $H^\bullet_\gamma$, stables par produits et vérifiant la condition (σ) [1], relativement à $(\mathfrak{M}^\iota, q)$. Posons

$$H \cap \hat{H}' = H' \quad \text{et} \quad H \cap \hat{H}'' = H'';$$

$\mathcal{O}_1(p)$ (resp. $\mathcal{O}_2(p)$) représente la sous-catégorie pleine de $\mathcal{O}(p)$ ayant pour unités les couples $(C^{\bullet}, t)$, tels que :

$([C^{\bullet}], t)$ soit un graphe (p, H') (resp. $(p, (H', H'))$)-structuré si $\mathcal{O}(p) = \mathcal{H}'(p)$ ou $\mathcal{G}'(p)$.

$(C^{\bullet}, t)$ soit un graphe multiplicatif $p(H', H'')$ (resp. $p((H', H'), H'')$) - structuré si $\mathcal{O}(p) \subset \overline{\mathcal{N}}'(p)$.

Les propositions 18, 19 et 22 restent valables, en vertu du théorème (1, III) de [2], si l'on remplace $\mathcal{O}(p)$ par $\mathcal{O}_1(p)$ ou par $\mathcal{O}_2(p)$.

7°) Soient $\mathcal{T}^s$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{T}$ ayant pour unités les topologies séparées et θ^s son foncteur d'oubli vers $\mathcal{M}$. Posons $\eta^s = (\mathcal{F}(\theta), \underline{\eta}^s, \mathcal{F}(\theta^s))$, où $\underline{\eta}^s$ est une injection canonique et $\theta^s_{\mathcal{F}} = \theta_{\mathcal{F}} . \eta^s$, où $\theta_{\mathcal{F}}$ est le foncteur projection de $\mathcal{F}(\theta)$ vers $\mathcal{M}$:

PROPOSITION 23. *$(\theta_{\mathcal{F}} ; \eta^s)$ est à $\mathcal{M}_o$-produits tensoriels.*

DEMONSTRATION. D'après la proposition 19, $\theta_{\mathcal{F}}$ est à $\mathcal{M}_o$-produits tensoriels et, d'après le théorème 2 de [4], η^s admet un foncteur adjoint.

Soient $\mathcal{U}$ la catégorie des applications uniformes au-dessus de $\mathcal{M}$, τ son foncteur projection canonique vers $\mathcal{T}$ et $\overline{p}_{\mathcal{T}}$ le foncteur projection de $\mathcal{F}(\theta)$ vers $\mathcal{T}$. On rappelle que $\mathcal{F}(\theta^u)$ est la catégorie produit fibré $\tau \vee \overline{p}_{\mathcal{T}}$ et que son foncteur projection vers $\mathcal{F}(\theta)$ est noté q [4].

PROPOSITION 26. *$(\theta_{\mathcal{F}} ; q)$ est à $\mathcal{M}_o$-produits tensoriels.*

q admet, en effet, un foncteur adjoint q'.

5. Remarque.

Soient donnés : $p = (\mathcal{M}, \underline{p}, C^{\bullet})$ un foncteur, $(D, C^{\bullet})$ une catégorie p-dominée (i.e. $C^{\bullet}$ est munie d'un foncteur «*Hom*-interne») et e, e' deux unités de $C^{\bullet}$. Le produit tensoriel $e_1 \otimes e_2$ considéré dans [7], [8] et [9] est une D_{e_1}-structure libre associée à e_2. Nous dirons D-produit tensoriel.

Considérons les conditions :

a) p est fidèle.

b) p est à $\mathcal{M}_o$-produits.

c) Quelque soit (e, e') appartenant à $C^{\bullet}_o \times C^{\bullet}_o$, il existe une p-

injection $\bar{j}^{(e,e')}$ telle que $\beta(\bar{j}^{(e,e')}) = \prod_{x' \in \underline{p}(e')} e$ et

$$\underline{p}(\bar{j}^{(e,e')}) = j^{(e,e')} = (\prod_{x' \in \underline{p}(e')} \underline{p}(e), \underline{j}, e.C^{\bullet}.e'),$$

où $\underline{j}(g) = (\underline{p}(g)(x'))_{x' \in \underline{p}(e')}$.

PROPOSITION. *Si p vérifie les conditions a, b et c, il existe un foncteur «Hom-interne» D tel que $D(e,e') = \alpha(\bar{j}^{(e,e')})$. Dans ce cas les notions de D-produit et de p-produit tensoriel coïncident.*

DEMONSTRATION. Supposons les conditions a, b et c vérifiées. Soient e, e_1 deux unités de $C^{\bullet}$ et h un élément de $C^{\bullet}.e$. Il existe un élément bien déterminé $D(h, e_1)$ tel que :

$$\bar{j}^{(\beta(h), e_1)}.D(h, e_1) = \prod_{x \in \underline{p}(e_1)} h.\bar{j}^{(e,e_1)}$$

et $\quad \underline{p}(D(h, e_1)) = (\beta(g).C^{\bullet}.e_1, \underline{\tilde{h}}, e.C^{\bullet}.e_1),$

où $\tilde{h}(g) = h.g$. Soient e_2 une autre unité et h' un élément de $e_1.C^{\bullet}.e_2$. Posons

$$\prod_{x_i \in \underline{p}(e_i)} e = ((t_{x_i})_{x_i \in \underline{p}(e_i)}, \prod_{x_i \in \underline{p}(e_i)} e), \quad \text{où} \quad i = 1, 2.$$

Il existe un $\bar{h}$ bien déterminé tel que $t_{\underline{k}(x_2)} = \bar{h}.t_{(x_2)}$ si $k = \underline{p}(h')$ et un $D(e,h')$ bien déterminé tel que :

$$\bar{j}^{(e,e_2)}.D(e,h') = \bar{h}.\bar{j}^{(e,e_1)}$$

et $\quad \underline{p}(D(e,h')) = (e.C^{\bullet}.e_2, \underline{\tilde{k}}, e.C^{\bullet}.e'),$

où $\underline{\tilde{k}}(g') = g'.h'$.

Ainsi est défini le foncteur D.

Soient e, e_1 et e_2 trois unités de $C^{\bullet}$. Posons $\bar{j}_i = \bar{j}^{(e,e_i)}$, $j_i = \underline{p}(\bar{j}_i)$, pour $i = 1, 2$.

Un élément $\bar{h} = (e, h, (e_1, e_2))$ de $e.T_p.(e_1, e_2)$ détermine une famille $(\bar{h}^{x_1})_{x_1 \in \underline{p}(e_1)}$ (resp. $(\bar{h}^{x_2})_{x_2 \in \underline{p}(e_2)}$) d'éléments de $e.C^{\bullet}.e_2$ (resp. de $e.C^{\bullet}.e_1$). Posons $\bar{h}^2 = [\bar{h}^{x_1}]_{x_1 \in \underline{p}(e_1)}$ et $h^2 = \underline{p}(\bar{h}^2)$. On a $\underline{h}^2(x_2) = (\underline{h}(x_1, x_2))_{x_1 \in \underline{p}(e_1)}$. D'autre part,

$$j_1(h^{x_2}) = (\underline{h}(x_1, x_2))_{x_1 \in \underline{p}(e_1)}.$$

Il existe donc une application k telle que $j_1.k = h^2$. Par suite il existe un morphisme bien déterminé $\eta_1(\overline{h})$ tel que $\overline{j}_1.\eta_1(\overline{h}) = \overline{h}^2$. De plus si $\alpha(g) = e$, on a $\eta_1(g.\overline{h}) = D(g, e_1).\eta_1(\overline{h})$.

Inversement, soit f un élément de $D(e, e_1).C^{\bullet}.e_2$; posons

$$h = (p(e), \underline{h}, p(e_1)\Pi p(e_2)),$$
$$\text{où} \quad \underline{h}(x_1, x_2) = \underline{p}(f)(x_2)(x_1).$$

Quelque soit $x_2 \in \underline{p}(e_2)$, h^{x_2} est un élément de $\underline{p}(e.C^{\bullet}.e_1)$. Posons

$$\overline{h}^1 = [\overline{h}^{x_2}]_{x_2 \in \underline{p}(e_2)}, \text{ où } \overline{h}^{x_2} = \underline{p}(f)(x_2) \text{ et } h^1 = \underline{p}(\overline{h}^1).$$

L'application $k = (e.C^{\bullet}.e_2, \underline{k}, \underline{p}(e_1))$, définie par $\underline{k}(x_1) = t_{x_1}.j_1.f$, vérifie $j_2.k = h^1$. Par suite, il existe un élément bien déterminé $\tilde{\overline{h}}^1$ tel que $\overline{j}_2.\tilde{\overline{h}}^1 = \overline{h}^1$. Ainsi quelque soit x_1 élément de $\underline{p}(e_1)$, h^{x_1} appartient à $\underline{p}(e.C^{\bullet}.e_2)$ et $\varepsilon(f) = (e, \underline{h}, (e_1, e_2))$ est élément de T_p. Si $\alpha(g) = e$, on a $\varepsilon(D(g, e).f) = g.\varepsilon(f)$.

De plus, $\varepsilon\eta_1(\overline{h}) = \overline{h}$ et $\eta_1\varepsilon(f) = f$, et la proposition en résulte.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] C. EHRESMANN. *Catégories et structures,* Dunod, Paris, 1965.

[2] C. EHRESMANN. *Structures quasi-quotients,* (multigraphié, Paris, 1965, et Math. Ann. 171 (1967), 293-363).

[3] C. EHRESMANN. *Sur l'existence de structures libres,* (multigraphié, Paris, 1966, et Cahiers de Top. et de Géom. Diff., n° IX, 1 et 2, Paris 1967).

[4] C. EHRESMANN. *Catégories topologiques,* Proceedings Nederl. Akademie Van Wetenschappen, series A 69, n° 1, 1966.

[5] C. EHRESMANN. *Catégories structurées,* Ann. Ec. Norm., Paris (1963).

[6] N. BOURBAKI. *Algèbre linéaire,* Algèbre Ch. 2, Hermann, Paris.

[7] P. FREYD. *Abélian categories,* Harper and Row, New-York (1964).

[8] G.M. KELLY. *Tensor products in categories,* J. Algebra 2, 15-37 (1965).

[9] F.E.J. LINTON. *Autonomous categories and duality,* J. Algebra 2, 315-350 (1965).

[10] F. FOLTZ. *Produit tensoriel généralisé,* C.R.A.S. 264 p. 660, (1967). Cette Note est développée dans une thèse de 3me cycle (Paris 1967, multigraphiée dans les travaux du Sém. de Topo. et Géo. diff.), dont le présent article est extrait.