CAHIERS DE
TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
CATÉGORIQUES

JEAN BENABOU

Structures algébriques dans les catégories

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 10, nº 1 (1968), p. 1-126

<http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1968__10_1_1_0>

CAHIERS DE TOPOLOGIE
ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE

Vol. X, 1

STRUCTURES ALGEBRIQUES DANS LES CATEGORIES

par Jean BENABOU

A Doudou

MATHEMATICIEN, IENNE. Celui, celle qui sait les mathématiques, les enseigne et les pratique. C'est un grand *mathématicien.* Je ne puis concevoir comment tous ces habiles *mathématiciens* nient un mathématicien éternel. (Voltaire) | Philol. *Contre les mathématiciens,* Titre d'un livre de Sextus Empiricus dirigé contre les philosophes dogmatiques. | Les *mathématiciens* discourant avec une justesse toute mécanique sur les choses de leur état, sauf le cas d'erreur matérielle, on en concluait autrefois qu'ils avaient nécessairement le sens droit et devaient raisonner juste. C'était un préjugé; on confondait le travail intellectuel, les spéculations de l'esprit, avec les opérations machinales dites pondération, mesure, calcul; et l'on était fort éloigné de soupçonner que le raisonnement dit mathématique n'avait absolument rien de commun avec le véritable raisonnement. Cette erreur était elle-même la conséquence de l'application vicieuse qu'on avait faite des termes de logique et de philosophie tels que *raisonnement, déduction,* etc., à la science spéciale dont l'objet unique est l'appréciation exacte de l'étendue en tous sens. Aujourd'hui, les esprits les plus éminents sont convaincus, au contraire, que les mathématiciens, en dehors de tout ce qui concerne la mesure des quantités et des grandeurs, sont les plus pitoyables raisonneurs que l'on puisse rencontrer, notamment en politique, en morale, en philosophie, et surtout dans le domaine des sentiments et des passions. Cela tient à ce que le mathématicien, habitué à avoir l'unité, quelle qu'elle soit, pour base, point de départ et terme de comparaison, est nécessairement dévoyé, privé de boussole ou de phare, et ne saurait faire dès lors un pas assuré, toutes les fois que l'unité lui fait défaut. La logique rigoureuse veut qu'il en soit ainsi. Le mathématicien est fatalement, par état, un esprit terre-à-terre; voilà pourquoi il est généralement athée ou matérialiste, ce qui a été un sujet de grand étonnement pour Voltaire. On voit que rien n'est plus naturel, plus facile à comprendre. Cette inaptitude, logiquement démontrée des mathématiciens à raisonner juste, est peut-être l'une des plus heureuses découvertes de l'esprit moderne. (C. Henriey).

INTRODUCTION

L'exposé qui suit se compose de deux parties.

Dans la première nous étudions systématiquement (c'est-à-dire fonctoriellement !) les structures algébriques sur les familles finies ou infinies d'ensembles, ou plus généralement d'objets d'une catégorie quelconque.

Plusieurs rédactions et exposés (en particulier au séminaire de M. Ehresmann en 1963) d'un travail beaucoup plus général où l'on étudiait les structures algébriques sur les familles de catégories, ou mieux sur les *familles d'objets d'une 2-catégorie,* nous ont convaincus qu'il était « difficilement lisible » sans préparation préalable. La publication postérieure de la note de Lawvere [1] (*) et de l'article de Higgins [1], ainsi que la question posée par Heller [1], nous ont renforcés dans cette conviction.

La première partie est « le cas particulier à une dimension » de ce premier travail, datant de 1963, qui fera l'objet d'une autre publication.

Un *type de structures algébriques sur I-termes* (abrégé en I-type), où I est un ensemble d' « indices » quelconque, est une catégorie $\mathbf{T}$ ayant pour objets les éléments du monoïde libre M engendré par I, et telle que tout mot $\mu = \iota_1 \dots \iota_n \in M$ soit, dans $\mathbf{T}$, le produit des objets $\iota_1 \dots \iota_n$.

Si $\mathcal{C}$ est une catégorie à produits finis, la catégorie $\underline{Alg}(\mathbf{T}, \mathcal{C})$ des *algèbres de type* $\mathbf{T}$ *dans* $\mathcal{C}$ est la sous-catégorie pleine de $\underline{Fonct}(\mathbf{T}, \mathcal{C})$

(*) Les chiffres entre crochets renvoient à la bibliographie.

ayant pour objets les foncteurs $A : \mathbf{T} \to \mathcal{C}$ qui commutent avec les produits finis.

I. Ces définitions sont ensuite « justifiées » de la manière suivante :

(I.1) Nous donnons un sens *précis* à la phrase « $\mathcal{S}$ est une espèce de structures algébriques définie par des opérations, internes ou externes et des relations entre opérations composées ».

(I.2) Si $\mathcal{S}$ est une telle espèce et $\mathcal{C}$ une catégorie à produits finis, nous définissons la catégorie $\underline{Alg}(\mathcal{S}, \mathcal{C})$ des *algèbres d'espèce* $\mathcal{S}$ *dans* $\mathcal{C}$ et le foncteur *d'oubli* : $\underline{Alg}(\mathcal{S}, \mathcal{C}) \to \mathcal{C}^I$ qui, à toute algèbre, associe la *famille sous-jacente* d'objets de $\mathcal{C}$.

Deux espèces $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ sont *équivalentes* si, pour toute catégorie $\mathcal{C}$ à produits finis, $\underline{Alg}(\mathcal{S}, \mathcal{C})$ et $\underline{Alg}(\mathcal{S}', \mathcal{C}')$ sont équivalentes, l'équivalence respectant les familles sous-jacentes.

(I.3) Nous « classifions » les espèces de structures pour cette équivalence en associant à toute espèce $\mathcal{S}$ un type $\mathbf{T}(\mathcal{S})$ tel que :

(i) Pour toute catégorie $\mathcal{C}$ à produits finis,

$$\underline{Alg}(\mathcal{S}, \mathcal{C}) \simeq \underline{Alg}(\mathbf{T}(\mathcal{S}), \mathcal{C})$$

(Th. 2.1.2.2).

(ii) Deux espèces $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ sont équivalentes si et seulement si leurs types $\mathbf{T}(\mathcal{S})$ et $\mathbf{T}(\mathcal{S}')$ sont isomorphes (Cor. 2.1.3.7).

(I.4) Nous examinons les rapports entre nos définitions et les notions « diverses » de structures algébriques et montrons que :

(i) Les catégories d'algèbres universelles de Birkhoff sont les catégories $\underline{Alg}(\mathcal{S}, \underline{Ens})$, où $\mathcal{S}$ est une espèce *sur un terme* ($I = \{\emptyset\}$) définie par des opérations, sans relations, c'est-à-dire une *espèce libre*.

(ii) Les «variétés équationnelles» correspondent au cas $\underline{Alg}(\mathcal{S}, \underline{Ens})$, où $\mathcal{S}$ est une espèce sur un terme, définie par opérations et relations.

(iii) Les théories algébriques de Lawvere sont les types sur un terme et ses catégories algébriques sont les $\underline{Alg}(\mathbf{T}, \underline{Ens})$, où $\mathbf{T}$ est un tel type.

(iv) Les catégories d'algèbres à schémas d'opérations de Higgins sont les $\underline{Alg}(\mathcal{S}, \underline{Ens})$, où $\mathcal{S}$ est une I-espèce libre (les variétés équationnelles correspondant au cas où $\mathcal{S}$ est définie par opérations et relations.

(v) Les structures algébriques (monoïdes, groupes, etc...) sur les objets d'une catégorie $\mathcal{C}$ à produits finis sont les objets de catégories $Alg(\mathcal{S}, \mathcal{C})$, où $\mathcal{S}$ est une espèce sur un terme définie par opérations et relations.

D'après (I.3) toutes ces notions sont des cas particuliers de catégories $Alg(\mathbf{T}, \mathcal{C})$. Ceci répond en passant à la question posée par Heller [1] sur les rapports entre les situations (I.4) (iii) et (iv) ci-dessus.

II. L'étude des catégories d'algèbres de type $\mathbf{T}$ dans des catégories $\mathcal{C}$ autres que *Ens* permet une plus grande généralité (algèbres topologiques, algèbres dans les catégories de faisceaux de foncteurs, etc... les théorèmes démontrés pour *Ens* sont étendus sous des hypothèses raisonnables aux catégories quelconques). Mais cette étude est surtout motivée par des nécessités de cohérence interne de la théorie; en effet :

(i) Pour toute espèce de structures algébriques $\mathcal{S}$, il y a une *famille canonique* d'objets de $\mathbf{T}(\mathcal{S})$ munie d'une structure de $\mathcal{S}$-algèbre, dite $\mathcal{S}$-*algèbre générique* et notée $G(\mathcal{S})$, qui joue le rôle d'un « modèle universel» pour toutes les $\mathcal{S}$-algèbres. De façon précise : Pour toute catégorie $\mathcal{C}$ et toute structure de $\mathcal{S}$-algèbre A sur une famille d'objets de $\mathcal{C}$, il existe un foncteur unique $\mathbf{T}_{\mathcal{S}}(A) : \mathbf{T}(\mathcal{S}) \to \mathcal{C}$ tel que A soit *l'image directe* de $G(\mathcal{S})$ par $\mathbf{T}_{\mathcal{S}}(A)$. En particulier, pour toute $\mathcal{S}$-algèbre A, les *opérations structurales* de A sont les images des opérations structurales de $G(\mathcal{S})$, et une relation entre ces opérations structurales est identiquement vérifiée, pour toute $\mathcal{S}$-algèbre, si et seulement si elle est vérifiée dans l'algèbre générique $G(\mathcal{S})$. Mais en général $G(\mathcal{S})$ n'est pas une structure algébrique sur une famille d'ensembles.

(ii) On peut dualiser tous les résultats aux catégories de «co-algèbres» définies par $Co\text{-}alg(\mathbf{T}, \mathcal{C}) = [Alg(\mathbf{T}^*, \mathcal{C}^*)]^*$, où $\mathcal{C}$ est une catégorie à sommes finies.

III. Les structures algébriques sur plus d'un objet permettent de traiter les modules sur les anneaux variables, les ensembles à groupes d'opérateurs, etc... mais l'introduction de familles (et même de familles infinies) d'objets munies de structures est, elle aussi, « imposée » par la nature même de la théorie. Un des résultats essentiels est en effet le suivant : Pour tout ensemble I la catégorie $\underline{Typ}(I)$ de tous les types de structures algébriques sur I-termes (qui ne cause aucun « ennui logique ») est elle-même de la forme $\underline{Alg}(\mathbf{M}(I), \underline{Ens})$, c'est-à-dire est une catégorie de familles d'ensembles, munies de structures algébriques d'un type $\mathbf{M}(I)$ bien déterminé, dit *métatype de tous les I-types.* Mais $\mathbf{M}(I)$ est un type sur $\mathbf{M} \times I$-termes, c'est-à-dire que, même si l'on se restreint à l'étude des types sur un terme $(I = \{\emptyset\})$, $\mathbf{M}(I)$ s'identifie à $\mathbf{N}$ et il faut considérer des structures sur une infinité dénombrable d'ensembles pour pouvoir interpréter $\underline{Typ}(I)$ comme une catégorie d'algèbres. (C'est le cas par exemple de la catégorie des « théories algébriques » de [1] qui n'est pas une « catégorie algébrique » au sens de [1]).

Cette « interprétation » a de nombreuses conséquences, par exemple:

(i) La catégorie $\underline{Typ}(I)$ admet des limites inductives et projectives.

(ii) Le seul fait que $\underline{Typ}(I)$ admet des sommes finies permet de « résoudre tous les problèmes universels » sur les catégories d'algèbres sur des ensembles, sous une forme beaucoup plus générale que dans l'interprétation « usuelle ». Ainsi la construction des algèbres libres engendrées par des familles d'ensembles se réduit à l'adjonction de constantes à un I-type $\mathbf{T}$. On peut tout aussi facilement adjoindre à $\mathbf{T}$ des opérations et imposer à ces opérations des relations. Par exemple, le passage de la théorie des groupes à la théorie des anneaux (resp. d'un ensemble X au groupe libre engendré par cet ensemble, resp. d'un groupe G à l'algèbre $\mathbf{Z}[G][X_1, \dots, X_n]$ des polynômes à n indéterminées à coefficients dans l'algèbre de G) apparaît comme l'adjonction d'une opération au type Gr des groupes (resp. adjonction d'un ensemble X de constantes à Gr, resp. adjonction simultanée d'opérations et de constantes au type Ab des groupes abéliens).

(iii) Les espèces de structures apparaissent comme des *présenta-*

tions des types, considérés comme algèbres de type $\mathbf{M}(I)$. De façon précise, le type $\mathbf{T}(\mathcal{S})$ associé à une espèce $\mathcal{S}$ est la $\mathbf{M}(I)$- algèbre ayant pour générateurs les opérations de $\mathcal{S}$ et pour relations les axiomes de $\mathcal{S}$. Ce qui montre à nouveau que le type est le « vrai» objet mathématique.

(iv) Des propriétés générales des catégories d'algèbres sur les ensembles, appliquées aux cas $\underline{Alg}(\mathbf{M}(I), \underline{Ens}) \simeq \underline{Typ}(I)$ $(I \in Ens)$, on déduit des propriétés des catégories $\underline{Typ}(I)$, c'est-à-dire des types. Ces résultats à leur tour permettent d'obtenir de nouvelles propriétés des catégories $\underline{Alg}(\mathbf{T}, \mathcal{C})$, et en particulier des $\underline{Alg}(\mathbf{T}, \underline{Ens})$. Cette méthode de « balancement» a été utilisée à diverses reprises, sans être explicitée.

IV. Beaucoup de propriétés prouvées dans des cas particuliers en « vérifiant des axiomes» sont des conséquences immédiates du fait que les catégories d'algèbres sont des catégories de foncteurs qui commutent avec les produits finis. Ils sont établis dans un « paragraphe formel» où l'on introduit en outre la notion de catégorie à limites virtuelles, et surtout de foncteur qui commute avec les limites virtuelles, cette propriété *beaucoup plus forte que la commutation avec les limites* est satisfaite par tout foncteur qui admet un adjoint.

V. Notons enfin les rapports très étroits, signalés occasionnellement de ce travail, avec la « théorie des modèles» . Le rôle privilégié de la catégorie $\underline{Ens}$ tient au fait qu'elle « sépare» les structures algébriques : Deux espèces $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ sont équivalentes au sens de (I. 2) si, et seulement si, $\underline{Alg}(\mathcal{S}, \underline{Ens})$ et $\underline{Alg}(\mathcal{S}', \underline{Ens})$ sont équivalentes, l'équivalence respectant les familles sous- jacentes.

Dans la seconde partie nous étudions le problème d'« associativité » suivant :

On se donne une famille $(\mathcal{C}^{\iota})$ $(\iota \in I)$ de catégories, un ensemble Ω, une application α d'un sous- ensemble de $\Omega \times I \times I$ dans I et, pour tout triplet (ω, ι, ι') tel que $\alpha(\omega, \iota, \iota')$ est défini, un foncteur

$$\otimes_{\omega}(\iota, \iota') : \mathcal{C}^{\iota} \times \mathcal{C}^{\iota'} \to \mathcal{C}^{\alpha(\omega, \iota, \iota')}, \quad (A, A') \rightsquigarrow A \otimes_{\omega} A'.$$

En outre, pour certains quadruplets $(\omega, \omega', \omega_1, \omega'_1) \in \Omega^4$, on suppose que, chaque fois que $\alpha(\omega', \alpha(\omega, \iota, \iota'), \iota'')$ et $\alpha(\omega_1, \iota, \alpha(\omega_1, \iota', \iota''))$ sont définis, on s'est donné *des morphismes fonctoriels* « d'association »

$$(A \otimes_\omega A') \otimes_{\omega'} A'' \to A \otimes_{\omega_1} (A' \otimes_{\omega'_1} A'').$$

La donnée des foncteurs $\otimes_\omega(\iota, \iota')$ permet de définir des foncteurs $\otimes$-itérés (cf. 2.3) par superposition, et aussi des « façons d'écrire » les foncteurs $\otimes$-itérés (définition 3.9.2).

De même les morphismes d'association permettent de définir les associations itérées (cf. 4.4) et les « transformations admissibles » (cf. 4.3) qui sont les façons d'écrire les associations itérées.

Ces données sont *formellement cohérentes* si, pour tout couple x, x' de façons d'écrire des foncteurs $\otimes$-itérés, il y a au plus une transformation admissible de source x et de but x'; elles sont *cohérentes* si, pour tout couple F, F' de foncteurs $\otimes$-itérés, il y a au plus une association itérée de source F et de but F'.

Mac-Lane [1] et Epstein [2] ont étudié le problème dans le cas où il y a *une seule catégorie* $\mathcal{C}$, *un seul foncteur* $\otimes$ et *un seul morphisme d'association,* qui en outre est un *isomorphisme,* même dans ce cas, il faut distinguer entre la cohérence et la cohérence formelle; les conditions « pentagonales » qu'ils donnent *permettent seulement de conclure à la cohérence formelle.* Le théorème essentiel (5.2.4) assure la cohérence formelle, dès qu'il y a « suffisamment » de diagrammes de degré 4, si tous les diagrammes de degré 3 et 4 commutent.

Ces conditions, de caractère fini, sont faciles à vérifier dans les « cas concrets » ; en outre, dans ces cas, la cohérence formelle implique la cohérence, d'après 5.1.4'.

Notons enfin que le théorème d'associativité reste vrai si l'on remplace partout « catégorie » par objet d'une *2*-catégorie à produits stricts, « foncteur » par « flèche » et transformation naturelle par « *2*-cellule » d'une telle *2*-catégorie. (De façon précise, les foncteurs $\otimes$-itérés et les transformations admissibles sont les opérations de dimension *1* et *2* d'un type de structures algébriques « bi-dimensionnel »).

Nous ne saurions terminer cette introduction sans dire tout ce que ce travail doit à Monsieur Ehresmann, à ses idées sur les catégories structurées, et à l'aide constante qu'il nous a apportée.

Qu'il nous soit permis d'exprimer ici notre très vive reconnaissance :

A Monsieur H. Cartan qui nous a fait l'honneur de présider notre Jury;

A Monsieur C. Chevalley dont les encouragements nous ont été un stimulant très précieux;

A Monsieur G. Choquet qui a bien voulu nous donner le sujet de la seconde thèse;

Notre reconnaissance aussi au Professeur S. Mac-Lane pour l'intérêt qu'il a apporté à notre travail;

Nos remerciements à Madame Campos pour le soin, et surtout la patience, qu'elle a apporté à la composition d'un texte bien ingrat.

PREMIERE PARTIE

1. NOTION DE STRUCTURE ALGEBRIQUE ELEMENTAIRE.

1.1. Conventions. Ayant à considérer fréquemment des familles(d'objets, de flèches, etc...) nous utiliserons les notations suivantes. Si $A, B, C, \ldots$ sont des ensembles, les familles $(X^{\alpha}_{\beta\gamma})(\alpha, \beta, \gamma) \in A \times B \times C$ (resp. $(X^{\delta})\, \delta \in D, \ldots)$ seront notées $X^{(A)}_{(BC)}$ ou $(X^{\alpha}_{\beta\gamma})$ (resp. $X^{(D)}$ ou (X^{δ}) ,...). De manière générale les indices inférieurs se rapporteront «aux sources» et les indices supérieurs «aux buts».

Dans ce qui suit I désigne un ensemble fixe, dont les éléments $\iota, \iota', \iota_1, \ldots$ sont appelés *indices*. Un *multi-indice* de *longueur* n est un élément $\mu = \iota_1 \ldots \iota_n$ du monoïde libre $M = M(I)$ engendré par I. On note 0 le multi-indice vide, élément neutre de M, et on identifie I à son image canonique dans M.

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie à produits finis, et $X^{(I)}$ une famille d'objets de $\mathcal{C}$. Pour tout $\mu = \iota_1 \ldots \iota_n \in M$ on choisit un objet $X^{\mu} = X^{\iota_1 \ldots \iota_n}$, produit dans $\mathcal{C}$ des objets $X^{\iota_1}, \ldots, X^{\iota_n}$, et des projections

$$pr^k_{\mu}(X^{(I)}) = pr^k_{\mu} : X^{\mu} \to X^{\iota_k} \quad (k = 1, \ldots, n).$$

«La» famille $X^{(M)} = (X^{\mu})$ est dite *prolongement* à M de la famille $X^{(I)}$, de même la famille de flèches $f^{(I)}_{(B)} = (f^{\iota}_{\beta} : X^{\iota}_{\beta} \to Y^{\iota}_{\beta}), (\iota, \beta) \in I \times B$, se prolonge en $f^{(M)}_{(B)} = (f^{\mu}_{\beta})$, où $f^{\mu}_{\beta} = f^{\iota_1}_{\beta} \times \ldots \times f^{\iota_n}_{\beta} : X^{\mu}_{\beta} \to Y^{\mu}_{\beta}$.

1.2. Définition fonctorielle des algèbres.

1.2.1. TYPES ET ALGEBRES.

DEFINITION 1.2.1.1. *Un type d'algèbres à une dimension sur I termes de base (abrégé en I-type) est une catégorie* $\mathbf{T}$ *ayant $M(I)$ comme ensemble des objets et telle que tout multi-indice $\mu = \iota_1 \ldots \iota_n$ est muni de flèches $pr^k_{\mu} : \iota_1 \ldots \iota_n \to \iota_k$ $(k = 1, \ldots, n)$ dites projections canoniques, qui en font, dans* $\mathbf{T}$, *le produit des objets $\iota_1, \ldots, \iota_n$.*

Si $\mathbf{T}$ et $\mathbf{T}'$ sont deux I-types, un *morphisme* de $\mathbf{T}$ dans $\mathbf{T}'$ est un foncteur de $\mathbf{T}$ dans $\mathbf{T}'$ dont la restriction aux objets est l'application identique de $M(I)$, et qui commute avec les projections canoniques.

Il est clair que tout I-type est une petite catégorie admettant des produits finis (en particulier un objet final qui est le mot vide de M) et que tout morphisme commute aux produits finis. On note $\underline{Typ}(I)$ la catégorie ayant pour classe d'objets la classe $Typ(I)$ des I-types, et pour flèches les morphismes.

REMARQUE 1.2.1.2. On n'exige pas que les projections canoniques soient distinctes. Ainsi le groupoïde associé à l'ensemble M, muni de la relation d'ordre «chaotique» (de graphe $M \times M$), est un I-type (c'est même l'objet final de $\underline{Typ}(I)$).

DEFINITION 1.2.1.3. *Soit* $\mathbf{T}$ *un* I*-type et* $\mathcal{C}$ *une catégorie à produits finis. Une algèbre de type* $\mathbf{T}$ *(ou* $\mathbf{T}$*-algèbre) de* $\mathcal{C}$ *est un foncteur* $A : \mathbf{T} \to \mathcal{C}$ *qui commute avec les produits finis. Si* A *et* A' *sont deux* $\mathbf{T}$*-algèbres, un morphisme de* A *dans* A' *est une transformation naturelle.*

La catégorie $\mathbf{T}$ étant petite, les $\mathbf{T}$-algèbres de $\mathcal{C}$ forment une classe notée $Alg(\mathbf{T}, \mathcal{C})$, et leurs morphismes déterminent une catégorie $\underline{Alg}(\mathbf{T}, \mathcal{C})$.

Dualement, pour un I-type $\mathbf{T}$ et une catégorie $\mathcal{C}$ admettant des sommes finies, on définit les co-algèbres de type $\mathbf{T}$ dans $\mathcal{C}$ (ou $\mathbf{T}$-coalgèbres) comme les foncteurs $\mathbf{T}^* \to \mathcal{C}$ qui commutent avec les sommes finies, et la catégorie $\underline{Coalg}(\mathbf{T}, \mathcal{C})$ comme la sous-catégorie pleine de $\underline{Fonct}(\mathbf{T}^*, \mathcal{C})$ ayant pour objets les coalgèbres. L'isomorphisme canonique évident

$$\underline{Coalg}(\mathbf{T}, \mathcal{C}) \simeq [\underline{Alg}(\mathbf{T}, \mathcal{C}^*)]^*$$

permet de dualiser aux coalgèbres les définitions et résultats relatifs aux algèbres. Nous laisserons presque toujours au lecteur le soin de faire la traduction.

REMARQUE 1.2.1.4. Dans ce paragraphe, le fait que $\mathcal{C}$ admet des produits (resp. sommes) finis sert essentiellement à simplifier l'exposition. Ces restrictions seront levées au paragraphe 2.

EXEMPLE 1.2.1.5. Si $I = 1 (= \{\emptyset\})$, M s'identifie canoniquement à $\mathbf{N}$ et la catégorie $\mathcal{J}$ des théories algébriques de Lawvere [1] s'identifie à la catégorie $\underline{Typ}(1)$ des types d'algèbres à une dimension sur 1 terme. Ses catégories algébriques ne sont autres que les catégories $\underline{Alg}(\mathbf{T}, \underline{Ens})$ où $\mathbf{T}$ est un I-type.

De manière générale nous appellerons *catégories I-algébriques* les catégories $\underline{Alg}(\mathbf{T}, \underline{Ens})$ où $\mathbf{T}$ est un I-type.

1.2.2. LE FONCTEUR D'OUBLI. Soit $\mathbf{T}$ un I-type et $\mathcal{C}$ une catégorie à produits finis. A toute $\mathbf{T}$-algèbre $A : \mathbf{T} \to \mathcal{C}$, on associe une famille $0(A) = (A^\iota)\ (\iota \in I)$, où $A^\iota = A(\iota)$, d'objets de $\mathcal{C}$, dite *sous-jacente*, et A est dite $\mathbf{T}$-algèbre *sur* cette famille. Si $u : A \to A' \in \underline{Alg}(\mathbf{T}, \mathcal{C})$ est un morphisme, défini par la famille de flèches $(u(\mu) : A(\mu) \to A'(\mu))\ (\mu \in M)$, la sous-famille $(u^\iota = u(\iota))\ (\iota \in I)$ est un morphisme $0(u) : 0(A) \to 0(A')$ dans $\mathcal{C}^I$. D'où le foncteur *d'oubli*

$$0(\mathbf{T}, \mathcal{C}) = 0 : \underline{Alg}(\mathbf{T}, \mathcal{C}) \to \mathcal{C}^I \quad A \rightsquigarrow (A^\iota);\ u \rightsquigarrow (u^\iota).$$

Soit $\mathbf{T}$ un I-type. Une *opération* de $\mathbf{T}$ est une flèche $\omega : \mu = \iota_1 \ldots \iota_n \to \iota$, dont le but appartient à I. Le couple $(\mu, \iota) \in M \times I$ est le *type* $\tau(\omega)$ de l'opération ω. On note $\Omega^\iota_\mu(\mathbf{T})$ l'ensemble des opérations de type (μ, ι) et

$$\Omega(\mathbf{T}) = \bigcup_{\mu, \iota} \Omega^\iota_\mu(\mathbf{T}).$$

Si $A : \mathbf{T} \to \mathcal{C}$ est une $\mathbf{T}$-algèbre, toute opération $\omega : \iota_1 \ldots \iota_n \to \iota$ détermine une flèche $A(\omega) : A(\iota_1 \ldots \iota_n) = A^{\iota_1} \times \ldots \times A^{\iota_n} \to A(\iota) = A^\iota$, c'est-à-dire au sens usuel une loi de composition externe, dite *structurale, associée à* ω entre les objets $A^{\iota_1}, \ldots, A^{\iota_n}$ et A^ι de la famille $0(A)$. En particulier si $\omega = pr^k_\mu : \iota_1 \ldots \iota_n \to \iota_k$ est une projection canonique, la loi associée est la projection $A^{\iota_1} \times \ldots \times A^{\iota_n} \to A^{\iota_k}$.

LEMME 1.2.2.1. *Soient A et $B : \mathbf{T} \to \mathcal{C}$ deux $\mathbf{T}$-algèbres, et $u^\iota : A^\iota \to B^\iota$ un morphisme des familles sous-jacentes. Il existe un morphisme $u : A \to B$ tel que $0(u) = (u^\iota)$ ssi, pour toute opération $\omega : \mu = \iota_1 \ldots \iota_n \to \iota$ de $\mathbf{T}$, le diagramme :*

$$\begin{array}{ccc} A(\mu) = A^{\iota_1} \times \ldots \times A^{\iota_n} & \xrightarrow{A(\omega)} & A^\iota = A(\iota) \\ {\scriptstyle u^{\iota_1} \times \ldots \times u^{\iota_n}} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle u^\iota} \\ B(\mu) = B^{\iota_1} \times \ldots \times B^{\iota_n} & \xrightarrow{B(\omega)} & B^\iota = B(\iota) \end{array}$$

est commutatif. Le morphisme u *est alors unique.*

Il suffit de poser, pour $\mu = \iota_1 \dots \iota_n \in ob(\mathbf{T})$,

$$u(\mu) = u^{\iota_1} \times \dots \times u^{\iota_n} : A(\mu) \to B(\mu),$$

la vérification est immédiate.

Il en résulte, en particulier, qu'une algèbre «est définie» par sa famille sous-jacente et ses opérations structurales. De façon précise, soient A et $B : \mathbf{T} \to \mathcal{C}$ deux $\mathbf{T}$-algèbres telles que $A^{\iota} = B^{\iota}$ $(\iota \in I)$ et $A(\omega) = B(\omega)$ $(\omega \in \Omega)$. Si $\mu = \iota_1 \dots \iota_n$ est un mot de longueur $n \geq 1$, les lois structurales $A(pr_{\mu}^{1})$ et $B(pr_{\mu}^{1})$, égales, ont même source, donc $A(\mu) = B(\mu)$. En appliquant 1.2.2.1. à la famille $u^{\iota} = id(A^{\iota})$ on trouve un isomorphisme $u : A \to B$ tel que $u(\mu) = id(A(\mu))$ si $\mu \neq 0$. Ainsi les foncteurs A et B coïncident sauf peut être sur l'objet 0, auquel cas $A(0)$ et $B(0)$ sont deux objets finaux de $\mathcal{C}$, reliés par l'isomorphisme évident. (Il est facile de voir que si dans $\mathbf{T}$ il existe une flèche de source 0, autre que $id(0)$, les foncteurs A et B coïncident au sens strict). Dans la suite pour éviter de tels isomorphismes triviaux, on supposera choisi un objet final dans chaque catégorie à produits finis, et les algèbres seront les *foncteurs pointés* transformant 0 en cet objet.

Les homomorphismes d'algèbres s'interprètent aussi de la manière usuelle. D'après 1.2.2.1. en effet, un morphisme «est» un morphisme des familles sous-jacentes, *compatible avec les lois de composition structurale,* En particulier :

COROLLAIRE 1.2.2.2. *Le foncteur d'oubli :* $\underline{Alg}(\mathbf{T}, \mathcal{C}) \to \mathcal{C}^{I}$ *est fidèle.*

Soit $A : \mathbf{T} \to \mathcal{C}$ une $\mathbf{T}$-algèbre et $(u^{\iota} : A^{\iota} \xrightarrow{\sim} B^{\iota})$ $(\iota \in I)$ un isomorphisme de $0(A)$ sur un objet (B^{ι}) de $\mathcal{C}^{I}$. Si $u^{(M)}$ est «le» prolongement de $u^{(I)}$, c'est un isomorphisme de $A^{(M)}$ sur $B^{(M)}$. La correspondance $\mu \leadsto B^{\mu}$ se prolonge de manière évidente en un foncteur $B : \mathbf{T} \to \mathcal{C}$ tel que la famille (u^{μ}) définit un isomorphisme $A \xrightarrow{\sim} B$. La $\mathbf{T}$-algèbre B est dite déduite de A par *transport de structure* (au moyen de l'isomorphisme $u^{(I)}$). Notons que B n'est pas unique. Elle dépend du prolongement $B^{(M)}$ choisi pour la famille $B^{(I)}$. A un autre prolongement $\overline{B}^{(M)}$ correspond une algèbre $\overline{B}$, munie d'un isomorphisme canonique $B \xrightarrow{\theta} \overline{B}$ tel que $O(\theta)$ soit le morphisme identique de $B^{(I)}$. De tels isomorphismes sont dits *triviaux*. (En choisissant des foncteurs produits : $\mathcal{C}^n \to \mathcal{C}$ $(n \in \mathbf{N})$ on peut se restreindre au cas où les seuls isomorphismes triviaux sont les identités) (cf. 2.1.4.3).

1.3. Définitions usuelles des algèbres.

1.3.1. SCHEMAS D'OPERATIONS SUR I-TERMES. Un *I-schéma d'opérations* Σ est un couple (Ω, τ) formé d'un ensemble Ω et d'une application $\tau : \Omega \to M \times I$.

Les éléments de Ω sont les *opérations* du schéma, $\tau(\omega) = (\iota_1 \dots \iota_n, \iota)$ est le *type* de l'opération ω, caractérisé par son *multi-indice source* $\mu = = \iota_1 \dots \iota_n$, et son *indice but* ι, et la longueur n de μ est le *degré* de ω. On note Ω^ι_μ (resp. $\Omega_\mu, \Omega^\iota, \Omega_n$) l'ensemble des opérations de type (μ, ι) (resp. de source μ, de but ι, de degré n) et si $\omega \in \Omega^\iota_\mu$, on note $\omega : \mu \to \iota$. Si $\omega : \iota^n \to \iota$, ω est une opération *interne* (dans ι). Les opérations de degré 0, $\omega : 0 \to \iota$, sont des opérations internes particulières dites *constantes*.

Si $\Sigma' = (\Omega', \tau')$ est un autre I-schéma, un *I-morphisme* de Σ dans Σ' est un triple (Σ, f, Σ') dans lequel $f : \Omega \to \Omega'$ est une application qui respecte les types, c'est-à-dire telle que $\tau' \circ f = f \circ \tau$. On note $f^\iota_\mu : \Omega^\iota_\mu \to \Omega'^\iota_\mu$ (resp. $f_\mu : \Omega_\mu \to \Omega'_\mu, \dots$) les «restrictions» de f. On désigne par $\underline{Op}(I)$ la catégorie ayant pour objets les I-schémas d'opération et pour flèches les I-morphismes. Dans la suite on abrègera (Σ, f, Σ') en f et on notera par la même lettre τ les différentes «applications types» pour tous les I-schémas, conformément aux usages.

REMARQUE 1.3.1.1. La donnée d'un I-schéma «équivaut» à la donnée d'une famille $\Omega^{(I)}_{(M)}$ d'ensembles. Formellement : on détermine une équivalence

$$\Sigma \rightsquigarrow (\Omega^\iota_\mu), \qquad f \rightsquigarrow (f^\iota_\mu)$$

définie entre $\underline{Op}(I)$ et la catégorie $\underline{Ens}^{M \times I}$ des familles d'ensembles indéxées par $M \times I$. On pourra donc désigner un I-schéma Σ par la famille (Ω^ι_μ) et «transporter» sur $\underline{Op}(I)$ les propriétés de la catégorie $\underline{Ens}^{M \times I}$; par exemple : $\underline{Op}(I)$ admet des limites inductives et projectives qui se calculent «terme à terme» (ainsi la *somme* $\overline{\Sigma}$ de deux I-schémas Σ et Σ' est définie par $\overline{\Omega}^{\iota}_{\mu} = \Omega^{\iota}_{\mu} \amalg \Omega'^{\iota}_{\mu}$, un *sous I-schéma* Σ' de Σ «est» une famille Ω'^{ι}_{μ} de sous-ensembles des Ω^{ι}_{μ}; si $f : \Sigma \to \Sigma'$ est un morphisme, son *image* $f(\Sigma)$ est le sous-schéma de $\Sigma' = (f(\Omega^{\iota}_{\mu}))$, un *quotient* Σ'' de Σ est une famille (Ω''^{ι}_{μ}) d'ensembles quotients des Ω^{ι}_{μ}, etc...).

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie à produits finis. Une *préalgèbre* de schéma Σ est un couple $P = (X^{(I)}, \varphi^{(\Omega)})$ d'une famille (X^{ι}) $(\iota \in I)$ d'objets de $\mathcal{C}$ et d'une famille (φ^{ω}) $(\omega \in \Omega)$ de flèches de $\mathcal{C}$ telles que, si ω est de type $(\iota_1 \dots \iota_n, \iota)$, $\varphi^{\omega} : X^{\iota_1} \times \dots \times X^{\iota_n} \to X^{\iota}$. La famille $X^{(I)}$ est *sous-jacente* à P, et φ^{ω} est la *loi de composition structurale associée à* ω. Si $\overline{P} = (\overline{X}^{(I)}, \overline{\varphi}^{(\Omega)})$ est une autre préalgèbre de même schéma Σ, un *morphisme* de P dans $\overline{P}$ est un triple $(P, u^{(I)}, \overline{P})$, où $u^{(I)} = (u^{\iota} : X^{\iota} \to \overline{X}^{\iota})$ $(\iota \in I)$ est une famille de flèches de $\mathcal{C}$ *compatibles* avec les opérations *structurales* c'est-à-dire rendant commutatifs les diagrammes :

$$\begin{tikzcd} X^{\iota_1} \times \dots \times X^{\iota_n} \arrow[r, "\varphi^{\omega}"] \arrow[d, "u^{\iota_1} \times \dots \times u^{\iota_n}"'] & X^{\iota} \arrow[d, "u^{\iota}"] \\ \overline{X}^{\iota_1} \times \dots \times \overline{X}^{\iota_n} \arrow[r, "\overline{\varphi}^{\omega}"] & \overline{X}^{\iota} \end{tikzcd} \qquad (\omega \in \Omega)$$

On note $\underline{Préalg}(\Sigma, \mathcal{C})$ la catégorie ainsi déterminée, $Préalg(\Sigma, \mathcal{C})$ la classe de ses objets et 0 le *foncteur d'oubli* : $\underline{Préalg}(\Sigma, \mathcal{C}) \to \mathcal{C}^I$: $(X^{(I)}, \varphi^{(\Omega)}) \rightsquigarrow X^{(I)}$, $(P, u^{(I)}, \overline{P}) \rightsquigarrow u^{(I)}$. Conformément aux usages, on abrègera les notations en désignant une préalgèbre par $(X^{\iota}, \varphi^{\omega})$ ou même (X^{ι}), un morphisme par (u^{ι}) et les lois structurales φ^{ω} associées, dans les différentes préalgèbres, à une même opération $\omega \in \Omega$ seront notées par le même symbole ω si aucune confusion n'est possible.

REMARQUE 1.3.1.2. La notion de préalgèbre a une «interprétation» très commode : soit $\mathcal{C}$ une catégorie à produits finis. Pour tout objet $X^{(I)}$ de $\mathcal{C}^I$ et tout $(\mu, \iota) \in M \times I$ on pose $\Omega^{\iota}_{\mu}(X^{(I)}) = \{\mu\} \times Hom(X^{\mu}, X^{\iota}) \times \{\iota\}$. Le I-schéma ainsi déterminé est dit *schéma des lois des compositions de* $X^{(I)}$ et noté $\Sigma(X^{(I)})$. Une préalgèbre de schéma Σ ayant $X^{(I)}$ comme famille sous-jacente s'identifie à un morphisme de I-schémas

$$f : \Sigma \to \Sigma(X^{(I)})$$

au moyen de la correspondance $f \rightsquigarrow (X^{(I)}, (f(\omega)) \ (\omega \in \Omega))$. En appliquant le même procédé dans la catégorie $\underline{Fl}(\mathcal{C})$ des flèches de $\mathcal{C}$ les morphismes de préalgèbres de $\mathcal{C}$ s'identifient aux préalgèbres de $\underline{Fl}(\mathcal{C})$.

Notons que la correspondance $X^{(I)} \rightsquigarrow \Sigma(X^{(I)})$, tout en étant «naturelle», ne se prolonge pas en un foncteur de $\mathcal{C}^{(I)}$ dans $\underline{Op}(I)$. La situation est analogue à celle qui se présente quand on associe à un groupe abélien X l'anneau $End(X)$ de ses endomorphismes. A un morphisme de groupes abéliens $f : X \to \overline{X}$, ne correspond pas, en général, un homomorphisme d'algèbres de $End(X)$ dans $End(X)$. Si Λ est un anneau, une structure de Λ-module sur X «est» un homomorphisme $\Lambda \to End(X)$. En considérant des structures supplémentaires sur Λ (unités, etc...) on obtient sur X des superstructures de la structure de Λ-module. Dans ce qui suit on va «préciser» la notion de schéma d'opérations au moyen de projections, relations, multiplications, etc..., les schémas de la forme $\Sigma(X^{(I)})$ seront canoniquement munis de ces structures supplémentaires et les morphismes à valeurs dans $\Sigma(X^{(I)})$ respectant ces structures permettront de préciser la notion de préalgèbre pour aboutir à celle d'algèbre.

Remarquons que, si $\mathbf{T}$ est un I-type, les $\mathbf{T}$-algèbres de $\mathcal{C}$ sont susceptibles d'une même interprétation. Soit (X^{ι}) une famille d'objets de $\mathcal{C}$, (X^{μ}) son prolongement. Pour tout $(\mu, \mu') \in M \times M$ posons

$$Hom_{\mathbf{T}(X^{\iota})}(\mu, \mu') = \{\mu\} \times Hom_{\mathcal{C}}(X^{\mu}, X^{\mu'}) \times \{\mu'\}.$$

Pour tout $(\mu, \mu', \mu'') \in M \times M' \times M$, on a une application :

$$Hom_{\mathbf{T}(X^{\iota})}(\mu, \mu') \times Hom_{\mathbf{T}(X^{\iota})}(\mu', \mu'') \xrightarrow{\sim}$$

$$\xrightarrow{\sim} Hom_{\mathcal{C}}(X^{\mu}, X^{\mu'}) \times Hom_{\mathcal{C}}(X^{\mu'}, X^{\mu''}) \to Hom_{\mathcal{C}}(X^{\mu}, X^{\mu''}) \to Hom_{\mathbf{T}(X^{\iota})}(\mu, \mu'').$$

On vérifie sans peine que ces accouplements déterminent un I-type $\mathbf{T}(X^{\iota})$ dit *type de* (X^{ι}) *dans* $\mathcal{C}$, et qu'une algèbre de type $\mathbf{T}$ dans $\mathcal{C}$ ayant (X^{ι}) comme famille sous-jacente s'identifie à un morphisme de I-types

$$A : \mathbf{T} \to \mathbf{T}(X^{\iota}).$$

Notons qu'ici encore la correspondance $(X^{\iota}) \rightsquigarrow \mathbf{T}(X^{\iota})$ «n'est pas» un foncteur de $\mathcal{C}^{(I)}$ dans $\underline{Typ}(I)$.

REMARQUE 1.3.1.3. Rappelons la définition de schéma d'opérateurs de Higgins [1]. Un tel schéma Σ est défini par la donnée d'un ensemble I, d'un ensemble Ω muni d'une partition $\Omega = \bigcup_n \Omega_n$ et d'une application α qui associe à tout élément ω de degré n de Ω une relation $(n+1)$-aire, notée $\omega\alpha$, dans I. Une algèbre de schéma Σ est définie par la donnée d'une famille (A_ι) $(\iota \in I)$ d'ensembles munie, pour tout $\omega \in \Omega_n$ et tout $(\iota_1, \ldots, \iota_n, \iota) \in \omega\alpha$, d'une application $A_{\iota_1} \times \ldots \times A_{\iota_n} \to A_\iota$; les morphismes de Σ-algèbres étant définis de manière évidente, on obtient ainsi une catégorie.

Soit Σ un tel schéma d'opérateurs. On définit le I-schéma *associé* $\Sigma' = (\Omega'^{\iota}_{\mu})$ en posant, pour tout $\mu = \iota_1 \ldots \iota_n \in M$ et $\iota \in I$,

$$\Omega'^{\iota}_{\mu} = \{u\} \times \{\iota\} \times \{\omega\} (\omega \in \Omega_n \text{ et } (\iota_1, \ldots, \iota_n, \iota) \in \omega\alpha) .$$

Il est trivial avec cette définition de vérifier que la catégorie des algèbres de schéma Σ au sens de Higgins est isomorphe à $\underline{Alg}(\Sigma', \underline{Ens})$.

Inversement si $\overline{\Sigma} = (\overline{\Omega}^{\iota}_{\mu})$ est un I- schéma d'opérations, on définit un schéma d'opérateurs au sens de Higgins en posant $\overline{\Omega} = \bigcup \overline{\Omega}^{\iota}_{\mu}, (\mu, \iota) \in M \times I$, les $\overline{\Omega}^{\iota}_{\mu}$ étant les ensembles d'opérations de degré n, et l'application α étant définie par $\overline{\omega}\alpha = (\iota_1, \ldots, \iota_n, \iota)$ pour $\overline{\omega} \in \overline{\Omega}^{\iota}_{\iota_1 \ldots \iota_n}$. La catégorie des algèbres sur ce schéma d'opérateurs est isomorphe à $\underline{Alg}(\overline{\Sigma}, \underline{Ens})$. Ainsi «pour l'algèbre sur les ensembles», les deux notions sont équivalentes, la seule différence est qu'un même symbole ω peut désigner plusieurs opérations différentes avec la définition de Higgins, et que dans ce cas nous utilisons des symboles distincts. Les raisons de ce choix, qui correspond d'ailleurs à l'usage, apparaîtront plus clairement dans la suite, en particulier dans la construction des opérations composées 1.3.3 et des relations 1.3.5.

Il convient de noter que les définitions de morphisme de schéma sont «pour le moment» distinctes; Higgins faisant varier I mais pas Ω, alors que nous faisons l'inverse. En réalité la «bonne notion» est celle où l'on fait varier les deux, elle sera introduite dans la suite, pour éviter au début des complications de notations et de terminologie.

REMARQUE 1.3.1.4. Soit $\Sigma = (I, \Phi, d)$ un schéma de diagramme au sens de Grothendieck [1]. On définit le I-schéma d'opérations *associé* à Σ, $\Sigma' = (\Omega^\iota_\mu)$, par $\Omega^\iota_\mu = \emptyset$ si $\mu \notin I$ et $\Omega^{\iota'}_{\iota} = d^{-1}(\{(\iota, \iota')\})$. La correspondance $\Sigma \rightsquigarrow \Sigma'$ détermine une équivalence entre la catégorie $\underline{Diag}(I)$ des schémas de diagramme ayant I comme ensemble des sommets, et la sous-catégorie pleine de $\underline{Typ}(I)$ ayant pour objets les I-schémas dont toutes les opérations sont de degré 1.

En outre si $\mathcal{C}$ est une catégorie à produits finis (voir remarque 1.2.4), pour tout $\Sigma \in Diag(I)$, les catégories $\mathcal{C}^\Sigma$ et $\underline{Préalg}(\Sigma', \mathcal{C})$ sont «canoniquement» équivalentes. Ainsi la notion de diagramme se réduit à la notion de schéma d'opérations «homogène de degré 1».

1.3.2. PROJECTIONS. Une *I-projection standard* est un couple (μ, k) formé d'un multi-indice $\mu = \iota_1 \dots \iota_n$ et d'un entier $k \in \{1, \dots, n\}$. On note Ω_o l'ensemble de ces couples, $\tau : \Omega_o \to M \times I$ l'application

$$(\iota_1 \dots \iota_n, k) \rightsquigarrow (\iota_1 \dots \iota_n, \iota_k)$$

et $S = (\Omega_o, \tau)$ le *I-schéma standard.* Un *I-schéma à projections* est couple $\Pi = (\Sigma, p)$ d'un I-schéma Σ et d'un morphisme $p : S \to \Sigma \in Op(I)$. Les opérations $p(\mu, k)$ du *schéma sous-jacent* Σ sont dites *projections* et notées pr^k_μ, et Π est désigné par (Σ, pr^k_μ) ou $(\Omega^\iota_\mu, pr^k_\mu)$. Un morphisme de Π dans $\Pi' = (\Sigma', p')$ est un triple (Π, f, Π'), abrégé en f, où

$$f : \Sigma \to \Sigma' \in \underline{Op}(I)$$

commute aux projections (i.e. $f \circ p = p'$). On note $\underline{Proj}(I)$ la catégorie des I-schémas à projections.

La catégorie $\underline{Op}(I)$ ayant des sommes finies, le foncteur *d'oubli des projections* $(\Sigma, p) \rightsquigarrow \Sigma$ de $\underline{Proj}(I)$ dans $\underline{Op}(I)$ a un adjoint à gauche $\Pi(\,.\,)$ que nous explicitons pour fixer la terminologie. Soit Σ un I-schéma; le schéma à projections *associé* à Σ est $\Pi(\Sigma) = (S \amalg \Sigma, p_\Sigma)$ où $p_\Sigma : S \to S \amalg \Sigma$ est l'injection canonique; il est clair que pour tout $\Pi' = (\Sigma', p')$ on a $Hom_{\underline{Op}}(\Sigma, \Sigma') \simeq Hom_{\underline{Proj}}(\Pi(\Sigma), \Pi')$.

Soit $X^{(I)}$ une famille d'objets d'une catégorie $\mathcal{C}$ à produits finis. Pour tout $(\iota_1 \dots \iota_n, k) \in \Omega_o$ soit pr^k_μ la projection canonique :

$$X^{\iota_1} \times \dots \times X^{\iota_n} \to X^{\iota_k}.$$

Le *schéma à projections de* $X^{(I)}$ est $\Pi(X^{(I)}) = (\Sigma(X^{(I)}), pr^k_\mu)$.

Soit $\Pi = (\Sigma, p) \in Proj(I)$; un morphisme de Π dans $\Pi(X^{(I)})$ est une préalgèbre *compatible avec les projections* (de schéma Π, sur $X^{(I)}$). Elle s'identifie à une préalgèbre sur $X^{(I)}$ de schéma Σ telle que pour tout $(\mu, k) \in \Omega_0$ la loi de composition structurale associée à pr^k_μ est la projection canonique pr^k_μ. On note $\underline{Proj}(\Pi, \mathcal{C})$ la sous-catégorie pleine de $\underline{Préalg}(\Sigma, \mathcal{C})$ ayant pour objets ces préalgèbres.

Soit P une préalgèbre de schéma Σ ; en adjoignant à ses lois structurales les projections canoniques, on obtient une préalgèbre $\Pi_*(P)$, compatible avec les projections, de schéma $\Pi(\Sigma)$. Inversement si P' est une préalgèbre de schéma $\Pi(\Sigma)$, compatible avec les projections, en restreignant la famille des lois structurales à $\Sigma \subset S \amalg \Sigma$, on obtient une préalgèbre $\Pi^*(P')$ de schéma Σ. On vérifie sans peine que $P \rightsquigarrow \Pi_*(P)$ et $P' \rightsquigarrow \Pi^*(P')$ se prolongent en deux foncteurs

$\Pi_* : \underline{Préalg}(\Sigma, \mathcal{C}) \to \underline{Proj}(\Pi(\Sigma), \mathcal{C})$ dit *adjonction de projections,*

$\Pi^* : \underline{Proj}(\Pi(\Sigma), \mathcal{C}) \to \underline{Préalg}(\Sigma, \mathcal{C})$ dit *suppression des projections,*

et que l'on a :

PROPOSITION 1.3.2.1. *Les fonctions Π_* et Π^* sont quasi-inverses, et l'équivalence qu'elles définissent est compatible avec les foncteurs d'oubli.*

1.3.3. OPERATIONS COMPOSEES. Soit $\Sigma = (\Omega, \tau)$ un I-schéma d'opérations. Nous nous proposons de construire toutes les opérations formelles que l'on peut déduire de celles de Ω «par superposition». Notons Ω^+ l'ensemble des opérations de Ω de degré > 0. Soit α une bijection de Ω^+ sur un ensemble A, disjoint de Ω^+. Notons $\Omega' = \Omega \cup A$ (*). On définit une application $n : \Omega' \to \mathbf{N}$, par $n(\omega) =$ *degré de* ω $(\omega \in \Omega)$ et $n(a) = 0$ $(a \in A)$. Soit $M(\Omega')$ le monoïde libre engendré par Ω' et $\Phi(\Omega')$ le sous-ensemble de $M(\Omega')$ formé des mots significatifs pour la graduation $\omega' \rightsquigarrow n(\omega')$ de Ω', au sens de Bourbaki [1]. Pour tout mot $m \in M(\Omega)$, soit $\lambda(m)$ la longueur de m. Par récurrence sur la longueur des mots on définit un sous-ensemble $\overline{\Omega}$ de $\Phi(\Omega')$ dit ensemble des *opérations composées de* Σ

(*) Il serait plus «canonique» de prendre $\Omega' = \Omega \amalg \Omega^+$, mais les écritures seraient plus lourdes.

et une application $\overline{\tau} : \overline{\Omega} \to M \times I$, de la manière suivante :

(i) Les mots de degré 0 appartiennent à $\overline{\Omega}$, $\overline{\tau}(\omega) = \tau(\omega)$ si $\omega \in \Omega$, et $\overline{\tau}(a) = \tau(\alpha^{-1}(a))$ si $a \in A$.

(ii) Soit φ une expression significative de longueur $n > 1$; φ s'écrit de manière unique $\varphi = \omega_o \varphi_1 \dots \varphi_p$ avec $\omega_o \in \Omega_p$, $\varphi_k \in \Phi(\Omega'), \lambda(\varphi_k) \leq \leq n-1$, $(k = 1, \dots, p)$. Alors φ appartient à $\overline{\Omega}$ si les conditions *(a)* et *(b)* ci-dessous sont réalisées :

(a) $\varphi_1, \dots, \varphi_p \in \overline{\Omega}$, alors $\overline{\tau}(\varphi_k) = (\mu_k, \iota_k)$ est défini par l'hypothèse de récurrence. Notons $\tau(\omega_o) = (\mu_o, \iota_o)$.

(b) $\mu_1 = \dots = \mu_p$ et $\underline{\mu}_o = \iota_1 \dots \iota_p$.

On pose dans ces conditions $\overline{\tau}(\varphi) = (\mu, \iota_o)$, où μ est la valeur commune $\mu_1 = \dots = \mu_p$. Le I-schéma $(\overline{\Omega}, \overline{\tau})$ est dit schéma composé de Σ et noté $C(\Sigma)$. L'inclusion $\Omega \subset \overline{\Omega}$ définit un morphisme de I-schéma $j_\Sigma : \Sigma \to C(\Sigma)$.

PROPOSITION 1.3.3.1. *Toute opération composée $\overline{\omega} \in \overline{\Omega}_n$ s'écrit de manière unique*

$$\overline{\omega} = \omega_o \overline{\omega}_1, \dots \overline{\omega}_p, \ \omega_o \in \Omega, \ \overline{\omega}_k \in \overline{\Omega}_n \text{ avec } \lambda(\overline{\omega}_k) < \lambda(\overline{\omega}).$$

Soient $\omega_o \in \Omega^{\iota_o}_{\mu_o}$, $\overline{\omega}_k \in \overline{\Omega}^{\iota_k}_{\mu_k}$ $(k = 1, \dots, p)$; *alors* $\overline{\omega} = \omega_o \overline{\omega}_1 \dots \overline{\omega}_p \in \overline{\Omega}$ *si et seulement si* $\mu_1 = \dots = \mu_p$ *et* $\mu_o = \mu_1 \dots \mu_p$. *Dans ce cas*

$$\tau(\overline{\omega}) = (\mu, \iota_o).$$

Cela résulte trivialement des définitions, et des résultats de [1].

Soit $\Sigma' = (\Omega', \tau')$ un autre I-schéma et $f : \Omega \to \Omega'$ un morphisme de Σ dans Σ'. Par récurrence sur la longueur des mots de $\overline{\Omega}$ on prolonge f, de manière unique, en une application $\overline{f} : \overline{\Omega} \to \overline{\Omega}'$ telle que

$$\overline{f}(\omega_o \overline{\omega}_1 \dots \overline{\omega}_p) = f(\omega_o) \overline{f}(\overline{\omega}_1) \dots \overline{f}(\overline{\omega}_p)$$

et on vérifie que $\overline{\tau} = \overline{\tau}' \circ \overline{f}$, d'où le foncteur «*schéma composé*» :

$$C : \underline{Op}(I) \to \underline{Op}(I), \Sigma \rightsquigarrow C(\Sigma); \ (\Sigma, f, \Sigma') \rightsquigarrow (C(\Sigma), \overline{f}, C(\Sigma')).$$

Il est clair que les j_Σ définissent une transformation naturelle

$$j : Id(\underline{Op}(I)) \to C.$$

La notion de schéma composé s'étend à la situation «avec projection» de la manière suivante : Si $\Pi = (\Sigma, p)$ est un schéma à projections, le *composé de* Π est le schéma à projections $C(\Pi)$ ayant $C(\Sigma)$ comme schéma sous-jacent, et $j_\Sigma \circ p : S \to \Sigma \to C(\Sigma)$ comme «projection». D'où le *foncteur schéma à projections composé,* noté encore

$$C : \underline{Proj}(I) \to \underline{Proj}(I), \ \Pi \rightsquigarrow C(\Pi).$$

D'autre part, $(p, j_\Sigma, j_\Sigma \circ p)$ est un morphisme de schémas à projections $j_\Pi : \Pi \to C(\Pi)$ et les j_Π définissent une transformation naturelle

$$Id(\underline{Proj}(I)) \to C.$$

Le foncteur composé $C \circ \Pi(.) : \underline{Op}(I) \to \underline{Proj}(I) \to \underline{Proj}(I)$ associe à tout I-schéma $\Sigma = (\Omega^\iota_\mu)$ le I-schéma à projections $C\Pi(\Sigma) = (\hat{\Sigma}, \hat{p})$, où $\hat{\Sigma} = (\hat{\Omega}^\iota_\mu) = C(S \amalg \Sigma)$ est le *saturé* de Σ dont les opérations $\hat{\omega}$ sont toutes les opérations composées construites à partir des projections standard et des $\omega \in \Omega$, et $\hat{p}$ est le morphisme composé

$$S \xrightarrow[p_\Sigma]{} S \amalg \Sigma \xrightarrow[j_{S\amalg\Sigma}]{} C(S \amalg \Sigma).$$

Il est clair que la saturation $\Sigma \rightsquigarrow C(S \amalg \Sigma)$ est un foncteur et que les morphismes composés

$$\Sigma \to S \amalg \Sigma \xrightarrow[j_{S\amalg\Sigma}]{} C(S \amalg \Sigma) = \hat{\Sigma} \quad (\Sigma \in Op(I))$$

définissent une transformation naturelle, dite *inclusion canonique,* et notée $\Sigma \subset\!\!: \hat{\Sigma}$.

REMARQUE 1.3.3.2. Les définitions des mots significatifs (Bourbaki [1]), des Σ-mots (Higgins [1]), ou des Ω-mots (Cohn [1]) «mélangent» les opérations composées et les variables sur lesquelles elles opèrent. Cela ne permet pas de dégager la structure abstraite du saturé $\hat{\Sigma}$ d'un I-schéma Σ, ou du compositeur $\mathcal{K}(\Sigma)$ engendré par Σ (cf. 1.4) indépendamment de la façon dont ils peuvent opérer sur des ensembles. (Dans le cas particulier d'un schéma de diagramme Σ (cf. 1.3. 3.4) cela revient à ne pas définir la catégorie libre $\mathcal{C}(\Sigma)$ engendrée par Σ, à ne considérer que les foncteurs de $\mathcal{C}(\Sigma)$ dans $\underline{Ens}$, en les définissant comme «familles d'applications, stables par composition», engendrées par les diagrammes D de schéma Σ, dans $\underline{Ens}$).

Même si l'on se restreint aux structures algébriques sur les ensembles, cela rend difficile et artificielle la définition des Σ-identités (Higgins [1]) ou des Ω-lois (Cohn [1]), c'est-à-dire des axiomes de la structure (1. 3.5 ci-dessous), car il est nécessaire d'utiliser des «alphabets» auxiliaires, tout à fait «parasites». En outre il devient impossible de définir les morphismes d'une espèce de structures dans une autre, si l'on ne dispose pas de l'objet abstrait «espèce de structures», et encore moins de parler de la catégorie des espèces de structures algébriques. (Voir note p. 19 et 1.4).

1.3.4. I- COMPOSITEURS. Soit $\Sigma = (\Omega^{\iota}_{\mu})$ un I-schéma d'opérations et (Ω^{ν}_{μ}) la famille d'ensembles définie, suivant les conventions de 1.1, par :

$$\Omega^{\nu}_{\mu} = \Omega^{\iota_1}_{\mu} \times \ldots \times \Omega^{\iota_n}_{\mu} \quad (\mu \in M,\ \nu = \iota_1 \ldots \iota_n \in M).$$

Une *multiplication* T sur Σ est une famille $(T^{\iota}_{\nu\mu})$ $(\iota, \nu, \mu) \in I \times M \times M$, où $T^{\iota}_{\nu\mu} : \Omega^{\iota}_{\mu} \times \Omega^{\nu}_{\mu} \to \Omega^{\iota}_{\mu}$ est une application notée

$$(\omega, (\omega_1, \ldots, \omega_n)) \to \omega(\omega_1, \ldots, \omega_n).$$

Si Σ' est un autre I-schéma, muni d'une multiplication T', un morphisme $f : \Sigma \to \Sigma'$ est *compatible avec les multiplications* si $f(\omega(\omega_1, \ldots, \omega_n)) = f(\omega)(f(\omega_1), \ldots, f(\omega_n))$. (Les deux membres sont toujours définis en même temps, car f respecte les types). On note $\underline{T\text{-}Op(I)}$ la catégorie ainsi déterminée.

Soit (Σ, T) un *schéma multiplicatif*; un sous-schéma (Ω'^{ι}_{μ}) de Σ est *stable pour* T si, chaque fois que $\overline{\omega} = \omega(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ est défini et que $\omega, \omega_1, \ldots, \omega_n \in \Omega'$, $\overline{\omega} \in \Omega'$. Muni de la multiplication induite, Σ' est dit *sous-schéma multiplicatif* de (Σ, T). (On a bien ainsi «tous» les sous-objets de (Σ, T) dans $\underline{T\text{-}Op(I)}$).

Soient $\omega, \omega'_k, \omega''_l$ $(1 \leq k \leq m,\ 1 \leq l \leq n)$ des opérations de Σ. Si l'une des deux expressions $\overline{\omega} = (\omega(\omega'_1, \ldots, \omega'_m))(\omega''_1, \ldots, \omega''_m)$ ou $\overline{\omega'} = \omega(\omega'_1(\omega''_1, \ldots, \omega''_n), \ldots, \omega'_n(\omega''_1, \ldots, \omega''_n))$ est définie, l'autre l'est aussi et a le même type. En effet, posons $\tau(\omega) = (\mu, \iota)$, $\tau(\omega'_k) = (\mu'_k, \iota'_k)$, $\tau(\omega''_l) = (\mu''_l, \iota''_l)$; il est clair que $\overline{\omega}$ et $\overline{\omega'}$ sont définies si $\mu''_1 = \ldots = \mu''_n$ et $\mu'_1 = \ldots = \mu'_m = \iota''_1 \ldots \iota''_n$ et $\mu = \iota'_1 \ldots \iota'_m$. Dans ces conditions, on a :

$\tau(\overline{\omega}) = \tau(\overline{\omega}') = (\mu'', \iota)$, où μ'' est la valeur commune des μ''_l. Cela justifie la définition suivante : la multiplication T est *associative* si chaque fois que les expressions $\overline{\omega}$ et $\overline{\omega}'$ sont définies elles sont égales.

LEMME 1.3.4.1. *Soient $\Sigma = (\Omega^\iota_\mu)$ un I-schéma, (Σ', T) un I- schéma multiplicatif et $f : \Sigma \to \Sigma'$ un morphisme de I-schémas. Notons $(\overline{\Omega}^\iota_\mu)$ le schéma composé $C(\Sigma)$.*

(i) f se prolonge de manière unique en un morphisme $\overline{f} : C(\Sigma) \to \Sigma'$ tel que, si $\overline{\omega} = \omega_o \overline{\omega}_1 \ldots \overline{\omega}_p \in \overline{\Omega}$, $\overline{f}(\overline{\omega}) = f(\omega_o)(\overline{f}(\overline{\omega}_1), \ldots, \overline{f}(\overline{\omega}_p))$.

(ii) Si en outre T est associative, l'image de $\overline{\Omega}$ par $\overline{f}$ est T-stable.

En effet, $\overline{f}$ est connue pour les mots de longueur 1. En utilisant 1.3.3.1 et la condition imposée à $\overline{f}$ dans (i) on définit $\overline{f}$ par récurrence sur la longueur des mots, d'où (i). Soient alors $\overline{f}(\overline{\omega}_k)$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ des éléments de $\overline{f}(\overline{\Omega})$ tels que $\omega' = \overline{f}(\overline{\omega}_o)(\overline{f}(\overline{\omega}_1), \ldots, \overline{f}(\overline{\omega}_n))$ est défini. Posons

$$\tau(\overline{\omega}_k) = \tau(\overline{f}(\overline{\omega}_k)) = (\mu_k, \iota_k), \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

On a $\mu_1 = \ldots = \mu_k = \mu$ et $\mu_o = \iota_1 \ldots \iota_n$. Montrons par récurrence sur la longueur $\lambda(\overline{\omega}_o)$ de $\overline{\omega}_o$ qu'il existe $\overline{\omega} \in \overline{\Omega}$ tel que $\overline{f}(\overline{\omega}) = \omega'$. Si $\overline{\omega}_o$ est de longueur 1, on prend $\overline{\omega} = \overline{\omega}_o \overline{\omega}_1 \ldots \overline{\omega}_n$ qui est bien dans $\overline{\Omega}$. Si la longueur de $\overline{\omega}_o > 1$, d'après 1.3.3.1 $\overline{\omega}_o$ s'écrit de manière unique $\overline{\omega}_o = \omega \overline{\theta}_1 \ldots \overline{\theta}_p$ avec $\omega \in \Omega^{\iota_o}_\nu$, $\overline{\theta}_l \in \overline{\Omega}^{j_l}_\mu$, $j_1 \ldots j_p = \nu$, et $\lambda(\overline{\theta}_l) < \lambda(\overline{\omega}_o)$ $(l = 1, \ldots, p)$. Il en résulte que $\overline{f}(\overline{\theta}_l)(\overline{f}(\overline{\omega}_1), \ldots, \overline{f}(\overline{\omega}_n))$ est défini pour tout $l \in \{1, \ldots, p\}$ et, par l'hypothèse de récurrence, on peut trouver des opérations composées $\overline{\varphi}_l \in \overline{\Omega}^{j_l}_\mu$ $(l = 1, \ldots, p)$ telles que

$$\overline{f}(\overline{\varphi}_l) = \overline{f}(\overline{\theta}_l)(\overline{f}(\overline{\omega}_1), \ldots, \overline{f}(\overline{\omega}_n)).$$

Il en résulte que $\omega \overline{\varphi}_1 \ldots \overline{\varphi}_p$ est une opération composée $\overline{\omega} \in \overline{\Omega}^{\iota_o}_\mu$, et en outre :

$$\overline{f}(\overline{\omega}) = f(\omega)(\overline{f}(\overline{\varphi}_1), \ldots, \overline{f}(\overline{\varphi}_p)) =$$
$$= f(\omega)(\overline{f}(\overline{\theta}_1)(\overline{f}(\overline{\omega}_1), \ldots, \overline{f}(\overline{\omega}_n)), \ldots, \overline{f}(\overline{\theta}_p)(\overline{f}(\overline{\omega}_1), \ldots, \overline{f}(\overline{\omega}_n))).$$

D'après l'associativité, cette dernière expression est égale à

$$(f(\omega)(\overline{f}(\overline{\theta}_1), \ldots, \overline{f}(\overline{\theta}_p)))(\overline{f}(\overline{\omega}_1), \ldots, \overline{f}(\overline{\omega}_n)),$$

c'est-à-dire à

$$\overline{f(\overline{\omega}_o)}(\overline{f(\overline{\omega}_1)},\dots,\overline{f(\overline{\omega}_n)}),$$

ce qui démontre *(ii)*.

Soit (Σ, p) un schéma à projections, T une multiplication sur Σ, et ω, ω_k $(1 \leq k \leq n)$ des opérations de Σ. Si $\theta = pr^k_\mu(\omega_1,\dots,\omega_n)$ est défini, $\tau(\theta) = \tau(\omega_k)$. Si $\theta' = \omega(pr^1_\mu,\dots,pr^n_\mu)$ est défini et si μ est de longueur n, $\tau(\theta') = \tau(\omega)$. (Vérification triviale). Cela «justifie» les définitions suivantes :

On dit que p est *unité à gauche* (resp. *à droite*) pour T si, chaque fois que θ est défini (resp. θ' est défini et μ est de longueur n), on a $\theta = \omega_k$ (resp. $\theta' = \omega$); si p est unité à droite et à gauche, c'est une *unité* pour T. Comme pour les multiplications usuelles, s'il y a une unité, elle est unique. Soient en effet $p = (pr^k_\mu)$ et $\overline{p} = (\overline{pr}^k_\mu)$ deux morphismes de S dans Σ tels que p (resp. $\overline{p}$) soit une unité à gauche (resp. à droite) pour T, et soit (μ, k) une projection standard, où $\mu = \iota_1 \dots \iota_n$. L'expression $\theta = pr^k_\mu(\overline{pr}^{\iota_1}_\mu,\dots,\overline{pr}^{\iota_n}_\mu)$ est définie. Elle est égale à $\overline{pr}^k_\mu$ parce que p est unité à gauche et à pr^k_μ parce que $\overline{p}$ est unité à droite. Donc $p = \overline{p}$.

Un *compositeur sur I-termes* ou *I-compositeur* $\mathcal{K}$ est un I-schéma multiplicatif (Σ, T), où T est associative et unitaire. On note $\underline{Comp}(I)$ la sous-catégorie de $\underline{T\text{-}Op}(I)$ ayant pour objets les I-compositeurs, et pour morphismes les morphismes *unitaires* (i.e. compatibles avec les projections); $\underline{Comp}(I)$ n'est donc pas une sous-catégorie pleine, en particulier un *sous-compositeur de* $\mathcal{K}$ est un sous-schéma multiplicatif, contenant les projections canoniques.

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie à produits finis et $X^{(I)}$ une famille d'objets de $\mathcal{C}$. Si $\nu = \iota_1 \dots \iota_n \in M$, X^ν est le produit $X^{\iota_1} \times \dots \times X^{\iota_n}$. D'où pour tout $\mu \in M$, un isomorphisme :

$$Hom(X^\mu, X^\nu) \simeq Hom(X^\mu, X^{\iota_1}) \times \dots \times Hom(X^\mu, X^{\iota_n}) \simeq \Omega^\nu_\mu(X^{(I)}).$$

Pour tout $(\iota, \nu, \mu) \in M$, notons $T^\iota_{\nu\mu}$ l'application :

$$\Omega^\iota_\nu(X^{(I)})\Omega^\nu_\mu(X^{(I)}) \xrightarrow{\sim} Hom(X^\nu, X^\iota) \times Hom(X^\mu, X^\nu) \xrightarrow{\circ}$$
$$\xrightarrow{\circ} Hom(X^\mu, X^\iota) \simeq \Omega^\iota_\mu(X^{(I)}),$$

où $^{\circ}$ est la composition des flèches T dans $\mathcal{C}$. Une vérification triviale montre que la famille $(T^{\iota}_{\nu\mu})$ est une multiplication T dans $\Sigma(X^{(I)})$, associative et unitaire. Le couple $(\Sigma(X^{(I)}), T) = \mathcal{K}(X^{(I)})$ est le *I-compositeur de la famille* $X^{(I)}$ (dans $\mathcal{C}$).

Soit $\mathcal{K} = (\Sigma, T)$ un I-compositeur, et $\mathcal{C}$ une catégorie à produits finis. Une *algèbre de compositeur* $\mathcal{K}$ *dans* $\mathcal{C}$ (ou $\mathcal{K}$-algèbre) est un morphisme $A : \mathcal{K} \to \mathcal{K}(X^{(I)})$, où $X^{(I)}$ est une famille d'objets de $\mathcal{C}$. Le foncteur d'oubli des multiplications $\underline{Comp}(I) \to \underline{Op}(I)$, $(\Sigma, T) \rightsquigarrow \Sigma$, étant fidèle, A s'identifie à la préalgèbre sous-jacente $\Sigma \to \Sigma(X^{(I)})$, et pour $\mathcal{K}$ fixé, la classe $Alg(\mathcal{K}, \mathcal{C})$ des $\mathcal{K}$-algèbres s'identifie à une sous-classe de $Préalg(\Sigma, \mathcal{C})$. On désigne par $\underline{Alg}(\mathcal{K}, \mathcal{C})$ la «sous-catégorie» pleine de $\underline{Préalg}(\Sigma, \mathcal{C})$ ayant pour objets les $\mathcal{K}$-algèbres.

Soit $\Sigma = (\Omega, \tau)$ un I-schéma d'opérations, $C(\Sigma) = (\overline{\Omega}, \overline{\tau})$ son composé et $P = (X^{\iota}, \varphi^{\omega}) : \Sigma \to \Sigma(X^{(I)})$ une préalgèbre de schéma Σ. Le lemme 1.3.4.1 permet de prolonger P en une préalgèbre

$$(X^{\iota}, \varphi^{\overline{\omega}}) : C(\Sigma) \to \Sigma(X^{(I)})$$

telle que : si $\overline{\omega} = \omega\overline{\omega}_1 \dots \overline{\omega}_p \in \overline{\Omega}$, avec $\tau(\overline{\omega}_k) = (\mu, \iota_k)$ et $\tau(\omega) = (\iota_1 \dots \iota_p, \iota)$, le diagramme

$$\begin{tikzcd}
X^{\mu} \arrow[rr, "(\varphi^{\overline{\omega}_1}, \dots, \varphi^{\overline{\omega}_n})"] \arrow[drr, "\varphi^{\overline{\omega}}"'] & & X^{\iota_1} \times \dots \times X^{\iota_n} \arrow[d, "\varphi^{\omega}"] \\
& & X^{\iota}
\end{tikzcd}$$

est commutatif. Ce prolongement est dit préalgèbre déduite de P par *adjonction des opérations composées*, et noté $C_*(P) : C(\Sigma) \to \Sigma(X^{(I)})$. Soit $Q = (Y^{\iota}, \psi^{\omega})$ une autre préalgèbre de $\mathcal{C}$, de même schéma Σ, et $(u^{\iota} : X^{\iota} \to Y^{\iota})$ un morphisme des familles sous-jacentes à P et Q; une vérification directe montre que $(P, u^{(I)}, Q)$ est un morphisme de P dans Q si et seulement si $(C_*(P), u^{(I)}, C_*(Q))$ est un morphisme de $C_*(P)$ dans $C_*(P)$; d'où :

PROPOSITION 1.3.4.2. *Le foncteur d'adjonction d'opérations composées*

$$C_* : \underline{Préalg}(\Sigma, \mathcal{C}) \to \underline{Préalg}(C(\Sigma), \mathcal{C}),\ P \rightsquigarrow C_*(P)$$

est pleinement fidèle et commute avec les foncteurs d'oubli.

Il est clair que, si $\Pi = (\Sigma, p)$ est un schéma à projections, et si $P = (X^\iota, \varphi^\omega)$ est une préalgèbre compatible avec les projections, $C_*(P) : C(\Sigma) \to \Sigma(X^{(I)})$ est compatible avec les projections de $C(\Pi) = (C(\Sigma), j_\Sigma \circ p)$, c'est-à-dire que l'on a un foncteur d'adjonction des opérations composées, noté encore C_*,

$$C_* : \underline{Proj}(\Pi, \mathcal{C}) \to \underline{Proj}(C(\Pi), \mathcal{C})$$

qui est encore pleinement fidèle et commute avec les foncteurs d'oubli.

Soit Σ un I-schéma et $\mathcal{C}$ une catégorie à produits finis. Le foncteur composé $C_* \Pi_* : \underline{Préalg}(\Sigma, \mathcal{C}) \to \underline{Proj}(\Pi(\Sigma), \mathcal{C}) \to \underline{Proj}(C\Pi(\Sigma)\mathcal{C})$ associe, à toute préalgèbre $P = (X^\iota, \varphi^\omega)$ de schéma Σ, une préalgèbre $C_*\Pi_*(P) = \hat{P} = (X^\iota, \varphi^{\hat{\omega}})$ ayant pour schéma le saturé $\hat{\Sigma}$ de Σ et compatible avec les projections. On dit que $\hat{P}$ est la préalgèbre *saturante* de P.

L'image $\hat{P}(\hat{\Sigma})$ est un sous-schéma de $\Sigma(X^{(I)})$, contenant les projections canoniques et, d'après 1.3.4.1, stable par T, c'est-à-dire un sous-compositeur de $\mathcal{K}(X^{(I)})$, dit *engendré par* P (au sens «usuel» $\hat{P}(\hat{\Sigma})$ est le sous-compositeur engendré par l'image $P(\Sigma)$).

Dans la suite nous aurons à utiliser de manière essentielle les trois propriétés suivantes de la catégorie $\underline{Comp}(I)$ des I-compositeurs et du foncteur d'oubli $\underline{Comp}(I) \to \underline{Op}(I)$, $(\Sigma, T) \rightsquigarrow \Sigma$.

PROPOSITION 1.3.4.3. *La catégorie des* I*-compositeurs admet des limites projectives et le foncteur d'oubli commute avec ces limites.*

Soit en effet $\mathfrak{A}$ une petite catégorie et $\alpha \rightsquigarrow \mathcal{K}(\alpha) = (\Omega^\iota_\omega(\alpha), T_\alpha, pr^k_\mu(\alpha))$ un foncteur de $\mathfrak{A}$ dans $\underline{Comp}(I)$. On définit le I-compositeur $\mathcal{K} = \varprojlim_\alpha \mathcal{K}(\alpha) = (\Omega^\iota_\mu, T, pr^k_\mu)$ de la manière suivante :

(i) Ω^ι_μ est la limite projective des ensembles $\Omega^\iota_\mu(\alpha)$ $(\alpha \in \mathfrak{A})$.

(ii) pour tout $(\iota, \nu, \mu) \in I \times M \times M$ (où $\nu = \iota_1 \dots \iota_n$) on a un isomorphisme canonique

$$\Omega^\iota_\nu \times \Omega^\nu_\mu = \varprojlim_\alpha(\Omega^\iota_\nu(\alpha)) \times \prod_{k=1}^{n} \varprojlim_\alpha(\Omega^{\iota_k}_\mu(\alpha)) \simeq \varprojlim_\alpha(\Omega^\iota_\nu(\alpha) \times \Omega^\nu_\mu(\alpha))$$

(commutativité de $\underset{\overleftarrow{\alpha}}{lim}$ et des produits).

Les applications $T_\alpha : \Omega^\iota_\mu(\alpha) \times \Omega^\nu_\mu(\alpha) \to \Omega^\iota_\mu(\alpha)$ déterminent, par passage aux limites projectives, une application :

$$T : \Omega^\iota_\mu \times \Omega^\nu_\mu \xrightarrow{\sim} \underset{\overleftarrow{\alpha}}{lim}(\Omega^\iota_\nu(\alpha) \times \Omega^\nu_\mu(\alpha)) \xrightarrow[\underset{\overleftarrow{\alpha}}{lim}\, T_\alpha]{} \underset{\overleftarrow{\alpha}}{lim}(\Omega^\iota_\mu(\alpha)) = \Omega^\iota_\mu .$$

(iii) Pour toute projection standard (μ, k) où $\mu = \iota_1 \dots \iota_n$, la famille $(pr^k_\mu(\alpha))$ $(\alpha \in Ob(\mathfrak{A}))$ est un élément, noté pr^k_μ, de $\Omega^{\iota_k}_\mu$.

Il est aisé, avec ces définitions, de vérifier que $\mathcal{K}$ est un I-compositeur et que, dans $\underline{Comp(I)}$, $\mathcal{K} = \underset{\overleftarrow{\alpha}}{lim}\, \mathcal{K}_\alpha$.

Soit Σ un I-schéma. Notons $\underline{Comp(\Sigma)}$ la fibre de $\underline{Comp(I)}$ au-dessus de Σ, c'est-à-dire la sous-catégorie de $\underline{Comp(I)}$ ayant pour objets les compositeurs qui ont Σ pour schéma sous-jacent et pour flèches les morphismes qui se projettent sur l'identité de Σ.

PROPOSITION 1.3.4.4. *La catégorie $\underline{Comp(\Sigma)}$ est petite et discrète.*

La première assertion signifie que les multiplications sur un I-schéma forment un ensemble, ce que l'on vérifie immédiatement; la seconde est triviale.

Soit Σ_o un I- schéma. Les quotients (cf. 1.3.1.1) du saturé $\hat{\Sigma}_o$ de Σ_o forment un ensemble $Q(\hat{\Sigma}_o)$. D'après 1.3.4.4 les compositeurs ayant pour schéma sous-jacent un élément de $Q(\hat{\Sigma}_o)$ forment un ensemble noté $\mathfrak{M}(\Sigma_o)$ et dit *ensemble des majorants de* Σ_o.

PROPOSITION 1.3.4.5. *Pour tout compositeur $\mathcal{K} = (\Sigma, T)$ et tout morphisme $f : \Sigma_o \to \Sigma$ de I-schémas, il existe un compositeur $\mathcal{K}' = (\Sigma', T') \in \mathfrak{M}(\Sigma_o)$, un morphisme $f_o : \Sigma_o \to \Sigma'$ et un morphisme $f' : \Sigma' \to \Sigma$ tels que $f = f' \circ f_o$, et $(\mathcal{K}', f', \mathcal{K})$ est un morphisme de compositeurs.*

On prolonge d'abord f en $f_1 : S \amalg \Sigma_o \to \Sigma$ au moyen de «l'unité» $p : S \to \Sigma$ de $\mathcal{K}$, puis f_1 en $\hat{f} : \hat{\Sigma}_o \to \Sigma$ grâce au lemme 1.3.4.1; l'image $\hat{f}(\hat{\Sigma}_o)$ est un sous-compositeur $\mathcal{K}'_1$ de $\mathcal{K}$ dont le schéma sous-jacent Σ'_1 est isomorphe à un quotient Σ' de $\hat{\Sigma}_o$. En transportant sur Σ' la multiplication de $\mathcal{K}'_1$ on obtient $\mathcal{K}' \in \mathfrak{M}(\Sigma_o)$, et la décomposition de f est évidente.

REMARQUE 1.3.4.6. Si $I = 1$, la notion de I-compositeur s'identifie avec celle de compositeur de Lazard [1], en remplaçant ses applications

$$T_{m,n} : E_m \to Hom_{Ens}(E_n^m, E_n)$$

par les applications $T^{\emptyset}_{mn} : E_m \times E_n^m \to E_n$; et les modules sur les compositeurs sont les $\mathcal{K}$-algèbres de la catégorie des ensembles.

REMARQUE 1.3.4.7. La notion de «Clone d'opérations» de Cohn [1] est identique à celle de compositeur $\mathcal{K}(X)$, où X est une famille réduite à un seul ensemble.

1.3.5. RELATIONS. Soit $\Sigma = (\Omega^{\iota}_{\mu})$ un I- schéma et $\hat{\Sigma} = (\hat{\Omega}^{\iota}_{\mu})$ le saturé de Σ pour les projections et opérations composées (cf. 1.3.3). On appelle *schéma des relations* de Σ le I-schéma produit (cf. 1.3.1.1) $R(\Sigma) = \hat{\Sigma} \times \hat{\Sigma} = (\hat{\Omega}^{\iota}_{\mu} \times \hat{\Omega}^{\iota}_{\mu})$. Ses opérations,dites *relations* de Σ, sont donc les couples $\rho = (\hat{\omega}, \hat{\omega}')$ d'opérations de $\hat{\Omega}$ tels que $\tau(\hat{\omega}) = \tau(\hat{\omega}')$, et le type de la relation ρ est la valeur commune. Il est clair que la correspondance $\Sigma \rightsquigarrow R(\Sigma)$ détermine un foncteur

$$\textit{Schéma des relations } R : Op(I) \to Op(I).$$

Une *espèce de structures algébriques élémentaires sur I-termes,* ou *I-espèce*,est un couple $\mathcal{S} = (\Sigma, \mathfrak{A})$, où Σ est un I- schéma et $\mathfrak{A}$ est un ensemble de relations de Σ, dit ensemble des *axiomes* de l'espèce $\mathcal{S}$. Un *morphisme (banal)* (*) de $\mathcal{S}$ dans l'espèce $\mathcal{S}' = (\Sigma', \mathfrak{A}')$ est un triple $(\mathcal{S}, f, \mathcal{S}')$ abrégé en f,où $f : \Sigma \to \Sigma'$ est un morphisme de schémas tel que $R(f)(\mathfrak{A}) \subset \mathfrak{A}'$. On note $\underline{Esp}(I)$ la catégorie ainsi déterminée. Le foncteur *d'oubli des axiomes* associe à chaque espèce $\mathcal{S} = (\Sigma, \mathfrak{A})$ le schéma *sous-jacent* Σ.

(*) Cette définition, suffisante pour ce paragraphe, est beaucoup trop stricte. Elle se réduit dans un cas particulier à la définition suivante : Si G (resp. G') est un groupe défini par un ensemble Γ (resp. Γ') de générateurs, et un ensemble R (resp. R') de relations dans le groupe libre $L(\Gamma)$ (resp. $L(\Gamma')$) engendré par Γ (resp. Γ'), un morphisme banal de G dans G' est un triple $((\Gamma, R), \varphi, (\Gamma', R'))$, où $\varphi: \Gamma \to \Gamma'$ est une application telle que l'homomorphisme $L(\varphi) : L(G) \to L(G')$ qui la prolonge transforme tout élément de R en un élément de R'. Voir (2. 1. 3).

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie à produits finis et $X^{(I)}$ une famille d'objets de $\mathcal{C}$. D'après 1.3.4, la préalgèbre identique $Id : \Sigma(X^{(I)}) \to \Sigma(X^{(I)})$ se prolonge en une préalgèbre de schéma $\hat{\Sigma}(X^{(I)})$,

$$\hat{Id} = C_* \Pi_*(Id) : \hat{\Sigma}(X^{(I)}) \to \Sigma(X^{(I)}).$$

Le schéma $R(X^{(I)}) = R(\Sigma(X^{(I)}))$ est dit *schéma des relations de* $X^{(I)}$. Notons pr_1 et pr_2 les projections canoniques

$$R(X^{(I)}) = \hat{\Sigma}(X^{(I)}) \times \hat{\Sigma}(X^{(I)}) \overset{pr_1}{\underset{pr_2}{\rightrightarrows}} \hat{\Sigma}(X^{(I)})$$

et χ_1 et χ_2 les morphismes composés

$$\chi_k : R(X^{(I)}) \xrightarrow{pr_k} \hat{\Sigma}(X^{(I)}) \xrightarrow{\hat{Id}} \Sigma(X^{(I)}), \qquad k = 1, 2.$$

Le noyau (cf. 1.3.1.1) du couple de flèches $(\chi_1, \chi_2) : R(X^{(I)}) \rightrightarrows \Sigma(X^{(I)})$ est l'ensemble $\mathcal{A}(X^{(I)})$ des *relations vraies dans* $X^{(I)}$ et le couple $\mathcal{S}(X^{(I)}) = (\Sigma(X^{(I)}), \mathcal{A}(X^{(I)}))$ est *l'espèce de* $X^{(I)}$.

Une *algèbre d'espèce* $\mathcal{S} = (\Sigma, \mathcal{A})$, ou $\mathcal{S}$-algèbre de $\mathcal{C}$, est un couple $A = (\mathcal{S}, f)$, où $f : \Sigma \to \Sigma(X^{(I)})$ est une préalgèbre telle que

$$(\mathcal{S}, f, \mathcal{S}(X^{(I)})) : \mathcal{S} \to \mathcal{S}(X^{(I)}).$$

Pour $\mathcal{S}$ fixé, la classe $Alg(\mathcal{S}, \mathcal{C})$ de ces algèbres s'identifie à une sous-classe de $Préalg(\Sigma, \mathcal{C})$. On note $\underline{Alg}(\mathcal{S}, \mathcal{C})$ la sous-catégorie pleine de $\underline{Préalg}(\Sigma, \mathcal{C})$ ayant pour objets les algèbres.

De manière moins formelle, soit $P = (X^{\iota}, \varphi^{\omega}) : \Sigma \to \Sigma(X^{(I)})$ une préalgèbre de schéma Σ sur $X^{(I)}$. Par adjonction de projections puis d'opérations composées (cf. 1.3.2 et 1.3.3), on a une préalgèbre $\hat{P} = (X^{\iota}, \varphi^{\hat{\omega}})$ de schéma $\hat{\Sigma}$, ayant même famille sous-jacente. Une relation $\rho = (\hat{\omega}, \hat{\omega}')$ de Σ est *satisfaite par* P si, dans la famille $X^{(I)}$, les deux «opérations composées» $\varphi^{\hat{\omega}}$ et $\varphi^{\hat{\omega}'}$ coïncident. Une algèbre d'espèce $\mathcal{S}$ «est» une préalgèbre satisfaisant à tous les axiomes de $\mathcal{S}$, et un morphisme d'algèbres «est» un morphisme des préalgèbres sous-jacentes, c'est-à-dire un morphisme des familles sous-jacentes, compatible avec les opérations structurales. On rejoint ainsi l'interprétation «usuelle» des espèces de structures algébriques (sur des familles d'objets !).

Soient Σ un I-schéma, $(\mathcal{S}_\lambda = (\Sigma_\lambda, \mathcal{A}_\lambda))$ $(\lambda \in \Lambda)$ une famille de

I- espèces, où Λ peut être une classe, et $f_\lambda = \Sigma \to \Sigma_\lambda \in Op(I)$ une famille de morphismes. Pour tout $\lambda \in \Lambda$, f_λ se prolonge en $R(f_\lambda) : R(\Sigma) \to R(\Sigma_\lambda)$. Notons $f_\lambda^*(\mathfrak{A}_\lambda) \subset R(\Sigma)$ l'image réciproque de $\mathfrak{A}_\lambda$ par $R(f_\lambda)$. Le sous-ensemble $\mathfrak{A} = \bigcap_\lambda f_\lambda^*(\mathfrak{A}_\lambda)$ de $R(\Sigma)$ est l'image réciproque $f^*_{(\Lambda)}(\mathfrak{A}_{(\Lambda)})$ de la famille $\mathfrak{A}_{(\Lambda)}$, et l'espèce $f^*_{(\Lambda)}(\mathcal{S}_{(\Lambda)}) = (\Sigma, \mathfrak{A})$ est *l'image réciproque* de $\mathcal{S}_{(\Lambda)}$ par $f_{(\Lambda)}$.

En particulier si $(P_\lambda : \Sigma \to \Sigma(X_\lambda^{(I)}))$ est une famille de préalgèbres, l'image réciproque de la famille $(\mathfrak{A}_\lambda) = (\mathfrak{A}(X_\lambda^{(I)}))$ par $P_{(\Lambda)}$ est l'ensemble $\mathfrak{A}$ des *relations de* Σ *satisfaites par la famille* des préalgèbres $P_{(\Lambda)}$. Il est clair que les P_λ sont des algèbres sur $(\Sigma, \mathfrak{A})$ qui est dite *I-espèce de la famille* (P_λ) et notée $\mathcal{S}(P_{(\lambda)})$. Le lecteur explicitera la propriété universelle qu'elle satisfait. Remarquons seulement, pour la cohérence des notations, que, si $X^{(I)}$ est une famille d'objets, $\mathcal{S}(X^{(I)}) =$ $= \mathcal{S}(Id(X^{(I)}))$, où $Id(X^{(I)})$ est la préalgèbre identique

$$\Sigma(X^{(I)}) \to \Sigma(X^{(I)}).$$

Soit Σ un schéma d'opérateurs 1.3.3.3 et $\mathcal{V}$ une variété de Σ-algèbres définie par un ensemble R de relations (Higgins [1]). Notons $\underline{\mathcal{V}}$ la catégorie engendrée par ces algèbres. Si Σ' est le I-schéma associé à Σ (1.3.3.3), $\underline{\mathcal{V}}$ s'identifie à une sous-catégorie pleine de $Alg(\Sigma', Ens)$. Soit $\mathcal{S}(\mathcal{V})$ l'espèce de la famille de toutes les Σ-algèbres de $\mathcal{V}$.

PROPOSITION 1.3.5.1. *Avec les notations précédentes, les catégories* $\underline{\mathcal{V}}$ *et* $Alg(\mathcal{S}(\mathcal{V}), Ens)$ *sont équivalentes, et l'équivalence est compatible avec les foncteurs d'oubli.*

La vérification, directe, mais assez longue, est laissée au lecteur.

REMARQUE 1.3.5.2. La structure de corps, ou les structures algébriques dans lesquelles certaines opérations sont partiellement définies, ne rentrent pas dans ce formalisme. Ce fait est à rapprocher des remarques suivantes :

1) Un produit de corps n'est pas un corps.

2) Si $\mathcal{C}$ est une catégorie à produits finis, il n'y a pas de bonne définition d'une structure de corps sur un objet X de $\mathcal{C}$.

L'interprétation métamathématique est la suivante : Si $\mathcal{L}$ est un langage du premier ordre, à plusieurs sortes de variables («I sortes») ne comportant que des symboles fonctionnels (en plus des signes logiques $\forall$, $\neg$, $\vee$, $=$), les espèces de structures algébriques élémentaires sur I-termes correspondent aux théories construites sur le langage $\mathcal{L}$, définissables par un système d'axiomes (en nombre fini ou infini) où ne figurent comme symboles logiques que $=$ et $\forall$ (en plus des axiomes ou schémas du calcul des prédicats du premier ordre, à plusieurs sortes de variables). Le qualificatif «élémentaires» est motivé par cette interprétation, ou par notre répugnance à bannir la théorie des corps, par exemple, de «l'ensemble des théories algébriques».

2. UNIFICATION DES DIFFERENTES NOTIONS D'ALGEBRES.

2.1. Point de vue sémantique.

2.1.1. TYPES ET COMPOSITEURS. Soit $\mathbf{T}$ un I-type. La famille (ι) $(\iota \in I)$ d'objets de $\mathbf{T}$ est dite *canonique* et notée $X(\mathbf{T})$. Son prolongement est la famille (μ) $(\mu \in M)$, munie des projections données dans la structure de $\mathbf{T}$. Son I-schéma $\Sigma(X(\mathbf{T}))$, défini par

$$\Omega^{\iota}_{\mu}(X(\mathbf{T})) = \{\mu\} \times Hom_{\mathbf{T}}(\mu, \iota) \times \{\iota\} = \{\mu\} \times \Omega^{\iota}_{\mu}(\mathbf{T}) \times \{\iota\},$$

est isomorphe au schéma $\Sigma(\mathbf{T}) = (\Omega^{\iota}_{\mu}(\mathbf{T}))$ des opérations de $\mathbf{T}$. La multiplication du compositeur $\mathcal{K}(X(\mathbf{T}))$ se transporte en une multiplication sur $\Sigma(\mathbf{T})$, et détermine ainsi le compositeur $\mathcal{K}(\mathbf{T})$ dit sous-jacent à $\mathbf{T}$. Une flèche $f : \mu \to \nu$ de $\mathbf{T}$ est une *multi-opération, de type* $\tau(f) = (\mu, \nu)$. Elle est déterminée par ses *opérations composantes* $\omega_k = pr^k_{\nu} \circ f$ $(k = 1, \dots,$ longueur de $\nu)$.

Si $f : \mathbf{T} \to \mathbf{T}'$ est un morphisme de I-types, sa restriction aux opérations est un morphisme $\Sigma(\mathbf{T}) \to \Sigma(\mathbf{T}')$ de I-schémas, compatible avec les multiplications, c'est-à-dire un morphisme de I-compositeurs $\mathcal{K}(\mathbf{T}) \to \mathcal{K}(\mathbf{T}')$. D'où le foncteur *compositeur sous-jacent*

$$\mathcal{K}(\,.\,) : \underline{Typ}(I) \to \underline{Comp}(I), \mathbf{T} \mapsto \mathcal{K}(\mathbf{T}).$$

Inversement, soit $\mathcal{K}$ un I-compositeur de I-schéma $\Sigma = (\Omega^{\iota}_{\mu})$. Pour tout $(\mu, \nu) \in M \times M$, posons $Hom(\mu, \nu) = \Omega^{\nu}_{\mu} = \Omega^{\iota_1}_{\mu} \times \dots \times \Omega^{\iota_n}_{\mu}$, (où

$\iota_1 \dots \iota_n = \nu$). Soient λ, μ, ν trois multi-indices $\lambda = \iota_1 \dots \iota_l$, $\mu = \iota'_1 \dots \iota'_m$, $\nu = \iota''_1 \dots \iota''_n$. Si $u = (\omega_1, \dots, \omega_m)$ $(\omega_k \in \Omega_\lambda^{\iota'_k}, k = 1, \dots, m)$ est un élément de $Hom(\lambda, \mu)$ et $v = (\omega_1, \dots, \omega'_n)$ $(\omega'_k \in \Omega_\mu^{\iota''_k}, k = 1, \dots, n)$ est un élément de $Hom(\mu, \nu)$, les expressions

$$\bar{\omega}_1 = \omega'_1(\omega_1, \dots, \omega_m), \dots, \bar{\omega}_n = \omega'_m(\omega_1, \dots, \omega_n)$$

sont définies et $(\bar{\omega}_1, \dots, \bar{\omega}_n)$ est un élément noté $v \circ u$ de $\Omega_\lambda^\nu = Hom(\lambda, \nu)$. Une vérification directe montre que les ensembles $Hom(\mu, \nu)$, avec les accouplements

$$Hom(\mu, \nu) \times Hom(\lambda, \mu) \to Hom(\lambda, \nu), \quad (v, u) \rightsquigarrow v \circ u,$$

définissent une catégorie ayant M comme ensemble d'objets, et que pour tout $\mu = \iota_1 \dots \iota_n \in M$ les $pr_\mu^k \in \Omega_\mu^{\iota_k} = Hom(\mu, \iota_k)$ $(k = 1, \dots, n)$ font de μ un produit de $\iota_1, \dots, \iota_n$. Le I-type défini par cette catégorie et la famille (pr_μ^k) est dit *I-type de* $\mathcal{K}$ et noté $\mathbf{T}(\mathcal{K})$. Il est clair que la correspondance $\mathcal{K} \rightsquigarrow \mathbf{T}(\mathcal{K})$ se prolonge en un foncteur «*type associé*»

$$\mathbf{T}(\,.\,) : \underline{Comp}(I) \to \underline{Typ}(I)$$

et que, pour tout I-compositeur $\mathcal{K}$, on a $\mathcal{K}(\mathbf{T}(\mathcal{K})) = \mathcal{K}$. D'autre part si $\mathbf{T}$ est un I-type, on définit un morphisme $\mathbf{T} \to \mathbf{T}(\mathcal{K}(\mathbf{T}))$ dont la restriction aux objets est l'identité, en associant à toute flèche $f : \mu \to \nu = \iota_1 \dots \iota_n$ de $\mathbf{T}$ la flèche $(\omega_1, \dots, \omega_k) : \mu \to \nu$ de $\mathbf{T}(\mathcal{K}(\mathbf{T}))$, où les ω_k sont les composantes de f. Ce morphisme est manifestement un isomorphisme, d'où la

PROPOSITION 2.1.1.1. *Les foncteurs $\mathcal{K}(\,.\,)$ et $\mathbf{T}(\,.\,)$ définissent une équivalence entre la catégorie des I-compositeurs et la catégorie des I-types, qui respecte les I-schémas sous-jacents.*

Soit $A : \mathbf{T} \to \mathcal{C}$ une algèbre de type $\mathbf{T}$. La restriction du foncteur A aux opérations de $\mathbf{T}$ est une préalgèbre de schéma $\Sigma(\mathbf{T})$, compatible avec la multiplication de $\mathcal{K}(\mathbf{T})$, c'est-à-dire une algèbre de I-compositeur $\mathcal{K}(\mathbf{T})$, notée $\mathcal{K}^*(A)$. La correspondance $A \rightsquigarrow \mathcal{K}^*(A)$ est fonctorielle et on a:

PROPOSITION 2.1.1.2. *Pour toute catégorie à produits finis $\mathcal{C}$ et tout I-type $\mathbf{T}$ le foncteur $\mathcal{K}^* : \underline{Alg}(\mathbf{T}, \mathcal{C}) \to \underline{Alg}(\mathcal{K}(\mathbf{T}), \mathcal{C})$, $A \rightsquigarrow \mathcal{K}^*(A)$ est* *un isomorphisme de catégories, compatible avec les foncteurs d'oubli.*

Soit en effet A' une algèbre de compositeur $\mathcal{K}(\mathbf{T})$ et $(X^{\iota}, \varphi^{\omega})$ la préalgèbre sous-jacente. Pour toute multi-opération f de composantes $\omega_k : \mu \to \iota_k$ $(k = 1, \dots, n)$, soit $\varphi^f : X^{\mu} \to X^{\iota_1} \times \dots \times X^{\iota_n}$ la flèche de $\mathcal{C}$ déterminée par $pr^k \circ \varphi^f = \varphi^{\omega_k}$. Il est clair que $\mu \rightsquigarrow X^{\mu}$, $f \rightsquigarrow \varphi^f$ est un foncteur $\mathcal{K}_*(A') : \mathbf{T} \to \mathcal{C}$ qui commute avec les produits finis, et que $\mathcal{K}^*\mathcal{K}_*(A') = A'$. D'autre part si $A : \mathbf{T} \to \mathcal{C}$ est une algèbre de I-type $\mathbf{T}$, elle est déterminée par les lois de composition structurales $A(\omega)$ $(\omega \in \Omega(\mathbf{T}))$ et la famille (X^{μ}) : si $f \in Fl(\mathbf{T})$ a pour composantes $(\omega_1, \dots, \omega_n)$, $A(f)$ est l'unique flèche de $\mathcal{C}$ vérifiant $A(\omega_k) = pr^k \circ A(f)$. Il en résulte que $\mathcal{K}_*\mathcal{K}^*(A) = A$. ■

Les notions de I-compositeur et de I-type sont équivalentes, aussi bien du point de vue «sémantique», (leurs catégories de «modèles» étant isomorphes d'après 2.1.1.2) que du point de vue «syntaxique» d'après 2.1.1.1. Dans la suite nous ne distinguerons pas un I-compositeur et le type associé $\mathbf{T}(\mathcal{K})$.

2.1.1.3. SCHEMAS ET ESPECES. Soit Σ un I-schéma. Notons $\mathcal{S}_L(\Sigma) = (\Sigma, \Phi)$ l'espèce sans axiomes ayant Σ pour schéma sous-jacent. La correspondance $\Sigma \rightsquigarrow \mathcal{S}_L(\Sigma)$ se prolonge en un foncteur

$$\textit{espèce libre } \mathcal{S}_L : \underline{Op}(I) \to \underline{Esp}(I), \quad \Sigma \rightsquigarrow \mathcal{S}_L(\Sigma).$$

Les préalgèbres s'identifient de manière évidente aux algèbres de schéma libre; de façon précise, on vérifie immédiatement la

PROPOSITION 2.1.1.4.

(i) Le foncteur espèce libre est adjoint à gauche du foncteur d'oubli des axiomes $O_{AX} : \underline{Esp}(I) \to \underline{Op}(I)$, $(\Sigma, \mathfrak{A}) \rightsquigarrow \Sigma$.

(ii) $O_{AX} \circ \mathcal{S}_L = Id(\underline{Op}(I))$.

(iii) Pour tout I-schéma Σ et toute catégorie $\mathcal{C}$ à produits finis, le morphisme

$$\underline{Alg}(\mathcal{S}_L(\Sigma), \mathcal{C}) \to \underline{Préalg}(\Sigma, \mathcal{C}), \quad (\mathcal{S}_L(\Sigma), p) \rightsquigarrow P$$

est un isomorphisme compatible avec les foncteurs d'oubli.

2.1.2. TYPES ET ESPECES. Soit $\mathbf{T}$ un I-type. Par transport de structure, à partir de l'espace $\mathcal{S}(X(\mathbf{T}))$ de la famille canonique, on définit une I-espèce $\mathcal{S}(\mathbf{T})$ ayant $\Sigma(\mathbf{T})$ pour schéma sous-jacent. Des définitions de 1.3.5 il résulte que l'ensemble $\mathcal{A}(\mathbf{T})$ des axiomes de $\mathcal{S}(\mathbf{T})$ est le noyau du couple de morphismes composés $(\chi_1(\mathbf{T}), \chi_2(\mathbf{T}))$:

$$R(\mathbf{T}) = \hat{\Sigma}(\mathbf{T}) \times \hat{\Sigma}(\mathbf{T}) \underset{pr_2}{\overset{pr_1}{\rightrightarrows}} \hat{\Sigma}(\mathbf{T}) \xrightarrow{\sim} \hat{\Sigma}(X(\mathbf{T})) \xrightarrow{\hat{id}} \Sigma(X(\mathbf{T})) \xrightarrow{\sim} \Sigma(\mathbf{T}).$$

Il est clair que $\mathbf{T} \rightsquigarrow R(\mathbf{T})$ est un foncteur et χ_1 et χ_2 des transformations naturelles. Si $f: \mathbf{T} \to \mathbf{T}' \in \underline{Typ(I)}$ est un morphisme, la commutativité des diagrammes

$$\begin{tikzcd} R(\mathbf{T}) \arrow[r, "\chi_k"'] \arrow[d, "R(f)"'] & \Sigma(\mathbf{T}) \arrow[d, "\Sigma(f)"] \\ R(\mathbf{T}') \arrow[r, "\chi_k"'] & \Sigma(\mathbf{T}') \end{tikzcd} \qquad (k = 1, 2)$$

entraîne $R(f)(\mathcal{A}(\mathbf{T})) \subset \mathcal{A}(\mathbf{T}')$; c'est-à-dire que $(\mathcal{S}(\mathbf{T}), f, \mathcal{S}(\mathbf{T}'))$ est un morphisme, noté $\mathcal{S}(f)$, de $\mathcal{S}(\mathbf{T})$ dans $\mathcal{S}(\mathbf{T}')$. D'où le foncteur

espèce sous-jacente $\mathcal{S}(\,.\,): \underline{Typ(I)} \to \underline{Esp(I)},\ \mathbf{T} \rightsquigarrow \mathcal{S}(\mathbf{T})$.

THEOREME 2.1.2.1.

(i) Le foncteur espèce sous-jacente à un adjoint à gauche (dit type engendré) $\mathbf{T}(\,.\,): \underline{Esp(I)} \to \underline{Typ(I)}$.

(ii) Le morphisme canonique $\varphi: \mathbf{T}(\,.\,) \circ \mathcal{S}(\,.\,) \to Id(\underline{Typ(I)})$ *est un isomorphisme.*

La vérification détaillée étant assez longue, nous n'en donnerons que les grandes lignes; d'après 1.3.4.3 et 2.1.1.1 la catégorie $\underline{Typ(I)}$ a des limites projectives qui se calculent terme à terme. Soit $\mathcal{S} = (\Sigma, \mathcal{A})$ une I-espèce; on vérifie sans difficulté que le foncteur $\mathbf{T} \rightsquigarrow Hom(\mathcal{S}, \mathcal{S}(\mathbf{T}))$ de $\underline{Typ(I)}$ dans Ens commute avec les limites projectives. Soit $\mathcal{M}(\Sigma)$ l'ensemble des majorants de Σ; notons $\mathbf{T}(\mathcal{M}(\Sigma))$ l'ensemble des types associés aux compositeurs de $\mathcal{M}(\Sigma)$. Il résulte de 1.3.4.5 que, pour tout morphisme $f: \mathcal{S} \to \mathcal{S}(\mathbf{T})$, il existe un type $\mathbf{T}' \in (\mathcal{M}(\Sigma))$, un morphisme $f_0: \mathcal{S} \to \mathcal{S}(\mathbf{T}') \in \underline{Esp(I)}$ et un morphisme $f_1: \mathbf{T}' \to \mathbf{T} \in \underline{Typ(I)}$ tels que

$f = \mathcal{S}(f_1) \circ f_o$. Le foncteur $\mathbf{T} \rightsquigarrow Hom(\mathcal{S}, \mathcal{S}(\mathbf{T}))$ est donc borné (Bénabou [2]), donc d'après le théorème 2 de [2] il est représentable. D'où *(i)*.

L'assertion *(ii)* résulte du fait que, pour tout type $\mathbf{T}$, la connaissance de $\mathcal{S}(\mathbf{T}) = (\Sigma(\mathbf{T}), \mathfrak{A}(\mathbf{T}))$ détermine entièrement le compositeur $\mathcal{K}(\mathbf{T})$, c'est-à-dire $\mathbf{T}$ à un isomorphisme près. En effet si ω_k $(k = 0, \ldots, n)$ sont des opérations telles que $\omega_o(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ est défini, $\omega_o \overline{\omega}_1 \ldots \overline{\omega}_n$ est une opération composée et

$$(\omega_o \overline{\omega}_1 \ldots \overline{\omega}_n, \omega) \in \mathfrak{A}(\mathbf{T}) \Longleftrightarrow \omega = \omega_o(\omega_1, \ldots, \omega_n). \blacksquare$$

Interprétons le second morphisme d'adjonction $\psi : Id(Esp(I) \to \mathcal{S}(\,.\,).\mathbf{T}(\,.\,)$. Si $\mathbf{T}$ est un I-type, la correspondance $\omega \rightsquigarrow (\mu, \omega, \iota)$, $\omega \in \Omega^\iota_\mu(\mathbf{T})$, se prolonge trivialement en un isomorphisme

$$\theta(\mathbf{T}) : \mathbf{T} \xrightarrow{\sim} \mathbf{T}(X(\mathbf{T})).$$

Si $\mathcal{S}$ est une I-espèce et $\mathbf{T}(\mathcal{S})$ le type engendré, le morphisme composé

$$\mathcal{S} \xrightarrow{\psi_{\mathcal{S}}} \mathcal{S}\mathbf{T}(\mathcal{S}) \xrightarrow[\sim]{\mathcal{S}(\theta(\mathbf{T}(\mathcal{S})))} \mathcal{S}(\mathbf{T}(X(\mathbf{T}(\mathcal{S})))) = \mathcal{S}(X(\mathbf{T}(\mathcal{S})))$$

détermine une structure de $\mathcal{S}$-algèbre sur la famille canonique $X(\mathbf{T}(\mathcal{S}))$, dite *algèbre générique de l'espèce* $\mathcal{S}$, et notée $G(\mathcal{S})$. Dans la suite, nous allègerons les notations en identifiant $\mathbf{T}$ et $\mathbf{T}(X(\mathbf{T}))$ au moyen de $\theta(\mathbf{T})$; $G(\mathcal{S})$ s'identifie alors à $\psi_{\mathcal{S}} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}\mathbf{T}(\mathcal{S})$.

Remarquons que, si $\mathcal{C}$ est une catégorie à produits finis, et (X^ι) un objet de $\mathcal{C}^I$, on a $\Sigma(X^\iota) = (\Omega^\iota_\mu)$ avec

$$\Omega^\iota_\mu = \{\mu\} \times Hom_{\mathcal{C}}(X^\mu, X^\iota) \times \{\iota\} = Hom_{\mathbf{T}(X^\iota)}(\mu, \iota),$$

c'est-à-dire que $\Sigma(X^\iota) = \Sigma(\mathbf{T}(X^\iota))$. De même $\mathcal{S}(X^\iota) = \mathcal{S}(\mathbf{T}(X^\iota))$. Soit $A : \mathbf{T} \to \mathbf{T}(X^\iota)$ une algèbre de type $\mathbf{T}$ sur (X^ι); le morphisme

$$\mathcal{S}(A) : \mathcal{S}(\mathbf{T}) \to \mathcal{S}(\mathbf{T}(X^\iota)) = \mathcal{S}(X^\iota)$$

détermine une algèbre, notée $\mathcal{S}_{\mathbf{T}}(A)$, d'espèce $\mathcal{S}(\mathbf{T})$ sur la famille (X^ι).

Inversement, si $A' : \mathcal{S} \to \mathcal{S}(X^\iota)$ est une algèbre d'espèce $\mathcal{S}$, le morphisme composé

$$\mathbf{T}(\mathcal{S}) \xrightarrow[\mathbf{T}(A')]{} \mathbf{T}(\mathcal{S}(X^\iota)) = \mathbf{T}\mathcal{S}(\mathbf{T}(X^\iota)) \xrightarrow[\varphi_{\mathbf{T}(X^\iota)}]{} \mathbf{T}(X^\iota)$$

détermine une algèbre $\mathbf{T}_{\mathcal{S}}(A')$ sur la famille (X^ι), de type $\mathbf{T}(\mathcal{S})$.

Il est clair que les correspondances $A \rightsquigarrow \mathcal{S}_{\mathbf{T}}(A)$ et $A' \rightsquigarrow \mathbf{T}_{\mathcal{S}}(A')$ se prolongent en des foncteurs.

THEOREME 2.1.2.2. *Avec les notations précédentes, les foncteurs*

$$\mathcal{S}_{\mathbf{T}} : \underline{Alg}(\mathbf{T}, \mathcal{C}) \to \underline{Alg}(\mathcal{S}(\mathbf{T}), \mathcal{C}) \text{ et } \mathbf{T}_{\mathcal{S}} : \underline{Alg}(\mathcal{S}, \mathcal{C}) \to \underline{Alg}(\mathbf{T}(\mathcal{S}), \mathcal{C})$$

sont des isomorphismes de catégories, compatibles avec les foncteurs d'oubli.

L'inverse $\mathcal{S}_{\mathbf{T}}^{-1}$ de $\mathcal{S}_{\mathbf{T}}$ est défini de la manière suivante : si $B : \mathcal{S}(\mathbf{T}) \to \mathcal{S}(X^{\iota})$ est une algèbre d'espèce $\mathcal{S}(\mathbf{T})$, $\mathcal{S}_{\mathbf{T}}^{-1}(B)$ est l'algèbre de type $\mathbf{T}$ définie par le morphisme :

$$\mathbf{T} \xrightarrow[\varphi_{\mathbf{T}}^{-1}]{} \mathbf{T}\mathcal{S}(\mathbf{T}) \xrightarrow[\mathbf{T}(B)]{} \mathbf{T}\mathcal{S}(X^{\iota}) = \mathbf{T}\mathcal{S}(\mathbf{T}(X^{\iota})) \xrightarrow[\varphi_{\mathbf{T}(X^{\iota})}]{} \mathbf{T}(X^{\iota}).$$

De même l'inverse $\mathbf{T}_{\mathcal{S}}^{-1}$ de $\mathbf{T}_{\mathcal{S}}$ associe à toute algèbre $B' : \mathbf{T}(\mathcal{S}) \to \mathbf{T}(X^{\iota})$, de type $\mathbf{T}(\mathcal{S})$, l'algèbre d'espèce $\mathcal{S}$ définie par le morphisme composé :

$$\mathcal{S} \xrightarrow[\psi_{\mathcal{S}}]{} \mathcal{S}\mathbf{T}(\mathcal{S}) \xrightarrow[\mathcal{S}(B')]{} \mathcal{S}(\mathbf{T}(X^{\iota})) = \mathcal{S}(X^{\iota}).$$

En effet, soit $A : \mathbf{T} \to \mathbf{T}(X^{\iota})$ une $\mathbf{T}$-algèbre. La naturalité de φ entraîne la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{T} \arrow[r, "A"'] \arrow[d] & \mathbf{T}(X^{\iota}) \arrow[d] \\
\mathbf{T}\mathcal{S}(\mathbf{T}) \arrow[r, "\mathbf{T}\mathcal{S}(A)"'] & \mathbf{T}\mathcal{S}(\mathbf{T}(X^{\iota}))
\end{tikzcd}$$

c'est-à-dire $\mathcal{S}_{\mathbf{T}}^{-1}\mathcal{S}_{\mathbf{T}}(A) = A$.

De même si $A' : \mathcal{S} \to \mathcal{S}(X^{\iota}) = \mathcal{S}(\mathbf{T}(X^{\iota}))$ est une $\mathcal{S}$-algèbre, le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{S} \arrow[r] \arrow[d, "\psi_{\mathcal{S}}"'] & (\mathbf{T}(X^{\iota})) \arrow[d, "\psi_{\mathcal{S}(\mathbf{T}(X^{\iota}))}"] \arrow[dr, "id"] & \\
\mathcal{S}\mathbf{T}(\mathcal{S}) \arrow[r, "\mathcal{S}\mathbf{T}(A')"'] & \mathcal{S}\mathbf{T}\mathcal{S}(\mathbf{T}(X^{\iota})) \arrow[r, "\mathcal{S}(\mathcal{S}_{\mathbf{T}(X^{\iota})})"'] & \mathcal{S}(\mathbf{T}(X^{\iota}))
\end{tikzcd}$$

est commutatif (le carré par naturalité, le triangle d'après la propriété bien connue des adjoints). C'est-à-dire $\mathbf{T}_{\mathcal{S}}^{-1}\mathbf{T}_{\mathcal{S}}(A') = A'$. ■

Dans la suite de telles vérifications, purement formelles, seront épargnées très souvent au lecteur.

Les théorèmes 2.1.2.1 et 2.1.2.2 et l'exemple 1.2.1.5 fournissent une réponse à la question posée par Heller [1] sur les rapports entre les catégories algébriques de Lawvere [1] et les variétés de Σ-algèbres de Higgins [2]. Les premières sont les $\underline{Alg}(\mathbf{T}, \underline{Ens})$ où $\mathbf{T}$ est un I-type, les secondes sont les $\underline{Alg}(\mathbf{T}(\mathcal{S}), \underline{Ens})$ où $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathcal{O})$ (prop. 1.3.5.1). En outre 2.1.2.1 et 2.1.2.2 expriment essentiellement le fait qu'il y a «assez de types d'algèbres pour classifier toutes les espèces de structures algébriques» (élémentaires). Nous allons montrer qu'il y en a «juste assez».

2.1. 3. L'EQUIVALENCE D'ESPECES DE STRUCTURES ALGEBRIQUES. Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux catégories à produits finis, $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ un foncteur qui commute avec les produits finis, et $\mathcal{S} = (\Sigma, \mathfrak{A})$ une I-espèce. Si $P = (X^\iota, \varphi^\omega) : \Sigma \to \Sigma(X^\iota)$ est une préalgèbre de $\mathcal{C}$ de schéma $\Sigma = (\Omega^\iota_\mu)$, $(F(X^\iota), F(\varphi^\omega))$ est une préalgèbre de $\mathcal{C}'$, de schéma Σ, dite *image* de P et notée $F_*^\Sigma(P)$. Il est clair que, si P satisfait les axiomes de $\mathcal{S}$, c'est-à-dire si $(\mathcal{S}, P)$ est une $\mathcal{S}$-algèbre A de $\mathcal{C}$, $(\mathcal{S}, F_*^\Sigma(P))$ est une $\mathcal{S}$-algèbre de $\mathcal{C}'$, dite *image* de A et notée $F_*^{\mathcal{S}}(A)$; en outre la correspondance $A \rightsquigarrow F_*^{\mathcal{S}}(A)$ se prolonge en un foncteur

$$\textit{image directe } Alg(\mathcal{S}, \mathcal{C}) \xrightarrow{F_*^{\mathcal{S}}} Alg(\mathcal{S}, \mathcal{C}')$$

« compatible avec les foncteurs d'oubli », c'est-à-dire rendant commutatif

$$(2.1.3.1)\qquad \begin{array}{ccc} \underline{Alg}(\mathcal{S}, \mathcal{C}) & \xrightarrow{\quad F_*^{\mathcal{S}} \quad} & \underline{Alg}(\mathcal{S}, \mathcal{C}') \\ {\scriptstyle oubli}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle oubli} \\ \mathcal{C}^I & \xrightarrow{\qquad\quad} & \mathcal{C}'^I \end{array}$$

En outre, si $F' : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}''$ est un autre foncteur qui commute aux produits finis, on a $(F' \circ F)_*^{\mathcal{S}} = F'^{\mathcal{S}}_* \circ F_*^{\mathcal{S}}$.

Si $\mathcal{S}'$ est une autre I-espèce et $f : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}$ est un morphisme banal, à toute $\mathcal{S}$-algèbre $A : \mathcal{S} \to \mathcal{S}(X^\iota)$ de $\mathcal{C}$, on associe la $\mathcal{S}'$-algèbre de $\mathcal{C}$ *image réciproque* $f^*_{\mathcal{C}}(A) = A \circ f : \mathcal{S}' \xrightarrow{f} \mathcal{S} \xrightarrow{A} \mathcal{S}(X^\iota)$. Ici encore, la correspondance $A \to f^*_{\mathcal{C}}(A)$ est un foncteur $f^*_{\mathcal{C}} : \underline{Alg}(\mathcal{S},\mathcal{C}) \to \underline{Alg}(\mathcal{S}',\mathcal{C})$ qui commute avec les foncteurs d'oubli, c'est-à-dire qui rend commutatif

(2.1. 3.2)
$$\begin{tikzcd}
\underline{Alg}(\mathcal{S},\mathcal{C}) \arrow[rr, "f^*_{\mathcal{C}}"] \arrow[dr, "oubli"'] & & \underline{Alg}(\mathcal{S}',\mathcal{C}) \arrow[dl, "oubli"] \\
& \mathcal{C}^I &
\end{tikzcd}$$

et si $f' : \mathcal{S}'' \to \mathcal{S}' \in \underline{Esp}(I)$ on a clairement $(ff')^*_{\mathcal{C}} = f'^*_{\mathcal{C}} \circ f^*_{\mathcal{C}}$. Enfin, on vérifie immédiatement la commutativité du diagramme :

(2.1.3.3)
$$\begin{tikzcd}
\underline{Alg}(\mathcal{S},\mathcal{C}) \arrow[r, "F^{\mathcal{C}}_*"] \arrow[d, "f^*_{\mathcal{C}}"'] & \underline{Alg}(\mathcal{S},\mathcal{C}') \arrow[d, "f^*_{\mathcal{C}'}"] \\
\underline{Alg}(\mathcal{S}',\mathcal{C}) \arrow[r, "F^{\mathcal{S}'}_*"] & \underline{Alg}(\mathcal{S}',\mathcal{C}')
\end{tikzcd}$$

(On peut interpréter ce qui précède en termes de foncteur contravariant de $\underline{Esp}(I)$ dans une «très grosse catégorie», mais la rédaction prouve que, sans parler des ennuis logiques, cette interprétation est plus longue que la formulation naîve).

Un *morphisme sémantique* $\tilde{f}$ d'une I- espèce $\mathcal{S}'$ dans une I-espèce $\mathcal{S}$ est défini par la donnée, pour toute catégorie $\mathcal{C}$ à produits finis, d'un foncteur

$$f^*_{\mathcal{C}} : \underline{Alg}(\mathcal{S},\mathcal{C}) \to \underline{Alg}(\mathcal{S}',\mathcal{C})$$

fonctoriel en $\mathcal{C}$ (i. e. rendant commutatif le diagramme *(2.1.3. 3)*) et *compatible avec les foncteurs d'oubli* (i.e. rendant commutatif 2.1.3.2). On note $\tilde{f} : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}$. Si $\tilde{f}' : \mathcal{S}'' \to \mathcal{S}'$ est un autre morphisme, la famille des composés $f'^*_{\mathcal{C}} \circ f^*_{\mathcal{C}} : Alg(\mathcal{S},\mathcal{C}) \to \underline{Alg}(\mathcal{S}',\mathcal{C}) \to \underline{Alg}(\mathcal{S}'',\mathcal{C})$ est un morphisme de $\mathcal{S}''$ dans $\mathcal{S}$, dit *composé* de $\tilde{f}$ et $\tilde{f}'$ et noté $\tilde{f} \circ \tilde{f}'$; la famille $id(\underline{Alg}(\mathcal{S},\mathcal{C}))$ est le morphisme identique de $\mathcal{S}$, noté $\tilde{1}_{\mathcal{S}}$ ou $\tilde{id}(\mathcal{S})$.

Deux I-espèces $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ sont (sémantiquement) *équivalentes* s'il existe deux morphismes $\tilde{f} : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}$ et $\tilde{g} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}'$ tels que $\tilde{g} \circ \tilde{f} = \tilde{1}_{\mathcal{S}'}$ et $\tilde{f} \circ \tilde{g} = \tilde{1}_{\mathcal{S}}$; c'est-à-dire si, pour toute catégorie $\mathcal{C}$ à produits finis, il existe un isomorphisme

$$\underline{Alg}(\mathcal{S},\mathcal{C}) \xrightarrow{\sim} \underline{Alg}(\mathcal{S}',\mathcal{C})$$

fonctoriel en $\mathcal{C}$ et compatible avec les foncteurs d'oubli. Si $f : \mathcal{S} \to \mathcal{S}'$ est un morphisme banal, la famille $f^*_{\mathcal{C}}$ des foncteurs images réciproques est un morphisme sémantique noté $\tilde{f}$ et dit *extension* de f.

Soit $\tilde{f} : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}$ un morphisme sémantique. Si $\mathbf{T}(\mathcal{S})$ est le type engendré par $\mathcal{S}$, le foncteur $f^*_{\mathbf{T}(\mathcal{S})} : \underline{Alg}(\mathcal{S},\mathbf{T}(\mathcal{S})) \to \underline{Alg}(\mathcal{S}',\mathbf{T}(\mathcal{S}))$ associe à l'algèbre générique de $\mathcal{S}$, $G(\mathcal{S}) : \mathcal{S} \to \mathcal{S}(\mathbf{T}(\mathcal{S}))$ (cf. 2. 1.2.1),une $\mathcal{S}'$-algèbre $f^*_{\mathbf{T}(\mathcal{S})}(G(\mathcal{S}))$ ayant, d'après 2.1.3.2, pour famille sous-jacente la famille canonique $X(\mathbf{T}(\mathcal{S}))$, c'est-à-dire que

$$f^*_{\mathbf{T}(\mathcal{S})}(G(\mathcal{S})) : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}(X(\mathbf{T}(\mathcal{S}))) \simeq \mathcal{S}(\mathbf{T}(\mathcal{S})).$$

Notons $\tilde{\mathbf{T}}(\tilde{f})$ le morphisme composé

$$\mathbf{T}(\mathcal{S}') \xrightarrow{\mathbf{T}(f^*_{\mathbf{T}(\mathcal{S})}(G(\mathcal{S})))} \mathbf{T}\mathcal{S}(\mathbf{T}(\mathcal{S})) \xrightarrow{\varphi_{\mathbf{T}(\mathcal{S})}} \mathbf{T}(\mathcal{S}) \in Hom_{\underline{Typ}(I)}(\mathbf{T}(\mathcal{S}'),\mathbf{T}(\mathcal{S}))$$

LEMME 2.1.3.4. *La correspondance $\tilde{f} \rightsquigarrow \tilde{\mathbf{T}}(\tilde{f})$ est bijective.*

L'application inverse $\tilde{\mathbf{I}}$ est définie de la façon suivante : soit $u : \mathbf{T}(\mathcal{S}') \to \mathbf{T}(\mathcal{S}) \in \underline{Typ}(I)$, et $\mathcal{C}$ une catégorie à produits finis. Si $A : \mathcal{S} \to \mathcal{S}(X^\iota)$ est une $\mathcal{S}$-algèbre de $\mathcal{C}$, d'après 2.1.2.2,

$$\mathbf{T}_{\mathcal{S}}(A) : \mathbf{T}(\mathcal{S}) \to \mathcal{C} \in \underline{Alg}(\mathbf{T}(\mathcal{S}),\mathcal{C}),$$

$$\mathbf{T}_{\mathcal{S}}(A)\circ u : \mathbf{T}(\mathcal{S}') \to \mathbf{T}(\mathcal{S}) \to \mathcal{C} \in \underline{Alg}(\mathbf{T}(\mathcal{S}'),\mathcal{C})$$

et $\mathbf{T}^{-1}_{\mathcal{S}'}(\mathbf{T}_{\mathcal{S}}(A)\circ u)$ est une $\mathcal{S}'$-algèbre de $\mathcal{C}$, notée $\mathbf{I}_{\mathcal{C}}(u)(A)$. On vérifie immédiatement que $A \rightsquigarrow \mathbf{I}_{\mathcal{C}}(u)(A)$ est un foncteur $\underline{Alg}(\mathcal{S},\mathcal{C}) \to$ $\to \underline{Alg}(\mathcal{S}',\mathcal{C})$ noté $\mathbf{I}_{\mathcal{C}}(u)$ et que la «famille» des $\mathbf{I}_{\mathcal{C}}(u)$, indexée par les catégories à produits finis, est un morphisme sémantique $\tilde{\mathbf{I}}(u) : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}$, dit *interprétation* de u. La vérification de $\tilde{\mathbf{I}}(\tilde{\mathbf{I}}(u)) = u$ et $\tilde{\mathbf{I}}(\tilde{\mathbf{I}}(\tilde{f})) = \tilde{f}$ est formelle à partir de 2.1.2.1 et 2.1.2.2.■

REMARQUE 2.1.3.5. Si toutes les catégories $\mathcal{C}$ étaient petites, le lemme résulterait du lemme de Yonéda [1]. Notons en effet $F\text{-}\underline{Cat}$ la catégorie dont les objets sont les petites catégories à produits finis, et les flèches sont les foncteurs commutant avec ces produits. A toute espèce $\mathcal{S}$, on associe le foncteur $F^{\mathcal{S}} : F\text{-}\underline{Cat} \to \underline{Ens}$, $\mathcal{C} \rightsquigarrow \underline{Alg}(\mathcal{S},\mathcal{C})$. Si $\hat{f} : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}$ est un morphisme sémantique, défini par $f^*_{\mathcal{C}} : \underline{Alg}(\mathcal{S}, \mathcal{C}) \to \underline{Alg}(\mathcal{S}', \mathcal{C})$, les restrictions $\varphi_{\mathcal{C}}$ des foncteurs $f^*_{\mathcal{C}}$ aux objets définissent un morphisme φ: $F^{\mathcal{S}} \to F^{\mathcal{S}'}$. D'après 2.1.2.2 les foncteurs $F^{\mathcal{S}}$ sont représentables (il s'agit même de représentabilité «relative à $\underline{Cat}$» (Bénabou [4])) et représentés par les catégories $\mathbf{T}(\mathcal{S})$, d'où le résultat. La démonstration du lemme de Yoneda étant «purement formelle», elle se transpose à la situation de 2.1.3.4.(*)

Le lemme 2.1.3.4 implique que, pour tout couple $(\mathcal{S}, \mathcal{S}')$ de I-espèces, les morphismes sémantiques de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}'$ forment un ensemble $Hom_{\underline{\widetilde{Esp}}(I)}(\mathcal{S}, \mathcal{S}')$. Ces ensembles munis des accouplements $(\tilde{f}, \tilde{f}') \rightsquigarrow \widetilde{ff'}$ et des unités $\tilde{1}_{\mathcal{S}}$ déterminent la catégorie $\underline{\widetilde{Esp}}(I)$ *des espèces d'algèbres sur I-termes*. (Elle a mêmes objets que $\underline{Esp}(I)$).

Il est clair que la correspondance $f \rightsquigarrow \hat{f}$ est un foncteur :

$$\textit{extension sémantique} \quad \tilde{\cdot} : \underline{Esp}(I) \to \underline{\widetilde{Esp}}(I).$$

De même on définit de manière évidente le foncteur

$$\textit{type associé} \quad \tilde{\mathbf{T}}(\,.\,) : \underline{\widetilde{Esp}}(I) \to \underline{Typ}(I),\ \mathcal{S} \rightsquigarrow \mathbf{T}(\mathcal{S}),\ \hat{f} \rightsquigarrow \tilde{\mathbf{T}}(\hat{f}).$$

On appelle espèce d'algèbre sous-jacente, et on note $\tilde{\mathcal{S}}(\,.\,)$, le foncteur composé

$$\tilde{\mathcal{S}}(\,.\,) : \underline{Typ}(I) \xrightarrow{\mathcal{S}(\,.\,)} \underline{Esp}(I) \xrightarrow{\tilde{\cdot}} \underline{\widetilde{Esp}}(I).$$

THEOREME 2.1.3.6. *Les foncteurs $\tilde{\mathbf{T}}(\,.\,)$ et $\tilde{\mathcal{S}}(\,.\,)$ sont quasi-inverses.*

Vérification formelle à partir de 2.1.2.1 et 2.1.2.2.■

COROLLAIRE 2.1.3.7. *Deux I-espèces $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ sont équivalentes si et seulement si leurs types $\mathbf{T}(\mathcal{S})$ et $\mathbf{T}(\mathcal{S}')$ sont isomorphes.*■

COROLLAIRE 2.1.3.8. *La catégorie $\underline{\widetilde{Esp}}(I)$ des I-espèces d'algèbres est la catégorie de fractions de $\underline{Esp}(I)$, obtenue en rendant inversibles tous les morphismes banaux qui induisent une équivalence sémantique.*

Cela résulte immédiatement de 2.1.3.6, 2.1.2.1 et de Gabriel [1].

Tous les résultats qui précèdent, une grande partie de ceux qui suivent, et d'après 2.1.2.2 la justification même de la notion de I-type résul-

(*) Dans un travail ultérieur nous étudierons les formules du calcul des prédicats du premier ordre qui sont «vraies pour toutes les catégories» dès qu'elles le sont pour les petites catégories.

tent formellement du 2.1.2.1, c'est-à-dire de l'existence (2.1.2.1 *(i)*), et des propriétés (2.1.2.1 *(ii)*), du type $\mathbf{T}(\mathcal{S})$ engendré par une I-espèce $\mathcal{S}$. Nous allons en donner deux descriptions, l'une (2.1.3.9) de nature «logique» fait le lien avec la théorie des modèles (cf. remarque 1.3.5.1), l'autre (cf. 2.3) comme algèbre définie par générateurs et relations.

Soit $\mathcal{S} = (\Sigma, \mathcal{A})$ une I-espèce. La réunion $\bigcup_{\mathcal{C}} Alg(\mathcal{S}, \mathcal{C})$ ($\mathcal{C}$ catégorie à produits finis) est dite classe des $\mathcal{S}$-algèbres et notée $Alg(\mathcal{S})$. Pour toute $A : \mathcal{S} \to \mathcal{S}(X^{\iota}) \in Alg(\mathcal{S})$ notons $P_A : \Sigma \to \Sigma(X^{\iota})$ la préalgèbre sous-jacente. L'ensemble $\overline{\mathcal{A}} \subset R(\Sigma)$ des relations satisfaites par la famille (P_A) $(A \in Alg(\mathcal{S}))$ (cf. 1.3.5) est dit ensemble des *conséquences de* $\mathcal{A}$ (de manière moins formelle, une relation $\rho = (\omega, \omega') \in R(\Sigma)$ est conséquence de $\mathcal{A}$ si elle est satisfaite pour toute $\mathcal{S}$-algèbre). Pour toute famille (X^{ι}) d'objets d'une catégorie $\mathcal{C}$ à produits finis, l'ensemble $\mathcal{A}(X^{\iota})$des relations vraies dans (X^{ι}) est le graphe d'une relation d'équivalence dans $\hat{\Sigma}(X^{\iota})$; si A est une $\mathcal{S}$-algèbre sur (X^{ι}), l'image réciproque de $\mathcal{A}(X^{\iota})$ est le graphe d'une équivalence sur $\hat{\Sigma}$ et contient $\mathcal{A}$. Il en résulte que $\overline{\mathcal{A}} \supset \mathcal{A}$ et que $\overline{\mathcal{A}}$ est le graphe d'une relation d'équivalence, notée $mod(\mathcal{A})$, sur $\hat{\Sigma}$. Notons $\check{\Sigma} = (\check{\Omega}^{\iota}_{\mu})$ le I-schéma quotient $\hat{\Sigma}/mod(\mathcal{A})$, et $\mathbf{T}_{\mathcal{S}}$: $\hat{\Sigma} \to \check{\Sigma}$, $\hat{\omega} \rightsquigarrow \check{\omega}$ la projection canonique. Si A est une $\mathcal{S}$-algèbre, la préalgèbre $\hat{P}_A : \hat{\Sigma} \to \Sigma(X^{\iota})$, saturante de P_A (cf. 1.3.4), se factorise de manière unique à travers $\pi_{\mathcal{S}}$ en un morphisme $\check{P}_A : \check{\Sigma} \to \Sigma(X^{\iota})$ de I-schémas. En particulier, si $G(\mathcal{S}) : \mathcal{S} \to \mathcal{S}(X(\mathbf{T}(\mathcal{S})))$ est l'algèbre générique de $\mathcal{S}$, on obtient un morphisme

$$\check{P}_{\mathcal{S}} : \check{\Sigma} \xrightarrow[\check{P}_{G(\mathcal{S})}]{} \Sigma(X(\mathbf{T}(\mathcal{S}))) \xrightarrow[\tilde{\chi}]{} \Sigma(\mathbf{T}(\mathcal{S})),$$

où χ est l'isomorphisme évident.

PROPOSITION 2.1.3.8. *Soit $\mathcal{S} = (\Sigma, \mathcal{A})$ une I-espèce. Une relation de Σ est conséquence de $\mathcal{A}$ si et seulement si elle est satisfaite par l'algèbre générique de $\mathcal{S}$.*

La nécessité est claire d'après la définition de $\overline{\mathcal{A}}$. D'autre part toute $\mathcal{S}$-algèbre $A : \mathcal{S} \to \mathcal{S}(X^{\iota}) = \mathcal{S}(\mathbf{T}(X^{\iota}))$ admet d'après 2.1.2.1 et 2.1. 2.2 une factorisation de la forme :

$$A : \mathcal{S} \xrightarrow[\psi_{\mathcal{S}} \simeq G(\mathcal{S})]{} \mathcal{S}\mathbf{T}(\mathcal{S}) \xrightarrow[\mathbf{T}_{\mathcal{S}}(A)]{} \mathcal{S}(\mathbf{T}(X^{\iota})).$$

La transitivité, en un sens évident, des images réciproques entraîne alors que, si $\rho \in R(\Sigma)$ est satisfaite par $G(\mathcal{S})$, elle est satisfaite par toute $A \in Alg(\mathcal{S})$.

THEOREME 2.1.3.9. *Avec les notations précédentes*

(i) $\check{P}_{\mathcal{S}} : \check{\Sigma} = \hat{\Sigma}/mod(\mathfrak{A}) \to \Sigma(\mathbf{T}(\mathcal{S}))$ *est un isomorphisme de* I-*schémas.*

(ii) Il existe une multiplication associative et unitaire T *sur* $\check{\Sigma}$, *unique, telle que si* $\omega_k \in \Omega^{\iota_k}_{\mu_k} \subset \hat{\Omega}^{\iota_k}_{\mu_k}$ $(k = 0, \ldots, n)$ *vérifient* $\mu_1 = \ldots = \mu_n$ *et* $\mu_o = \iota_1 \ldots \iota_n$, *on ait :*

$$\omega_o \overline{\omega}_1 \ldots \overline{\omega}_n = \check{\omega}_o(\check{\omega}_1, \ldots, \check{\omega}_n).$$

(iii) Le morphisme $\check{P}_{\mathcal{S}}$ *définit un isomorphisme de* I-*compositeurs :* $(\check{\Sigma}, T) \to \mathcal{K}(\mathbf{T}(X))$.

Démonstration succinte. D'après 2.1.3.8, $\check{P}_{\mathcal{S}}$ est injective. D'autre part, la construction dans 2.1.2.1 de la solution du problème universel, adaptée à <u>*Comp(I)*</u> (cf. 2.1.1.1), consiste à prendre le sous-compositeur engendré par l'image de $\hat{\Sigma}$ dans un produit de compositeurs, qui n'est autre, d'après 1.3.4, que l'image de $\hat{\Sigma}$. Il en résulte que $\hat{P}_{G(\mathcal{S})} : \hat{\Sigma} \to \Sigma(X(\mathbf{T}(\mathcal{S})))$ est surjective donc aussi $\check{P}_{\mathcal{S}}$, ce qui démontre *(i)*. Alors *(ii)* résulte facilement de 1.3.4.1, ainsi que *(iii)*.■

Ainsi le I-compositeur $\mathcal{K}(\mathbf{T}(\mathcal{S}))$, qui détermine $\mathbf{T}(\mathcal{S})$, a pour opérations les classes d'équivalence d'opérations composées construites à partir des projections standard et des opérations de Ω; deux opérations $\hat{\omega}$ et $\hat{\omega}'$ étant équivalentes si et seulement si pour toute $\mathcal{S}$-algèbre $(X^{\iota}, \varphi^{\omega})$ les *lois structurales composées* $\varphi^{\hat{\omega}}$ et $\varphi^{\hat{\omega}'}$ associées à $\hat{\omega}$ et $\hat{\omega}'$ sont identiques.

REMARQUES 2.1.3.10.

(i) Même si $\mathfrak{A} = \emptyset$, c'est-à-dire si $\mathcal{S}$ s'identifie à Σ, l'ensemble $\overline{\mathfrak{A}}$ est différent de la diagonale de $\hat{\Sigma}$, et $\Sigma \not\simeq \hat{\Sigma}$. Les conséquences de $\emptyset$ sont dites *tautologiques de* Σ.

(ii) Le lecteur donnera un sens précis en termes de foncteurs

adjoints aux «analogies» suivantes. Dans le cas des schémas de diagrammes, l'adjonction de projections canoniques (resp. d'opérations composées) correspond à l'adjonction de flèches unités (resp. de flèches composées).

(iii) Dans le cas général, les projections standard jouent le rôle des variables ou lettres de la théorie (cf. 1.3.5.1) et les opérations $\hat{\omega}$ jouent le rôle des termes; $\Sigma(\mathbf{T}(\mathcal{S}))$ apparaît comme le quotient de l'ensemble des termes par la relation d'équivalence qui identifie deux termes T et T' si et seulement si $T = T'$ est un théorème de la théorie. Cette remarque ne sera justifiée que si l'on montre que la notion de conséquence que nous avons introduite coïncide avec la notion usuelle définie à partir des *modèles de* $\mathcal{S}$, c'est-à-dire des $\mathcal{S}$-algèbres de la catégorie des ensembles. Cela résultera de 2.2.4.2 ci-dessous.

2.1.4. PROPRIETES FORMELLES. L'utilisation de I-types au lieu de I-espèces pour définir les algèbres ramène leur étude à des considérations très simples sur les catégories de foncteurs qui commutent avec les produits finis. Ainsi les notions d'images directes et réciproques (cf. 1.2.3) se réduisent à la composition des foncteurs. Explicitons pour fixer les notations. Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux catégories à produits finis, $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ un foncteur qui commute avec ces produits, $\mathbf{T}$ et $\mathbf{T}'$ deux I-types et $f : \mathbf{T} \to \mathbf{T}'$ un morphisme. On définit les foncteurs

Image directe $F_*^{\mathbf{T}} : \underline{Alg}(\mathbf{T}, \mathcal{C}) \to \underline{Alg}(\mathbf{T}, \mathcal{C}')$, $A \rightsquigarrow F \circ A$, $u \rightsquigarrow F * u$,

Image réciproque $f_{\mathcal{C}}^* : \underline{Alg}(\mathbf{T}, \mathcal{C}) \to \underline{Alg}(\mathbf{T}', \mathcal{C})$, $A \rightsquigarrow A \circ f$, $u \rightsquigarrow u * f$,

où $A : \mathbf{T} \to \mathcal{C}$ est une algèbre, $u : A \to B$ un morphisme de $\mathbf{T}$-algèbres, et $*$ est la composition définie dans Godement [1]. Il est clair que les diagrammes déduits de 2.1.3.1, 2.1.3.2 et 2.1.3.3 en remplaçant $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ par $\mathbf{T}$ et $\mathbf{T}'$ sont commutatifs, et que les isomorphismes $\mathcal{S}_{\mathbf{T}}$ et $\mathbf{T}_{\mathcal{S}}$ du théorème 2.1.2.2 sont «naturels», c'est-à-dire compatibles avec la formation des images directes et réciproques (*).

PROPOSITION 2. 1. 4.1. *Avec les notations précédentes :*

(*) Beaucoup de résultats de ce paragraphe s'expriment, et se démontrent, très simplement, dans le formalisme des 2-catégories.

(i) Si F est fidèle (resp. pleinement fidèle, resp. une équivalence), pour tout I- type $\mathbf{T}$, le foncteur $F_*^{\mathbf{T}}$ est fidèle (resp. ...).

(ii) Si F est pleinement fidèle, pour toute famille (A^ι) d'objets de $\mathcal{C}$ et toute $\mathbf{T}$-algèbre $A' \in \underline{Alg}(\mathbf{T}, \mathcal{C}')$ ayant $(F(A^\iota))$ comme famille sous-jacente, il existe une algèbre $A \in \underline{Alg}(\mathbf{T}, \mathcal{C})$ sur la famille (A^ι) et un isomorphisme $\theta : F_*^{\mathbf{T}}(A) \xrightarrow{\sim} A'$ tel que $0(\theta) = id(F(A^\iota))$.

En effet *(i)* est une propriété bien connue de la composition des foncteurs, et *(ii)* résulte de ce que, si F commute avec les produits et est pleinement fidèle, les catégories $\mathbf{T}(A^\iota)$ et $\mathbf{T}(F(A^\iota))$ sont isomorphes.

PROPOSITION 2.1.4.2. *Soient Λ une petite catégorie, $\mathbf{T}$ un I-type et $\mathcal{C}$ une catégorie à produits finis. La restriction de l'isomorphisme canonique $Fonct(\mathbf{T}, \underline{Fonct}(\Lambda, \mathcal{C})) \xrightarrow{\sim} \underline{Fonct}(\Lambda, \underline{Fonct}(\mathbf{T}, \mathcal{C}))$ à la catégorie des $\mathbf{T}$-algèbres de $\underline{Fonct}(\Lambda, \mathcal{C})$ détermine un isomorphisme*

$$\chi(\Lambda, \mathbf{T}, \mathcal{C}) = \chi : \underline{Alg}(\mathbf{T}, \underline{Fonct}(\Lambda, \mathcal{C})) \xrightarrow{\sim} \underline{Fonct}(\Lambda, \underline{Alg}(\mathbf{T}, \mathcal{C}))$$

compatible avec les foncteurs d'oubli, c'est-à-dire rendant commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\underline{Alg}(\mathbf{T}, \underline{Fonct}(\Lambda, \mathcal{C})) \arrow[r, "\sim", "\chi"'] \arrow[d, "oubli"'] & \underline{Fonct}(\Lambda, \underline{Alg}(\mathbf{T}, \mathcal{C})) \arrow[d, dotted, "0^\Lambda = \underline{Fonct}(\Lambda, oubli)"] \\
{[\underline{Fonct}(\Lambda, \mathcal{C})]^I} \arrow[r, "\sim", "évident"'] & \underline{Fonct}(\Lambda, \mathcal{C}^I)
\end{tikzcd}$$

La vérification, immédiate, est laissée au lecteur, ainsi que le soin de donner un sens(*) à la phrase : «$\chi(\Lambda, \mathbf{T}, \mathcal{C})$ *est fonctoriel en* $\Lambda, \mathbf{T}$ *et* $\mathcal{C}$». Nous exprimerons la fonctorialité en $\mathcal{C}$ (resp. $\mathbf{T}$) en disant que χ est compatible avec les images directes (resp. réciproques).

Les foncteurs à valeurs dans les catégories de $\mathbf{T}$-algèbres se ramènent ainsi aux $\mathbf{T}$-algèbres (dans des catégories de foncteurs). En particulier si $\Lambda = \cdot \to \cdot$, χ détermine un isomorphisme

$$\underline{Alg}(\mathbf{T}, \underline{Fl}(\mathcal{C})) \xrightarrow{\sim} \underline{Fl}(\underline{Alg}(\mathbf{T}, \mathcal{C}))$$

quiprécise la remarque 1.3.3.2.

Les propositions précédentes permettent d'étendre la notion de $\mathbf{T}$-

algèbres aux catégories quelconques (cf. 1.2.1.4). Soit d'abord $\mathcal{C}$ une petite catégorie. Une $\mathbf{T}$-*algèbre généralisée* sur une famille (A^ι) d'objets de $\mathcal{C}$ est un foncteur $\underset{\sim}{A} : \mathcal{C}^* \to \underline{Alg}(\mathbf{T}, Ens)$ tel que le foncteur composé

$$\mathcal{C}^* \xrightarrow[A]{} \underline{Alg}(\mathbf{T}, \underline{Ens}) \xrightarrow[oubli]{} \underline{Ens}^I$$

est le foncteur $X \to (Hom(X, A^\iota))$ $(\iota \in I)$. On note $Algen(\mathbf{T}, \mathcal{C})$ la sous-catégorie pleine de $\underline{Fonct}(\mathcal{C}^*, \underline{Alg}(\mathbf{T}, Ens))$ ayant pour objets les A. Au moyen de χ, $\underline{Algen}(\mathbf{T}, \mathcal{C})$ s'identifie à la sous-catégorie pleine de $\underline{Alg}(\mathbf{T}, \underline{Fonct}(\mathcal{C}^*, Ens))$ dont les objets sont les algèbres sur les famille $\overline{(Hom(., A^\iota))} \in [\underline{Fonct}(\mathcal{C}^*, \underline{Ens})]^I$. Notons $\underline{Rep}(\mathcal{C}^*, \underline{Ens})$ la catégorie des foncteurs représentables de $\mathcal{C}^*$ dans $\underline{Ens}$, et

$$h : \mathcal{C} \to \underline{Rep}(\mathcal{C}^*, \underline{Ens})$$

l'équivalence canonique. Si $\mathcal{C}$ admet des produits finis, d'après 2.1.4.1 on obtient une équivalence $\underline{Alg}(\mathbf{T}, \mathcal{C}) \to \underline{Algen}(\mathbf{T}, \mathcal{C})$, compatible avec les foncteurs d'oubli.

Si $\mathcal{C}$ est une catégorie quelconque, bien que $\underline{Fonct}(\mathcal{C}^*, \underline{Ens})$ «ne soit pas» une catégorie, on peut encore construire la catégorie «propre» $\underline{Algen}(\mathbf{T}, \mathcal{C})$. En effet si $\underset{\sim}{A}$ et $\underset{\sim}{B} : \mathcal{C}^* \to \underline{Alg}(\mathbf{T}, \underline{Ens})$ sont deux algèbres généralisées, un morphisme $\underset{\sim}{u} = (u^\mu_X : \underset{\sim}{A}(X)^\mu \to \underset{\sim}{B}(X)^\mu)$ $(\mu, X) \in M \times Ob(\mathcal{C})$ est déterminé, d'après 1.2.2.1, par la sous-famille

$$(u^\iota_X : Hom(X, A^\iota) = \underset{\sim}{A}(X)^\iota \to \underset{\sim}{B}(X)^\iota = Hom(X, B^\iota)),$$

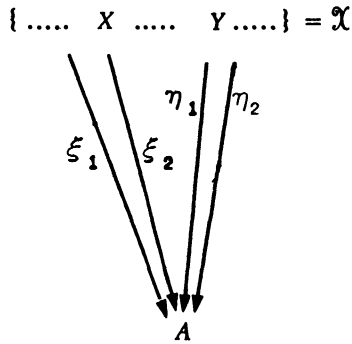
$(\iota, X) \in I \times Ob(\mathcal{C})$, c'est-à-dire en définitive par la famille

$$(u^\iota = u^\iota_{A^\iota}(id(A^\iota)) : A^\iota \to B^\iota)$$

$(\iota \in I)$. Il en résulte que les morphismes de $\underset{\sim}{A}$ dans $\underset{\sim}{B}$ forment un ensemble $Hom(\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B})$, d'où la catégorie $\underline{Algen}(\mathbf{T}, \mathcal{C})$ et le foncteur d'oubli $\underset{\sim}{A} \rightsquigarrow (A^\iota)$, $\underset{\sim}{u} \rightsquigarrow (u^\iota)$, $\underline{Algen}(\mathbf{T}, \mathcal{C}) \to \mathcal{C}^I$. Il est clair que si $\mathcal{C}$ admet des produits finis les catégories $\underline{Alg}(\mathbf{T}, \mathcal{C})$ et $\underline{Algen}(\mathbf{T}, \mathcal{C})$ sont équivalentes, et que l'équivalence est compatible avec les foncteurs d'oubli.

REMARQUE 2.1.4.3. Les catégories $\underline{Algen}(\mathbf{T}, \mathcal{C})$ vérifient certaines propriétés formelles des catégories $\underline{Alg}(\mathbf{T}, \mathcal{C})$, mais il convient de noter la différence suivante, qui est essentielle dans les problèmes d'existence d'adjoints. Si $\mathcal{C}$ est une catégorie à produits finis, pour tout I-type $\mathbf{T}$ et tout objet (A^ι) de $\mathcal{C}^I$, la fibre du foncteur d'oubli $\underline{Alg}(\mathbf{T},\mathcal{C}) \to \mathcal{C}^I$, au dessus de (A^ι), est équivalente à une petite catégorie, ou si l'on préfère, les structures de $\mathbf{T}$-algèbres non isomorphes, sur (A^ι), forment un ensemble. Ce n'est pas le cas pour le foncteur $\underline{Algen}(\mathbf{T},\mathcal{C}) \to \mathcal{C}^I$ quand $\mathcal{C}$ est une catégorie quelconque, comme le montre l'exemple suivant :

Si $\mathcal{C}$ est une catégorie, une *multiplication généralisée* sur un objet A de $\mathcal{C}$ est un morphisme fonctoriel $\mu : Hom(\ ,A) \times Hom(\ ,A) \to Hom(\ ,A)$. Soit alors $\mathfrak{X}$ une classe propre, et A un objet n'appartenant pas à $\mathfrak{X}$. On définit une catégorie $\mathcal{C}$ de la façon suivante : $Ob(\mathcal{C}) = \mathfrak{X} \cup \{A\}$; les flèches de $\mathcal{C}$ autres que les flèches identiques sont les éléments de la classe : $\bigcup_{X \in \mathfrak{X}} \{X\} \times \{0,1\}$; la flèche $\xi_k = (X,k)$ a pour source X et pour but A. La loi de composition des flèches est la seule possible. Une multiplication généralisée sur A est définie par la donnée, pour tout $X \in \mathfrak{X}$, d'une multiplication idempotente dans l'ensemble $Hom(X,A) = \{\xi_1, \xi_2\}$. Il en résulte que les multiplications généralisées sur A forment une classe propre.



Un autre inconvénient des algèbres généralisées est la disparition des images directes. Si $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont deux catégories, et si dans $\mathcal{C}$ certains produits finis n'existent pas, la donnée d'un foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ ne permet pas en général, même si F commute avec les produits finis, de définir un foncteur $F_*^{\mathbf{T}} : \underline{Algen}(\mathbf{T},\mathcal{C}) \to \underline{Algen}(\mathbf{T},\mathcal{C}')$.

Ces remarques justifient les définitions suivantes : Une famille finie $X_1, \ldots\ldots, X_n$ d'objets d'une catégorie $\mathcal{C}$ admet un *produit virtuel* si pour tout objet X de $\mathcal{C}$ les transformations naturelles de $\prod_{k=1}^{n} Hom(\ .\ ,X_k)$ dans $Hom(\ .\ ,X)$ forment un ensemble. Une catégorie $\mathcal{C}$ est à *produits finis virtuels* si toute famille finie d'objets de $\mathcal{C}$ admet un produit virtuel. On note $\underline{Virt}(\mathcal{C})$ la catégorie ayant pour objets les suites finies $\overline{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ d'objets de $\mathcal{C}$, une flèche de $\overline{X}$ dans $\overline{Y} = (Y_1, \ldots, Y_m)$

étant un morphisme fonctoriel

$$Hom(\,.\,, X_1) \times \dots \times Hom(\,.\,, X_n) \to Hom(\,.\,, Y_1) \times \dots \times Hom(\,.\,, Y_n),$$

et $V : \mathcal{C} \to \underline{Virt}(\mathcal{C})$ le foncteur pleinement fidèle qui à tout objet X associe la suite à un terme, notée encore X, et à tout $u : X \to Y$ associe le morphisme $V(u) = Hom(\,.\,, u) : Hom(\,.\,, X) \to Hom(\,.\,, Y)$.

Avec ces définitions, il est clair que :

(i) $\underline{Virt}(\mathcal{C})$ admet des produits finis, et tout objet $\overline{X} = (X_1, \dots, X_n)$ est le produit des objets $X_1, \dots, X_n$ dans $\underline{Virt}(\mathcal{C})$.

(ii) Le foncteur V *commute fortement* avec les produits finis, c'est-à-dire qu'un objet X est, dans $\mathcal{C}$, «le» produit des objets $X_1, \dots, X_n$ si et seulement si il l'est dans $\underline{Virt}(\mathcal{C})$, ou encore si et seulement si X est isomorphe à $(X_1, \dots, X_n)$. Il en résulte que $\mathcal{C}$ admet des produits finis si et seulement si V est une équivalence de catégories. Dans ce cas on peut choisir un quasi-inverse $W : \underline{Virt}(\mathcal{C}) \to \mathcal{C}$ tel que $W \circ V = id(\mathcal{C})$, le couple $(\mathcal{C}, W)$ est dit *catégorie à produits finis choisis.*

(iii) Pour tout I- type $\mathbf{T}$, les catégories

$$\underline{Algen}(\mathbf{T}, \mathcal{C}) \text{ et } \underline{Alg}(\mathbf{T}, \underline{Virt}(\mathcal{C}))$$

sont canoniquement isomorphes (Clair).

La définition suivante permet d'étendre la notion d'image directe aux catégories à produits finis virtuels. Si $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont deux telles catégories, un foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ *commute avec les produits finis virtuels* s'il existe un foncteur $\overline{F} : \underline{Virt}(\mathcal{C}) \to \underline{Virt}(\mathcal{C}')$ satisfaisant à :

(VF 1) $\overline{F}$ commute avec les produits finis.

(VF 2) $\overline{F}$ prolonge F c'est-à-dire rend commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "V"] \arrow[d, "F"'] & \underline{Virt}(\mathcal{C}) \arrow[d, "\overline{F}"] \\ \mathcal{C}' \arrow[r, "V'"] & \underline{Virt}(\mathcal{C}') \end{tikzcd}$$

(VF 3) Pour tout objet $\overline{X} = (X_1, \dots, X_n)$ de $\underline{Virt}(\mathcal{C})$, $\overline{F}(\overline{X}) = = (F(X_1), \dots, F(X_n))$.

Cette définition est justifiée par les remarques suivantes.

(iv) S'il existe un tel $\overline{F}$, il est unique. En effet on a le :

LEMME 2.1.4. 4. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie à produits finis virtuels, $\mathcal{D}$ une catégorie à produits finis, ϕ et ϕ' deux foncteurs de $\underline{Virt}(\mathcal{C})$ dans $\mathcal{D}$ qui commutent aux produits finis et $f : \phi \circ V \to \phi' \circ V$ une transformation naturelle. Il existe une transformation naturelle $\varphi : \phi \to \phi'$ unique, telle que $f = \varphi * V$.*

D'après *(i)* on a nécessairement, pour tout objet $\overline{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ de $Virt(\mathcal{C})$,

$$\varphi_{\overline{X}} = f_{X_1} \times \ldots \times f_{X_n} : \phi V(X_1) \times \ldots \times \phi V(X_n) = \phi(\overline{X}) \to \phi'(X) = \\ = \phi' V(X_1) \times \ldots \times \phi' V(X_n),$$

d'où l'unicité de φ. La fonctorialité des $\varphi_{\overline{X}}$ ainsi définis est claire. En particulier si $\overline{F}$ et $\overline{F}'$ vérifient *(VF 1)* et *(VF 2)*, en prenant pour f le morphisme identique $V' \circ F$ on obtient un isomorphisme unique de $\overline{F}$ sur $\overline{F}'$. La condition *(VF 3)* achève de déterminer $\overline{F}$.

(v) S'il existe un foncteur $\overline{F}'$ satisfaisant seulement *(VF 1)* et *(VF 2)*, F commute avec les produits virtuels. On peut en effet, au moyen d'un isomorphisme qui induit l'identité de F, modifier $\overline{F}'$ en un foncteur $\overline{F}$ vérifiant aussi *(VF 3)*.

(vi) Si F commute avec les produits finis virtuels, il commute avec les produits finis.

En effet si X est produit dans $\mathcal{C}$ des objets $X_1, \ldots, X_n$, d'après *(ii)* et *(VF 1)*, $\overline{F} V(X)$ est produit des $\overline{F} V(X_k)$ dans $\underline{Virt}(\mathcal{C}')$, mais $\overline{F} V(X) = V' F(X)$ et V' commute fortement aux produits finis, donc $F(X)$ est produit des $F(X_k)$ dans $\mathcal{C}'$.

La condition de commutation avec les produits virtuels est strictement plus forte que la commutation avec les produits finis. (On peut le voir en prenant pour $\mathcal{C}$ la catégorie associée à un ensemble ordonné où les *inf* n'existent pas). Mais on a :

(vii) Si $\mathcal{C}$ est à produits finis, F commute avec les produits virtuels si et seulement si il commute avec les produits finis. La nécessité

est claire d'après *(vi)*. Soit alors F commutant avec les produits finis. Si $W : \underline{Virt}(\mathcal{C}) \to \mathcal{C}$ est un choix de produits finis (cf. *(ii)*), le foncteur $\overline{F}' = V'FW$ vérifie *(VF 1)* et *(VF 2)* et *(v)* donne le résultat.

(viii) Si $\mathcal{C}$ est à produits virtuels, $\underline{Virt}(\mathcal{C})$ admet un *choix canonique* de produits finis. Si $\overline{X}^1 = (X^1_1, \dots, X^1_{k_1}), \dots, \overline{X}^p = (X^p_1, \dots, X^p_{k_p})$, posons $\overline{W}(\overline{X}^1, \dots, \overline{X}^p) \stackrel{!}{=} (X^1_1, \dots, X^1_{k_1}, \dots, X^p_1, \dots, X^p_{k_p})$; la correspondance $(\overline{X}^1, \dots, \overline{X}^p) \rightsquigarrow \overline{W}(\overline{X}^1, \dots, \overline{X}^p)$ se prolonge de manière évidente en un choix de produits $\overline{W} : \underline{Virt}(\underline{Virt}(\mathcal{C})) \to \underline{Virt}(\mathcal{C})$.

Soient $(\mathcal{C}, W)$ et $(\mathcal{C}', W')$ deux catégories à produits finis choisis. Un foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ qui commute avec les produits finis est *compatible avec les choix de produits* s'il rend commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[d, "F"'] & \underline{Virt}(\mathcal{C}) \arrow[l, "W"'] \arrow[d, "\overline{F}"] \\ \mathcal{C}' & \underline{Virt}(\mathcal{C}') \arrow[l, "W'"] \end{tikzcd}$$

(ix) Si $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont deux catégories à produits finis virtuels, et $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ commute avec ces produits, le foncteur $\overline{F} : \underline{Virt}(\mathcal{C}) \to \underline{Virt}(\mathcal{C}')$ associé à F est compatible avec les choix canoniques.

La catégorie $\underline{Virt}(\mathcal{C})$, munie de son choix canonique, est caractérisée, à un isomorphisme unique de catégories à produits choisis près, par le

THEOREME 2.1.4.5. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie à produits virtuels; pour toute catégorie à produits finis choisis $(\mathcal{C}', W')$ et tout foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ qui commute aux produits virtuels, il existe un foncteur unique $\phi : \underline{Virt}(\mathcal{C}) \to \mathcal{C}'$ compatible avec $\overline{W}$ et W', tel que $F = \phi \circ V$.*

La vérification est formelle à partir de ce qui précède.

Il en résulte que si $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ commute aux produits virtuels et si $\mathcal{C}'$ est à produits finis, F se prolonge en $\phi : \underline{Virt}(\mathcal{C}) \to \mathcal{C}'$ qui commute aux produits finis, et deux tels prolongements sont d'après 2.1.4.4 canoniquement isomorphes. (Ce résultat s'interprète en termes de quasi-adjoints définis dans une *2*-catégorie, alors que le théorème précédent est un théorème d'adjonction au sens strict).

La notion d'image directe s'étend maintenant sans difficulté dans le cas des catégories à produits virtuels. Si $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont deux telles catégories, et $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ un foncteur qui commute aux produits finis virtuels, pour tout I-type $\mathbf{T}$, le composé

$$\underline{Algen}(\mathbf{T}, \mathcal{C}) \xrightarrow{\sim} \underline{Alg}(\mathbf{T}, \underline{Virt}(\mathcal{C})) \xrightarrow{F_*^{\mathbf{T}}} \underline{Alg}(\mathbf{T}, \underline{Virt}(\mathcal{C}')) \xrightarrow{\sim} \underline{Algen}(\mathbf{T}, \mathcal{C}')$$

est *l'image directe* $F_*^{\mathbf{T}} : \underline{Algen}(\mathbf{T}, \mathcal{C}) \to \underline{Algen}(\mathbf{T}, \mathcal{C}')$. Il est clair que cette notion «prolonge» celle qui était définie pour les $\underline{Alg}(\mathbf{T}, \mathcal{C})$ et que toutes les conditions de naturalité désirées sont satisfaites.

REMARQUES 2.1.4.6.

(i) Même lorsque $\mathcal{C}$ est à produits finis, la catégorie $\underline{Virt}(\mathcal{C})$ est «plus commode que $\mathcal{C}$ pour l'algèbre», car elle admet un choix canonique de produits, ce qui permet de «rigidifier» la notion d'algèbre de type $\mathbf{T}$ en imposant aux foncteurs $A : \mathbf{T} \to Virt(\mathcal{C})$ d'être compatibles avec les choix de produits finis (tout I-type admet clairement un choix canonique).

(ii) Les notions précédentes se dualisent immédiatement et permettent de définir la catégorie $\underline{Coalgen}(\mathbf{T}, \mathcal{C}) \simeq [\,\underline{Algen}(\mathbf{T}, \mathcal{C}^*)\,]^*$ des *co-algèbres généralisées* de type $\mathbf{T}$ dans une catégorie quelconque $\mathcal{C}$, la définition se ramenant à celle d'algèbre ordinaire si $\mathcal{C}$ est à *sommes finies virtuelles.*

(iii) Avec des modifications évidentes on peut généraliser la notion de produit fini virtuel au cas des produits infinis, ou même des limites projectives quelconques, et, ce qui est beaucoup plus intéressant, si $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont deux catégories à limites projectives virtuelles (par exemple deux petites catégories *quelconques*), définir les foncteurs qui *commutent avec les limites virtuelles.* On démontre sans difficulté l'analogue du théorème 2.1.4.5. Les théorèmes qui suivent, énoncés pour les produits finis, sont *vrais pour les* $\varprojlim$ *virtuelles arbitraires.* Ils montrent d'une part que le fait d'être à produits virtuels (resp. $\varprojlim$ virtuelles) est une restriction très faible, et d'autre part que les théorèmes usuels sur les produits finis (resp. $\varprojlim$) peuvent être améliorés (cf. 2.1.4.9 et 2.1.4.3 *(vi)*).

THEOREME 2.1.4.7. *Si une catégorie admet un générateur elle est à produits finis virtuels.*

Soit A un générateur de $\mathcal{C}$, $A_o, A_1, \dots, A_n$ des objets de $\mathcal{C}$; à toute transformation naturelle $\alpha : \prod_{k=1}^{n} Hom(\,.\,, A_k) \to Hom(\,.\,, A)$ définie par la famille d'applications

$$\alpha_X : \prod_{k=1}^{n} Hom(X, A_k) \to Hom(X, A),$$
$$(\xi_1, \dots, \xi_n) \rightsquigarrow \alpha_X(\xi_1, \dots, \xi_n),$$

associons l'application α_G. Si β est une transformation naturelle entre les mêmes foncteurs, différente de α, il existe un objet X et des flèches $\xi_k : X \to A_k$ $(k = 1, \dots, n)$ tels que $\alpha_X(\xi_1, \dots, \xi_n)$ et $\beta_X(\xi_1, \dots, \xi_n)$ soient deux flèches distinctes de X dans A_o. Comme G est générateur, il existe une flèche $\gamma : G \to X$ telle que

$$\alpha_X(\xi_1, \dots, \xi_n) \circ \gamma \neq \beta_X(\xi_1, \dots, \xi_n) \circ \gamma .$$

Posons $\gamma_k = \xi_k \circ \gamma$ $(k = 1, \dots, n)$. La naturalité de α et β entraîne

$$\alpha_G(\gamma_1, \dots, \gamma_n) = \alpha_X(\xi_1, \dots, \xi_n) \circ \gamma \neq \beta_X(\xi_1, \dots, \xi_n) \circ \gamma = \beta_G(\gamma_1, \dots, \gamma_n).$$

Donc $\alpha_G \neq \beta_G$, la correspondance $\alpha \rightsquigarrow \alpha_G$ est injective et les α forment un ensemble. ■

Il suffit de remplacer la catégorie discrète $\{1, \dots, n\}$ par une petite catégorie arbitraire k, et le foncteur $\prod_{k=1}^{n}$ par $\varprojlim_k$ pour avoir la démonstration du théorème analogue pour les $\varprojlim$ virtuelles. Cette même remarque est valable pour les résultats qui suivent.

En fait presque toutes les catégories d'ensembles munis de structures ont des limites projectives virtuelles, comme le montre le

THEOREME 2.1.4.8. *Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux catégories et $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ un foncteur. Si $\mathcal{C}'$ est à produits finis (resp. $\varprojlim$) virtuels, et si F admet un adjoint à gauche G et est fidèle, $\mathcal{C}$ est à produits finis (resp. $\varprojlim$) virtuels.*

Sans utiliser le fait que F est fidèle nous allons :

(i) Définir une application $\overline{F} : \alpha \rightsquigarrow \overline{F}(\alpha)$ de la classe des morphismes fonctoriels $\alpha : \prod_{k=1}^{n} Hom(\,.\,, A_k) \to Hom(\,.\,, A)$ dans l'ensemble

$Hom_{\underline{Virt}(\mathcal{C}')}(\prod_{k=1}^{n} F(A_k), A)$.

Pour tout $X' \in Ob(\mathcal{C}')$ notons $\overline{F}(\alpha)_{X'}$, l'application composée :

$$\prod_k Hom_{\mathcal{C}'}(X', F(A_k)) \tilde{\to} \prod_k Hom_{\mathcal{C}}(G(X'), A_k) \xrightarrow{\alpha_{G(X')}} Hom_{\mathcal{C}}(G(X'), A) \tilde{\to}$$
$$\tilde{\to} Hom_{\mathcal{C}'}(X', F(A)),$$

où les bijections sont définies par l'adjonction de F et G. La naturalité en X' est claire et la famille des $\overline{F}(\alpha)_{X'}$ détermine donc un morphisme dans $\underline{Virt}(\mathcal{C}')$: $\overline{F}(\alpha) : \prod_k F(A_k) \to F(A)$.

(ii) Montrer que, pour tout $X \in Ob(\mathcal{C})$ et tout

$$(\xi_1, \dots, \xi_n) \in \prod_k Hom(X, A_k),$$

on a :

$$F(\alpha_X(\xi_1, \dots, \xi_n)) = \overline{F}(\alpha)_{F(X)}(F(\xi_1), \dots, F(\xi_n)) : F(X) \to F(A) \in \mathcal{C}'.$$

Notons $\varphi : GF \to 1_{\mathcal{C}}$ et $\psi : 1_{\mathcal{C}'} \to FG$ les morphismes canoniques d'adjonction. D'après la définition de $\overline{F}(\alpha)$ on associe à $(F(\xi_1), \dots, F(\xi_n))$ successivement

$$(\varphi_{A_1} \circ GF(\xi_1), \dots, \varphi_{A_n} \circ GF(\xi_n)) \in \prod_k Hom_{\mathcal{C}}(GF(X), A_k),$$

puis

$$\alpha_{GF(X)}(\varphi_{A_1} \circ GF(\xi_1), \dots, \varphi_{A_n} \circ GF(\xi_n)) \in Hom_{\mathcal{C}}(GF(X), A)$$

et enfin :

$$F(\alpha_{GF(X)}(\varphi_{A_1} \circ GF(\xi_1), \dots, \varphi_{A_n} \circ GF(\xi_n)) \circ \psi_{F(X)} =$$
$$= \overline{F}(\alpha)_{F(X)}(F(\xi_1), \dots, F(\xi_n)) \in Hom_{\mathcal{C}'}(F(X), F(A)).$$

Mais la naturalité de φ entraîne la commutativité du diagramme :

$$\begin{tikzcd} GF(X) \arrow[r, "GF(\xi_k)"'] \arrow[d, "\varphi_X"'] & GF(A_k) \arrow[d, "\varphi_{A_k}"] \\ X \arrow[r, "\xi_k"] & A_k \end{tikzcd} \qquad (k = 1, \dots, n)$$

Donc

$$\overline{F}(\alpha)_{F(X)}(F(\xi_1), \dots, F(\xi_n)) = F(\alpha_{GF(X)}(\xi_1 \circ \varphi_X, \dots, \xi_n \circ \varphi_X)) \circ \psi_{F(X)},$$

lequel est égal, d'après la naturalité de α, à :

$F(\alpha_X(\xi_1, \dots, \xi_n) \circ \varphi_X) \circ \psi_{F(X)} = F(\alpha_X(\xi_1, \dots, \xi_n)) \circ F(\varphi_X) \circ \psi_{F(X)}$.
Comme le morphisme fonctoriel $(F * \varphi) \circ (\psi * F) : F \to FGF \to F$ est égal à $id(F)$, on a $F(\varphi_X) \circ \psi_{F(X)} = id(F(X))$, d'où *(ii)*.

(iii) Supposons maintenant F fidèle, et montrons que $\alpha \rightsquigarrow \overline{F}(\alpha)$ est injective. Soient α et β distinctes. Il existe un objet X et des flèches $\xi_k : X \to A_k$ telles que

$$\alpha_X(\xi_1, \dots, \xi_k) \neq \beta_X(\xi_1, \dots, \xi_k) : X \to A.$$

Comme F est fidèle ,

$$F(\alpha_X(\xi_1, \dots, \xi_k)) \neq F(\beta_X(\xi_1, \dots, \xi_k) : F(X) \to F(A),$$

donc d'après *(ii)*

$$\overline{F}(\alpha)_{F(X)}(F(\xi_1), \dots, F(\xi_k)) \neq \overline{F}(\beta)_{F(X)}(F(\xi_1), \dots, F(\xi_k))$$

et

$$\overline{F}(\alpha) \neq \overline{F}(\beta).$$

Les α forment donc un ensemble. ∎

Nous avons donné la démonstration en détail, car il y apparaît que l'existence d'un adjoint à F est trop forte. En effet la construction de *(i)* nécessite seulement l'existence de $\varphi : GF \to 1_{\mathcal{C}}$ et $\psi : 1_{\mathcal{C}'} \to FG$ (en remplaçant « bijections » par « applications »), et *(ii)* qui implique trivialement *(iii)* résulte du seul fait que $(F * \varphi) \circ (\psi * F) = id(F)$. Outre la plus grande généralité, l'intérêt de cette remarque vient du fait que cette « moitié d'adjonction » s'interprète simplement au moyen des catégories multiplicatives $\underline{Fonct}(\mathcal{C}, \mathcal{C})$ et $\underline{Fonct}(\mathcal{C}', \mathcal{C}')$ (cf. Benabou [1]). L'hypothèse de fidélité de F ne peut par contre être supprimée comme le montre le contre-exemple trivial où l'on prend pour $\mathcal{C}$ une catégorie ayant un objet initial et pour $\mathcal{C}'$ une catégorie réduite à un point.

THEOREME 2.1.4.9. *Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux catégories à produits finis (resp. $\varprojlim$) virtuels et $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ un foncteur admettant un adjoint à gauche. Alors F commute avec les produits finis (resp. $\varprojlim$) virtuels.*

La démonstration, très facile en utilisant *(i)* et *(ii)* ci-dessus, est laissée au lecteur. ∎

Nous ne définirons pas ici les «foncteurs virtuellement représentables» et les «adjoints virtuels» qui seront étudiés ailleurs. Nous laisserons au lecteur le soin de dualiser tous les résultats précédents, ce qui est immédiat à partir de 2.1.4.6 *(ii)*, et nous ne considérons plus dans la suite que les catégories $\underline{Alg}(\mathbf{T}, \mathcal{C})$ (resp. $\underline{Coalg}(\mathbf{T}, \mathcal{C})$) où $\mathcal{C}$ admet des produits (resp. sommes) finis, les remarques précédentes permettant de se ramener facilement à ce cas. Nous allons examiner maintenant les propriétés de commutation des différents foncteurs (oubli, images directes et réciproques) aux limites inductives et projectives.

LEMME 2.1.4.10. *Soient $\mathcal{L}$ une catégorie, $\mathcal{C}$ une catégorie à produits finis, $\mathbf{T}$ un I-type et $\Phi : \mathcal{L} \to \underline{Alg}(\mathbf{T}, \mathcal{C})$ un foncteur tel que $O \circ \Phi : \mathcal{L} \to \mathcal{C}^I$ admet une limite projective. Alors Φ admet une limite projective et $O : \underline{Alg}(\mathbf{T}, \mathcal{C}) \to \mathcal{C}^I$ commute avec cette limite.*

En effet, pour tout $L \in Ob(\mathcal{L})$, notons A_L l'algèbre $\Phi(L)$ et $A_L^{(I)} \in \mathcal{C}^I$ la famille $O \circ \Phi(L)$ sous-jacente. Soit $A^{(I)} \in \mathcal{C}^I$ une limite projective des $A_L^{(I)}$ et $\pi_L^{(I)} : A^{(I)} \to A_L^{(I)}$ les projections canoniques. Par prolongement à M (cf. 1.1) on obtient un système projectif dans $\mathcal{C}^M$:

$$\pi_L^{(M)} : A^{(M)} \to A_L^{(M)} .$$

Pour tout $\iota \in I$ le foncteur $pr^\iota : \mathcal{C}^I \to \mathcal{C}$, $X^{(I)} \rightsquigarrow X^\iota$ commute aux $\varprojlim$ (vérification immédiate) donc $[A^\iota ; \pi_L^\iota]$ est une limite projective des A_L^ι. Les produits finis commutant avec les $\varprojlim$, pour tout $\mu \in M$, $[A^\mu, \pi_L^\mu]$ est une limite projective du foncteur $\Phi^\mu : L \rightsquigarrow A_L^\mu$, $\mathcal{L} \to \mathcal{C}$. Soit $f : \mu \to \nu \in \mathbf{T}$; il existe une flèche unique $A(f) \in Fl(\mathcal{C})$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} A^\mu & \xrightarrow{A(f)} & A^\nu \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_L^\mu} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_L^\nu} \\ A_L^\mu & \xrightarrow{A_L(f)} & A_L^\nu \end{array} \qquad (L \in Ob(\mathcal{C}))$$

L'unicité de $A(f)$ implique clairement que $A(f \circ g) = A(f) \circ A(g)$. D'où un foncteur $A : \mathbf{T} \to \mathcal{C}$, $\mu \rightsquigarrow A^\mu$, $f \rightsquigarrow A(f)$ qui commute avec les produits finis. Il est immédiat de vérifier que $\pi_L^{(M)}$ définit une transformation naturelle $A \to A_L$ et que $[A ; \pi_L^{(M)}]$ est une limite projective de Φ . ■

COROLLAIRE 2.1.4.11. *Si* $\mathcal{C}$ *admet des limites projectives d'un certain type* ($\varprojlim$ *finies, produits,* $\varprojlim$ *filtrantes, produits fibrés, etc...*), $\underline{Alg}(\mathbf{T}, \mathcal{C})$ *admet des limites projectives de même type, et le foncteur d'oubli commute fortement avec ces limites.*

En particulier $\underline{Alg}(\mathbf{T}, \mathcal{C})$ admet toujours des produits finis. Dans le cas où $\mathcal{C}$ est une «bonne catégorie concrète» telle que <u>*Ens*</u>, <u>*Top*</u>, <u>*Ab*</u>, <u>*Gr*</u>, <u>*Cat*</u>, $\underline{Mod(\Lambda)}$, ..., $\underline{Alg}(\mathbf{T}, \mathcal{C})$ est à limites projectives, et le foncteur d'oubli commute fortement avec ces limites.

Mentionnons, pour éviter les redites, les deux lemmes suivants, dont la vérification est immédiate :

LEMME 2.1.4.12. *Soient* $\mathcal{L}$ *une catégorie,* $P : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ *et* $\overline{P} : \overline{\mathfrak{X}} \to \overline{\mathfrak{Y}}$ *deux foncteurs qui commutent fortement avec les* $\mathcal{L}$*-limites projectives, et* $F : \mathfrak{X} \to \overline{\mathfrak{X}}$ *et* $G : \mathfrak{Y} \to \overline{\mathfrak{Y}}$ *deux foncteurs rendant commutatif le diagramme :*

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{X} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "P"'] & \overline{\mathfrak{X}} \arrow[d, "\overline{P}"] \\ \mathfrak{Y} \arrow[r, "G"] & \overline{\mathfrak{Y}} \end{tikzcd}$$

Si G *commute (resp. commute fortement) avec les* $\mathcal{L}$*-limites projectives, il en est de même de* F*. Le même résultat est vrai en remplaçant partout limites projectives par limites inductives.* ■

LEMME 2.1.4.13. *Soient* $\mathcal{L}$ *une catégorie,* $\mathcal{I}$ *une petite catégorie,* $F : \mathfrak{X} \to \overline{\mathfrak{X}}$ *un foncteur qui commute (resp. fortement) avec les* $\mathcal{L}$*-*$\varprojlim$*, et soit* $F_*^{\mathcal{I}} : Fonct(\mathcal{I}, \mathfrak{X}) \to Fonct(\mathcal{I}, \overline{\mathfrak{X}})$ *le foncteur de composition à gauche avec* F.

(i) Si $\mathcal{I}$ *est discrète*

ou

(ii) Si $\mathfrak{X}$ *et* $\overline{\mathfrak{X}}$ *ont des* $\mathcal{L}$*-limites projectives,*

le foncteur $F_*^{\mathcal{I}}$ *commute (resp. fortement) avec les* $\mathcal{L}$*-*$\varprojlim$*. Les résultats subsistent si on remplace partout* $\varprojlim$ *par* $\varinjlim$. ■

(On peut affaiblir l'hypothèse *(i)* mais la vérification n'est alors plus évidente).

PROPOSITION 2.1.4.14. *Soient* $\mathbf{T}$ *et* $\mathbf{T'}$ *deux I-types,* $f : \mathbf{T} \to \mathbf{T'}$ *un morphisme, et* $\mathcal{L}$ *une catégorie. Si une catégorie* $\mathcal{C}$ *admet des* $\mathcal{L}$-$\varprojlim$, *le foncteur image réciproque* $f^*_{\mathcal{C}} : \underline{Alg}(\mathbf{T'}, \mathcal{C}) \to \underline{Alg}(\mathbf{T}, \mathcal{C})$ *commute avec les* $\mathcal{L}$-$\varprojlim$.

En effet, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\underline{Alg}(\mathbf{T'}, \mathcal{C}) \arrow[r, "F^*_{\mathcal{C}}"'] \arrow[d, "oubli"'] & Alg(\mathbf{T}, \mathcal{C}') \arrow[d, "oubli"] \\
\mathcal{C}^I \arrow[r, "id", "\sim"'] & \mathcal{C}'^I
\end{tikzcd}$$

dans lequel les flèches verticales commutent fortement avec les $\mathcal{L}$-$\varprojlim$ d'après 2. 1. 4. 11 et l'affirmation résulte alors de 2. 1. 4. 12. ■

Tous les foncteurs « d'oubli d'une partie de la structure algébrique » sont des foncteurs image réciproque particuliers, d'où un grand nombre d'exemples.

PROPOSITION 2.1.4.15. *Soient* $\mathcal{L}$ *une catégorie,* $\mathcal{C}$ *et* $\mathcal{C}'$ *deux catégories ayant des* $\mathcal{L}$-$\varprojlim$ *et* $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ *un foncteur qui commute (resp. fortement) avec les* $\mathcal{L}$-$\varprojlim$. *Pour tout I-type* $\mathbf{T}$, *le foncteur image directe* $F^{\mathbf{T}}_* : \underline{Alg}(\mathbf{T}, \mathcal{C}) \to \underline{Alg}(\mathbf{T}, \mathcal{C}')$ *commute (resp. fortement) avec les* $\mathcal{L}$-$\varprojlim$.

Il suffit, ici encore, de considérer le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\underline{Alg}(\mathbf{T}, \mathcal{C}) \arrow[r, "F^{\mathbf{T}}_*"'] \arrow[d, "oubli"'] & Alg(\mathbf{T}, \mathcal{C}') \arrow[d, "oubli"] \\
\mathcal{C}^I \arrow[r, "F^I"] & \mathcal{C}'^I
\end{tikzcd}$$

et d'appliquer 2. 1. 4. 13 *(i)* à la flèche horizontale F^I. ■

EXEMPLES 2. 1. 4.16.

(i) Soit $\mathcal{S}$ l'espèce de structures de groupes. Le type $\mathbf{T}(\mathcal{S})$ engendré par $\mathcal{S}$ sera noté $\underline{Gr}$ et appelé *type des groupes*. La catégorie Gr des groupes s'identifie à $\underline{Alg}(Gr, \underline{Ens})$. Pour toute catégorie $\mathcal{C}$ à produits finis, on appelle *catégorie des* $\mathcal{C}$*-groupes,* et on note $\underline{Gr}$-$\mathcal{C}$, la catégorie

$\underline{Alg}(Gr, \mathcal{C})$. Soit $\underline{Cpact}$ la catégorie des espaces topologiques compacts. Le foncteur d'oubli de topologie $\underline{Cpact} \to \underline{Ens}$ commute fortement avec les limites projectives (vérification aisée). Il en résulte que, si $\mathcal{L}$ est une catégorie et G_ι une «famille» de groupes compacts « indéxée par $\mathcal{L}$» telle que la famille $|G_\iota|$ des ensembles sous-jacents admet une $\underleftarrow{lim}$ (c'est toujours le cas si $\mathcal{L}$ est petite), sur l'ensemble $X = \underleftarrow{lim} |G_\iota|$ il existe une structure de groupe Γ et une topologie $\mathcal{T}$ telles que :

(1) Γ est la limite projective des groupes Γ_ι sous-jacents aux G_ι (2.1.4.11),

(2) le couple $(\Gamma, \mathcal{T})$ est un groupe topologique compact, limite projective dans $\underline{Gr\text{-}Cpact}$ des groupes G_ι d'après 2.1.4.15.

(ii) L'exemple *(i)* peut évidemment être modifié en remplaçant le type *Gr* des groupes par le type *Ab* (resp. *Mon, Mod*(Λ)*, Mod, etc...*) des *groupes abéliens* (resp. des *monoïdes, des* Λ*-modules* sur un anneau fixe Λ, *des modules sur des anneaux variables* qui est un type sur 2 termes, etc...) et le foncteur $\underline{Cpact} \to \underline{Ens}$ par des foncteurs d'oubli total ou partiel de structures non nécessairement algébriques. De tels foncteurs commutent «toujours» avec les $\underleftarrow{lim}$, et « quelquefois» fortement.

L'exemple *(iii)* ci-dessous(*) est de nature essentiellement différente :

(iii) Soient $\mathcal{K}$ une petite catégorie, Λ une classe, $\Phi^{(\Lambda)} = (\Phi^\lambda : \mathcal{L}^\lambda \to \mathcal{K})$ une famille de foncteurs et, pour tout $\lambda \in \Lambda$, $\pi^\lambda = (\pi^\lambda_{L_\lambda} : K^\lambda \to \Phi^\lambda(L_\lambda))$ un système projectif de source $K^\lambda \in Ob(\mathcal{K})$ et de but le foncteur Φ^λ. La famille $\pi^{(\lambda)}$ est dite *topologie projective* sur $\mathcal{K}$ et le couple $\overline{\mathcal{K}} = (\mathcal{K}, \pi^{(\lambda)})$ est dit catégorie *pro-topologique.* Si $\mathcal{X}$ est une catégorie quelconque, un *préfaisceau sur* $\mathcal{K}$ *à valeurs dans* $\mathcal{X}$ est un couple $(\overline{\mathcal{K}}, P)$, identifié à P, où P est un foncteur de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{X}$. La catégorie $\underline{Préf}(\overline{\mathcal{K}}, \mathcal{X})$ est la catégorie $\{\overline{\mathcal{K}}\} \times \underline{Fonct}(\mathcal{K}, \mathcal{X})$, identifiée à $\underline{Fonct}(\mathcal{K}, \mathcal{X})$. Un *faisceau* (sur $\overline{\mathcal{K}}$, à valeur dans $\mathcal{X}$) est un préfaisceau $F : \mathcal{K} \to \mathcal{X}$ qui *transforme tous les* π^λ en limites projectives, c'est-à-dire

(*) Dans des notes non encore publiées, M. Chevalley étudie la situation plus générale où l'on se donne à la fois des systèmes projectifs et inductifs, sous le nom de *catégories marquées.*

tel que, pour tout λ, le système projectif

$$F(\pi^{\lambda}) = (F(\pi^{\lambda}_{L_\lambda}) : F(K^{\lambda}) \to F\Phi^{\lambda}(L_{\lambda}))$$

image de π^{λ} par F est une limite projective du foncteur $F \circ \Phi^{\lambda} : \mathfrak{L}^{\lambda} \to \mathfrak{X}$. On désigne par $\underline{Faisc}(\overline{\mathfrak{K}}, \mathfrak{X})$ la sous-catégorie pleine de $\underline{Préf}(\overline{\mathfrak{K}}, \mathfrak{X})$ ayant pour objets les faisceaux, et par $j_{\mathfrak{X}} : \underline{Préf}(\overline{\mathfrak{K}}, \mathfrak{X}) \to \underline{Faisc}(\overline{\mathfrak{K}}, \mathfrak{X})$ l'injection canonique.

Ces définitions sont justifiées par les remarques suivantes : Soit T une topologie de Grothendieck (cf. Artin [1]) définie par une catégorie $Cat\,T$ et un ensemble $Cov\,T$ de familles $\{u_\iota \xrightarrow[\varphi_\iota]{} u\}_{\iota \in I}$ de flèches de $Cat\,T$. On définit une catégorie pro-topologique $\overline{\mathfrak{K}}(T) = (\mathfrak{K}, \pi^{(\Lambda)})$ de la manière suivante : La catégorie $\mathfrak{K}$ est duale de $Cat\,T$, et Λ est l'ensemble $Cov\,T$. Pour tout $\lambda = \{u_i \xrightarrow{\varphi_i} u\}_{i \in I} \in \Lambda$, notons $\mathfrak{L}^{\lambda}$ la catégorie associée à l'ensemble ordonné $Ob(\mathfrak{L}^{\lambda})$ suivant : les éléments de $Ob(\mathfrak{L}^{\lambda})$ sont les sous-ensembles L de I à un ou deux éléments, et $L < L'$ si et seulement si $L \subset L'$. Le foncteur $\Phi^{\lambda} : \mathfrak{L}^{\lambda} \to \mathfrak{K}$ associe, à tout objet $L = \{i, j\}$ (resp. $L' = \{i'\}$) de $\mathfrak{L}^{\lambda}$, l'objet $\Phi^{\lambda}(L) = u_i \times_u u_j$ (resp. $\Phi^{\lambda}(L') = u_{i'}$) de $\mathfrak{K}$, et à toute flèche $\varphi : \{i\} \to \{i, j\}$ la projection canonique $u_i \times_u u_j \to u_i$ qui est, dans $\mathfrak{K}$, une flèche

$$\Phi^{\lambda}(\varphi) : \Phi^{\lambda}(\{i\}) \to \Phi^{\lambda}(\{i, j\}).$$

En posant $K^{\lambda} = u$ et en prenant pour $\pi^{\lambda}_{L} : K^{\lambda} \to \Phi^{\lambda}(L) \in \mathfrak{K}$ la flèche canonique $u_i \times_u u_j \to u \in Cat\,T$, on obtient un système projectif π^{λ} de source K^{λ} et de but Φ^{λ}.

Avec ces définitions il est clair que les préfaisceaux (resp. faisceaux) sur T à valeurs dans une catégorie quelconque, s'identifient aux préfaisceaux (resp. faisceaux) sur $\overline{\mathfrak{K}}(T)$.

L'étude des structures algébriques sur les catégories de faisceaux résulte des remarques suivantes : Soit $\overline{\mathfrak{K}}$ une catégorie pro-topologique. Si $\mathfrak{I}$ est une petite catégorie et $\mathfrak{X}$ une catégorie admettant des $\mathfrak{I}$-limites projectives, il en est de même de $\underline{Préf}(\overline{\mathfrak{K}}, \mathfrak{X})$ et les $\mathfrak{I}$-$\varprojlim$ de préfaisceaux se *calculent terme à terme*, c'est-à-dire que, pour tout $K \in Ob(\mathfrak{K})$, le foncteur *valeur en K*, $V^K : \underline{Fonct}(\mathfrak{K}, \mathfrak{X}) \to \mathfrak{X}$, commute avec les $\mathfrak{I}$-$\varprojlim$.

Il en résulte que toute limite projective de faisceaux indéxés par $\mathcal{I}$, dans la catégorie des préfaisceaux, est un faisceau, c'est-à-dire que $\underline{Faisc}(\overline{\mathcal{K}},\mathcal{X})$ admet des $\mathcal{I}$-$\underleftarrow{lim}$ et l'inclusion $j_{\mathcal{X}}$ commute fortement avec les $\mathcal{I}$-$\underleftarrow{lim}$.

On déduit alors de 2.1.4.2, 2.1.4.15 et des remarques ci-dessus les résultats suivants : Soient $\mathbf{T}$ un I-type, $\mathcal{X}$ une catégorie à produits finis et $\overline{\mathcal{K}}$ une catégorie pro-topologique. Les préfaisceaux (resp. faisceaux) de $\mathbf{T}$-algèbres de $\mathcal{X}$ «sont les» $\mathbf{T}$-algèbres de préfaisceaux (resp. faisceaux), c'est-à-dire que l'on a un isomorphisme

$$\overline{\chi}(\overline{\mathcal{K}},\mathbf{T},\mathcal{X}) : \underline{Alg}(\mathbf{T}, \underline{Faisc}(\overline{\mathcal{K}},\mathcal{X})) \to \underline{Faisc}(\overline{\mathcal{K}}, \underline{Alg}(\mathbf{T},\mathcal{X}))$$

rendant commutatif le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
\underline{Alg}(\mathbf{T}, \underline{Faisc}(\overline{\mathcal{K}},\mathcal{X})) \arrow[r, "(j_{\mathcal{X}})_*^{\mathbf{T}}"] \arrow[d, "\overline{\chi}(\overline{\mathcal{K}},\mathbf{T},\mathcal{X})", "\wr"'] & \underline{Alg}(\mathbf{T}, \underline{Préf}(\overline{\mathcal{K}},\mathcal{X})) \simeq \underline{Alg}(\mathbf{T}, \underline{Fonct}(\mathcal{K},\mathcal{X})) \arrow[d, "\chi(\mathcal{K},\mathbf{T},\mathcal{X})", "\wr"'] \\
\underline{Faisc}(\overline{\mathcal{K}}, \underline{Alg}(\mathbf{T},\mathcal{X})) \arrow[r, "j_{Alg(\mathbf{T},\mathcal{X})}"'] & \underline{Préf}(\overline{\mathcal{K}}, \underline{Alg}(\mathbf{T},\mathcal{X})) \simeq \underline{Fonct}(\mathcal{K}, \underline{Alg}(\mathbf{T},\mathcal{X})).
\end{tikzcd}$$

En outre si $\mathcal{X}$ admet des limites projectives d'un certain type, il en est de même de toutes les catégories du diagramme et les injections canoniques horizontales commutent fortement avec ces limites.

REMARQUE 2.1.4.17. La notion de faisceau, ainsi généralisée, contient celle de $\mathbf{T}$-algèbre, où $\mathbf{T}$ est un I-type quelconque. En effet, on peut associer à $\mathbf{T}$ une catégorie pro-topologique $\overline{\mathcal{K}}(\mathbf{T}) = (\mathcal{K}, \pi^{(\Lambda)})$ telle que, pour toute catégorie à produits finis $\mathcal{X}$, $\underline{Alg}(\mathbf{T},\mathcal{X})$ s'identifie canoniquement à $\underline{Faisc}(\overline{\mathcal{K}}(\mathbf{T}),\mathcal{X})$. La catégorie $\mathcal{K}$ est la catégorie sous-jacente au I-type $\mathbf{T}$. L'ensemble Λ est $\dot{M}$; si $\lambda = \iota_1 \dots \iota_n \in \Lambda$, la catégorie $\mathcal{L}^{\Lambda}$ est la catégorie discrète $\{1,\dots,n\}$, $\Phi^{\lambda} : \mathcal{L}^{\lambda} \to \mathcal{K}$ est défini par $\Phi^{\lambda}(l) = \iota_l$ $(l = 1,\dots,n)$, l'objet K^{λ} est $\lambda \in Ob(\mathbf{T})$ et le système projectif de source λ et de but Φ^{λ} est défini par les projections canoniques $pr^l_{\lambda} : \lambda \to \iota_l$ données dans la structure de $\mathbf{T}$.

On voit de la même façon que certaines structures algébriques, où figurent des «opérations à un nombre infini de variables», s'interprètent comme des foncteurs qui commutent avec des produits infinis et rentrent par conséquent dans le formalisme des faisceaux.

En réalité, la plus grande partie des propriétés obtenues pour les catégories $\underline{Alg}(\mathbf{T}, \mathcal{C})$ s'étend aux catégories de faisceaux sur une catégorie pro-topologique quelconque. La situation est très différente dans le cas des structures algébriques « sur les catégories» ou mieux, sur les objets d'une *2*-catégorie. Pour conserver à ce travail son caractère d'introduction au cas « à *2* dimensions» , et aussi une ressemblance suffisante avec les « notions usuelles d'algèbre» , nous nous sommes volontairement limités aux catégories pro-topologiques très particulières qui sont les *I*-types.

L'étude des catégories de faisceaux, en utilisant les notions de « limites généralisées» et de «fibrations fortes» , fera l'objet d'une publication ultérieure, en collaboration avec J. Roubaud, où nous donnerons un critère très général d'existence du faisceau associé à un préfaisceau.

Il est bien connu pour les structures algébriques sur un ensemble que le foncteur d'oubli ne commute pas avec les limites inductives arbitraires, mais qu'il commute fortement avec les limites inductives filtrantes. Nous allons examiner la forme générale de cette remarque en prenant, pour simplifier, des hypothèses beaucoup trop strictes. Notons auparavant que, dans 2.1.4.10, 2.1.4.13, 2.1.4.14 et 2.1.4.15, la catégorie $\mathfrak{L}$ n'est pas supposée petite. En effet, s'il est «déraisonnable» d'imposer à une catégorie d'avoir des grosses limites arbitraires, il est par contre tout à fait «normal» pour un foncteur de commuter avec celles de ces grosses limites « qui veulent bien exister». C'est le cas par exemple pour les foncteurs adjoints. Ce qui précède justifie les définitions suivantes :

DEFINITIONS 2.1.4.18. *Soient* $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{L}'$ *et* $\mathcal{T}$ *trois catégories. Un foncteur* $F : \mathfrak{L} \times \mathfrak{L}' \to \mathcal{T}$ *est* admissible *pour les limites s'il vérifie les propriétés (L. 1) et (L. 2) suivantes :*

(L. 1) (i) Pour tout $L \in Ob(\mathfrak{L})$, *le foncteur* $F(L, \cdot) : \mathfrak{L}' \to \mathcal{C}$ *a une limite inductive. En choisissant une telle limite* $\Phi(L)$, *on détermine un foncteur* $\Phi = \underset{\overleftarrow{\mathfrak{L}'}}{lim}\ F : \mathfrak{L} \to \mathcal{C}$.

(ii) Le foncteur Φ *a une limite projective.*

(L.2)(i) Pour tout $L' \in Ob(\mathcal{L}')$, *le foncteur* $F(\,.\,, L')$ *a une limite projective* $\Phi'(L')$, *d'où « un » foncteur* $\Phi' = \lim_{\mathcal{L}} F : \mathcal{L}' \to \mathcal{C}$.

(ii) Le foncteur $\Phi' : \mathcal{L}' \to \mathcal{C}$ *a une limite inductive.*

Pour tout $(L, L') \in Ob(\mathcal{C} \times \mathcal{C}')$, notons

$$\lambda(L, L') : F(L, L') \to \Phi(L), \qquad \pi_L : \varprojlim \Phi \to \Phi(L),$$

$$\pi'(L, L') : \Phi'(L') \to F(L, L'), \qquad \lambda'_L : \Phi'(L') \to \varinjlim \Phi',$$

les morphismes canoniques. Il existe une flèche unique, dite *commutateur* de F,

$$\chi(F) : \varinjlim \Phi = \varinjlim_{\mathcal{L}'} \varprojlim_{\mathcal{L}} F \to \varprojlim_{\mathcal{L}} \varinjlim_{\mathcal{L}'} F = \varprojlim \Phi'$$

rendant commutatifs les diagrammes :

$$(\mathfrak{D}) \qquad \begin{tikzcd}
\varinjlim \Phi' \arrow[dd, "\chi(F)"'] & & \Phi'(L') \arrow[ll, "\lambda'_{L'}"'] \arrow[dr, "\pi'(L, L')"] & \\
& & & F(L, L') \arrow[dl, "\lambda(L, L')"] \\
\varprojlim \Phi \arrow[rr, "\pi_L"'] & & \Phi(L) &
\end{tikzcd} \qquad (L, L') \in Ob(\mathcal{C} \times \mathcal{C}').$$

On dit que $F = \mathcal{L} \times \mathcal{L}' \to \mathcal{C}$ *est lim commutatif* s'il est admissible et si son commutateur est un isomorphisme. Si tout foncteur vérifiant *(L.1)* (resp. *(L.2)*, resp. *(L.1)* ou *(L.2)*, resp. *(L.1)* et *(L.2)*) est $\varinjlim$-commutatif, on dit que, dans $\mathcal{C}$, les $\mathcal{L}$-$\varprojlim$ *commutent avec les* $\mathcal{L}'$-$\varprojlim$ (resp. les $\mathcal{L}'$-$\varinjlim$ *commutent avec les* $\mathcal{L}$-$\varprojlim$, resp. *les* $\mathcal{L}$-$\varprojlim$ *et les* $\mathcal{L}'$-$\varinjlim$ *commutent,* resp. *les* $\mathcal{L}$-$\varprojlim$ *et les* $\mathcal{L}'$-$\varinjlim$ *commutent faiblement).*

Il est clair que si $\mathcal{C}$ admet des $\mathcal{L}$-$\varprojlim$ et des $\mathcal{L}'$-$\varinjlim$. les quatre notions coïncident, mais pour des catégories $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}'$ et $\mathcal{C}$ arbitraires, ces notions sont deux à deux distinctes.

Si, pour toute catégorie finie discrète $\mathcal{L}$, les $\mathcal{L}$-$\varprojlim$ commutent avec les $\mathcal{L}'$-$\varinjlim$ (resp...), on dit que *les produits finis commutent avec les* $\mathcal{L}'$-$\varinjlim$ (resp. remplacer partout « $\mathcal{L}$-$\varprojlim$ » par « produits finis »).

LEMME 2.1.4.19. *Soient* $\mathfrak{L}'$ *une catégorie,* $\mathbf{T}$ *un* I*-type,* $\mathcal{C}$ *une catégorie à produits finis et* $\Phi' : \mathfrak{L} \to Alg(\mathbf{T}, \mathcal{C})$ *un foncteur tel que* $0 \circ \Phi' : \mathfrak{L}' \to \mathcal{C}^I$ *admet une limite inductive. Si dans* $\mathcal{C}$ *les produits finis commutent avec les* $\mathfrak{L}'$*-*$\varinjlim$*, le foncteur* Φ' *a une limite inductive et* 0 *commute avec cette limite.*

La démonstration du lemme 2.1.4.10 repose sur le fait que les produits finis et les foncteurs $pr^\iota : \mathcal{C}^I \to \mathcal{C}$ commutent avec les limites projectives. Ces deux propriétés subsistent si on remplace « limites projectives» par «$\mathfrak{L}$-limites inductives», la première par hypothèse, la seconde par dualité. La démonstration se transpose alors sans difficulté. ■

PROPOSITION 2.1.4.20. *Soient* $\mathfrak{L}'$ *une catégorie et* $\mathcal{C}$ *une catégorie admettant des* $\mathfrak{L}'$*-*$\varinjlim$ *et des produits finis qui commutent avec les* $\mathfrak{L}'$*-*$\varinjlim$*. Pour tout* I*-type* $\mathbf{T}$ *:*

(i) $Alg(\mathbf{T}, \mathcal{C})$ *admet des* $\mathfrak{L}'$*-*$\varinjlim$ *et le foncteur d'oubli commute fortement avec ces limites.*

(ii) Pour toute catégorie $\mathfrak{L}$ *telle que* $\mathcal{C}$ *admette des* $\mathfrak{L}$*-*$\varprojlim$*, si dans* $\mathcal{C}$ *les* $\mathfrak{L}$*-*$\varprojlim$ *et les* $\mathfrak{L}'$*-*$\varinjlim$ *commutent, elles commutent aussi dans* $Alg(\mathbf{T}, \mathcal{C})$*. En particulier dans* $Alg(\mathbf{T}, \mathcal{C})$ *les produits finis et les* $\mathfrak{L}'$*-*$\varinjlim$ *commutent.*

Il est clair que *(i)* résulte de 2.1.4.19. Pour vérifier *(ii)*, on remarque d'abord que, dans $\mathcal{C}^I$ et dans $\underline{Alg(}\mathbf{T}, \mathcal{C})$, tout foncteur de source $\mathfrak{L} \times \mathfrak{L}'$ est admissible (pour $\underline{Alg(}\mathbf{T}, \mathcal{C})$ cela résulte de *(i)* et de 2.1.4.11). En outre dans $\mathcal{C}^I$ les $\mathfrak{L}$-$\varprojlim$ et les $\mathfrak{L}'$-$\varinjlim$ commutent. Soit alors $F : \mathfrak{L} \times \mathfrak{L}' \to \underline{Alg(}\mathbf{T}, \mathcal{C})$ un foncteur; notons G le foncteur composé $0 \circ F : \mathfrak{L} \times \mathfrak{L}' \to \mathcal{C}^I$, $\chi(F)$ et $\chi(G)$ les commutateurs respectifs de F et G et $\chi = 0(\mathfrak{X}(F))$ le morphisme sous-jacent à $\chi(F)$. Le foncteur d'oubli commutant avec les $\mathfrak{L}$-$\varprojlim$ et les $\mathfrak{L}'$-$\varinjlim$, les diagrammes ($\mathfrak{D}$) relatifs à F se projettent par 0 suivant les diagrammes ($\mathfrak{D}$) relatifs à G, donc $\chi(G) = \chi$, et c'est un isomorphisme à cause de la propriété de commutation dans $\mathcal{C}^I$; comme 0 commute fortement avec les isomorphismes, $\chi(F)$ est un isomorphisme. ■

PROPOSITION 2.1.4.21. *Soient* $\mathcal{L}'$ *et* $\mathcal{C}$ *deux catégories satisfaisant les hypothèses de 2.1.4.20,* $\mathbf{T}$ *et* $\mathbf{T}'$ *deux I-types, et* $f : \mathbf{T} \to \mathbf{T}'$ *un morphisme. Le foncteur image réciproque* $f^*_{\mathcal{C}} : \underline{Alg}(\mathbf{T}', \mathcal{C}) \to \underline{Alg}(\mathbf{T}, \mathcal{C})$ *commute avec les* $\mathcal{L}'$*-* $\varinjlim$.

(Même démonstration que 2.1.4.14).

PROPOSITION 2.1.4.22. *Soient* $\mathcal{L}'$, $\mathcal{C}$ *et* $\mathcal{C}'$ *trois catégories telles que* $(\mathcal{L}', \mathcal{C})$ *et* $(\mathcal{L}', \mathcal{C}')$ *vérifient les hypothèses de 2.1.4.20, et* $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ *un foncteur qui commute (resp. fortement) avec les* $\mathcal{L}'$*-* $\varinjlim$. *Pour tout I-type* $\mathbf{T}$, *le foncteur image directe* $F^{\mathbf{T}} : \underline{Alg}(\mathbf{T}, \mathcal{C}) \to \underline{Alg}(\mathbf{T}, \mathcal{C}')$ *commute fortement avec les* $\mathcal{L}'$*-* $\varinjlim$.

Même démonstration que 2.1.4.15.

De nombreux exemples peuvent être construits à partir des remarques suivantes : Dans $\underline{Ens}$ les produits finis commutent avec les $\varinjlim$ filtrantes; une telle propriété se conserve en remplaçant $\underline{Ens}$ par $\underline{Fonct}(\mathcal{J}, \underline{Ens})$, où $\mathcal{J}$ est petite, par $\underline{Alg}(\mathbf{T}, \underline{Ens})$, où $\mathbf{T}$ est un I-type quelconque; en outre les foncteurs d'oubli de structures, non nécessairement algébriques, commutent «souvent» avec les limites inductives filtrantes. Nous laisserons au lecteur le soin d'expliciter de tels exemples, et aussi de dualiser tout ce qui précède aux coalgèbres en utilisant l'isomorphisme $\underline{Coalg}(\mathbf{T}, \mathcal{C}) \simeq [\underline{Alg}(\mathbf{T}, \mathcal{C}^*)^*]$.

2.2. Point de vue ensembliste. A tout I-type $\mathbf{T}$ nous allons associer une famille d'ensembles $A^{(I)} = (A^{\iota})$ $(\iota \in I)$ et une structure de $\mathbf{T}$-algèbre sur $A^{(I)}$ telle que le foncteur $A : \mathbf{T} \to \mathbf{T}(A^{(I)})$ soit une injection. Cette construction, analogue à la représentation régulière des groupes, permet d'interpréter les opérations de $\mathbf{T}$ comme des lois de composition ordinaires entre ensembles, et de montrer que la notion de conséquence introduite dans 2.1.3 coïncide avec celle que l'on définit à partir des seules algèbres de $\underline{Ens}$.

2.2.1. ALGEBRES D'OPERATIONS ET ALGEBRES DE CONSTANTES.
Soit $\mathbf{T}$ un I-type. Pour tout multi-indice $\mu \in Ob(\mathbf{T})$, le foncteur

$$Hom(\mu, \cdot) : \mathbf{T} \to \underline{Ens}$$

commute avec les produits finis. Il détermine donc un foncteur image directe $Hom(\mu, .)_*^{\mathbf{T}} : \underline{Alg}(\mathbf{T}, \mathbf{T}) \to \underline{Alg}(\mathbf{T}, Ens)$. Le foncteur identique $id(\mathbf{T}) : \mathbf{T} \to \mathbf{T}$ est une $\mathbf{T}$-algèbre de $\mathbf{T}$, dite *prototype des* $\mathbf{T}$-*algèbres.* Son image $Hom(\mu, .)_*^{\mathbf{T}}(id(\mathbf{T}))$ est une $\mathbf{T}$-algèbre de $\underline{Ens}$, notée A_μ, de famille sous-jacente $(A_\mu^\iota) = (Hom(\mu, \iota))$ $(\iota \in I)$, dite *algèbre des opérations de source* μ *dans* $\mathbf{T}$. En particulier l'algèbre A_0 des opérations de source 0 est dite *algèbre des constantes de* $\mathbf{T}$. D'après 1.3.1.2, chaque A_μ s'identifie à un foncteur $T_\mu : \mathbf{T} \to \mathbf{T}(A_\mu^{(I)})$. Si on explicite les définitions, il est clair que, pour toute flèche $f : \nu \to \nu' \in \mathbf{T}$, $T_\mu(f)$ s'identifie à l'application $h \rightsquigarrow f \circ h$ de $A_\mu^\nu \simeq Hom(\mu, \nu)$ dans $A_\mu^{\nu'} \simeq Hom(\mu, \nu')$.

En général, il n'y a pas d'objet μ de $\mathbf{T}$ tel que le foncteur T_μ soit une injection, mais les T_μ $(\mu \in M)$ constituent *une famille séparante de* $\mathbf{T}$-*algèbres,* c'est-à-dire que, si f et g sont deux flèches distinctes de $\mathbf{T}$, il existe un foncteur T_μ tel que $T_\mu(f) \neq T_\mu(g)$. En effet, si la source ou le but de f et g sont différents, c'est évident; supposons donc que f et $g : \nu \to \nu' \in \mathbf{T}$. Alors

$$T_\nu(f)(id(\nu)) = f \neq g = T_\nu(g)(id(\nu)),$$

donc $T_\nu(f) \neq T_\nu(g)$.

Soit $\mathbf{T}' = \prod_\mu \mathbf{T}(A_\mu^{(I)})$ le produit dans $\underline{Typ}(I)$ (*) de la famille $(\mathbf{T}(A_\mu^{(I)}))$ $(\mu \in M)$. La famille des T_μ détermine un morphisme $T : \mathbf{T} \to \mathbf{T}'$ qui est injectif à cause de la propriété de séparation. Il reste à trouver une famille d'ensembles $A^{(I)}$ et un foncteur $\Phi : \mathbf{T}' \to \mathbf{T}(A^{(I)})$ qui commute avec les produits finis et qui est une injection.

2.2.2. DECOMPOSITION. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie admettant des produits, et $(X_\lambda^{(I)})$ $(\lambda \in \Lambda)$ une famille d'objets de $\mathcal{C}^I$. On peut munir le produit

---

(*) On sait d'après 1.3.4.3 et 2.1.1.1 que $\underline{Typ}(I)$ admet des produits. Mais, si on note $Cat\,\mathbf{T}$ la catégorie sous-jacente à $\mathbf{T}$, on a

$$Cat(\prod_\alpha \mathbf{T}_\alpha) \neq \prod_\alpha Cat\,\mathbf{T}_\alpha.$$

(La catégorie du second membre n'est sous-jacente à aucun type!) En réalité $Cat(\prod_\alpha \mathbf{T}_\alpha)$ est la sous-catégorie pleine de $\prod_\alpha Cat\,\mathbf{T}_\alpha$ ayant pour objets les « familles diagonales » (μ_α) telles que, $\forall \alpha, \alpha'$, $\mu_\alpha = \mu_{\alpha'}$. On peut évidemment l'interpréter comme produit fibré, ou comme catégorie induite, au sens de Ehresmann [1].

$X^{(I)} = (\prod_\lambda X^\iota_\lambda)$ $(\iota \in I)$ de la famille des $X^{(I)}_\lambda$ d'une structure d'algèbre ayant pour type le produit, dans $\underline{Typ}(I)$, $\prod_\lambda \mathbf{T}(X^{(I)}_\lambda)$ de la façon suivante. Soient $\mu = \iota_1 \dots \iota_n$, $\nu = j_1 \dots j_p$ des multi-indices. Une flèche $f : \mu \to \nu$ dans $\prod \mathbf{T}(X^{(I)}_\lambda)$ est une famille de flèches $f_\lambda : \mu \to \nu \in \mathbf{T}(X^{(I)}_\lambda)$, c'est-à-dire de triples $(\mu, \varphi_\lambda, \nu)$, où

$$\varphi_\lambda : X^\mu_\lambda = X^{\iota_1}_\lambda \times \dots \times X^{\iota_n}_\lambda \to X^{j_1}_\lambda \times \dots \times X^{j_p}_\lambda = X^\nu_\lambda \in \mathcal{C}.$$

Soit $\varphi = \prod_\lambda \varphi_\lambda : \prod_\lambda X^\mu_\lambda \to \prod_\lambda X^\mu_\lambda \in \mathcal{C}$ le produit des φ_λ. Il existe une flèche unique

$$\psi : \prod_{k=1}^{n} (\prod_\lambda X^{\iota_k}_\lambda) \to \prod_{l=1}^{p} (\prod_\lambda X^{j_l}_\lambda)$$

rendant commutatif le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
\prod_\lambda (\prod_{k=1}^{n} X^{\iota_k}) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\wr"'] & \prod (\prod_{l=1}^{p} X^{j_l}_\lambda) \arrow[d, "\wr"] \\
X^\mu = \prod_{k=1}^{n} (\prod_\lambda X^{\iota_k}_\lambda) \arrow[r, "\psi"'] & \prod_{l=1}^{p} (\prod_\lambda X^{j_l}_\lambda) = X^\nu
\end{tikzcd}$$

où les flèches verticales sont les isomorphismes canoniques de « commutativité » du produit. Le triple (μ, ψ, ν) est un morphisme

$$D(f) : \mu \to \nu \in \mathbf{T}(X^{(I)}).$$

Une vérification directe montre que la correspondance $f \leadsto D(f)$ est un foncteur $D : \prod_\lambda \mathbf{T}(X^{(I)}_\lambda) \to \mathbf{T}(X^{(I)})$, qui commute avec les produits finis. On dit que D est *l'algèbre des flèches* décomposables de $\prod_\lambda X^{(I)}_\lambda$, et que f est une *décomposition* de $D(f)$.

Notons, en passant, que, si $\mathbf{T}$ est un I-type et si les $X^{(I)}_\lambda$ sont munis de structures de $\mathbf{T}$-algèbres $A_\lambda : \mathbf{T} \to \mathbf{T}(X^{(I)}_\lambda)$, le morphisme $A : \mathbf{T} \to \mathbf{T}(X^{(I)})$ définissant sur $X^{(I)}$ la structure d'algèbre produit des A_λ se factorise en :

$$\mathbf{T} \xrightarrow[(A_\lambda)]{} \prod \mathbf{T}(X^{(I)}) \xrightarrow[D]{} \mathbf{T}(X^{(I)})$$

(c'est la traduction de : « les lois de composition sur un produit d'algèbres se définissent facteur par facteur »).

En général la correspondance $f \rightsquigarrow D(f)$ n'est pas injective, même quand $\mathcal{C} = \underline{Ens}$, cependant on vérifie immédiatement le

LEMME 2.2.2.1. *Si les X^ι_λ ($\iota \in I$, $\lambda \in \Lambda$) sont des ensembles tous non vides, D est une injection.* ∎

Certains des ensembles A^ι_μ définis dans 2.2.1 pouvant être vides, pour pouvoir appliquer le lemme précédent il est nécessaire de les « augmenter » en leur adjoignant un point base; nous allons décrire cette construction.

2.2.3. ALGEBRES POINTEES. La catégorie *Ens.Ponct* des ensembles pointés admet des limites projectives et le foncteur *d'oubli du point base* $\dot{O} : \underline{Ens.Ponct} \to \underline{Ens}$, $(X, *) \rightsquigarrow X$, commute fortement avec ces limites. Il en résulte que, pour tout I-type $\mathbf{T}$, la catégorie $\underline{Alg}(\mathbf{T}, \underline{Ens.Ponct})$ des $\mathbf{T}$-*algèbres pointées* admet des limites projectives et que le foncteur d'image directe $\dot{O}^{\mathbf{T}}_* : \underline{Alg}(\mathbf{T}, \underline{Ens.Ponct}) \to \underline{Alg}(\mathbf{T}, Ens)$, appelé *oubli des points base* et noté encore $\dot{O}$, commute fortement avec ces limites. Il résulte de théorèmes généraux que nous prouverons plus loin que ce foncteur a un adjoint à gauche, mais nous allons décrire explicitement ici un tel adjoint.

Le foncteur $\dot{O} : \underline{Ens.Ponct} \to \underline{Ens}$ admet un adjoint à gauche, dit adjonction d'un point base $\dot{P} : \underline{Ens} \to \underline{Ens.Ponct}$, qui associe, à tout ensemble X, l'ensemble $\dot{P}X = \{\emptyset\} \amalg X$ canoniquement pointé; il en résulte que $\dot{O}^I : (\underline{Ens.Ponct})^I \to \underline{Ens}^I$ a pour adjoint à gauche le foncteur *d'adjonction de points base* $\dot{P}^I : (X^\iota) \rightsquigarrow (\dot{P}X^\iota)$. On munit la famille $(\dot{P}X^\iota)$ d'une structure d'algèbre pointée de type $\mathbf{T}(X^\iota)$ de la façon suivante : Soit $f = (\mu, \varphi, \nu) : \mu \to \nu \in \mathbf{T}(X^\iota)$, dans lequel

$$\varphi : X^\mu = X^{\iota_1} \times \ldots \times X^{\iota_n} \to X^{j_1} \times \ldots \times X^{j_p} = X^\nu \in \mathcal{C}.$$

On prolonge l'application φ en une application pointée :

$$\dot{\varphi} : \dot{P}X^{\iota_1} \times \ldots \times \dot{P}X^{\iota_n} \to \dot{P}X^{j_1} \times \ldots \times \dot{P}X^{j_p},$$

$\dot{\varphi}(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \varphi(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ si chaque ξ_k est différent du point base de X^{ι_k}, et $\dot{\varphi}(\xi_1, \ldots, \xi_n) = *$ si l'un au moins des ξ_k est le point base de X^{ι_k}. Avec cette définition il est clair que $\dot{f} = (\mu, \dot{\varphi}, \nu)$ est une flèche $\mu \to \nu$ dans $\mathbf{T}(\dot{P}X^{\iota})$, et que la correspondance $f \rightsquigarrow \dot{f}$ est injective et détermine un homomorphisme de I-types,

$$\eta(X^{\iota}) : \mathbf{T}(X^{\iota}) \to \mathbf{T}(\dot{P}X^{\iota}).$$

D'autre part, si $(Y^{\iota}, *^{\iota}) = (\dot{Y}^{\iota})$ est une famille d'ensembles pointés, il est clair que le type pointé $\mathbf{T}(\dot{Y}^{\iota})$ de $\dot{Y}^{(I)}$ dans $\underline{Ens.Ponct}$ s'injecte dans le type $\mathbf{T}(Y^{\iota})$ de $Y^{(I)}$ dans $\underline{Ens}$, par l'homomorphisme de I-types

$$j(\dot{Y}^{\iota}) : \mathbf{T}(\dot{Y}^{\iota}) \to \mathbf{T}(Y^{\iota}), \qquad g \rightsquigarrow g.$$

L'homomorphisme composé

$$\varepsilon(X^{\iota}) = j(\dot{P}X^{\iota}) \circ \eta(X^{\iota}) : \mathbf{T}(X^{\iota}) \to \mathbf{T}(\dot{P}X^{\iota}) \to \mathbf{T}(X^{\iota} \amalg \{\emptyset\})$$

est dit *augmentation* de $\mathbf{T}(X^{\iota})$. C'est évidemment une injection. (Il convient de noter que $(X^{\iota}) \rightsquigarrow \mathbf{T}(X^{\iota})$ et $(\dot{Y}^{\iota}) \rightsquigarrow \mathbf{T}(\dot{Y}^{\iota})$ ne sont pas des foncteurs, cf. 1. 3. 3.2 et $\varepsilon(X^{\iota})$ n'est pas une transformation naturelle, ce qui rend nécessaires tous ces détours).

Si (X^{ι}) est munie d'une structure de $\mathbf{T}$-algèbre $A : \mathbf{T} \to \mathbf{T}(X^{\iota})$, le foncteur composé

$$\dot{P}(A) = \eta(X^{\iota}) \circ A : \mathbf{T} \to \mathbf{T}(X^{\iota}) \to \mathbf{T}(\dot{P}X^{\iota})$$

définit sur $(\dot{P}X^{\iota})$ une structure de $\mathbf{T}$-algèbre pointée. On vérifie alors que la correspondance $A \rightsquigarrow \dot{P}(A)$ satisfait la «propriété d'adjonction» $Hom(A, \dot{O}(\dot{A})) \simeq Hom(\dot{P}(A), \dot{A})$ pour toute algèbre pointée $\dot{A}$, donc détermine un foncteur *d'adjonction de points base*

$$\dot{P} : \underline{Alg}(\mathbf{T}, \underline{Ens}) \to \underline{Alg}(\mathbf{T}, \underline{Ens.Ponct}),$$

adjoint à gauche de $\dot{O}$.

2. 2. 4. LA REPRESENTATION ENSEMBLISTE. Soit $\mathbf{T}$ un I-type. Le type $\mathbf{T}' = \prod_{\mu} \mathbf{T}(A^{\iota}_{\mu})$ défini dans 2. 2. 1 s'injecte dans $\prod_{\mu} \mathbf{T}(A^{\iota}_{\mu} \amalg \{\emptyset\})$ au moyen du morphisme $\varepsilon(\mathbf{T}) = \prod_{\mu} \varepsilon(A^{\iota}_{\mu})$ produit des augmentations des familles $A^{(I)}_{\mu}$. Posons, pour tout $\iota \in I$, $A^{\iota} = \prod_{\mu}(A^{\iota}_{\mu} \amalg \{\emptyset\})$. D'après le lemme 2. 2.2.1, le morphisme

$$D : \prod_{\mu} \mathbf{T}(A^{\iota}_{\mu} \amalg \{\emptyset\}) \to \mathbf{T}(\prod_{\mu}(A^{\iota}_{\mu} \amalg \{\emptyset\})) = \mathbf{T}(A^{\iota})$$

est une injection. Le morphisme composé

$$A : \mathbf{T} \xrightarrow{T} \prod \mathbf{T}(A_{\mu}) \xrightarrow{\varepsilon(\mathbf{T})} \prod \mathbf{T}(A_{\mu} \amalg \{\emptyset\}) \xrightarrow{D} \mathbf{T}(A^{\iota})$$

détermine une structure de $\mathbf{T}$-algèbre sur $A^{(I)}$, et, T, $\varepsilon(\mathbf{T})$ et D étant des injections, il en est de même pour A. On a donc démontré le

THEOREME 2.2.4.1. *Pour tout I-type $\mathbf{T}$, il existe une famille d'ensembles $A^{(I)}$ et une structure de $\mathbf{T}$-algèbre $A : \mathbf{T} \to \mathbf{T}(A^{\iota})$ sur cette famille telle que l'application $Fl(\mathbf{T}) \to Fl(\mathbf{T}(A^{\iota}))$ sous-jacente soit injective.* ∎

Dans le cas d'algèbres sur un seul terme, on peut donner une démonstration beaucoup plus simple, cf. Lazard [1] .

COROLLAIRE 2.2.4.2. *Soit $\mathcal{S} = (\Sigma, \mathfrak{A})$ une espèce de structures algébriques élémentaires. Une relation de Σ est conséquence des axiomes de $\mathcal{S}$ si et seulement si elle est satisfaite par toute algèbre d'espèce $\mathcal{S}$ sur une famille d'ensembles.*

La nécessité résulte de la manière dont on a défini la notion de conséquence. Inversement soit $\rho = (\hat{\omega}, \hat{\omega}')$ une relation de Σ satisfaite par toute $\mathcal{S}$-algèbre de <u>Ens.</u> Notons $g^{\hat{\omega}}$ et $g^{\hat{\omega}'}$ les lois composées associées à $\hat{\omega}$ et $\hat{\omega}'$ dans l'algèbre générique de $\mathcal{S}$, $G(\mathcal{S}) \to \mathcal{S}\mathbf{T}(\mathcal{S})$ (cf. 2.1.2). Soit $A : \mathbf{T}(\mathcal{S}) \to \mathbf{T}(A^{\iota})$ une algèbre de type $\mathbf{T}(\mathcal{S})$ telle que A soit une injection. Il lui correspond d'après 2.1.2.2 une algèbre $\mathcal{S}_{\mathbf{T}}(A)$ d'espèce $\mathcal{S}$ sur (A^{ι}) définie par le morphisme composé

$$\mathcal{S}_{\mathbf{T}}(A) : \mathcal{S} \xrightarrow[G(\mathcal{S})]{} \mathcal{S}\mathbf{T}(\mathcal{S}) \xrightarrow[\mathcal{S}(A)]{} \mathcal{S}\mathbf{T}(A^{\iota}) = \mathcal{S}(A^{\iota}).$$

La relation ρ est satisfaite par $\mathcal{S}_{\mathbf{T}}(A)$, c'est-à-dire que les lois composées $\varphi^{\hat{\omega}} = A(g^{\hat{\omega}})$ et $\varphi^{\hat{\omega}'} = A(g^{\hat{\omega}'})$ sont égales. Comme A est injective, $g^{\hat{\omega}} = g^{\hat{\omega}'}$, c'est-à-dire que ρ est satisfaite par l'algèbre générique. La conclusion résulte alors de la proposition 2.1.3.8. ∎

La proposition 1.3.5.1, laissée sans démonstration, est une conséquence immédiate de ce corollaire.

Le théorème 2.2.4.1 et son corollaire ont de nombreuses conséquences. Mais comme ils font jouer un rôle essentiel aux catégories d'algèbres sur des ensembles, il est nécessaire au préalable d'étudier celles-ci.

3. TYPES ET ALGEBRES DE *Ens*.

3.1. Définition des algèbres par générateurs et relations.

3. 1. 1. ALGEBRES LIBRES COMME ALGEBRES DE CONSTANTES. En modifiant convenablement le théorème d'existence d'applications universelles de Bourbaki [1] (chap. 4) il est facile de montrer que, pour tout I-type $\mathbf{T}$, le foncteur d'oubli $\underline{Alg}(\mathbf{T}, \underline{Ens}) \to \underline{Ens}^I$ a un adjoint à gauche. Nous allons donner ici une construction de cet adjoint, un peu «déroutante», dans laquelle la $\mathbf{T}$-algèbre libre engendrée par une famille d'ensembles apparaît comme algèbre des constantes (cf. 2. 2. 1) d'un autre I-type ! Ce point de vue fait le lien entre la construction usuelle, comme quotient d'un ensemble de mots par une équivalence, et la notion de «diagramme de la réalisation d'un langage», essentielle dans la théorie des modèles. D'autres motivations du choix de ce point de vue apparaîtront dans ce qui suit.

LEMME 3. 1. 1. *Pour tout I-type $\mathbf{T}$, l'algèbre des constantes de $\mathbf{T}$ est un objet initial de la catégorie $\underline{Alg}(\mathbf{T}, \underline{Ens})$.*

En effet, 0 étant objet final de $\mathbf{T}$, le foncteur $Hom(0, \,.\,) : \mathbf{T} \to \underline{Ens}$ est objet initial de $\underline{Fonct}(\mathbf{T}, \underline{Ens})$ et appartient à la sous-catégorie pleine $\underline{Alg}(\mathbf{T}, \underline{Ens})$. ■

Soit (E^ι) une famille d'ensembles. Montrer que le foncteur

$$Hom_{\underline{Ens}^I}((E^\iota), 0(\,.\,)) : \underline{Alg}(\mathbf{T}, \underline{Ens}) \to \underline{Ens}, \; A \rightsquigarrow Hom((E^\iota), 0(A))$$

est représentable revient à montrer l'existence d'un objet final dans la catégorie $\mathcal{H}(E^\iota, \mathbf{T})$, dont les objets sont les couples $H = (A, \varphi)$ d'une $\mathbf{T}$-algèbre $A : \mathbf{T} \to \underline{Ens}$ et d'un morphisme $\varphi : (E^\iota) \to 0(A) \in \underline{Ens}^I$ et dont les flèches sont les triples (H, h, H') dans lesquels $H = (A, \varphi)$, $H' = (A', \varphi')$ et $h : A \to A' \in \underline{Alg}(\mathbf{T}, \underline{Ens})$ vérifie $\varphi' = 0(h) \circ \varphi$.

Nous aurons un résultat bien plus précis en construisant un I-type $\mathbf{T}'$ tel que $\mathcal{H}(E^\iota, \mathbf{T})$ s'identifie à $\underline{Alg}(\mathbf{T}', \underline{Ens})$, l'objet initial étant alors, d'après 3.1.1, l'algèbre des constantes de $\mathbf{T}'$. La démonstration que nous allons donner peut être abrégée, mais elle fournit en passant des résultats que nous utiliserons dans la suite.

3.1.2. ADJONCTION D'OPERATIONS A UN TYPE.

PROPOSITION 3.1.2.1. *La catégorie $\underline{Typ}(I)$ des I-types admet des sommes directes.*

Montrons d'abord que la catégorie $\underline{Esp}(I)$ des I-espèces a des sommes directes. Soit $\mathcal{S}_\lambda = (\Sigma_\lambda, \mathcal{A}_\lambda)$ $(\lambda \in \Lambda)$ une famille de I-espèces. Notons $\Sigma = \coprod_\lambda \Sigma_\lambda$ la somme directe (cf. 1.3.1.1) des I-schémas sous-jacents, $j_\lambda : \Sigma_\lambda \to \Sigma$ les injections, $R(\Sigma_\lambda)$ le schéma des relations (cf. 1.3.5) de Σ_λ, $\dot{j}_\lambda : R(\Sigma_\lambda) \to \coprod_\lambda R(\Sigma_\lambda)$ les injections, et

$$\chi : \coprod_\lambda R(\Sigma_\lambda) \to R(\coprod_\lambda \Sigma_\lambda) \in \underline{Op}(I)$$

le morphisme unique qui rend commutatifs les diagrammes :

$$\begin{tikzcd}
\coprod_\lambda R(\Sigma_\lambda) \arrow[rr, "\chi"'] & & R(\coprod_\lambda \Sigma_\lambda) = R(\Sigma) \\
R(\Sigma_\lambda) \arrow[u, "\dot{j}_\lambda"] \arrow[rr, equal] & & R(\Sigma_\lambda) \arrow[u, "R(j_\lambda)"']
\end{tikzcd} \qquad (\lambda \in \Lambda)$$

Soit $\mathcal{A}'_\lambda = \chi \circ \dot{j}_\lambda(\mathcal{A}_\lambda) \subset R(\Sigma)$, et $\mathcal{A} = \bigcup_\lambda \mathcal{A}'_\lambda$. Le couple $\mathcal{S} = (\Sigma, \mathcal{A})$ muni des injections évidentes est la somme $\coprod_\lambda \mathcal{S}_\lambda$ dans $Esp(I)$ (vérification immédiate). Soit alors $\mathbf{T}_\lambda$ $(\lambda \in \Lambda)$ une famille de I-types, $\mathcal{S}(\mathbf{T}_\lambda)$ les espèces sous-jacentes, $\sigma_\lambda : \mathcal{S}(\mathbf{T}_\lambda) \to \coprod_\lambda \mathcal{S}(\mathbf{T}_\lambda)$ les inclusions canoniques, et $\mathcal{S}_{\mathbf{T}_\lambda} : \mathbf{T}_\lambda \to \mathbf{T}\,\mathcal{S}(\mathbf{T}_\lambda)$ les isomorphismes définis dans le théorème 2.1.2.1. Le foncteur $\mathbf{T}(.)$, adjoint à gauche de $\mathcal{S}(.)$, commutant avec les sommes directes, il est clair que $\mathbf{T}(\coprod_\lambda \mathcal{S}(\mathbf{T}_\lambda))$ muni des morphismes composés

$$\theta_\lambda : \mathbf{T}_\lambda \xrightarrow[\varphi^{-1}_{\mathbf{T}_\lambda}]{} \mathbf{T}\,\mathcal{S}(\mathbf{T}_\lambda) \xrightarrow[\mathbf{T}(\sigma_\lambda)]{} \mathbf{T}(\coprod_\lambda \mathcal{S}(\mathbf{T}_\lambda))$$

est une somme directe dans $Typ(I)$ de la famille des $\mathbf{T}_\lambda$. ■

Soit K un sous-ensemble de $M \times I$. Le foncteur *projection sur* K, $P^{(K)}: \underline{Op}(I) \to \underline{Ens}^K$, associe, à tout I-schéma d'opérations $\Sigma = (\Omega^{\iota}_{\mu})$, la sous-famille $P^{(K)}(\Sigma) = (\Omega^{\iota}_{\mu})$, $(\mu, \iota) \in K$. (Compte tenu de l'identification $\underline{Op}(I) \simeq \underline{Ens}^{M \times I}$ de 1.3.3.1, $P^{(K)}$ est bien une projection). Il admet pour adjoint à gauche le foncteur *de prolongement par* $\emptyset$,

$$P_{(K)}: \underline{Ens}^K \to \underline{Op}(I),$$

qui, à toute K-*famille* d'ensembles $(E^{\iota}_{\mu})(\mu, \iota) \in K$, associe le I-schéma $P_{(K)}(E^{\iota}_{\mu}) = (\Omega^{\iota}_{\mu})(\mu, \iota) \in M \times I$, défini par $\Omega^{\iota}_{\mu} = E_{\mu}$ pour $(\mu, \iota) \in K$ et $\Omega^{\iota}_{\mu} = \emptyset$ pour $(\mu, \iota) \notin K$. Il est clair que le composé $P^{(K)} \circ P_{(K)}$ est le foncteur identique de $\underline{Ens}^K$. Le composé $P_{(K)} \circ P^{(K)}: \underline{Op}(I) \to \underline{Op}(I)$ est appelé K-*squelette* et noté : $\Sigma \rightsquigarrow \Sigma^{[K]}$. Le morphisme canonique $P_{(K)} \circ P^{(K)} \to id$ est l'inclusion $\Sigma^{[K]} \subset \Sigma$. Si $\Sigma = \Sigma^{[K]}$, on dit que Σ est *à support dans* K. Le *support* d'un I-schéma $\Sigma = (\Omega, \tau)$ est l'ensemble $K(\Sigma) = \tau(\Omega)$. C'est le plus petit K tel que Σ soit à support dans K. Le foncteur $P_{(K)}$ détermine une équivalence de catégories entre $\underline{Ens}^K$ et la sous-catégorie pleine $\underline{Op}(I)^{[K]}$ de $\underline{Op}(I)$ ayant pour objets les I-schémas à support dans K.

Cette équivalence permet d'interpréter les K-familles d'ensembles comme familles d'opérations. De façon précise : Soient $\mathcal{C}$ une catégorie à produits finis et $E^{(K)} = (E^{\iota}_{\mu})$, $(\mu, \iota) \in K \subset M \times I$, une famille d'ensembles. On dit que $E^{(K)}$ *opère* sur une famille $X = (X^{\iota}) \in Ob(\mathcal{C}^I)$ si l'on s'est donné une famille de flèches

$$\varphi = (\varphi^{\varepsilon}: X^{\mu} = X^{\iota_1} \times \ldots \times X^{\iota_n} \to X^{\iota}) \quad (\varepsilon \in E^{\iota}_{\mu}, (\mu, \iota) \in K)^{(*)}.$$

Si $E^{(K)}$ opère sur (Y^{ι}) avec pour famille structurale $\psi = (\psi^{\varepsilon})(\varepsilon \in E)$, un morphisme de familles à opérateurs $(X, \varphi) \to (Y, \psi)$ est un triple $((X, \varphi), f, (Y, \psi))$, abrégé en f, dans lequel $f = (f^{\iota}): (X^{\iota}) \to (Y^{\iota})$ satisfait les conditions évidentes de comptabilité avec les opérations structurales. D'où la catégorie $\underline{Fam}(E^{(K)}, \mathcal{C})$ *des familles d'objets de*

(*) La famille φ est indéxée par $\coprod_{(\mu, \iota) \in K} E^{\iota}_{\mu} = E$, et non par la réunion des E^{ι}_{μ} comme cette écriture abusive, mais simple, pourrait le laisser penser.

$\mathcal{C}$ *sur lesquelles opère* $E^{(K)}$, et le foncteur d'oubli des opérations de $E^{(K)}$,

$$0 : \underline{Fam}(E^{(K)}, \mathcal{C}) \to \mathcal{C}^I, \quad (X, \varphi) \mapsto X.$$

On se ramène canoniquement à des catégories d'algèbres de la manière suivante : en associant à tout I-type $\mathbf{T}$ la K-famille $T^{(K)}(\mathbf{T}) = P^{(K)}(\Sigma(\mathbf{T}))$, projection sur K du schéma $\Sigma(\mathbf{T})$ sous-jacent à $\mathbf{T}$, on définit un foncteur *trace sur* K : $T^{(K)} : \underline{Typ}(I) \to \underline{Ens}^K$.

PROPOSITION 3.1.2.2. *Pour tout sous-ensemble K de $M \times I$:*

(i) le foncteur trace sur K a un adjoint à gauche $T_{(K)}$ dit type libre;

(ii) pour toute catégorie $\mathcal{C}$ à produits finis et toute famille $E^{(K)}$ d'ensembles, la catégorie $\underline{Fam}(E^{(K)}, \mathcal{C})$ est isomorphe à $\underline{Alg}(T_{(K)}(E^{(K)}), \mathcal{C})$ l'isomorphisme respectant les familles sous-jacentes.

En effet $T^{(K)}$ se factorise en :

$$\underline{Typ}(I) \xrightarrow[\mathcal{S}(.)]{} \underline{Esp}(I) \xrightarrow[\Sigma(.)]{} \underline{Op}(I) \xrightarrow[P^{(K)}]{} \underline{Ens}^K.$$

D'après 2.1.2.1 et 2.1.1.4, les foncteurs $\mathcal{S}(.)$ et $\Sigma(.)$ ont des adjoints à gauche $\mathbf{T}(.)$ et $\mathcal{S}_L(.)$; comme $P^{(K)}$ a pour adjoint $P_{(K)}$, le foncteur composé $T^{(K)}$ admet $\mathbf{T}(.) \circ \mathcal{S}_L \circ P_{(K)} = T_{(K)}$ comme adjoint à gauche, d'où *(i)*. Il est clair d'autre part que la catégorie $\underline{Fam}(E^{(K)}, \mathcal{C})$ est isomorphe à $\underline{Préalg}(P_{(K)}(E^{(K)}), \mathcal{C})$; en composant cet isomorphisme avec les isomorphismes définis dans 2.1.1.4 *(ii)* et 2.1.2.2, on obtient un isomorphisme

$$\theta(E^{(K)}, \mathcal{C}) : \underline{Fam}(E^{(K)}, \mathcal{C}) \xrightarrow{\sim} \underline{Alg}(T_{(K)}E^{(K)}, \mathcal{C})$$

respectant visiblement les familles sous-jacentes. ■

En outre $\theta(E^{(K)}, \mathcal{C})$ est un isomorphisme «fonctoriel en $E^{(K)}$ et $\mathcal{C}$», c'est-à-dire compatible avec la formation des images directes et réciproques, en un sens évident.

Les choix les plus fréquents de $K \subset M \times I$ sont de la forme suivante : Si n est un entier ≥ 0, K est l'ensemble des couples (μ, ι) tels que μ est de longueur $\leq n$ (resp. de longueur n). On désigne alors $P^{(K)}$, $P_{(K)}$, $\Sigma^{[K]}$, $\underline{Op}(I)^{[K]}$ par $P^{(n)}$, $P_{(n)}, \ldots$ (resp. $P^{(bn)}$, $P_{(bn)}, \ldots$). Un I-schéma Σ qui coïncide avec son *n-squelette* $\Sigma^{[n]}$ (resp. sa *n-section* $\Sigma^{[bn]}$) est dit *de degré* $\leq n$ (resp. *homogène de degré n*). En particulier pour $n = 0$ les deux notions coïncident et, si l'on identifie I à $\{0\} \times I = K \subset M \times I$, les familles d'ensembles (E^{ι}) $(\iota \in I)$ s'identifient alors aux I-schémas homogènes de degré 0.(*)

Les catégories $\mathcal{H}(E^{\iota}, \mathbf{T})$ définies dans 3. 1. 1 se généralisent de la manière suivante : si $\mathbf{T}$ est un I-type, $\mathcal{C}$ une catégorie à produits finis, K est un sous-ensemble de $M \times I$ et $E^{(K)}$ une K-famille d'ensembles, désignons par $\mathcal{H}_{\mathcal{C}}(E^{(K)}, \mathbf{T})$ la catégorie dont les objets sont les couples $H = (A, \varphi)$ dans lesquels $A : \mathbf{T} \to \mathcal{C}$ est une $\mathbf{T}$-algèbre de $\mathcal{C}$, et $\varphi = (\varphi^{\varepsilon})$ $(\varepsilon \in E)$ définit $E^{(K)}$ comme famille d'opérateurs sur la famille $O(A)$; une flèche de H dans $H' = (A', \varphi')$ est un triple (H, h, H'), abrégé en h, où $h : A \to A'$ est un morphisme d'algèbres, tel que $O(h) : O(A) \to O(A')$ est compatible avec les opérations de $E^{(K)}$ dans $O(A)$ et $O(A')$.(Les $\mathcal{H}(E^{\iota}, \mathbf{T})$ correspondent au cas $\mathcal{C} = \underline{Ens}$ et $E^{(K)}$ réduit à des constantes, c'est-à-dire homogène de degré 0).

On appelle type déduit de $\mathbf{T}$ par adjonction des opérations de $E^{(K)}$, et on note $\mathbf{T} \amalg E^{(K)}$, le type $\mathbf{T} \amalg T_{(K)}(E^{(K)})$ somme dans la catégorie $\underline{Typ(I)}$ de $\mathbf{T}$ et du type libre engendré par $E^{(K)}$ (cf. 3. 1. 2.1 et 3. 1. 2.2).

THEOREME 3. 1. 2. 3. *Avec les notations précédentes, pour toute catégorie $\mathcal{C}$ à produits finis, on a un isomorphisme canonique, « fonctoriel par rapport à tous les arguments » :*

$$\chi_{\mathcal{C}}(E^{(K)}, \mathbf{T}) = \chi_{\mathcal{C}} : \mathcal{H}_{\mathcal{C}}(E^{(K)}, \mathbf{T}) \xrightarrow{\sim} \underline{Alg}(\mathbf{T} \amalg E^{(K)}, \mathcal{C}).$$

En effet, soit $H = (A, \varphi)$ un objet de $\mathcal{H}_{\mathcal{C}}(E^{(K)}, \mathbf{T})$ et (A^{ι}) la famille sous-jacente à A. D'après 3.1.2.2 φ détermine sur (A^{ι}) une structure de $T_{(K)}(E^{(K)})$-algèbre unique, c'est-à-dire un morphisme

(*) Par exemple le foncteur « schéma d'opérations associé à un schéma de diagramme » (cf. 1. 3. 3. 4) s'identifie à $P_{(b1)}$. Par contre les foncteurs $\Sigma \leadsto \Omega^{\iota}_{\mu}$ (resp. Ω_{μ}, Ω^{ι}) définis dans 1. 3. 1 sont de la forme $P^{(K)}$ pour des choix convenables de K, qui ne sont pas de la forme décrite ci-dessus.

$T_{(K)}(E^{(K)}) \to \mathbf{T}(A^\iota)$. D'autre part A s'identifie à un morphisme de types : $\mathbf{T} \to \mathbf{T}(A^\iota)$. Ce couple de flèches de $Typ(I)$ détermine une flèche unique

$$\mathbf{T} \amalg T_{(K)}(D^{(K)}) = \mathbf{T} \amalg E^{(K)} \to \mathbf{T}(A^\iota)$$

qui s'identifie à une $\mathcal{C}$-algèbre $\chi_{\mathcal{C}}(H)$ de type $\mathbf{T} \amalg E^{(K)}$, ayant (A^ι) pour famille sous-jacente, ce qui définit $\chi_{\mathcal{C}}$ pour les objets de $\mathcal{H}_{\mathcal{C}}(E^{(K)},\mathbf{T})$.

La correspondance $(A^\iota) \rightsquigarrow \mathbf{T}(A^\iota)$, $Ob(\mathcal{C}^I) \to Ob(\underline{Op}(I))$ n'étant pas fonctorielle, on ne peut utiliser brutalement la même méthode pour définir $\chi_{\mathcal{C}}$ sur les flèches. On procède de la façon suivante : La classe des flèches de $\underline{Alg}(\mathbf{T} \amalg E^{(K)}, \mathcal{C})$ s'identifie à la classe des objets de $\underline{Alg}(\mathbf{T} \amalg E^{(K)}, \underline{Fl}(\mathcal{C}))$, de même les flèches de $\mathcal{H}_{\mathcal{C}}(E^{(K)}, \mathbf{T})$ s'identifient aux objets de $\mathcal{H}_{\underline{Fl}(\mathcal{C})}(E^{(K)}, \mathbf{T})$. On utilise alors

$$\chi_{\underline{Fl}(\mathcal{C})} : Ob(\mathcal{H}_{\underline{FL}(\mathcal{C})}(E^{(K)}, \mathbf{T})) \simeq Ob(\underline{Alg}(\mathbf{T} \amalg E^{(K)}; \underline{Fl}(\mathcal{C})).$$

A l'aide de ces définitions, toutes les assertions du théorème résultent de vérifications de routine épargnées au lecteur. ■

COROLLAIRE 3. 1. 2. 4. *Pour tout I-type $\mathbf{T}$, le foncteur d'oubli*

$$\underline{Alg}(\mathbf{T}, \underline{Ens}) \to \underline{Ens}^I$$

a un adjoint à gauche.

En effet, si $E^{(I)}$ est une famille d'ensembles,

$$\mathcal{H}(E^\iota, \mathbf{T}) \simeq \underline{Alg}(\mathbf{T} \amalg E^{(I)}, \underline{Ens})$$

a pour objet initial la $\mathbf{T} \amalg E^{(I)}$-algèbre $A_o(\mathbf{T} \amalg E^{(I)})$ des constantes de $\mathbf{T} \amalg E^{(I)}$. L'injection canonique $\mathbf{T} \to \mathbf{T} \amalg E^{(I)}$ détermine par image réciproque une structure de $\mathbf{T}$-algèbre sur la famille sous-jacente qui est la $\mathbf{T}$-*algèbre libre,* notée $\mathbf{T}L(E^{(I)})$, *engendrée par* $E^{(I)}$. ■

De manière moins formelle, pour construire $\mathbf{T}L(E^{(I)})$ on adjoint au type $\mathbf{T}$ « autant de constantes qu'il y a d'éléments dans les E^ι », les constantes du type ainsi agrandi sont canoniquement munies d'une structure de $\mathbf{T}$-algèbre, qui est la $\mathbf{T}$-algèbre libre. Avec cette interprétation des algèbres libres, il n'y a aucune raison de se borner à des adjonctions de constantes; la proposition 3.1.2.2 et le lemme 3.1.1 justifient la définition générale suivante : Si $E^{(K)}$ est une K-famille d'ensembles, l'injection $\mathbf{T} \to \mathbf{T} \amalg E^{(K)}$ munit la famille $(\Omega_o^\iota(\mathbf{T} \amalg E^{(K)}))$, $(\iota \in I)$, des cons- de $\mathbf{T} \amalg E^{(K)}$ d'une structure de $\mathbf{T}$-algèbre, dite *$\mathbf{T}$-algèbre libre engendrée par* $E^{(K)}$. Si B est une $\mathbf{T}$-algèbre sur une famille (B^ι) d'ensembles, et si $\varphi = (\varphi^\varepsilon)$ fait opérer $E^{(K)}$ sur $B^{(I)}$, on note $\hat{\varphi}$ l'extension canonique de φ à l'algèbre libre $\mathbf{T}L(E^{(K)})$, et comme toujours, on identifie $\hat{\varphi}$ au morphisme sous-jacent

$$0(\hat{\varphi}) = (\hat{\varphi}^\iota : \Omega_o^\iota(\mathbf{T} \amalg E^{(K)}) \to B^\iota) \quad (\iota \in I).$$

Nous verrons, dans la suite, des exemples où l'on adjoint effectivement des opérations non constantes à un type, mais les cas intéressants sont ceux où l'on astreint en même temps ces opérations à des relations; c'est la situation que nous allons examiner maintenant.

3.1.3. PRESENTATIONS DES ALGEBRES. Le problème de construction d'une $\mathbf{T}$-algèbre à partir de générateurs et de relations se pose usuellement (cf. par exemple Higgins [1]) dans les termes suivants : Soit $E^{(I)}$ une famille d'ensembles, et $\hat{E}^{(I)}$ la famille d'ensembles sous-jacente à la $\mathbf{T}$-algèbre libre engendrée par $E^{(I)}$ (cf. 3.1.2.4). Une *$\mathbf{T}$-relation d'indice* ι dans $(E^{(I)})$ est un couple $\rho = (\hat{\varepsilon}, \hat{\varepsilon}') \in \hat{E}^\iota \times \hat{E}^\iota$. Si $A : \mathbf{T} \to \underline{Ens}$ est une $\mathbf{T}$-algèbre et $\varphi^{(I)} : \hat{E}^{(I)} \to A^{(I)} \in \underline{Ens}^I$, on dit que *$\rho$ est satisfaite par* $\varphi^{(I)}$, si $\hat{\varphi}^\iota(\hat{\varepsilon}) = \hat{\varphi}^\iota(\hat{\varepsilon}')$. Une *$\mathbf{T}$-présentation* est un couple $\mathcal{P} = (E, \mathfrak{R})$ d'une famille $E = E^{(I)}$ d'ensembles, et d'une famille $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}^{(I)}$, où $\mathfrak{R}^\iota \subset \hat{E}^\iota \times \hat{E}^\iota$ $(\iota \in I)$. Une *$\mathbf{T}$-algèbre présentée par* $\mathcal{P}$ est un couple $H_o = (A_o, \varphi_o)$ d'une $\mathbf{T}$-algèbre A_o et d'une flèche

$$\varphi_o = \varphi_o^{(I)} : E^{(I)} \to A_o^{(I)} \in \underline{Ens}^{(I)}$$

telle que :

(i) $\varphi_o^{(I)}$ satisfait toutes les relations de $\mathfrak{R}$.

(ii) Si A est une autre $\mathbf{T}$-algèbre et $\varphi : E^{(I)} \to A^{(I)}$ satisfait $\mathfrak{R}$, il existe un morphisme unique $f : A_o \to A \in \underline{Alg}(\mathbf{T}, Ens)$ tel que $\varphi = 0(f) \circ \varphi_o$.

L'existence d'un tel couple équivaut à celle d'un objet initial dans la catégorie $\mathcal{H}(\mathcal{P}, \mathbf{T})$, ayant pour objets les couples $H = (A, \varphi)$ vérifiant (i), et pour flèches les triples (H, h, H'), où

$$h : A \to A' \in \underline{Alg}(\mathbf{T}, Ens) \quad \text{et} \quad \varphi' = 0(h) \circ \varphi.$$

Comme précédemment, nous allons remplacer $\mathcal{H}(\mathcal{P}, \mathbf{T})$ par des catégories plus générales, et montrer que ces catégories sont de la forme $Alg(\mathbf{T}', \mathcal{C})$, donc ont des objets initiaux.

DEFINITION. *Une* $\mathbf{T}$*-présentation (généralisée) est un couple* $\mathcal{P} = (E, \mathcal{R})$ *dans lequel :*

(i) $E = E^{(K)}$ *est une K-famille d'ensembles* $(K \subset M \times I)$;

(ii) $\mathcal{R}$ *est un ensemble de relations (cf. 1.3.5) du schéma* $\Sigma(\mathbf{T} \varkappa E^{(K)})$ *sous-jacent à* $\mathbf{T} \varkappa E^{(K)}$.

Soient $\mathcal{C}$ une catégorie à produits finis, $A : \mathbf{T} \to \mathcal{C}$ une $\mathbf{T}$-algèbre de $\mathcal{C}$ et $\varphi = (\varphi^{\varepsilon})$ une «opération de $E^{(K)}$ dans $0(A)$». D'après 3.1.2.3, φ se prolonge en une algèbre $\chi_{\mathcal{C}}(A, \varphi) : \mathbf{T} \varkappa E^{(K)} \to \mathcal{C}$, qui est déterminée par la préalgèbre sous-jacente $P(A, \varphi) : \Sigma(\mathbf{T} \varkappa E^{(K)}) \to \Sigma(A^{\iota})$. On dit que φ *est compatible avec la présentation* $\mathcal{P}$ si toute relation de $\mathcal{R}$ est satisfaite par $P(A, \varphi)$ (cf. 1.3.5). Pour $\mathcal{P}$ fixée, on note $\mathcal{H}_{\mathcal{C}}(\mathcal{P}, \mathbf{T})$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{H}_{\mathcal{C}}(E^{(K)}, \mathbf{T})$ ayant pour objets les couples (A, φ) tels que φ est compatible avec $\mathcal{P}$.

3.1.3.1. CAS PARTICULIERS.

(i) Les présentations ordinaires s'identifient aux présentations généralisées pour lesquelles $K = \{0\} \times I$, et $\mathcal{R}$ est homogène de degré 0. Les catégories $\mathcal{H}(\mathcal{P}, \mathbf{T})$ correspondent par cette identification aux catégories $\mathcal{H}_{\underline{Ens}}(\mathcal{P}, \mathbf{T})$.

(ii) Les catégories $\mathcal{H}_{\mathcal{C}}(E^{(K)}, \mathbf{T})$ définies dans 3.1.2 s'identifient aux catégories $\mathcal{H}_{\mathcal{C}}(\mathcal{P}, \mathbf{T})$, où $\mathcal{P} = (E^{(K)}, \emptyset)$.

THEOREME 3.1.3.2. *Soit* $\mathcal{P} = (E^{(K)}, \mathcal{R})$ *une* $\mathbf{T}$*-présentation généralisée; il existe un I-type* $\mathbf{T} \cup \mathcal{P}$ *et un morphisme* $f(\mathcal{P}) : \mathbf{T} \to \mathbf{T} \cup \mathcal{P} \in \underline{Typ}(I)$, *uniques à un isomorphisme près, tels que pour toute catégorie* $\mathcal{C}$ *à produits finis :*

(i) Il existe un isomorphisme canonique

$$\chi_{\mathcal{C}}(\mathcal{P},\mathbf{T}) = \chi_{\mathcal{C}} : \mathcal{H}_{\mathcal{C}}(\mathcal{P},\mathbf{T}) \xrightarrow{\sim} \underline{Alg}(\mathbf{T}\cup\mathcal{P},\mathbf{T}).$$

(ii) Le diagramme de foncteurs ci-dessous est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H}_{\mathcal{C}}(\mathcal{P},\mathbf{T}) \arrow[rr, "\text{oubli de } \varphi : (A,\varphi) \rightsquigarrow A"] \arrow[dr, "\chi_{\mathcal{C}}"', "\sim"] & & \underline{Alg}(\mathbf{T},\mathcal{C}) \\
& \underline{Alg}(\mathbf{T}\cup\mathcal{P},\mathcal{C}) \arrow[ur, "f(\mathcal{P})^{\mathcal{C}}_{*}\ \text{(= image réciproque)}"'] &
\end{tikzcd}$$

(iii) Le morphisme $\chi_{\mathcal{C}}$ dépend fonctoriellement de $\mathcal{C}$(*).

Ce théorème ainsi qu'un grand nombre de ceux qui suivent est donné sans démonstration : en effet, les techniques utilisées sont identiques à celles qui ont été maintes fois employées antérieurement.

COROLLAIRE 3.1.3.3. *Pour toute $\mathbf{T}$-présentation $\mathcal{P}$, la catégorie $\mathcal{H}_{\underline{Ens}}(\mathcal{P},\mathbf{T}) \simeq \mathcal{H}(\mathcal{P},\mathbf{T})$ a un objet initial.*

C'est-à-dire que $\mathcal{P}$ détermine une $\mathbf{T}$-algèbre présentée par $\mathcal{P}$ unique à un isomorphisme près, notée $\mathbf{T}L(\mathcal{P})$. Notons que, si $\mathcal{P} = (E^{(K)}, \emptyset)$, $\mathbf{T}L(\mathcal{P})$ s'identifie canoniquement à $\mathbf{T}L(E^{(K)})$.

Soit K un sous-ensemble de $M\times I$; on définit la catégorie $\underline{Pres}^{(K)}(\mathbf{T})$ des $\mathbf{T}$-*présentations à support dans* K de la manière suivante : ses objets sont les présentations $\mathcal{P} = (E^{(K)}, \mathfrak{R})$, un morphisme de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}' = (E'^{(K)}, \mathfrak{R}')$ est un triple $(\mathcal{P}, \varphi^{(K)}, \mathcal{P}')$, abrégé en $\varphi^{(K)}$, où

$$\varphi^{(K)} : E^{(K)} \to E'^{(K)} \in \underline{Ens}^{(K)}$$

est tel que son prolongement canonique

$$\mathfrak{R}_{\mathbf{T}}(\varphi^{(K)}) = \mathfrak{R}(1_{\mathbf{T}} \varkappa T_{(K)}(\varphi^{(K)})) : \mathfrak{R}(\mathbf{T} \varkappa E^{(K)}) \to \mathfrak{R}(\mathbf{T} \varkappa E'^{(K)})$$

applique $\mathfrak{R}$ dans $\mathfrak{R}'$.

La correspondance $\mathcal{P} \rightsquigarrow \mathbf{T}L(\mathcal{P})$ définit un foncteur

$$\mathbf{T}L : \underline{Pres}(\mathbf{T}) = \coprod_{K\in\mathcal{P}(M\times I)} \underline{Pres}^{(K)}(\mathbf{T}) \to \underline{Alg}(\mathbf{T}, Ens),$$

(*) Où $\mathcal{C}$ parcourt la « catégorie » des catégories à produits finis, avec pour morphismes les foncteurs qui commutent avec les produits finis.

dit $\mathbf{T}$ - *algèbre définie par* $\mathcal{P}$.

Pour simplifier nous nous bornerons dans la suite aux présentations ordinaires, c'est-à-dire à $K = \{0\} \times I \simeq I$ et $\mathfrak{R}$ homogène de degré 0, et nous désignerons par $\mathbf{T}L_o$ la restriction de $\mathbf{T}L$ à $\underline{Pres}^{(I)}(\mathbf{T})$.

THEOREME 3.1.3.4. *Le foncteur* $\mathbf{T}L_o$ *admet un adjoint à droite*

$$\mathcal{P}^o : \underline{Alg}(\mathbf{T}, \underline{Ens}) \to \underline{Pres}^{(I)}(\mathbf{T}),$$

et le foncteur composé

$$\underline{Alg}(\mathbf{T}, \underline{Ens}) \xrightarrow{\mathcal{P}^o} \underline{Pres}(I) \xrightarrow{\mathbf{T}L_o} \underline{Alg}(\mathbf{T}, Ens)$$

est isomorphe à l'identité.

Si A est une $\mathbf{T}$ algèbre, $\mathcal{P}^o(A)$ est dite présentation canonique de A. La famille sous-jacente à $\mathcal{P}^o(A)$ « est» la famille sous-jacente à A et les relations de $\mathcal{P}^o(A)$ se déduisent de manière évidente des relations satisfaites par A (cf. 1.3.5).

De 3.1.3.3 et 3.1.3.4 on déduit sans difficulté le

THEOREME 3.1.3.5. *Pour tout I-type* $\mathbf{T}$, *la catégorie* $\underline{Alg}(\mathbf{T}, Ens)$ *admet des limites inductives.*

3.2. Meta-types. Soit I un ensemble. Posons $\tilde{I} = M \times I$; les éléments de $\tilde{I}$ sont notés $\tilde{\iota} = (\mu, \iota)$, $\tilde{\iota}' = (\mu', \iota')$, etc... et le monoïde libre engendré par $\tilde{I}$ est noté $\tilde{M}$. On note encore 0 l'élément neutre de $\tilde{M}$.

3.2.1. On définit un $\tilde{I}$-schéma d'opérations $\tilde{\Sigma} = (\tilde{\Omega}^{\tilde{\iota}}_{\tilde{\mu}})$ de la façon suivante :

(i) Supposons $\tilde{\mu} = \tilde{\iota}_o \tilde{\iota}_1 \dots \tilde{\iota}_p \neq 0$, où $\tilde{\iota}_k = (\mu_k, \iota_k)$ $(k = 0, 1, \dots p)$ et soit $\tilde{\iota} = (\mu, \iota)$. On prend $\Omega^{\tilde{\iota}}_{\tilde{\mu}} = \emptyset$, sauf si

$$\begin{cases} \iota = \iota_o \\ \mu_1 = \dots = \mu_p = \mu \\ \iota_1 \dots \iota_p = \mu_p = \mu_o \end{cases}$$

auquel cas $\tilde{\Omega}^{\tilde{\iota}}_{\tilde{\mu}}$ est réduit à un seul élément noté : $\theta^{\iota}_{\mu_o \mu}$.

(ii) Si $\tilde{\mu} = 0$ et $\tilde{\iota} = (\mu, \iota) = (\iota^1 \dots \iota^n, \iota)$, on prend pour $\Omega_o^{\tilde{\iota}}$ un ensemble en correspondance biunivoque avec l'ensemble des entiers k tels que $\iota^k = \iota$. (Notons que $\Omega_o^{\tilde{\iota}}$ peut être vide). L'élément de $\Omega_o^{\tilde{\iota}}$ qui correspond à un entier k est noté π_μ^k.

3.2.2. Soit $\Sigma = (\Omega_\mu^\iota)$ un I-schéma, $T = (T_{\nu\mu}^\iota)$ une multiplication sur Σ (cf. 1.3.4) et $p = (pr_\mu^k) : S \to \Sigma$ un système de projections dans Σ (cf. 1.3.2). On associe à ces données une préalgèbre $P = (X^{(\tilde{I})}, \varphi^{(\tilde{\Omega})})$ (cf. 1.3.1) de schéma $\tilde{\Sigma}$, dans *Ens*, de la façon suivante :

(i) Si $\tilde{\iota} = (\mu, \iota) \in \tilde{I}$, $X^{\tilde{\iota}} = \Omega_\mu^\iota$.

(ii) Soit $\tilde{\omega} \in \Omega_{\tilde{\mu}}^{\tilde{\iota}}$. Si $\tilde{\mu} \neq 0$, $\tilde{\omega}$ est de la forme $\theta_{\mu_o\mu}^\iota$ et le triple (ι, μ_o, μ) est tel que l'on ait une application

$$T_{\mu_o\mu}^\iota : \Omega_{\mu_o}^{\iota_o} \times \Omega_\mu^{\iota_1} \times \dots \times \Omega_\mu^{\iota_n} = X^{\tilde{\iota}_o} \times \dots \times X^{\tilde{\iota}_n} = X^{\tilde{\mu}} \to X^{\tilde{\iota}} = \Omega_\mu^\iota ;$$

on pose alors $\varphi^{\tilde{\omega}} = T_{\mu_o\mu}^\iota$.

(iii) De même si $\tilde{\omega} = \pi_\mu^k$ on pose $\varphi^{\tilde{\omega}} = pr_\mu^k$ qui est défini et a la « variance » convenable.

Avec cette définition il est clair que la catégorie $\mathit{Préalg}(\tilde{\Sigma}, \mathit{Ens})$ est isomorphe à la catégorie dont les objets sont les schémas à projections, et à multiplications, avec les morphismes évidents.

On vérifie de manière directe que l'associativité de T et le fait que T est élément neutre s'expriment par des relations dans $\tilde{\Sigma}$. Soit $\tilde{\mathfrak{A}}$ l'ensemble de ces relations et $\tilde{\mathcal{S}} = (\tilde{\Sigma}, \tilde{\mathfrak{A}})$. Il résulte de ce procédé que la catégorie des I-compositeurs s'identifie à $\underline{Alg}(\tilde{\mathcal{S}}, \underline{Ens})$. Le type $\mathbf{T}(\tilde{\mathcal{S}})$, qui ne dépend que de l'ensemble I, est appelé *méta-type* des I-types et noté $\mathbf{M}(I)$. D'après la proposition 2.1.1.1 et le théorème 2.1.2.2, on déduit de ce qui précède le

THEOREME 3.2.3. *Pour tout ensemble I, il existe un type $\mathbf{M}(I)$ sur $M \times I$ termes tel que les catégories $\underline{Typ}(I)$ et $\underline{Alg}(\mathbf{M}(I), Ens)$ sont équivalentes.*

COROLLAIRE 3.2.4. *La catégorie $\underline{Typ}(I)$ des I-types admet des limites inductives et projectives.*

Le passage des espèces aux types (théorème 2. 1. 2. 1) s'interprète de manière très simple au moyen du théorème 3. 2. 3 et de la notion de présentation : Une vérification directe montre en effet que, si $\mathcal{S} = (\Sigma, \mathfrak{A})$ est une I-espèce, elle définit une $\mathbf{M}(I)$-présentation $\mathcal{P}$ dont les « générateurs » sont les opérations de Σ et les relations « sont » les axiomes de $\mathcal{S}$. La $\mathbf{M}(I)$-algèbre définie par cette présentation s'identifie grâce à 3.2. 3 au type $\mathbf{T}(\mathcal{S})$ associé à $\mathcal{S}$.

Cette interprétation présente les avantages suivants :

(i) Elle permet de remplacer les notions métamathématiques de « lois de composition » et « axiomes » d'une espèce de structures algébriques sur I-termes par les notions mathématiques, et particulièrement simples, de « générateurs » et « relations » d'une algèbre (d'un type fixe $\mathbf{M}(I)$ ne dépendant que de I).

Les théories algébriques deviennent elles-mêmes de cette façon des ensembles munis de structures algébriques, très simples, et justiciables des théorèmes généraux de l'algèbre. (Voir par exemple le corollaire 3. 2. 4 ou le théorème 2.1. 2.1 qui devient le cas particulier de 3. 1. 3. 3, où l'on prend $\mathbf{T} = \mathbf{M}(I)$).

(ii) Elle justifie, s'il en était encore besoin, le passage de l'espèce $\mathcal{S}$ au type $\mathbf{T}(\mathcal{S})$: L'espèce $\mathcal{S}$ correspond dans la catégorie des $\mathbf{M}(I)$-algèbres à une présentation de l'algèbre $\mathbf{T}(\mathcal{S})$. La notion de présentation n'est pas intrinsèque, et en particulier ne se prête pas bien à la « comparaison » de deux théories, alors que le type est l'« invariant » commun à toutes les espèces de structures algébriques équivalentes.

Remarquons pour terminer qu'il est indispensable de ne pas se restreindre aux espèces de structures ayant une famille *finie* d'ensembles de base principaux comme le fait Bourbaki (et encore moins *un seul* ensemble de base comme le fait Lawvere) si l'on veut pouvoir interpréter les théories algébriques comme des algèbres. Ainsi par exemple, une espèce de structures algébriques sur un ensemble de base (i. e. une théorie algébrique au sens de Lawvere) « est » une algèbre sur $\mathbf{N}$ ensembles de base principaux, et la catégorie $\mathcal{T}$ des théories algébriques de Lawvere est la catégorie des $\mathbf{M}(\mathbf{N})$-algèbres.

DEUXIEME PARTIE

1. INTRODUCTION.

Nous nous proposons d'étudier une notion très générale d'associativité, mettant en jeu une famille $\mathcal{C} = (\mathcal{C}^\iota)\ (\iota \in I)$ de catégories, munie d'une famille d'accouplements

$$\otimes_\omega(\iota,\iota') : \mathcal{C}^\iota \times \mathcal{C}^{\iota'} \to \mathcal{C}^{\alpha(\omega,\iota,\iota')}, \qquad (A, A') \rightsquigarrow A \otimes_\omega A',$$

où ω parcourt un ensemble Ω et α est une application d'une partie de $\Omega \times I \times I$ dans I. (Définition précise dans 2.2.1). Ces accouplements sont supposés reliés par des morphismes fonctoriels « d'associativité » de la forme

$$a(\omega, \omega') : (A \otimes_\omega A') \otimes_{\omega'} A'' \to A \otimes_{\omega_1} (A' \otimes_{\omega'_1} A'')$$

ou

$$\alpha(\omega, \omega') : A \otimes_\omega (A' \otimes_{\omega'} A'') \to (A \otimes_{\omega_2} A') \otimes_{\omega'_2} A''.$$

On ne suppose ni que les morphismes d'associativité soient inversibles, ni qu'ils soient définis pour tous les couples de foncteurs $\otimes_\omega$, et on cherche des conditions suffisantes, de caractère « fini », pour que deux morphismes quelconques, de même source et de même but, obtenus par « superposition » des morphismes a ou α soient égaux.

Dans [1] nous avions décrit, pour simplifier, la situation où l'on a une seule catégorie $\mathcal{C}$, munie d'un foncteur $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ et d'un *isomorphisme* fonctoriel $a : (A \otimes A') \otimes A'' \xrightarrow{\sim} A \otimes (A' \otimes A'')$.

Ce cas a aussi été étudié par Epstein [1] et Mac-Lane [1]. On rencontre, en particulier dans l'étude des catégories fibrées, de nombreux cas concrets qui ne rentrent pas dans le cadre particulier des catégories multiplicatives, mais dans celui que nous allons étudier. L'exemple des bi-modules permet déjà de justifier la généralisation : on y rencontre en effet des morphismes d'associativité qui ne sont pas des isomorphismes, et qui relient des couples d'opérations différents (cf. 1.2). Cet exemple fournit en outre un «support intuitif» aux définitions qui seront données.

1.1. Terminologie. Si $\mathfrak{A}$ est une catégorie, on note $\mathfrak{A}^*$ la duale de $\mathfrak{A}$. Si

$$\otimes : \mathfrak{A} \times \mathfrak{B} \to \mathfrak{C}, \qquad (A, B) \rightsquigarrow A \otimes B,$$

est un foncteur, on définit le foncteur *conjugué* $\overline{\otimes}$ de $\otimes$ par :

1. 1. 1. $\qquad \overline{\otimes} : \mathfrak{B}^* \times \mathfrak{A}^* \to \mathfrak{C}^*, \quad (B, A) \rightsquigarrow B \overline{\otimes} A = A \otimes B$

(l'ordre dans lequel on écrit les termes est essentiel dans la suite).

1. 1. 2. Si $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ sont des catégories et $\otimes_1$, $\otimes_2$, $\otimes_3$, $\otimes_4$ sont des foncteurs

$$\otimes_1 : \mathfrak{A} \times \mathfrak{B} \to \mathfrak{X}, \quad \otimes_2 : \mathfrak{X} \times \mathfrak{C} \to \mathfrak{Z}, \quad \otimes_3 : \mathfrak{B} \times \mathfrak{C} \to \mathfrak{Y}, \quad \otimes_4 : \mathfrak{A} \times \mathfrak{Y} \to \mathfrak{Z},$$

une association a (resp. *co-association* α) entre $(\otimes_2, \otimes_1)$ et $(\otimes_4, \otimes_3)$ est un morphisme, fonctoriel en A, B, C,

$$a : (A \otimes_1 B) \otimes_2 C \to A \otimes_4 (B \otimes_3 C)$$

$$(\text{resp. } \alpha : A \otimes_4 (B \otimes_3 C) \to (A \otimes_1 B) \otimes_2 C).$$

Si a est un isomorphisme, a^{-1} est une co-association, et (a, a^{-1}) une *associativité.* (Une association «déplace les parenthèses vers la droite» ; une co-association, vers la gauche).

1. 1. 3. Si a est une association, on définit sa *conjuguée* $\overline{a}$, qui est une association entre $(\overline{\otimes}_4, \overline{\otimes}_3)$ et $(\overline{\otimes}_2, \overline{\otimes}_1)$, par :

$$\overline{a}(C, B, A) = a(A, B, C) : (C \overline{\otimes}_3 B) \overline{\otimes}_4 A \to C \overline{\otimes}_2 (B \overline{\otimes}_1 A)$$

dans $\mathfrak{Z}^*$.

De même, si α est une co-association, en posant $\overline{\alpha}(C, B, A) = \alpha(A, B, C)$ on définit la co-association $\overline{\alpha}$ conjuguée de α.

1.2. L'exemple des bimodules. Si R et S sont des anneaux, on note $\mathfrak{M}(R, S)$ la catégorie des (R, S)-bimodules et $\mathfrak{M}(R, S)^*$ sa duale. Un R-module à gauche (resp. à droite) est considéré comme $(R, \mathbf{Z})$- (resp. $(\mathbf{Z}, R)$-bimodule). Les foncteurs $\otimes_S$ et Hom_S définissent des accouplements que nous allons expliciter avec des notations différentes, qui seront « justifiées » dans 1. 2. 12.

1.2.1. Si $M \in \mathfrak{M}(R,S)$ et $N \in \mathfrak{M}(S,T)$, $M \otimes_S N$ est un (R,T)-bimodule, que nous noterons simplement $M \otimes N$, d'où une famille (indexée par l'« ensemble» des triplets (R,S,T) d'anneaux) d'accouplements :

$$\otimes : \mathfrak{M}(R,S) \times \mathfrak{M}(S,T) \to \mathfrak{M}(R,T), \quad (M,N) \rightsquigarrow M \otimes N.$$

1.2.2. Si $M \in \mathfrak{M}(R,S)^*$ et $N \in \mathfrak{M}(R,T)$, $Hom_R(M,N)$ est un (S,T)-bimodule noté $M \otimes N$, d'où les accouplements de « *division tensorielle à gauche* »

$$\otimes : \mathfrak{M}(R,S)^* \times \mathfrak{M}(R,T) \to \mathfrak{M}(S,T), \quad (M,N) \rightsquigarrow M \otimes N.$$

1.2.3. Si $M \in \mathfrak{M}(R,S)^*$ et $N \in \mathfrak{M}(T,S)$, $Hom_S(M,N)$ est un (T,R)-bimodule noté $N \oslash M$ (l'ordre de M et N est changé), d'où une famille d'accouplements « *de division tensorielle à droite* » :

$$\oslash : \mathfrak{M}(T,S) \times \mathfrak{M}(R,S)^* \to \mathfrak{M}(T,R), \quad (N,M) \rightsquigarrow N \oslash M.$$

Par « conjugaison» on obtient trois autres familles d'accouplements :

1.2.1' : $\bar{\otimes} : \mathfrak{M}(S,T)^* \times \mathfrak{M}(R,S)^* \to \mathfrak{M}(R,T)^*, \quad (N,M) \rightsquigarrow N \bar{\otimes} M (= M \otimes N).$

1.2.2' : $\bar{\otimes} : \mathfrak{M}(R,T)^* \times \mathfrak{M}(R,S) \to \mathfrak{M}(S,T)^*, \quad (N,M) \rightsquigarrow N \bar{\otimes} M (= M \otimes N).$

1.2.3' : $\bar{\oslash} : \mathfrak{M}(R,S) \times \mathfrak{M}(T,S)^* \to \mathfrak{M}(T,R)^*, \quad (M,N) \rightsquigarrow M \bar{\oslash} N (= N \oslash M).$

Ces accouplements sont reliés par des associations et co-associations que nous allons décrire :

1.2.4. Si $M \in \mathfrak{M}(R,S)$, $N \in \mathfrak{M}(S,T)$, $P \in \mathfrak{M}(T,U)$, on a un isomorphisme canonique de (R,U)-bimodules : $(M \otimes_S N) \otimes_T P \xrightarrow{\sim} M \otimes_S (N \otimes_T P)$, fonctoriel en M, N, P ; c'est-à-dire avec nos conventions une famille d'associativités (indéxée par « l'ensemble» des quadruplets (R,S,T,U) d'anneaux)

$$a : (M \otimes N) \otimes P \xrightarrow{\sim} M \otimes (N \otimes P).$$

1.2.5. Si $M \in \mathfrak{M}(R,S)^*$, $N \in \mathfrak{M}(S,T)^*$, $P \in \mathfrak{M}(R,U)$, l'isomorphisme de (T,U)-bimodules $Hom_R(M \otimes_S N, P) \xrightarrow{\sim} Hom_S(N, Hom_R, (M,P))$ s'exprime, avec nos conventions, par

$$b : (N \bar{\otimes} M) \otimes P \xrightarrow{\sim} N \otimes (M \otimes P).$$

On notera que l'ordre de N, M, P n'est pas modifié et que b est une associativité.

1.2.6. De même si $M \in \mathfrak{M}(R, S)^*$, $N \in \mathfrak{M}(S, T)^*$, $P \in \mathfrak{M}(U, T)$, l'isomorphisme de (U, R)-bimodules

$$Hom_S(M, Hom_T(N, P)) \xrightarrow{\sim} Hom_T(M \otimes_S N, P)$$

définit l'associativité

$$b' : (P \oslash N) \oslash M \xrightarrow{\sim} P \oslash (N \,\overline{\otimes}\, M).$$

1.2.7. Si $M \in \mathfrak{M}(R, S)$, $N \in \mathfrak{M}(T, S)^*$, $P \in \mathfrak{M}(T, U)$, on définit un morphisme de (R, U)-bimodules

$$c : Hom_S(N, M) \otimes_T P \to Hom_S(Hom_T(P, N), M)$$

par :

$$c(f \otimes p)(g) = f(g(p)), \quad f \in Hom_S(N, M), \ p \in P, \ g \in Hom_T(P, N).$$

Ce n'est pas en général un isomorphisme. On a ainsi une association

$$c : (M \oslash N) \otimes P \to M \oslash (N \,\overline{\obslash}\, P).$$

1.2.8. De même si $M \in \mathfrak{M}(R, S)$, $N \in \mathfrak{M}(R, T)^*$, $P \in \mathfrak{M}(U, T)$, on définit un morphisme de (U, S)-bimodules

$$\gamma : P \otimes_T Hom_R(N, M) \to Hom_R(Hom_T(P, N)), M)$$

par :

$$\gamma(p \otimes f)(g) = f(g(p)), \quad f \in Hom_R(N, M), \ p \in P, \ g \in Hom_T(P, N).$$

D'où une co-association

$$\gamma : P \otimes (N \obslash M) \to (P \,\overline{\oslash}\, N) \obslash M.$$

1.2.9. Si $M \in \mathfrak{M}(R, S)^*$, $N \in \mathfrak{M}(R, T)$, $P \in \mathfrak{M}(T, U)$, on définit un morphisme de (S, U)-bimodules

$$d : Hom_R(M, N) \otimes_T P \to Hom_R(M, N \otimes_T P)$$

par $d(f \otimes p)(m) = f(m) \otimes p$, d'où une association

$$d : (M \obslash N) \otimes P \to M \obslash (N \otimes P).$$

1.2.10. De même, si $M \in \mathfrak{M}(R, S)^*$, $N \in \mathfrak{M}(T, S)$, $P \in \mathfrak{M}(U, T)$, on a un morphisme de (U, R)-bimodules

$$\delta : P \otimes_T Hom_S(M, N) \to Hom_S(M, P \otimes_T N)$$

défini par $\delta(p \otimes f)(m) = p \otimes f(m)$. D'où une co-association

$$\delta : P \otimes (N \oslash M) \to (P \otimes N) \oslash M.$$

1.2.11. Enfin, si $M \in \mathfrak{M}(R, S)^*$, $N \in \mathfrak{M}(T, U)^*$, $P \in \mathfrak{M}(T, S)$, on définit un isomorphisme de (U, R)-bimodules

$$k : Hom_S(M, Hom_T(N, P)) \xrightarrow{\sim} Hom_T(N, Hom_S(M, P))$$

par $(k(f)(n))(m) = (f(m))(n)$, $f \in Hom_S(M, Hom_T(N, P))$, $n \in N$, $m \in M$. D'où une associativité

$$k : (N \oslash P) \oslash M \xrightarrow{\sim} N \oslash (P \oslash M).$$

Par conjugaison on déduit de ce qui précède d'autres associations et co-associations que nous n'expliciterons pas.

REMARQUES 1.2.12.

(i) La notation $M \otimes_S N$ se justifie dans une optique «non catégorique» où l'on considère M et N, pris isolément, comme des groupes abéliens, munis de structures supplémentaires de bi-modules, que l'on précise dans chaque « situation ». Dans notre contexte, la donnée de M comme objet de $\mathfrak{M}(R, S)$ et N comme objet de $\mathfrak{M}(S, T)$ détermine le triple (R, S, T), et il n'y a aucune ambiguité dans la notation $M \otimes N$.

(ii) Les différentes associations et co-associations s'interprètent formellement comme des «règles de calcul dans les groupoïdes» si on fait les traductions suivantes :

Un objet $M \in \mathfrak{M}(R, S)$ « est une flèche» $M : S \to R$. Le même objet, dans la catégorie duale $\mathfrak{M}(R, S)^*$, «est la flèche inverse» $M^{-1} : R \to S$.

Si $M : S \to R \in \mathfrak{M}(R, S)$ et $N : T \to S \in \mathfrak{M}(S, T)$, $M \otimes N$ est la flèche composée $M \circ N : T \to R \in \mathfrak{M}(R, T)$. De même si

$$M^{-1} : R \to S \in \mathfrak{M}(R, S)^* \quad \text{et} \quad N^{-1} : S \to T \in \mathfrak{M}(S, T)^*,$$

$N \bar{\otimes} M$ est la flèche composée $N^{-1} \circ M^{-1} = (M \circ N)^{-1} \in \mathfrak{M}(R, T)^*$. De manière analogue la loi de composition $\circledcirc$ se traduit par $(M^{-1}, N) \rightsquigarrow M^{-1} \circ N$, la loi $\oslash$ par $(N, M) \rightsquigarrow N M^{-1}$, la loi $\bar{\circledcirc}$ par $(N^{-1}, M) \rightsquigarrow N^{-1} \circ M$ et la loi $\bar{\oslash}$ par $(M, N^{-1}) \rightsquigarrow M \circ N^{-1}$.

Les morphismes d'association et de co-association deviennent alors :

$a : (MN)P \tilde{\to} M(NP);$ $b : (N^{-1}M^{-1})P \tilde{\to} N^{-1}(M^{-1}P);$

$b' : (PN^{-1})M^{-1} \tilde{\to} P(N^{-1}M^{-1});$ $c : (MN^{-1})P \to M(N^{-1}P);$

$\gamma : P(N^{-1}M) \to (PN^{-1})M;$ $d : (M^{-1}N)P \to M^{-1}(NP);$

$\delta : P(NM^{-1}) \to (PN)M^{-1};$ $k : (N^{-1}P)M^{-1} \tilde{\to} N^{-1}(PM^{-1});$

et de même pour les conjugués.

Notre objet ici n'est pas de justifier ces « analogies formelles », ce qui est du domaine de la théorie des bi-catégories. Notons simplement que seule une partie de ces morphismes a été explicitée « dans la littérature ». Il est clair que pour traiter ce genre d'associativité on a besoin de notions plus générales que celle de catégorie multiplicative.

2. FAMILLES BINAIRES DE CATEGORIES.

2.1. Préliminaires. Une *loi binaire dans* un ensemble I est une application λ d'un sous-ensemble $|\lambda|$ de $I \times I$ dans I. On note $Bin(I)$ l'ensemble de ces lois. Un couple (I, λ) est un *ensemble binaire.* Si $|\lambda| = I \times I$, on dit que λ est une loi *sur* I et que (I, λ) est un *magma*(*).

Un *système binaire* B est un ensemble muni d'une famille de lois binaires. De façon précise B est défini par un ensemble $I_B = I$ dit *sous-jacent,* un ensemble $\Omega_B = \Omega$ dit *opérant,* et une application

$$\alpha_B = \alpha : \Omega \to Bin(I)$$

dite action de Ω *dans* I. Le *support* $|\alpha|$ de α est le sous-ensemble de $\Omega \times I \times I$ formé des triples (ω, ι, ι') tels que $(\iota, \iota') \in |\alpha(\omega)|$. Un tel triple est dit *compatible* et $\alpha(\omega)(\iota, \iota')$ est notée $\iota\,\omega\,\iota'$. Si aucune confusion n'est possible, on dit que I est un Ω-*système* (binaire). Si $|\alpha| = \Omega \times I \times I$, Ω agit *sur* I, et I est dit Ω-*magma.* Les ensembles

(*) terminologie due à N. Bourbaki.

binaires s'identifient de manière évidente aux Ω-systèmes où $\Omega = \{\emptyset\}$, en particulier les $\{\emptyset\}$-magmas « sont » les magmas. Si $|\alpha| = \emptyset$, le système est dit *trivial.*

REMARQUE 2.1.1. La notion de système binaire est le cas particulier de la notion de schéma d'opérateurs de Higgins [1] correspondant à $\Omega_n = \emptyset$ si $n \neq 3$. (Cf. Remarque 1.3.3.3 de la première partie pour les notations). A un système binaire B, on peut donc associer un I-schéma d'opérations $\Sigma(B)$ homogène de degré 2 (au sens de 3.1.2) de la première partie.

2.2. Familles binaires.

DEFINITION 2.2.1. *Une famille binaire de catégories* $\mathfrak{B} = (B, \mathfrak{X}, \otimes)$ *est définie par :*

(i) Un système binaire $B = (\Omega, I, \alpha)$ *dit* schéma de la famille.

(ii) Une famille de catégories $\mathfrak{X} = (\mathfrak{X}^\iota)$ $(\iota \in I)$ *dite* sous-jacente.

(iii) Une famille de foncteurs $\otimes = (\otimes_\omega(\iota, \iota'))$, $(\omega, \iota, \iota') \in |\alpha|$, *dits* structuraux :

$$\otimes_\omega(\iota, \iota') : \mathfrak{X}^\iota \times \mathfrak{X}^{\iota'} \to \mathfrak{X}^{\iota\omega\iota'}.$$

Si aucune confusion n'est possible, pour tout $(X, X') \in \mathfrak{X}^\iota \times \mathfrak{X}^{\iota'}$, *on note* $\otimes_\omega(\iota, \iota')(X, X') = X \otimes_\omega X'$, *et on dit que* $\mathfrak{X}$ *est une* B-famille *de catégories.*

REMARQUE 2.2.2. Soit <u>*Cat*</u> la « catégorie des catégories » . Si B est un système binaire, une B-famille de catégories s'identifie de manière évidente a une préalgèbre de <u>*Cat*</u> de schéma $\Sigma(B)$. De la même manière on peut définir, pour toute catégorie à produits finis $\mathcal{C}$, la catégorie des B-familles de $\mathcal{C}$, comme catégorie <u>*Préalg*</u>$(\Sigma(B), \mathcal{C})$.

Le cadre de la première partie est insuffisant pour l'énoncé et la démonstration du théorème d'associativité que nous avons en vue. Pour tenir compte des morphismes d'association, il faut disposer des types d'algèbres à 2-dimensions (« algèbres-types » déjà introduites dans un texte provisoire). Celles-ci permettent de généraliser tout ce qui suit aux objets d'une 2- catégorie à produits finis stricts. Pour des raisons de simplicité nous avons préféré développer cette deuxième partie de manière autonome, en nous bornant à signaler au passage les rapports avec la théorie générale des structures algébriques sur les objets d'une 2- catégorie. Notons seulement que la théorie générale fournit immédiatement les définitions de morphismes et comorphismes de B- familles que nous n'utiliserons pas dans la suite de cette partie.

EXEMPLES 2. 2. 3. Les exemples que nous donnons ici sont essentiellement destinés à fixer la terminologie et illustrer les définitions ultérieures. Le lecteur trouvera de nombreux exemples plus concrets dans la note [1] .

(i) Si toutes les catégories $\mathcal{X}^\iota$ sont discrètes, la B- famille est dite *discrète*; elle s'identifie à une préalgèbre de schéma $\Sigma(B)$ dans *Ens*.

(ii) Si B est trivial, les B- familles, dites aussi triviales, s'identifient aux familles $\mathcal{X} = (\mathcal{X}^\iota)$ $(\iota \in I)$ de catégories.

(iii) Si B est le monoïde à un élément, une B- famille s'identifie à une catégorie $\mathcal{X}$ munie d'une « multiplication» $\otimes : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathcal{X}$.

(iv) Si $\Omega = \{*\}$ et $I = \{1, 2\}$ avec, pour table de multiplication, $1 * 1 = 1$, $1 * 2 = 2$ (les autres triples n'étant pas compatibles), une B- famille s'identifie à deux catégories $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$, munies de deux foncteurs :

$$\otimes : \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_1 \quad \text{et} \quad \otimes : \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2 \to \mathcal{C}_2$$

(catégorie $\mathcal{C}_1$ munie d'une multiplication, opérant à gauche sur $\mathcal{C}_2$).

(v) Pour tout ensemble $\mathcal{A}$ on définit une loi binaire sur $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ par : (A, B) et (B', C) composables si, et seulement si, $B = B'$ et $(A, B) \circ (B, C) = (A, C)$. On dit que $(\mathcal{A}^2, \circ)$ est *l'ensemble (binaire) des couples de* $\mathcal{A}$. Une $\mathcal{A}^2$- famille de catégories est définie par une famille $(\mathcal{C}(A, B))$ $((A, B) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A})$ de catégories munie, pour tout $(A, B, C) \in \mathcal{A}^3$, d'un foncteur $\mathcal{C}(A, B) \times \mathcal{C}(B, C) \to \mathcal{C}(A, C)$.

(vi) Toute 2- catégorie $\mathcal{C}$ définit une famille binaire $(Hom(A, B))$

ayant pour schéma l'ensemble des couples d'objets de $\mathcal{C}$.

(vii) Soit $\mathfrak{A}$ un ensemble d'anneaux (par exemple tous les anneaux d'un univers). Pour tout $(A, B) \in \mathfrak{A}^2$, soit $\underline{Mod}(A, B)$ la catégorie des (A, B)-bimodules. Les foncteurs

$$\otimes_B : \underline{Mod}(A, B) \times \underline{Mod}(B, C) \to \underline{Mod}(A, C)$$

déterminent sur $(\underline{Mod}(A, B))((A, B) \in \mathfrak{A}^2)$ une structure de $\mathfrak{A}^2$-famille notée $\underline{Mod}(\mathfrak{A}, \otimes)$.

(viii) Une *liaison* entre deux ensembles A et B est un couple $L = (\Lambda, d)$ formé d'un ensemble Λ et d'une application $d : \Lambda \to A \times B$. Tout élément $\lambda \in \Lambda$ est une flèche (de liaison) de direction $d\lambda = (a, b) \in A \times B$ de source $a = d_0 \lambda$ de but $b = d_1 \lambda$, notée $\lambda : a \to b \in L$. Si $L' = (\Lambda', d')$ est une autre liaison entre A et B, un morphisme de L dans L' est déterminé par une application $u : \Lambda \to \Lambda'$ telle que $d' \circ u = d$. D'où la catégorie $\underline{\mathfrak{L}}(A, B)$ des liaisons entre A et B.

Ces catégories sont munies d'accouplements canoniques

$$\mathfrak{L}(A, B) \times \mathfrak{L}(B, C) \to \mathfrak{L}(A, C), \qquad (L, M) \rightsquigarrow L \times_B M,$$

où $L \times_B M \in \mathfrak{L}(A, C)$ est défini par le diagramme ci-contre, dans lequel le carré supérieur est un produit fibré et l'application $\Lambda \times_B M \to A \times C$ est définie par $(p_0 d_0, p_1 d_1)$.

$$\begin{tikzcd}
 & & \Lambda \times_B M \arrow[dl, "p_0"'] \arrow[dr, "p_1"] & & \\
 & \Lambda \arrow[dl, "d_0"'] \arrow[dr, "d_1"] & & M \arrow[dl, "d_0"'] \arrow[dr, "d_1"] & \\
A & & B & & C
\end{tikzcd}$$

Si $\mathfrak{A}$ est un ensemble d'ensembles, les $\mathfrak{L}(A, B)$, $(A, B) \in \mathfrak{A}^2$, munies de ces accouplements définissent la $\mathfrak{A}^2$ - *famille des liaisons dans* $\mathfrak{A}$, notée $\mathfrak{L}(\mathfrak{A}, \times)$.

Il est clair que cet exemple peut être généralisé en remplaçant $\underline{Ens}$ par une catégorie à produits fibrés quelconque $\mathcal{C}$ et les $\mathfrak{L}(A, B)$ par $\mathcal{C}/A \times B$. En particulier on a besoin de cette construction avec $\mathcal{C} = \underline{Cat}$ pour l'étude des structures algébriques dans les 2 - catégories.

2.3. Sous-familles binaires. Soit $(\mathcal{X}, \otimes)$ une famille binaire de schéma $B = (\Omega, I, \alpha)$. Pour tout $\iota \in I$, soit $\mathcal{Y}^\iota$ une sous-catégorie de $\mathcal{X}^\iota$. La famille $\mathcal{Y} = (\mathcal{Y}^\iota)$ est $\otimes$-*stable* si, pour tout $(\omega, \iota, \iota') \in |\alpha|$ et tout couple de flèches $(f, f') \in \mathcal{Y}^{\iota} \times \mathcal{Y}^{\iota'}$, $f \otimes_{\omega} f' \in \mathcal{Y}^{\iota \omega \iota'}$ Munie des foncteurs structuraux induits, $\mathcal{Y}$ est dite *sous- B-famille* de $(\mathcal{X}, \otimes)$. Soit $\mathcal{Y}_{\alpha} = ((\mathcal{Y}^{\iota}_{\alpha})(\iota \in I))$ $(\alpha \in A)$ une famille de sous-B- familles de $(\mathcal{X}, \otimes)$ indexée par un ensemble A. Posons $\mathcal{Y}^{\iota} = \bigcap_{\alpha} \mathcal{Y}^{\iota}_{\alpha}$ et $\mathcal{Y} = (\mathcal{Y}^{\iota})$. Il est clair que $\mathcal{Y}$ est $\otimes$- stable, et définit donc une sous- B-famille de $(\mathcal{X}, \otimes)$ dite *intersection* des $\mathcal{Y}_{\alpha}$. Ceci permet, si on se donne pour tout $\iota \in I$ un ensemble Φ^{ι} de flèches de $\mathcal{X}^{\iota}$, de définir la *sous- B- famille engendrée par* $\Phi = (\Phi^{\iota})$, notée $\overline{\Phi} = (\overline{\Phi}^{\iota})$, comme intersection des sous- familles binaires qui « contiennent » Φ.

On peut donner de $\overline{\Phi}$ une définition « constructive » de la manière suivante : En adjoignant au besoin des objets *(identifiés pour simplifier à des unités)* on peut supposer que chaque Φ^{ι} contient, en même temps que toute flèche f, sa source et son but. On définit alors l'ensemble des *extensions* d'une flèche f de Φ^{ι} comme le plus petit sous- ensemble de $\bigcup_{\iota} Fl(\mathcal{X}^{\iota})$ qui contient f et qui vérifie la condition suivante : Si $f' \in Fl(\mathcal{X}^{\iota'})$ est une extension de f, pour tout (ω, ι'') tel que $(\omega, \iota', \iota'') \in |\alpha|$ (resp. $(\omega, \iota'', \iota') \in |\alpha|$) et pour tout objet $A'' \in Ob(\Phi^{\iota''})$, $f' \otimes_{\omega} A''$ (resp. $A'' \otimes_{\omega} f'$) est une extension de f. On a alors le :

LEMME 2. 3. 1. *Une flèche g de $\mathcal{X}^{\iota}$ appartient à $\overline{\Phi}^{\iota}$ si, et seulement si, on peut l'écrire sous la forme $g = g_1 \circ \dots \circ g_n$, où chaque $g_k \in \mathcal{X}^{\iota}$ est extension d'une flèche f_k d'un Φ^{ι_k}.*

La démonstration donnée par Mac- Lane [1, Th. 2. 1], dans le cas particulier *(2. 2. 3 (iii))* ci- dessus, s'étend avec des modifications évidentes au cas général.

Il résulte de *2. 2. 1* que les unités $\overline{\Phi}^{\iota}$ sont les extensions des unités des Φ^{ι}. En outre, si chaque Φ^{ι} est un ensemble d'objets (resp. de flèches inversibles), $\overline{\Phi}$ est une B- famille discrète (2. 1. 3 *(i)*) (resp. une famille de groupoïdes).

Si $\mathcal{Y}$ est une sous-famille binaire de $(\mathcal{X}, \otimes)$, pour tout $\iota \in I$ soit $\underline{Ob}(\mathcal{Y}^{\iota})$ la catégorie discrète des objets de $\mathcal{Y}^{\iota}$. La famille, $\otimes$- stable, $\underline{Ob}(\mathcal{Y}) = (\underline{Ob}(\mathcal{Y}^{\iota}))$ $(\iota \in I)$ est dite *B- famille des objets* (ou des unités) de $\mathcal{Y}$.

Une sous- B- famille $\mathcal{Y}$ de $(\mathcal{X}, \otimes)$ est *pleine* si, pour tout $\iota \in I$, $\mathcal{Y}^\iota$ est une sous- catégorie pleine de $\mathcal{X}^\iota$. Si $\mathcal{Y}$ est une sous- famille $\otimes$- stable quelconque, pour tout $\iota \in I$ notons $\mathcal{Z}^\iota$ la sous- catégorie pleine ayant mêmes objets que $\mathcal{Y}^\iota$. La famille $\mathcal{Z} = (\mathcal{Z}^\iota)$ est $\otimes$-stable et c'est la *sous- famille binaire pleine engendrée par* $\mathcal{Y}$. Si $\Phi = (\Phi^\iota)$, où les Φ^ι sont des ensembles de flèches arbitraires, la sous- famille $\otimes$- stable pleine engendrée par Φ est celle que l'on obtient à partir de $\overline{\Phi}$.

2.4. Foncteurs $\otimes$-itérés. Soit $(\mathcal{X}, \otimes)$ une B- famille. Rappelons (1ère partie 1. 1) que le prolongement de $(\mathcal{X}^\iota)$ au monoïde libre M engendré par I est la famille de catégories $(\mathcal{X}^\mu)$ $(\mu \in M)$ définie par

$$\mathcal{X}^{\iota_1 \dots \iota_n} = \mathcal{X}^{\iota_1} \times \dots \times \mathcal{X}^{\iota_n} \quad (\iota_1, \dots, \iota_n = \mu \in M).$$

Pour tout $\iota \in I$, notons $\underline{Fonct}^\iota(\mathcal{X})$ la catégorie $\coprod_{\mu \in M} Fonct(\mathcal{X}^\mu, \mathcal{X}^\iota)$. Pour tout $(\omega, \iota, \iota') \in |\alpha|$, on définit un foncteur

$$\otimes_\omega(\iota, \iota') = \otimes_\omega : \underline{Fonct}^\iota(\mathcal{X}) \times \underline{Fonct}^{\iota'}(\mathcal{X}) \to \underline{Fonct}^{\iota\omega\iota'}(\mathcal{X}),$$
$$(S, S') \rightsquigarrow S \otimes_\omega S'$$

de la manière suivante : Soient $\mu = \iota_1 \dots \iota_n$, $\mu' = \iota'_1 \dots \iota'_n$, des multi- indices, $S : \mathcal{X}^\mu \to \mathcal{X}^\iota$, $(A_1, \dots, A_n) \rightsquigarrow S(A_1, \dots, A_n)$ un objet de $\underline{Fonct}^\iota(\mathcal{X})$ et $S' : \mathcal{X}^{\mu'} \to \mathcal{X}^{\iota'}$, $(A'_1, \dots, A'_n) \rightsquigarrow S'(A'_1, \dots, A'_n)$ un objet de $\underline{Fonct}^{\iota'}(\mathcal{X})$. (On a, pour simplifier, identifié les catégories $\underline{Fonct}(\mathcal{X}^\mu, \mathcal{X}^\iota)$ à leurs images canoniques dans $\underline{Fonct}^\iota(\mathcal{X})$). On définit le foncteur $S \otimes_\omega S' : \mathcal{X}^{\mu\mu'} \to \mathcal{X}^{\iota\omega\iota'} \in Fonct^{\iota\omega\iota'}(\mathcal{X})$ par :

$$S \otimes_\omega S'(A_1, \dots, A_n, A'_1, \dots, A'_p) = S(A_1, \dots, A_n) \otimes_\omega S'(A'_1, \dots, A'_p)$$

(Si σ et σ' sont des transformations naturelles, $\sigma \otimes_\omega \sigma'$ se définit de manière analogue). La famille $\underline{Fonct}(\mathcal{X}) = (\underline{Fonct}^\iota(\mathcal{X}))$ $(\iota \in I)$, munie de la structure binaire ainsi définie, est dite B - *famille des foncteurs* de $(\mathcal{X}, \otimes)$ et notée $\underline{Fonct}(\mathcal{X}, \otimes)$.

Pour tout $\iota \in I$, soit $\Phi^\iota = \{ id(\mathcal{X}^\iota) \} \subset \underline{Fonct}^\iota(\mathcal{X})$. La famille $\Phi = (\Phi^\iota)$ engendre une sous- B- famille de $\underline{Fonct}(\mathcal{X})$, notée $\underline{It}(\otimes)$. La famille Φ étant formée d'objets de $\underline{Fonct}(\mathcal{X})$, il en est de même d'après 2. 2 de $\underline{It}(\otimes)$, qui est formée de foncteurs, extensions de foncteurs identiques. $\underline{It}(\otimes)$ est dite *B- famille des foncteurs $\otimes$- itérés.* De même la *B- famille pleine des $\otimes$- itérés* est la sous- famille binaire pleine de $\underline{Fonct}(\mathcal{X}, \otimes)$ engendrée par Φ; elle admet $\underline{It}(\otimes)$ comme B- famille des objets.

Pour l'étude de l'associativité, on a besoin de connaître non seulement les foncteurs $\otimes$-itérés, mais encore la « façon dont ils s'écrivent» . Supposons par exemple que, dans B, les deux composés

$$\iota\, \omega (\iota'\, \omega' \iota'') \quad \text{et} \quad (\iota\, \omega\, \iota')\, \omega'\, \iota''$$

soient définis et égaux. Notons ι_1 la valeur commune. Les foncteurs $\otimes$- itérés

$$(A, A', A'') \rightsquigarrow (A \otimes_\omega A') \otimes_{\omega'} A'' \quad \text{et} \quad (A, A', A'') \rightsquigarrow A \otimes_\omega (A' \otimes_{\omega'} A'')$$

de $\mathcal{H}^\iota \times \mathcal{X}^{\iota'} \times \mathcal{X}^{\iota''}$ dans $\mathcal{X}^{\iota_1}$ peuvent être égaux, bien qu'ils aient des écritures différentes.

Pour définir de façon précise la manière d'écrire un foncteur $\otimes$-itéré et étudier l'associativité des foncteurs $\otimes_\omega(\iota, \iota')$, nous aurons besoin de quelques résultats sur les systèmes binaires, que nous allons étudier.

3. SYSTEMES BINAIRES.

3. 1. Propriétés générales. Soient $B = (\Omega, I, \alpha)$ et $B' = (\Omega', I', \alpha')$ deux systèmes binaires. Un *bi- morphisme* $b: B \to B'$ est défini par deux applications $\varphi: I \to I'$ et $f: \Omega \to \Omega'$ vérifiant

3.1.1. $(\omega, \iota_1, \iota_2) \in |\alpha| \Longrightarrow (f(\omega), \varphi(\iota_1), \varphi(\iota_2)) \in |\alpha'|$

et $\varphi(\iota_1 \omega\, \iota_2) = \varphi(\iota_1) f(\omega) \varphi(\iota_2)$.

On définit alors de manière évidente les catégories et foncteurs suivants:

3. 1. 2. La catégorie $\underline{Syst}$ ayant pour objets les systèmes binaires et pour flèches les bi- morphismes.

3. 1. 3. La sous- catégorie pleine $\underline{Mag}(.)$ ayant pour objets les Ω-magmas, où Ω est un ensemble « variable» .

3. 1. 4. Le foncteur « ensemble des opérations »

$$P : \underline{Syst} \to \underline{Ens}, \qquad (\Omega, I, \alpha) \rightsquigarrow \Omega .$$

3. 1. 5. Pour tout ensemble Ω, la catégorie $\underline{Syst}(\Omega)$ des Ω- systèmes, un *morphisme de Ω- systèmes* $(\Omega, I, \alpha) \to (\Omega, I', \alpha')$ étant une application $\varphi : I \to I'$ telle que $(id(\Omega), \varphi)$ soit un bi- morphisme. On identifie $\underline{Syst}(\Omega)$ à la sous- catégorie (non pleine) de $\underline{Syst}$, « fibre » de $\underline{Syst}$ au- dessus de Ω, $P^{-1}(\Omega)$.

3. 1. 6. La sous- catégorie pleine $\underline{Mag}(\Omega)$ de $\underline{Syst}(\Omega)$ ayant pour objets les Ω- magmas.

3. 1. 7. Les différents *foncteurs d'oubli* $(\Omega, I, \alpha) \to I$, ayant pour sources les catégories $\underline{Syst}$, $\underline{Mag}(.)$, $\underline{Syst}(\Omega)$, $\underline{Mag}(\Omega)$ et pour but $\underline{Ens}$.

Notons pour référence les résultats suivants que l'on vérifie immédiatement à partir des définitions(*).

3. 1. 8. Les catégories $\underline{Syst}(\Omega)$ et $\underline{Mag}(\Omega)$ ont des limites projectives, et les foncteurs d'oubli $\underline{Syst}(\Omega) \to \underline{Ens}$ et $\underline{Mag}(\Omega) \to \underline{Ens}$ et d'inclusion $\underline{Mag}(\Omega) \subset \underline{Syst}(\Omega)$ sont compatibles avec ces limites.

3. 1. 9. Le foncteur $P : \underline{Syst} \to \underline{Ens}$ et sa restriction à $\underline{Mag}$ sont fibrants.

De façon précise, soient $f : \Omega' \to \Omega$ une application et $B = (\Omega, I, \alpha)$ un système binaire; l'image réciproque $f^*(B)$ « est » le Ω'- système $B' = (\Omega', I, \alpha \circ f)$. Si B est un Ω- magma, $f^*(B)$ est un Ω'- magma. Si $f' : \Omega'' \to \Omega'$ est une autre application, on a clairement $(f' \circ f)^* = f^* \circ f'^*$, et les foncteurs « image réciproque » sont transitifs. La définition de f^* montre en outre que :

3. 1. 10. Les foncteurs image réciproque $f^* : \underline{Syst}(\Omega') \to \underline{Syst}(\Omega)$ et $\underline{Mag}(\Omega') \to \underline{Mag}(\Omega)$ commutent avec les limites projectives et les foncteurs d'oubli.

(*) Compte tenu de la remarque 2. 1. 1 on peut déduire de la théorie générale de la première partie des résultats bien plus précis, mais nous n'en aurons pas besoin.

Soit $B = (I, \lambda)$ un ensemble binaire. Pour tout ensemble Ω, l'image réciproque de B par l'unique application $\Omega \to \lambda$ est le *Ω-système associé* à B. On le note $B(\Omega)$, ou même B, si Ω est fixé dans le contexte. Par exemple si $\mathbf{N}$ est l'ensemble des entiers, muni de l'addition, $\mathbf{N}(\Omega)$ est un Ω-magma ayant $\mathbf{N}$ comme ensemble sous-jacent, et noté $\mathbf{N}$ si Ω est fixé.

Un Ω-système gradué est un objet de $\underline{Syst}(\Omega)/_{\mathbf{N}(\Omega)}$. En explicitant, une *graduation* sur $B = (\Omega, I, \alpha)$ est une application $d^o : I \to \mathbf{N}$ telle que, pour tout $(\omega, \iota, \iota') \in |\alpha|$, $d^o(\iota\,\omega\iota') = d^o(\iota) + d^o(\iota')$. On note I_n l'ensemble des éléments de degré n de I. Les Ω-morphismes gradués et toutes les « Ω-notions (*) graduées» se définissent dans la catégorie $\underline{Syst}(\Omega)/_{\mathbf{N}(\Omega)}$, notée $\underline{Syst\text{-}grad}(\Omega)$. Par exemple le *$\Omega$-produit gradué* est d'après 3. 1.8 l'ensemble $\bigcup_{n \in \mathbf{N}} I_n \times I'_n$ dans lequel Ω agit « facteur par facteur» . On le note $B \times_{\mathbf{N}(\Omega)} B'$, ou $B \times_{\mathbf{N}} B'$ si Ω est fixé.

3. 1. 11. Les foncteurs d'oubli $\underline{Syst}(\Omega) \to \underline{Ens}$ et $\underline{Mag}(\Omega) \to \underline{Ens}$ ont des adjoints à gauche.

Le premier est sans intérêt : le Ω-système libre engendré par un ensemble I est I lui-même dans lequel Ω agit trivialement au sens de 2.2.1 (la « bonne notion» de système libre sera donnée dans 3.7). L'existence du second est assurée par les théorèmes généraux, mais nous en donnerons dans 3. 3 et 3.6 une description précise dont nous aurons besoin par la suite.

3.2 Associativité et unités. Un système binaire $B = (\Omega, I, \alpha)$ est *associatif à gauche* si, chaque fois que $(\iota\,\omega\iota')\omega'\iota''$ est défini, $\iota\,\omega(\iota'\omega'\iota'')$ l'est aussi et on a : $(\iota\,\omega\iota')\omega'\iota'' = \iota\,\omega(\iota'\omega'\iota'')$. L'associativité à droite se définit en échangeant les rôles des deux membres, et B est *associatif* s'il est associatif à droite et à gauche. Si B est un Ω-magma les trois notions coïncident.

(*) Le foncteur d'inclusion $\underline{Syst}(\Omega) \subset \underline{Syst}$ ne commute pas avec les $\underleftarrow{lim}$, il convient donc de distinguer les « Ω-notions» (dans $\underline{Syst}(\Omega)$) des « notions absolues» (dans $\underline{Syst}$).

Une *unité à gauche* (resp. à droite) de B est un élément $\varepsilon \in I$ tel que, si $(\omega, \varepsilon, \iota) \in |\alpha|$ (resp. $(\omega, \iota, \varepsilon) \in |\alpha|$), $\varepsilon\omega\iota = \iota$ (resp. $\iota\omega\varepsilon = \iota$). Une unité à droite et à gauche est une *unité* de B. Si B est un Ω-magma, il a au plus une unité. (On dit alors que B est *unitaire*).

Un Ω-magma associatif à unité est dit Ω-oïde. Si Ω a un seul élément on « retrouve » les monoïdes.

3.3. Ω-magmas libres. Soient Ω et I deux ensembles. Notons $L = L(\Omega \amalg I)$ le monoïde libre engendré par $\Omega \amalg I$. On identifie Ω et I à leurs images canoniques dans L et, si l est un *mot* de L, on note $\lambda(l)$ sa longueur. On définit le sous-ensemble $\tilde{A}^*$ des expressions significatives comme le plus petit sous-ensemble de L contenant I et vérifiant :

$$(\omega, \tilde{a}_1, \tilde{a}_2) \in \Omega \times \tilde{A}^* \times \tilde{A}^* \Longrightarrow \omega\tilde{a}_1\tilde{a}_2 \in \tilde{A}^*.$$

On fait agir Ω sur $\tilde{A}^*$ en associant à tout $\omega \in \Omega$ la loi binaire, notée $\oplus_\omega$, sur $\tilde{A}^*$ définie par $\tilde{a}_1 \oplus_\omega \tilde{a}_2 = \omega\tilde{a}_1\tilde{a}_2$, et on note $\tilde{A}^*(\Omega, I)$ le Ω-magma ainsi déterminé. Il résulte de Bourbaki [1] que tout $\tilde{a}$ de longueur $\lambda(a) > 1$ s'écrit de manière unique sous la forme :

$$(3.3.1) \qquad \tilde{a} = \tilde{a}_1 \oplus_\omega \tilde{a}_2 \quad (\omega \in \Omega,\ \tilde{a}_k \in \tilde{A}^*,\ \lambda(a_k) < \lambda(\tilde{a}),\ k = 1, 2).$$

Soient (Ω', I', α') un Ω'-magma, $\varphi : I \to I'$ et $f : \Omega \to \Omega'$ deux applications. Par récurrence sur la longueur, on voit, en utilisant *(3.3.1)*, que φ se prolonge de manière unique en une application $\tilde{\varphi}^*_f : \tilde{A}^* \to I'$ telle que :

$$\tilde{\varphi}^*_f(\tilde{a}_1 \oplus_\omega \tilde{a}_2) = \tilde{\varphi}^*_f(\tilde{a}_1)(f(\omega))\tilde{\varphi}^*_f(\tilde{a}_2), \qquad (\omega, \tilde{a}_1, \tilde{a}_2) \in \Omega \times \tilde{A}^* \times \tilde{A}^*,$$

c'est-à-dire telle que (f, φ^*_f) est un bi-morphisme. En particulier si $\Omega' = \Omega$ et $f = id(\Omega)$, on a un prolongement unique $\varphi^* = \tilde{\varphi}^*_{id} : \tilde{A}^* \to I'$ qui est un morphisme. C'est-à-dire que $\tilde{A}^*(\Omega, I)$ est « le » Ω-magma libre engendré par I; d'où le foncteur

$$\Omega\text{-}\textit{magma libre}\ \tilde{A}^*(\Omega, .) : \underline{Ens} \to \underline{Mag(\Omega)}, \qquad I \rightsquigarrow \tilde{A}^*(\Omega, I),$$

adjoint à gauche du foncteur d'oubli.

Si $\mathbf{N}(\Omega)$ est le Ω-magma associé à $(\mathbf{N}, +)$, l'application constante de valeur 1 de I dans $\mathbf{N}$ se prolonge en un morphisme noté

$$d^{o} : \tilde{A}^{*}(\Omega, I) \to \mathbf{N}(\Omega),$$

dit *graduation canonique* de $\tilde{A}^{*}(\Omega, I)$. La longueur et le degré sont reliés par :

$$\lambda(\tilde{a}) = 2 \times d^{o}(\tilde{a}) - 1 \quad (\tilde{a} \in \tilde{A}^{*}).$$

En adjoignant à $\tilde{A}^{*}$ le mot vide, noté $\tilde{0}$, et en prolongeant les opérations de Ω par

$$\tilde{0} \oplus_{\omega} \tilde{a} = \tilde{a} = \tilde{a} \oplus_{\omega} \tilde{0}, \quad (\omega, \tilde{a}) \in \Omega \times (\tilde{A}^{*} \cup \{0\}),$$

on obtient le *Ω-magma unitaire libre* $\tilde{A}(\Omega, I)$. On prolonge de même la graduation par $d^{o}(\tilde{0}) = 0$.

3.4. Entiers non associatifs. La magma unitaire libre à un générateur $\tilde{A}(\Omega, I)$, où $I = \{\emptyset\}$ et $\Omega = \{ \quad \}$, est dit magma des *entiers non associatifs* et noté $\tilde{\mathbf{N}}$. On note $(\tilde{p}, \tilde{q}) \rightsquigarrow \tilde{p} + \tilde{q}$ sa loi de composition, $\tilde{0}$ son élément neutre et $\tilde{1}$ son générateur. D'après 3. 3, tout élément $\tilde{n} \in \tilde{\mathbf{N}} - \{\tilde{0}\}$ est une suite finie de signes $\emptyset$, entre lesquels on a « ouvert des parenthèses » de manière équilibrée. On sait qu'il y a alors une manière unique de les fermer « correctement », c'est-à-dire que $\tilde{\mathbf{N}}^{*} = \tilde{\mathbf{N}} - \{\tilde{0}\}$ « est » l'ensemble des façons de mettre des parenthèses pour une loi binaire. Pour tout $\tilde{n} \in \tilde{\mathbf{N}}$, le degré $n = d^{o}(\tilde{n})$ de $\tilde{n}$ est le nombre de signes $\emptyset$ qui figurent dans l'écriture de $\tilde{n}$, on a donc :

$$d^{o}(\tilde{p} + \tilde{q}) = d^{o}(\tilde{p}) + d^{o}(\tilde{q}).$$

Dans le contexte non associatif, $\tilde{\mathbf{N}}$ et $\tilde{\mathbf{N}}^{*}$ jouent le même rôle et s'utilisent de la même manière que $\mathbf{N}$ et $\mathbf{N}^{*} = \mathbf{N} - \{0\}$ dans le cas associatif. Donnons sans démonstration, et de manière « informelle », quelques exemples de ces analogies.

3. 4. 1. RECURRENCE NON ASSOCIATIVE. Pour montrer qu'une propriété $P(\tilde{n})$ est vraie pour tout $\tilde{n} \in \tilde{\mathbf{N}}$, il suffit de vérifier $P(\tilde{0})$ et de montrer que, si $P(\tilde{m})$ est vraie pour tout $\tilde{p}$ tel que $d^{o}(\tilde{p}) < d^{o}(\tilde{q})$, alors $P(\tilde{q})$ est vraie, ce qui résulte de

$$P(\tilde{1}) \text{ et } (P(\tilde{k}) \text{ et } P(\tilde{1})) \Longrightarrow P(\tilde{k}+\tilde{1}).$$

On peut ainsi raisonner « par récurrence » sur $\tilde{n} \in \tilde{\mathbf{N}}$.

3. 4. 2 MULTIPLICATION. Pour tout $\tilde{n} \in \tilde{\mathbf{N}}$, l'application $\tilde{1} \rightsquigarrow \tilde{n}$ de $\{1\}$ dans $\tilde{\mathbf{N}}$ se prolonge de manière unique, d'après la propriété universelle de $\tilde{\mathbf{N}}$, en un morphisme de magmas unitaires $\tilde{\mathbf{N}} \to \tilde{\mathbf{N}}$ noté $\tilde{p} \rightsquigarrow \tilde{n}\tilde{p}$. L'application $(\tilde{n}, \tilde{p}) \rightsquigarrow \tilde{n}\tilde{p}$, dite multiplication dans $\tilde{\mathbf{N}}$, vérifie :

$$\tilde{n}(\tilde{p}+\tilde{q}) = \tilde{n}\tilde{p} + \tilde{n}\tilde{q}, \qquad \tilde{p}\,\tilde{1} = \tilde{p} = \tilde{1}\tilde{p}, \qquad \tilde{0}\tilde{p} = \tilde{0} = \tilde{p}\tilde{0},$$

$$d^o(\tilde{p}\tilde{q}) = d^o(\tilde{p})d^o(\tilde{q}).$$

3. 4. 3. EXPONENTIELLE. Si l'on considère $\tilde{\mathbf{N}}$ comme magma unitaire pour la multiplication, l'application $\tilde{1} \rightsquigarrow \tilde{n}$ de $\{1\}$ dans $\tilde{\mathbf{N}}$ se prolonge en un morphisme de magmas unitaires $(\tilde{\mathbf{N}}, +) \to (\tilde{\mathbf{N}}, \times)$, noté $\tilde{p} \rightsquigarrow \tilde{n}^{\tilde{p}}$, vérifiant :

$$\tilde{n}^{(\tilde{p}+\tilde{q})} = \tilde{n}^{\tilde{p}} \times \tilde{n}^{\tilde{q}}, \qquad \tilde{1}^{\tilde{p}} = \tilde{1}, \qquad \tilde{n}^{\tilde{1}} = \tilde{n}, \qquad \tilde{0}^{\tilde{n}} = \tilde{0} \text{ si } \tilde{n} \neq \tilde{0}, \qquad \tilde{0}^{\tilde{o}} = \tilde{1},$$

$$(\tilde{n}^{\tilde{p}})^{\tilde{q}} = \tilde{n}^{\tilde{p}\tilde{q}} \text{ et } d^o(\tilde{n}^{\tilde{p}}) = n^p, \quad \text{où } n = d^o(\tilde{n}) \text{ et } p = d^o(\tilde{p}).$$

De manière condensée, la multiplication $(\tilde{n}, \tilde{p}) \rightsquigarrow \tilde{n}\tilde{p}$ et l'exponentielle $(\tilde{n}, \tilde{p}) \rightsquigarrow \tilde{n}^{\tilde{p}}$ « se comportent bien » comme fonctions de la seconde variable, ou si la première variable est $\tilde{0}$ ou $\tilde{1}$. Notons que $\tilde{\mathbf{N}}$ pour la loi de composition $(\tilde{n}, \tilde{p}) \rightsquigarrow \tilde{n}^{\tilde{p}}$ n'est plus unitaire, mais que $\tilde{\mathbf{N}}^*$ est stable pour cette loi. Cela permet d'itérer sur $\tilde{\mathbf{N}}^*$ l'opération d'exponentiation (cela est impossible sur $\mathbf{N}$ ou $\mathbf{N}^*$, car $(n, p) \rightsquigarrow n^p$ n'est pas associative). Le lecteur explicitera les propriétés formelles des exponentielles itérées en ce sens.

3. 4. 4. $\tilde{n}$-UPLES. Soit X un ensemble; par « récurrence non associative », on définit pour tout $\tilde{n} \in \tilde{\mathbf{N}}$ un ensemble $X^{\tilde{n}}$ par :

$$X^{\tilde{o}} = \{0\}, \qquad X^{\tilde{1}} = X, \qquad X^{\tilde{p}+\tilde{q}} = X^{\tilde{p}} \times X^{\tilde{q}}.$$

Si $n = d^o(\tilde{n})$, un élément de $X^{\tilde{n}}$, dit $\tilde{n}$-uple, est un n-uple $(x_1, \ldots, x_n)$ $(x_i \in X)$, entre lequel on a intercalé « les parenthèses de $\tilde{n}$ ». En les supprimant on a une bijection canonique $X^{\tilde{n}} \xrightarrow{\sim} X^n$. (En réalité la notion de

$\tilde{n}$-uple en théorie des ensembles est « antérieure », et plus simple que celle de n-uple).

3. 4. 5. MONOIDES ET MAGMAS LIBRES. Soit $M(X)$ (resp. $\tilde{M}(X)$) le monoïde (resp. le magma unitaire) libre engendré par X ; on a des bijections canoniques :

$$M(X) \simeq \coprod_{n \in \mathbf{N}} X^n \qquad\qquad \tilde{M}(X) = \coprod_{\tilde{n} \in \tilde{\mathbf{N}}} X^{\tilde{n}}$$

La première est bien connue; dans 3.6.7 on aura une description complète de la seconde, comme isomorphisme de magmas unitaires gradués.

3. 4. 6. ALGEBRES. Soit X un module sur un anneau commutatif et unitaire Λ. On définit $\overset{\tilde{n}}{\otimes} X$ par :

$$\overset{\tilde{0}}{\otimes} X = \Lambda, \qquad \overset{\tilde{1}}{\otimes} X = X, \qquad \overset{\tilde{p}+\tilde{q}}{\otimes} X = (\overset{\tilde{p}}{\otimes} X) \otimes (\overset{\tilde{q}}{\otimes} X).$$

L'algèbre tensorielle $T(X)$ et l'algèbre libre $\tilde{T}(X)$ engendrées par X s'identifient respectivement à

$$T(X) = \bigoplus_{n \in \mathbf{N}} (\overset{n}{\otimes} X), \qquad\qquad \tilde{T}(X) = \bigoplus_{\tilde{n} \in \tilde{\mathbf{N}}} (\overset{\tilde{n}}{\otimes} X).$$

3. 4. 7. Plus généralement, soit $\mathcal{C}$ une catégorie, $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ un foncteur et X un objet de $\mathcal{C}$. On définit comme ci-dessus $\overset{\tilde{n}}{\otimes} X$ pour $\tilde{n} \in \tilde{\mathbf{N}}$. Si $\mathcal{C}$ admet des sommes directes dénombrables, et si $\otimes$ commute avec les sommes directes (par exemple s'il est un adjoint), le magma libre de $(\mathcal{C}, \otimes)$ engendré par X est

$$\tilde{M}^*(X) = \coprod_{\tilde{n} \in \tilde{\mathbf{N}}} (\overset{\tilde{n}}{\otimes} X).$$

Pour définir le monoïde libre engendré par X, on a besoin de propriétés supplémentaires de $(\mathcal{C}, \otimes)$ (du genre : catégorie multiplicative (Bénabou [1])). On peut dire en ce sens que la définition de $\overset{\tilde{n}}{\otimes} X$ est plus élémentaire que celle de $\overset{n}{\otimes} X$ (cf. 3. 4. 4).

3. 4. 8. DESCRIPTION DE $\tilde{\mathbf{N}}$. Soit $\tilde{n} \in \tilde{\mathbf{N}}^*$ un élément de degré $n > 0$. Notons ν_1 le nombre de signes (situés avant le premier signe $\emptyset$, et ν_k le nombre de (situés entre le $(k-1)$-ième et le k-ième $\emptyset$. Il résulte de

Bourbaki [1] que l'application $\tilde{n} \rightsquigarrow (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ est une bijection de $\tilde{\mathbf{N}}^*$ sur l'ensemble des suites finies d'entiers ≥ 0, de longueur $n > 0$, telles que, pour tout $k = 1, \ldots, n-1$, on ait :

$$k \leq \nu_1 + \ldots + \nu_k \leq n-1 \quad \text{et} \quad \nu_1 + \ldots + \nu_n = n-1.$$

Par transport de structure, l'addition sur $\tilde{\mathbf{N}}^*$ devient :

$$(\nu_1, \ldots, \nu_n) + (\nu'_1, \ldots, \nu'_{n'}) = (\nu_1 + 1, \nu_2, \ldots, \nu_n, \nu'_1, \ldots, \nu'_{n'})$$

et le générateur $\tilde{1}$ devient la suite (0). On prolonge cette bijection à $\tilde{\mathbf{N}}$ en associant à $\tilde{0}$ la suite vide. La multiplication se traduit par :

$$(\mu_1, \ldots, \mu_m) \times (\nu_1, \ldots, \nu_n) =$$
$$= (\mu_1 + \nu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m, \mu_1 + \nu_2, \mu_2, \ldots, \mu_m, \ldots, \mu_1 + \nu_n, \mu_2, \ldots, \mu_m).$$

Nous laisserons au lecteur le soin d'expliciter l'exponentielle.

En associant à toute suite $(\nu_1, \ldots, \nu_n)$ la suite $(s_1, \ldots, s_n)$ définie par $s_k = \nu_1 + \ldots + \nu_k$ $(k = 1, \ldots, n)$, on obtient une autre description de $\tilde{\mathbf{N}}$ plus commode dans certains calculs non associatifs. L'application $\tilde{n} \rightsquigarrow (s_1, \ldots, s_n)$ est une bijection de $\tilde{\mathbf{N}}$ sur l'ensemble des suites croissantes d'entiers ≥ 0, telles que $s_n = n-1$ et $k \leq s_k \leq n-1$ pour $k = 1, \ldots, n-1$. L'addition se traduit alors par :

$$(s_1, \ldots, s_n) + (s'_1, \ldots, s'_{n'}) = (s_1 + 1, s_2 + 1, \ldots, s_n + 1, s'_1 + n, \ldots, s'_{n'} + n).$$

3.4.9. *DISTANCE ET RANG.* Si $\tilde{n} = (s_1, \ldots, s_n)$ et $\tilde{n}' = (s'_1, \ldots, s'_n)$ sont deux entiers non associatifs de même degré n, on appelle *distance* de $\tilde{n}$ à $\tilde{n}'$ l'entier (ordinaire!)

$$\delta_n(\tilde{n}, \tilde{n}') = \sum_{k=1}^{n} | s_k - s'_k | .$$

Pour chaque $n \in \mathbf{N}$, δ_n satisfait les axiomes d'une distance sur l'ensemble $\tilde{\mathbf{N}}_n$ des $\tilde{n}$ de degré n; en outre la famille des δ_n $(n \in \mathbf{N})$ est invariante par translations, c'est-à-dire que, pour tout $\tilde{n}$, $\tilde{n}' \in \tilde{\mathbf{N}}_n$ et $\tilde{p} \in \tilde{\mathbf{N}}_p$, on vérifie que :

$$\delta_{n+p}(\tilde{n} + \tilde{p}, \tilde{n}' + \tilde{p}) = \delta_n(\tilde{n}, \tilde{n}') = \delta_{n+p}(\tilde{p} + \tilde{n}, \tilde{p} + \tilde{n}').$$

On allègera l'écriture en notant $\delta(\tilde{n}, \tilde{n}')$ au lieu de $\delta_n(\tilde{n}, \tilde{n}')$.

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\tilde{\mathbf{N}}_n$ a un élément distingué, noté $\tilde{e}_n$, défini par la suite

$$(s_1, \ldots, s_n) = (1, 2, \ldots, n-1, n-1);$$

$\tilde{e}_n$ est « le mot » $(\emptyset(\emptyset \ldots (\emptyset\ \emptyset) \ldots))$. Le *rang* $\rho(\tilde{n})$ de $\tilde{n} \in \tilde{\mathbf{N}}_n$ est défini par $\rho(\tilde{n}) = \delta(\tilde{n}, \tilde{e}_n)$. Un calcul immédiat montre que

$$\rho(\tilde{n} + \tilde{p}) = \rho(\tilde{n}) + \rho(\tilde{p}) + n - 1, \qquad \tilde{n} \in \tilde{\mathbf{N}}_n, \ \tilde{p} \in \tilde{\mathbf{N}}_p,$$

d'où il résulte que, si $\tilde{n} \neq \tilde{0}$, on a :

$$\rho((\tilde{n} + \tilde{p}) + \tilde{q}) > \rho(\tilde{n} + (\tilde{p} + \tilde{q})).$$

3.5. Ω-magma associatif libre à un générateur. Soient Ω un ensemble, A^* le monoïde libre engendré par Ω et $\lambda: A^* \to \mathbf{N}$ l'application longueur. On fait agir Ω sur A^* de la façon suivante :

3.5.1. Pour tout $\omega \in \Omega$, $\alpha(\omega)$ est la loi binaire sur A^* qui, à tout couple (a_1, a_2) de mots de A^*, associe le mot $a_1 \omega a_2$. On note $A^*(\Omega, 1)$ le Ω-magma ainsi défini. Il est clair que $A^*(\Omega, 1)$ est associatif. Soit $B = (\Omega, I, \alpha)$ un Ω-magma associatif et ι_o un élément de I. Par récurrence sur la longueur, on définit une application $\varphi^*_{\iota_o}: A^* \to I$ par :

$$\varphi^*_{\iota_o}(\emptyset) = \iota_o, \qquad \varphi^*_{\iota_o}(\omega_1, \ldots, \omega_n \omega_{n+1}) = \alpha(\omega_{n+1})(\varphi^*_{\iota_o}(\omega_1, \ldots, \omega_n), \iota_o).$$

Par récurrence sur la longueur de a_2, on vérifie en utilisant l'associativité de B que, pour tout $(\omega, a_1, a_2) \in \Omega \times A^* \times A^*$, on a

$$\varphi^*_{\iota_o}(a_1 \omega a_2) = \alpha(\omega)(\varphi^*_{\iota_o}(a_1), \varphi^*_{\iota_o}(a_2)),$$

c'est-à-dire que φ_{ι_o} est un morphisme de Ω-magmas $A^*(\Omega, 1) \to B$.

D'autre part il est clair que deux morphismes de $A^*(\Omega, 1)$ dans un Ω-magma qui coïncident sur $\emptyset$ sont égaux, c'est-à-dire que $A^*(\Omega, 1)$ est le Ω-magma associatif libre à un générateur.

Le Ω-magma $\mathbf{N}(\Omega)$ associé à $(\mathbf{N}, +)$ est évidemment associatif; au nombre $1 \in \mathbf{N}$ correspond un morphisme φ^*_1 dit *graduation canonique*, et noté $d^o : A^*(\Omega, 1) \to \mathbf{N}(\Omega)$. La longueur et le degré sont reliés par $d^o(a) = \lambda(a) + 1$, $(a \in A^*)$. En particulier le mot vide, générateur de $A^*(\Omega, 1)$, est de degré 1.

En adjoignant à A^* un élément neutre, noté 0, de degré 0, on obtient le *Ω-oïde libre à un générateur*, noté $A(\Omega, 1)$, muni lui aussi d'une graduation canonique.

3.5.2 Dans la suite nous utiliserons systématiquement les conventions suivantes :

$A(?)$ pour « associatif et unitaire » ,

$\tilde{A}(?)$ pour « non associatif unitaire » ,

$A^*(?)$ pour « associatif non unitaire » ,

$\tilde{A}^*(?)$ pour « non associatif non unitaire » .

3.6. Structure des Ω-magmas libres. Soient Ω et I deux ensembles. Si $\tilde{\mathbf{N}}^*(\Omega)$ est le Ω-magma gradué associé à $\tilde{\mathbf{N}}^*$, l'application constante, de valeur 1, de I dans $\tilde{\mathbf{N}}^*$ se prolonge de manière unique en un morphisme de Ω-magmas

$$(3.6.1) \qquad \tilde{p}(.) : \tilde{A}^*(\Omega, I) \to \tilde{\mathbf{N}}^*(\Omega), \quad \tilde{a} \rightsquigarrow \tilde{p}(\tilde{a}).$$

Les morphismes $\tilde{a} \rightsquigarrow d^o(\tilde{a})$ et $\tilde{a} \rightsquigarrow d^o(\tilde{p}(\tilde{a}))$ de $\tilde{A}^*(\Omega, I)$ dans $\mathbf{N}(\Omega)$ coïncident sur I avec l'application constante de valeur 1, donc sont égaux, et $\tilde{p}(.)$ est un morphisme gradué de Ω-magmas.

De même l'application constante de I dans $A^*(\Omega, 1)$, de valeur le mot vide, se prolonge en un morphisme gradué

$$(3.6.2) \qquad c(.) : \tilde{A}^*(\Omega, I) \to A^*(\Omega, 1), \quad \tilde{a} \rightsquigarrow c(a).$$

Enfin, si $M(I)$ est le monoïde libre engendré par I, $M^*(I) = M(I) - \{\emptyset\}$, et $M^*(I)(\Omega)$ est le Ω-magma associé, gradué par la longueur; l'injection canonique de I dans l'ensemble $M^*(I)$ sous-jacent à $M^*(I)(\Omega)$ se prolonge en un morphisme gradué

$$(3.6.3) \qquad \mu(.) : \tilde{A}^*(\Omega, I) \to M^*(I)(\Omega), \quad \tilde{a} \rightsquigarrow \mu(\tilde{a}).$$

Cn dit que $\tilde{p}(\tilde{a})$ est le *parenthésage* de $\tilde{a}$, $c(\tilde{a})$ son *composant associatif* et $\mu(\tilde{a})$ son *multi-indice.*

Par exemple si $\tilde{a} = ((\iota_1, \oplus_{\omega_1} (\iota_2 \oplus_{\omega_2} \iota_3)) \oplus_{\omega_3} \iota_4)$ on a :

$\mu(\tilde{a}) = \iota_1 \iota_2 \iota_3 \iota_4$, $\quad c(\tilde{a}) = \omega_1 \omega_2 \omega_3$, $\quad \tilde{p}(\tilde{a}) = ((\emptyset(\emptyset\ \emptyset\ \emptyset$ $\quad d^o(\tilde{a}) = 4$.

Notons que $\tilde{p}(\tilde{a})$ s'identifie canoniquement à $((\emptyset(\emptyset\ \emptyset))\emptyset)$ ou encore, d'après 3.4.8, à la suite $(2, 1, 0, 0)$.

Le triple $\pi(\tilde{a})$, dit *présentation canonique de* $\tilde{a}$, est un élément du produit gradué $\Pi^*(\Omega, I) = \Pi^*$ de $\tilde{\mathbf{N}}^*(\Omega)$, $A^*(\Omega, I)$, $M^*(I)(\Omega)$, qui se décrit en revenant aux définitions de la façon suivante :

(i) Ses éléments sont les triples $\pi = (\tilde{n}, \omega_1, \ldots, \omega_{n-1}, \iota_1, \ldots, \iota_n)$, où $d^o(\tilde{n}) = n$.

(ii) L'action de Ω sur l'ensemble de ces triples est donnée par :

$$(\tilde{n}, \omega_1 \ldots \omega_{n-1}, \iota_1 \ldots \iota_n) \oplus_\omega (\tilde{n}', \omega'_1 \ldots \omega'_{n'-1}, \iota'_1 \ldots \iota'_{n'}) =$$
$$= (\tilde{n} + \tilde{n}', \omega_1 \ldots \omega_{n-1} \omega \omega'_1 \ldots \omega'_{n'-1}, \iota_1 \ldots \iota_n \iota'_1 \ldots \iota'_{n'}) .$$

THEOREME 3.6.4. *La présentation canonique est un isomorphisme de Ω-magmas gradués, fonctoriel en Ω et I,*

$$\pi(\,.\,) : \tilde{A}^*(\Omega, I) \tilde{\to} \Pi^*(\Omega, I).$$

Montrons d'abord que tout $\pi \in \Pi^*$, de degré > 1, s'écrit de manière unique $\pi = \pi' \oplus_\omega \pi''$. Si $\pi = (\tilde{n}, \omega_1 \ldots \omega_{n-1}, \iota_1 \ldots \iota_n)$, avec $d^o(\pi) = d^o(\tilde{n}) > 1$, on peut écrire

$$\tilde{n} = \tilde{p} + \tilde{q}, \qquad d^o(\tilde{p}) = p, \qquad d^o(\tilde{q}) = q, \qquad p, q \geq 1, \qquad p + q = n .$$

Si

$$\pi' = (\tilde{p}, \omega_1 \ldots \omega_{p-1}, \iota_1 \ldots \iota_p), \quad \pi'' = (\tilde{q}, \omega_{p+1} \ldots \omega_{n-1}, \iota_{p+1} \ldots \iota_n)$$

et $\omega = \omega_p$,

on a $\pi = \pi' \oplus_\omega \pi''$. L'unicité de cette écriture résulte de l'unicité de $\tilde{p}$ et $\tilde{q}$ (cf. 3.3.1), donc aussi de p et q et du «découpage» des mots $\omega_1 \ldots \omega_{n-1}$ et $\iota_1 \ldots \iota_n$.

L'existence de cette écriture montre que Π^* est engendré par ses éléments de degré 1, lesquels sont de la forme

$$(\tilde{1}, \emptyset, \iota) = \pi(\iota) \quad (\iota \in I \subset \tilde{A}^*(\Omega, I));$$

donc $\pi(.)$ est surjective. Par récurrence sur le degré de $\tilde{a} \in \tilde{A}^*$ on montre, en utilisant l'unicité de la décomposition de $\pi \in \Pi^*$, que $\pi(.)$ est injective. La fonctorialité est évidente. ∎

Les produits gradués deux à deux des trois Ω-magmas qui « constituent» Π^* ont tous des interprétations naturelles que nous allons expliciter de manière « informelle» , car nous n'utiliserons pas ces résultats. Notons $A^*(\Omega, I) = A^*(\Omega, 1) \times_{\mathbf{N}} M^*(I)$; on a :

3. 6. 5. $A^*(\Omega, I)$ est le Ω-magma associatif libre engendré par I.

3. 6. 6. $\tilde{\mathbf{N}}^* \times_{\mathbf{N}} A^*(\Omega, 1) \simeq \tilde{A}^*(\Omega, 1)$ (Ω- magma libre à 1 générateur).

3. 6. 7. $\tilde{\mathbf{N}}^* \times_{\mathbf{N}} M^*(I) \simeq \tilde{A}^*(1, I)$ (magma libre engendré par I).

Si l'on remarque que $M^*(I)$ n'est autre que $A^*(1, I)$, et que $\tilde{\mathbf{N}}^* = \tilde{A}^*(1, 1)$, les isomorphismes gradués 3.6.4 à 3. 6.7 prennentla forme :

$(3.6.4)'$ $\tilde{A}^*(\Omega, I) \simeq \tilde{A}^*(1, 1) \times_{\mathbf{N}} A^*(\Omega, 1) \times_{\mathbf{N}} A^*(1, I)$,

$(3.6.5)'$ $A^*(\Omega, I) \simeq A^*(\Omega, 1) \times_{\mathbf{N}} A^*(1, I)$,

$(3.6.6)'$ $\tilde{A}^*(\Omega, 1) \simeq \tilde{A}^*(1, 1) \times_{\mathbf{N}} A^*(\Omega, 1)$,

$(3.6.7)'$ $\tilde{A}^*(1, I) \simeq \tilde{A}^*(1, 1) \times_{\mathbf{N}} A^*(1, I)$.

Tous ces isomorphismes subsistent si on enlève partout le signe $*$, c'est-à-dire si l'on considère les Ω-magmas unitaires libres. En outre l'associativité et la commutativité des produits gradués se traduisent par des commutations entre foncteurs adjoints que nous laissons au lecteurle soin d'expliciter.

Notons pour terminer que tous ces résultats sont des conséquences immédiates des propriétés de l'adjonction d'opérations et de constantes à un type telle qu'elle a été définie dans la 1ère partie (3. 1. 2).

3.7. Ω-systèmes libres. Soit $B = (\Omega, I, \alpha)$ un système binaire. Si $(\omega, \iota, \iota') \in |\alpha|$ on note (*) $\alpha(\omega)(\iota, \iota') = \iota +_\omega \iota'$. Si $\tilde{A}^* = \tilde{A}^*(\Omega, I)$

(*) La notation $\alpha(\omega)(\iota, \iota') = \iota\omega\iota'$ est ici ambigüe. (Si X est un monoïde et $L(X)$ le monoïde libre engendré par l'ensemble sous-jacent à X, il est «impossible» de noter $(x, y) \rightsquigarrow xy$ la loi de composition dans X si l'on veut étudier l'homomorphisme canonique $L(X) \to X$).

est le Ω- magma libre engendré par I, on définit, par récurrence sur le degré, un sous-ensemble $X = X(B)$ de A^* et une application $r : X \to I$ de la façon suivante :

(i) Tout $\iota \in I = \tilde{A}^*_1$ appartient à X et $r(\iota) = \iota$.

(ii) Un élément $\tilde{a} \in \tilde{A}^*_n$, de degré $n > 1$, appartient à X si, dans sa décomposition unique $\tilde{a} = \tilde{a}_1 \oplus_\omega \tilde{a}_2$, $\tilde{a}_1$ et $\tilde{a}_2$ appartiennent à X et si, en outre, $(\omega, r(\tilde{a}_1), r(\tilde{a}_2)) \in |\alpha|$. On pose alors $r(\tilde{a}) = r(\tilde{a}_1) +_\omega r(\tilde{a}_2)$.

Les lois $\oplus_\omega$ $(\omega \in \Omega)$ de A^* induisent sur X des lois binaires partiellement définies, notées encore $\oplus_\omega$, un triple $(\omega, x_1, x_2) \in \Omega \times X \times X$ étant compatible si et seulement si $x_1 \oplus_\omega x_2$, calculé dans A^*, appartient à X.

Le Ω- système ainsi défini est dit *système des expressions calculable* dans B, et si $x \in X$, $r(x)$ est dit *résultat du calcul* de l'expression x. Ainsi le résultat du calcul de l'expression

$$x = \omega_1 \omega_2 \iota_1 \iota_2 \iota_3 = (\iota_1 \oplus_{\omega_1} \iota_2) \oplus_{\omega_2} \iota_2$$

de X est l'élément $(\iota_1 +_{\omega_1} \iota_2) +_{\omega_2} \iota_3$ de I.

Par restriction à X des applications d^o, $\tilde{p}(.)$, $c(.)$, $\mu(.)$, $\pi(.)$, définies sur $\tilde{A}^*$ (cf. 3.6) on obtient pour les expressions calculables les notions de degré, parenthésage,... En particulier I est l'ensemble des éléments de degré 1 du système binaire gradué $X(B)$.

Soit $B' = (\Omega, I', \alpha')$ un autre Ω- système. Une *application calculable* de B dans B' est un triple (B, φ, B'), abrégé en φ, dans lequel $\varphi : I \to I'$ est une application telle que son prolongement canonique (cf. 3.3) $\tilde{A}^*(\Omega, \varphi) : \tilde{A}^*(\Omega, I) \to \tilde{A}^*(\Omega, I')$ transforme toute expression calculable dans B' en une expression calculable dans B.

On note $X(\varphi) : X(B) \to X(B')$ l'application induite, et on désigne par $\underline{Cal}(\Omega)$ la catégorie ayant pour objets les Ω- systèmes binaires et pour flèches les applications calculables.

A partir de ces définitions, on vérifie, par récurrence sur les degrés :

3. 7. 1. Si $B = (\Omega, I, \alpha)$ et $B' = (\Omega, I', \alpha')$ sont deux Ω-systèmes et $\varphi: I \to I'$ est un morphisme dans $\underline{Syst}(\Omega)$, φ est calculable. Ainsi $\underline{Syst}(\Omega)$ est une sous-catégorie de $\underline{Cal}(\Omega)$ ayant les mêmes objets. On note $J : \underline{Syst}(\Omega) \subset \underline{Cal}(\Omega)$ le foncteur d'inclusion.

3. 7. 2 Soit $B = (\Omega, I, \alpha)$ un système binaire; les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) B est un Ω-magma.

(ii) Toute expression significative est calculable, c'est-à-dire $\tilde{A}^*(\Omega, I) = X(B)$.

(iii) Pour tout Ω-système $B' = (\Omega, I', \alpha')$, toute application $\varphi: I' \to I$ est calculable.

3. 7. 3. Pour tout système binaire $B = (\Omega, I, \alpha)$ on a :

(i) L'inclusion canonique $j : I \subset X(B)$ est une flèche calculable : $B \subset X(B)$.

(ii) L'application $r : X(B) \to I$ est un morphisme de Ω-systèmes.

3. 7. 4. Soient $B = (\Omega, I, \alpha)$ et $B' = (\Omega, I', \alpha')$ deux Ω-systèmes et $\varphi: I \to I'$ une application calculable; les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $\varphi: B \to B'$ est un morphisme de Ω-systèmes.

(ii) Pour toute expression calculable x de B, $r'(X(\varphi)(x)) = X(\varphi)(r(X))$. (On dira que « φ *commute avec les résultats des calculs* » .

3. 7. 5. Si $\varphi: B \to B'$ est une application calculable,

$$X(\varphi) : X(B) \to X(B')$$

est un morphisme de systèmes binaires, d'où un foncteur

$$X(.) : \underline{Cal}(\Omega) \to \underline{Syst}(\Omega).$$

THEOREME 3. 7. 6. *$J : \underline{Syst}(\Omega) \to \underline{Cal}(\Omega)$ admet pour adjoint à gauche le foncteur $X(.)$, avec pour morphismes canoniques :*

$$r : X(.) \circ J \to id(\underline{Syst}(\Omega)) \quad et \quad j : id(\underline{Cal}(\Omega)) \to J \circ X(.).$$

Vérification immédiate à partir des remarques précédentes. ■

Le théorème 3.7.6 et la remarque 3.7.2 *(i)* montrent que pour les lois partiellement définies le « bon foncteur d'oubli » est l'inclusion de $\underline{Syst}(\Omega)$ dans $\underline{Cal}(\Omega)$, et $X(B)$ joue alors le rôle de *Ω-système libre* engendré par B. En réalité, $X(B)$ satisfait la propriété universelle, plus forte, où l'on fait varier Ω. De façon précise, soient $B = (\Omega, I, \alpha)$ et $B' = (\Omega', I', \alpha')$ deux systèmes binaires et $f: \Omega \to \Omega'$, $\varphi: I \to I'$ deux applications. Le *couple* (f, φ) est *calculable* si $\varphi: I \to I'$ est une application calculable de B dans $f^*(B')$ (cf. 1.3.9). On note φ_f^* l'application de $X(B)$ dans $X(B')$ induite par φ, et $\underline{Cal}$ la catégorie ayant pour objets les systèmes binaires et pour flèches les couples calculables. Les propriétés 3.7.1 à 3.7.6 s'étendent de manière évidente, en particulier:

3. 7. 1'. Tout bi-morphisme est un couple calculable, et $\underline{Syst}$ s'identifie à une sous-catégorie de $\underline{Cal}$.

3. 7. 6'. L'inclusion $\underline{Syst} \subset \underline{Cal}$ admet pour adjoint à gauche le foncteur

$$X(\,.\,): \underline{Cal} \to \underline{Syst}, \quad B \rightsquigarrow X(B), \quad (f, \varphi) \rightsquigarrow X(f, \varphi) = (f, \varphi_f^X),$$

c'est-à-dire que $X(B)$ est le *système binaire libre* engendré par B.

3.8. Segments et substitutions. Soit $B = (\Omega, I, \alpha)$ un système binaire. Pour toute expression calculable $x \in X(B)$, on définit, par récurrence sur $d^o(x)$, un sous-ensemble $\Sigma(x)$ de $X(B) \times \mathbf{N}$, dit ensemble des *segments* de x, par :

(i) Si $d^o(x) = 1$, $\Sigma(x) = \{(x, 1)\}$,

(ii) Si $d^o(x) > 1$, $x = x_1 \oplus_\omega x_2$. Un couple (y, k) est un segment de x s'il vérifie l'une des trois conditions suivantes, qui s'excluent mutuellement :

$$(y, k) \in \Sigma(x_1), \qquad (y, k - d^o(x_1)) \in \Sigma(x_2), \qquad (y, k) = (x, 1).$$

Il résulte de la définition que, si $(y, k) = \sigma \in \Sigma(x)$, on a $k \leq d^o(x)$. On dit que y est *l'expression* de σ, et k la *position* de y dans x. Si $(y, k) \in \Sigma(x)$ et $(z, k') \in \Sigma(y)$, on vérifie que $(z, k + k' - 1)$ est un segment de x, dit *emboîté* dans (y, k), ce que l'on note

$$(z, k') \subset (y, k),$$

et que la relation ainsi définie sur $\Sigma(x)$ est une relation d'ordre. Deux segments d'une même expression sont disjoints s'ils n'ont aucun minorant commun. De Bourbaki [1] (Appendice : Exercice 1) il résulte que deux segments d'une même expression sont toujours soit disjoints, soit emboîtés.

3. 8. 1. Soient $\sigma = (y, k) \in \Sigma(x)$, et $y' \in X(B)$. On dit que y' est substituable à σ dans x, et on définit le *substitué* $x \hat{\sigma} y'$ de σ par y' dans x, par récurrence sur $d^o(x)$ de la manière suivante :

(*i*) Si $d^o(x) = 1$, on a $\sigma = (x, 1)$; tout $y' \in X(B)$ est substituable à σ, et $x \hat{\sigma} y' = y'$.

(*ii*) Si $d^o(x) > 1$, on a $x = x_1 \oplus_\omega x_2$; trois cas sont à envisager:

- Si $\sigma \in \Sigma(x_1)$, y' est substituable à σ dans x si d'une part $x_1 \hat{\sigma} y'$ est défini, et si d'autre part $(x_1 \hat{\sigma} y') \oplus_\omega x_2$ est calculable. On pose alors $x \hat{\sigma} y' = (x_1 \hat{\sigma} y') \oplus_\omega x_2$.

- Si $\sigma = (x, 1)$, $x \hat{\sigma} y'$ est toujours défini et égal à y'.

- Si $\sigma' = (y, k - d^o(x_1)) \in \Sigma(x_2)$, $x \hat{\sigma} y'$ est défini si d'une part $x_2 \hat{\sigma}' y'$ l'est, et si d'autre part $x_1 \oplus_\omega (x_2 \hat{\sigma}' y')$ est calculable. On pose alors $x \hat{\sigma} y' = x_1 \oplus_\omega (x_2 \hat{\sigma}' y')$.

3. 8. 2 Si $\underset{\sim}{B}$ est un Ω-magma, pour tout $\sigma = (y, k) \in \Sigma(x)$ et tout $y' \in X(B) = \tilde{A}^*(\Omega, I)$, $x \hat{\sigma} y'$ est défini. Dans le cas où B est un système binaire quelconque, une condition suffisante, que nous utiliserons constamment dans la suite, pour que $x \hat{\sigma} y'$ existe est que $r(y) = r(y')$. On a alors en outre $r(x \hat{\sigma} y') = r(x)$.

3.9. Façon d'écrire les foncteurs $\otimes$-itérés. Soit $B = (\Omega, I, \alpha)$ un système binaire et $\mathfrak{B} = (x, \otimes)$ une famille binaire de catégories, de schéma B (cf. 2.2.1). Notons $I(\mathfrak{B}) = \bigcup_{\iota \in I} \underline{It}(\otimes)$ l'ensemble des foncteurs $\otimes$-itérés (cf. 2.4). Soit $\omega \in \Omega$; si S et $S' \in I(\mathfrak{B})$ sont deux foncteurs tels que

$$S \in \underline{It}^{\iota}(\otimes), \quad S' \in \underline{It}^{\iota'}(\otimes), \quad (\omega, \iota, \iota') \in |\alpha|,$$

le foncteur $S \otimes_\omega S'$ est défini et appartient à $\underline{It}^{\iota\,\omega\,\iota'}(\otimes) \subset I(\mathfrak{B})$. En associant à tout $\omega \in \Omega$ la loi binaire dans $I(\mathfrak{B})$: $(S, S') \rightsquigarrow S \otimes_\omega S'$, on munit

$I(\mathfrak{B})$ d'une structure de Ω-système, noté $B(\mathfrak{B})$. On vérifie aisément que l'application

$$\varphi_{\mathfrak{B}} : I \to I(\mathfrak{B}), \qquad \iota \rightsquigarrow id(\mathfrak{X}^{\iota})$$

est calculable (pour les structures B et $B(\mathfrak{B})$). D'après le théorème 3.7.6 elle se prolonge en un morphisme de Ω-systèmes

$$(3.9.1) \qquad S_{\mathfrak{B}} : X(B) \xrightarrow{X(\varphi_{\mathfrak{B}})} X(B(\mathfrak{B})) \xrightarrow{r} I(\mathfrak{B}), \quad x \rightsquigarrow S_{\mathfrak{B}}(x).$$

L'image de $S_{\mathfrak{B}}$ est formée de foncteurs $\otimes$-itérés, contient les foncteurs $id(x^{\iota})$, et est $\otimes$-stable, donc est $I(\mathfrak{B})$ tout entier.

DEFINITION 3.9.2. *Une* façon d'écrire *un foncteur $\otimes$-itéré $S \in I(\mathfrak{B})$ est une expression calculable x telle que $S_{\mathfrak{B}}(x) = S$.*

Si $\mu(x) = \iota_1 \ldots \iota_n$ est le multi-indice de x et $r(x) = \iota$ le résultat du calcul de x, le foncteur $S_{\mathfrak{B}}(x)$, *symbolisé par x*, a pour source la catégorie $\mathfrak{X}^{\mu(x)} = \mathfrak{X}^{\iota_1} \times \ldots \times \mathfrak{X}^{\iota_n}$, et pour tout but $\mathfrak{X}^{\iota}$. Par exemple *un* symbole du foncteur

$$\mathfrak{X}^{\iota} \times \mathfrak{X}^{\iota'} \times \mathfrak{X}^{\iota''} \to \mathfrak{X}^{(\iota\omega\iota')\omega'\iota''}, \quad (A, A', A'') \rightsquigarrow (A \otimes_{\omega} A') \otimes_{\omega'} A''$$

est l'expression $(\iota \oplus_{\omega} \iota') \oplus_{\omega'} \iota''$.

REMARQUE 3.9.3. Pour une famille binaire $\mathfrak{B}$ donnée, l'application $S_{\mathfrak{B}}$ n'est pas injective; un même foncteur $\otimes$-itéré peut donc avoir plusieurs symboles. On peut cependant montrer que, pour tout système binaire B, il existe une famille binaire de catégories $\mathfrak{B}_o$ telle que $S_{\mathfrak{B}_o}$ soit injective (cf. 1ère partie 2.2.4.1 pour un cas particulier de cette affirmation). Il en résulte qu'une propriété d'un foncteur itéré $S_{\mathfrak{B}}(x)$ « vraie pour tout $\mathfrak{B}$ » est en réalité une propriété du symbole x. Cela justifie l'intérêt que l'on porte aux symboles, ou façons d'écrire, plutôt qu'aux foncteurs, dans les paragraphes 4 et 5 ci-dessous.

4. MORPHISMES D'ASSOCIATION.

4.1. Schémas binaires associatifs. Un *type d'associations* est un triple $\mathcal{T} = (\Phi, \theta, \Omega)$ formé de deux ensembles Φ et Ω et une application

$\theta: \Phi \to \Omega^4$. Si $\varphi \in \Phi$ et $\theta(\varphi) = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4) \in \Omega^4$, on note

$$\varphi: (\omega_1, \omega_2) \to (\omega_3, \omega_4) \in \mathcal{T}.$$

4. 1. 1. Un schéma associatif à gauche, ou *g-schéma,* est un couple $\Gamma = (\mathcal{T}, B)$, où $\mathcal{T} = (\Phi, \theta, \Omega)$ est un type d'associations, et $B = (\Omega, I, \alpha)$ un système binaire vérifiant :

(A. G) Si $\varphi: (\omega_1, \omega_2) \to (\omega_3, \omega_4) \in \mathcal{T}$ et si $\iota_1, \iota_2, \iota_3 \in I$ sont tels que l'expression $(\iota_1 \oplus_{\omega_1} \iota_2) \oplus_{\omega_2} \iota_3$ est calculable dans B, $\iota_1 \oplus_{\omega_3} (\iota_2 \oplus_{\omega_4} \iota_3)$ est aussi calculable et les deux ont même résultat.

4. 1. 2 De manière symétrique, les *schémas associatifs à droite (d-schémas)* sont les couples $\Delta = (\mathcal{T}, B)$ vérifiant l'axiome d'associativité à droite :

(A. D) Si $\varphi: (\omega_1, \omega_2) \to (\omega_3, \omega_4) \in \mathcal{T}$ et si $\iota_1 \oplus_{\omega_1} (\iota_2 \oplus_{\omega_2} \iota_3)$ est calculable, $(\iota_1 \oplus_{\omega_3} \iota_2) \oplus_{\omega_4} \iota_3$ l'est aussi et les deux ont même résultat.

Ils se ramènent immédiatement aux g-schémas de la façon suivante: Si $B = (\Omega, I, \alpha)$ est un système binaire, son *opposé* $B^* = (\Omega, I, \alpha^*)$ est le système binaire défini par :

$$(\omega, \iota_1, \iota_2) \in |\alpha^*| \text{ si, et seulement si, } (\omega, \iota_2, \iota_1) \in |\alpha| \text{ et}$$
$$\alpha^*(\omega)(\iota_1, \iota_2) = \alpha(\omega)(\iota_2, \iota_1).$$

De même l'opposé $\mathcal{T}^* = (\Phi, \theta^*, \Omega)$ d'un type d'association est défini par :

$\theta^*(\varphi) = (\omega_2, \omega_1, \omega_4, \omega_3)$ si, et seulement si, $\theta(\varphi) = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4)$.

Il est clair que $(\mathcal{T}, B)$ est un g-schéma si, et seulement si, son opposé $(\mathcal{T}^*, B^*)$ est un d-schéma.

4. 1. 3. Un couple $(\mathcal{T}, B)$ vérifiant l'axiome d'associativité *(A)* conjonction de *(A. G)* et *(A. D)* est dit *schéma associatif* ou a-schéma.

4. 1. 4. Si $\Gamma = (\mathcal{T}, B)$ est un g-schéma, on dit que $(\varphi, \iota_1, \iota_2, \iota_3)$ est *compatible* si $\varphi: (\omega_1, \omega_2) \to (\omega_3, \omega_4)$ et si $x = (\iota_1 \oplus_{\omega_1} \iota_2) \oplus_{\omega_2} \iota_3$ est calculable. On note alors $\varphi(\iota_1, \iota_2, \iota_3)$ le résultat commun du calcul de x et de $\varphi(x) = \iota_1 \oplus_{\omega_3} (\iota_2 \oplus_{\omega_4} \iota_3)$. On désigne par $|\Gamma|$ l'ensemble des quadruplets (φ, i_1, i_2, i_3) compatibles.

4.2 Familles de catégories associées.

4. 2. 1. DEFINITION. Une famille de catégories *associées à gauche,* ou *g-famille,* est définie par :

(i) Un g- schéma $\Gamma = (\mathcal{T}, B)$, où $\mathcal{T} = (\Phi, \theta, \Omega)$, et $B = (\Omega, I, \alpha)$.

(ii) Une famille binaire de catégories $\mathfrak{B} = (B, \mathfrak{X}, \otimes)$ (notations de 2. 2.1).

(iii) Une famille

$a = (a(\varphi, \iota_1, \iota_2, \iota_3))$ $(\varphi : (\omega_1, \omega_2) \to (\omega_3, \omega_4) \in \mathcal{T}, (\varphi, \iota_1, \iota_2, \iota_3) \in |\Gamma|)$,

où chaque $a(\varphi, \iota_1, \iota_2, \iota_3)$ est une association entre

$$(\otimes_{\omega_2}(\iota_1 \omega_1 \iota_2, \iota_3), \otimes_{\omega_1}(\iota_1, \iota_2)) \text{ et } (\otimes_{\omega_3}(\iota_1, \iota_2 \omega_4 \iota_3), \otimes_{\omega_4}(\iota_2, \iota_3)),$$

c'est-à-dire, d'après 1. 1. 1, un morphisme du foncteur composé supérieur dans le composé inférieur du diagramme :

$$\begin{tikzcd}
 & \mathfrak{X}^{\iota_1 \omega_1 \iota_2} \times \mathfrak{X}^{\iota_3} \arrow[dr, "\otimes_{\omega_2}(\iota_1 \omega_1 \iota_2, \iota_3)"] & \\
\mathfrak{X}^{\iota_1} \times \mathfrak{X}^{\iota_2} \times \mathfrak{X}^{\iota_3} \arrow[ur, "\otimes_{\omega_1}(\iota_1, \iota_2) \times 1(\mathfrak{X}^{\iota_3})"] \arrow[dr, "1(\mathfrak{X}^{\iota_1}) \times \otimes_{\omega_4}(\iota_2, \iota_3)"'] & & \mathfrak{X}^{\varphi(\iota_1, \iota_2, \iota_3)} \\
 & \mathfrak{X}^{\iota_1} \times \mathfrak{X}^{\iota_2 \omega_4 \iota_3} \arrow[ur, "\otimes_{\omega_3}(\iota_1, \iota_2 \omega_4 \iota_3)"'] &
\end{tikzcd}$$

Ces deux foncteurs composés sont donc des $\otimes$- itérés, donc, d'après 3.9.2, ils sont caractérisés par leurs symboles respectifs : $(\iota_1 \otimes_{\omega_1} \iota_2) \otimes_{\omega_2} \iota_3$ et $\iota_1 \otimes_{\omega_3} (\iota_2 \otimes_{\omega_4} \iota_3)$, lesquels déterminent ι_1, ι_2 et ι_3. Les *morphismes d'association* sont donc déterminés sans ambiguité par l'écriture .

(4. 2 2) $\qquad a(\varphi) : (\iota_1 \otimes_{\omega_1} \iota_2) \otimes_{\omega_2} \iota_3 \to \iota_1 \otimes_{\omega_3} (\iota_2 \otimes_{\omega_4} \iota_3)$.

Par passage au schéma opposé et par conjugaison (cf. 1. 1), on obtient trois autres notions « d'association » sur lesquelles nous reviendrons dans la suite.

4.3. Transformations. Soit $\Gamma = (\mathcal{T}, B)$ un g-schéma. Si $x \in X(B)$ est une expression calculable et $\varphi : (\omega_1, \omega_2) \to (\omega_3, \omega_4)$ une flèche d'association, on dit que φ *opère sur* x s'il existe x_1, x_2, x_3 tels que $x = (x_1 \oplus_{\omega_1} x_2) \oplus_{\omega_2} x_3$. Dans ce cas x_1, x_2, x_3 sont uniques; en outre $(r(x_1) \oplus_{\omega_1} r(x_2)) \oplus_{\omega_2} r(x_3)$ est calculable d'après 3.8.2, donc aussi $r(x_1) \oplus_{\omega_3} (r(x_2) \oplus_{\omega_4} r(x_3))$ d'après l'axiome $(A.G)$ et, toujours d'après 3.8.2, $x_1 \oplus_{\omega_1} (x_2 \oplus_{\omega_2} x_3)$ est une expression calculable dite transformée de x par φ et notée $\varphi(x)$. En outre $r(\varphi(x)) = r(x)$ et $\mu(\varphi(x)) = \mu(x)$ (Notations de 3.7).

Plus généralement si $\sigma = (y, k)$ est un segment de x, on dit que φ *opère dans* x *à travers* σ si $\varphi(y)$ est défini. Comme $r(\varphi(y)) = r(y)$ on peut d'après 3.8.2 substituer $\varphi(y)$ à σ dans x. L'expression $x \hat{\sigma} \varphi(y)$ est dite transformée de x par φ à travers σ.

4.3.1. On appelle *transformation élémentaire* un triple $t = (x, \sigma, \varphi)$ tel que $\sigma = (y, k) \in \Sigma(x)$ tel que $\varphi(y)$ soit défini. On dit que x (resp. $x \hat{\sigma} \varphi(y)$) est la *source* (resp. le *but*) de t. On détermine ainsi un schéma de diagramme $T_o = T_o(\Gamma)$ ayant $X(B)$ comme ensemble des sommets et dont les flèches sont les transformations élémentaires. On note $t : x \to t(x)$.

4.3.2 Soient x_1 et $x_2 \in X(B)$ et $\omega \in \Omega$ tels que $x_1 \oplus_\omega x_2$ soit calculable et $t_1 = (x_1, (y_1, k_1), \varphi_1)$ une transformation élémentaire de source x_1. Comme $\sigma_1 = (y_1, k_1)$ est un segment de x_1, c'est aussi un segment de $x_1 \oplus_\omega x_2$. Comme $\varphi_1(y_1)$ est défini, $(x_1 \oplus_\omega x_2, \sigma_1, \varphi_1)$ est une transformation élémentaire. Sa source est $x_1 \oplus_\omega x_2$ et son but $(x_1 \oplus_\omega x_2) \hat{\sigma} \varphi_1(y_1)$ est, d'après 3.8.1 (ii), égal à $(x_1 \hat{\sigma} \varphi_1(y_1)) \oplus_\omega x_2 = t_1(x_1) \oplus_\omega x_2$. On note cette transformation :

$$t_1 \oplus_\omega id(x_2) : x_1 \oplus_\omega x_2 \to t_1(x_1) \oplus_\omega x_2 .$$

De même, si $t_2 = (x_2, (y_2, k_2), \varphi_2)$ est une transformation élémentaire de source x_2, $\sigma_2 = (y_2, k_2 + d^o(x_1))$ est un segment de $x_1 \oplus_\omega x_2$ et $(x_1 \oplus_\omega x_2, \sigma_2, \varphi_2)$ est une transformation élémentaire, de source $x_1 \oplus_\omega x_2$ et de but $x_1 \oplus_\omega t_2(x_2)$, que nous noterons :

$$id(x_1) \oplus_\omega x_2 : x_1 \oplus_\omega x_2 \to x_1 \oplus_\omega t_2(x_2) .$$

Posons $x'_1 = t_1(x_1)$ et $x'_2 = t_2(x_2)$. Comme $x'_1 \oplus_\omega x_2$ et $x_1 \oplus_\omega x'_2$ sont calculables, on peut, d'après ce qui précède, définir les transformations élémentaires

$$id(x'_1) \oplus_\omega t_2 : x'_1 \oplus_\omega x_2 \to x'_1 \oplus_\omega x'_2 \text{ et } t_1 \oplus_\omega id(x'_2) : x_1 \oplus_\omega x'_2 \to x'_1 \oplus_\omega x'_2 .$$

Dans la catégorie libre $\mathfrak{L}(T_o)$ engendrée par le schéma T_o, pour tout *triple compatible* (ω, t_1, t_2) (c'est-à-dire tel que $t_1 : x_1 \to x'_1$, $t_2 : x_2 \to x'_2$ et que $x_1 \oplus_\omega x_2$ soit calculable), on a un diagramme

$$D(\omega, t_1, t_2) : \quad \begin{tikzcd} x_1 \oplus_\omega x_2 \arrow[r, "t_1 \oplus_\omega id(x_2)"] \arrow[d, "id(x_1) \oplus_\omega t_2"] & x'_1 \oplus_\omega x_2 \arrow[d, "id(x'_1) \oplus_\omega t_2"] \\ x_1 \oplus_\omega x'_2 \arrow[r, "t_1 \oplus_\omega id(x'_2)"'] & x'_1 \oplus_\omega x'_2 \end{tikzcd}$$

Si l'on impose à tous ces diagrammes d'être commutatifs, on définit la catégorie $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(\Gamma)$ des *transformations admissibles*, ayant pour générateurs les transformations élémentaires et pour relations de commutation les $D(\omega, t_1, t_2)$. On identifie chaque transformation élémentaire t à son image canonique dans $\mathfrak{A}$ et, si (ω, t_1, t_2) est compatible, on note $t_1 \oplus_\omega t_2$ l'unique image dans $\mathfrak{A}$ des deux flèches composées de $D(\omega, t_1, t_2)$.

Pour éviter des développements fastidieux, les propriétés de $\mathfrak{L}(T_o) = \mathfrak{L}$, de $\mathfrak{A}$, et du foncteur canonique $\mathfrak{L} \to \mathfrak{A}$ que nous allons donner seront énoncées de manière informelle et sans démonstration.

4. 3. 3. Si $t : x_1 \to x_2$ est une transformation élémentaire, $r(x_1) = r(x_2)$. Il en résulte que, dans $\mathfrak{L}$ et dans $\mathfrak{A}$, si $Hom(x_1, x_2) \neq \emptyset$ pour tout $\omega \in \Omega$ et tout $x \in X(B)$, les deux expressions $x_1 \oplus_\omega x$ et $x_2 \oplus_\omega x$ (resp. $x \oplus_\omega x_1$ et $x \oplus_\omega x_2$) sont calculables en même temps et ont même résultat.

4. 3. 4. Soit $\omega \in \Omega$; si

$$\lambda : x_1 \xrightarrow{t_1} x_2 \to \dots \to x_n \xrightarrow{t_n} x_{n+1}$$

et

$$\lambda' : x'_1 \xrightarrow{t'_1} x'_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow x'_p \xrightarrow{t'_p} x'_{p+1}$$

sont deux flèches composées telles que $x_1 \oplus_\omega x'_1$ est calculable, on définit dans $\mathfrak{L}$ deux flèches de source $x_1 \oplus_\omega x'_1$ et de but $x_{n+1} \oplus_\omega x'_{p+1}$:

$$\overline{\lambda} = (t_n \oplus_\omega id(x'_{p+1}))\circ\ldots\circ(t_1 \oplus_\omega id(x'_{p+1}))\circ(id(x_1)\oplus_\omega t'_p)\circ\ldots\circ(id(x_1)\oplus_\omega t'_1),$$

$$\overline{\lambda'} = (id(x_{n+1})\oplus_\omega t'_p)\circ\ldots\circ(id(x_{n+1})\oplus_\omega t'_1)\circ(t_n \oplus_\omega id(x'_1))\circ\ldots\circ(t_1 \oplus_\omega id(x'_1)).$$

Ces flèches ont même image, notée $\lambda \oplus_\omega \lambda'$, dans $\mathfrak{A}$. Les couples (λ, λ') tels que $\lambda \oplus_\omega \lambda'$ est défini forment une sous- catégorie $\mathfrak{A}_\omega$ de $\mathfrak{A} \times \mathfrak{A}$ et $\oplus_\omega : \mathfrak{A}_\omega \to \mathfrak{A}$ est un foncteur. (Il résulte, de cela et du fait que $\mathfrak{A}$ est engendré par les transformations élémentaires, que $\mathfrak{A}$ est solution d'un problème universel que nous n'expliciterons pas, cf. 4.4).

4.4. Associations itérées. Soit $g = (\Gamma, \mathfrak{X}, \otimes, a)$ une g-famille. Pour tout $\iota \in I$, soit ψ^ι l'ensemble des transformations naturelles $a(\varphi, \iota_1, \iota_2, \iota_3)$, où $\varphi(\iota_1, \iota_2, \iota_3) = \iota$. Avec les notations de 2.3 et 2.4, $\psi^\iota \subset \underline{Fonct^\iota}(\mathfrak{X})$, et la famille $\psi = (\psi^\iota)$ engendre une sous-B-famille de $\underline{Fonct}(\mathfrak{X}, \otimes)$, dite *famille binaire des associations itérées*, et notée $\underline{It}(a)$. Elle admet $It(\otimes)$ comme B-famille des objets. On note $\mathfrak{I}(a)$ la catégorie $\coprod_\iota \underline{It}^\iota(a)$. Ses objets s'identifient aux foncteurs $\otimes$-itérés et ses flèches aux associations itérées.

Nous allons montrer que les transformations admissibles sont « les façons d'écrire certaines des associations itérées » .

4.4.1. Soit $x \in X(B)$ et $\varphi \in \Phi$ tel que $x' = \varphi(x)$ soit défini. Le triple $(x, (x, 1), \varphi) = t$ est une transformation élémentaire de source x et de but x'. On définit une transformation naturelle $S_{\mathfrak{B}}(t) : S_{\mathfrak{B}}(x) \to S_{\mathfrak{B}}(x')$ de la façon suivante (*): φ opérant sur x, on a $\varphi = (\omega_1, \omega_2) \to (\omega_3, \omega_4)$, $x = (x_1 \oplus_{\omega_1} x_2) \oplus_{\omega_2} x_3$, $x' = x_1 \oplus_{\omega_3} (x_2 \oplus_{\omega_4} x_3)$, $\mu(x) = \iota_1 \ldots \iota_n = \mu(x')$,

(*) On pourrait donner une définition plus intuitive de $S_{\mathfrak{B}}(t)$ en définissant $S_{\mathfrak{B}}(t)(A_1 \ldots A_n)$ pour tout n-uple d'objets. La construction que nous donnons n'utilise que des calculs qui se transposent dans toute 2-catégorie à produits finis stricts.

$r(x) = r(x')$, $\mu(x_1) = \iota_1 \dots \iota_p$, $\mu(x_2) = \iota_{p+1} \dots \iota_q$, $\mu(x_3) = = \iota_{q+1} \dots \iota_n$, p et q entiers uniques, tels que $1 \leq p \leq q \leq n$. D'après 3. 9. 2, $S_{\mathfrak{B}}(x)$ et $S_{\mathfrak{B}}(x')$ sont deux foncteurs de $\mathfrak{X}^{\iota_1} \times \dots \times \mathfrak{X}^{\iota_n}$ dans $\mathfrak{X}^{\iota}$. Notons $j_k = r(x_k)$ $(k = 1, 2, 3)$. D'après 3.9.1 $S_{\mathfrak{B}}$ est un morphisme de Ω-systèmes donc :

$$S_{\mathfrak{B}}(x) = (S_{\mathfrak{B}}(x_1) \otimes_{\omega_1} S_{\mathfrak{B}}(x_2)) \otimes_{\omega_2} S_{\mathfrak{B}}(x_3)$$

$$= S_{\mathfrak{B}}((j_1 \oplus_{\omega_1} j_2) \oplus_{\omega_2} j_3) \circ (S_{\mathfrak{B}}(x_1) \times S_{\mathfrak{B}}(x_2) \times S_{\mathfrak{B}}(x_3)),$$

$$S_{\mathfrak{B}}(x') = S_{\mathfrak{B}}(x_1) \otimes_{\omega_3} (S_{\mathfrak{B}}(x_2) \otimes_{\omega_4} S_{\mathfrak{B}}(x_3)) =$$

$$= S_{\mathfrak{B}}(j_1 \oplus_{\omega_3} (j_2 \oplus_{\omega_4} j_3)) \circ (S_{\mathfrak{B}}(x_1) \times S_{\mathfrak{B}}(x_2) \times S_{\mathfrak{B}}(x_3)).$$

Comme (φ, j_1, j_2, j_3) est compatible, on a un morphisme fonctoriel

$$a(\varphi, j_1, j_2, j_3) = S_{\mathfrak{B}}((j_1 \oplus_{\omega_1} j_2) \oplus_{\omega_2} j_2) \to S_{\mathfrak{B}}(j_1 \oplus_{\omega_3} (j_2 \oplus_{\omega_4} j_3)).$$

On pose alors

$$S(t) = a(\varphi, j_1, j_2, j_3) \star (S_{\mathfrak{B}}(x_1) \times S_{\mathfrak{B}}(x_2) \times S_{\mathfrak{B}}(x_3)).$$

4. 4. 2 Soit $t = (x, \sigma, \varphi)$ une transformation élémentaire quelconque. Si $\sigma = (x, 1)$, $S_{\mathfrak{B}}(t)$ est déjà défini. Si $\sigma = (y, k) \neq (x, 1)$, on a $x = x_1 \oplus_\omega x_2$ et l'une des deux situations suivantes :

$$t = (x_1, (y, k), \varphi) \oplus_\omega id(x_2) = t_1 \oplus_\omega id(x_2)$$

$$(\text{resp.} \quad t = id(x_1) \oplus_\omega (x_2, (y, k - d^o x), \varphi) = id(x_1) \oplus_\omega t_2 \;.$$

Par récurrence sur le degré de la source de t, $S(t_1)$ et $S(t_2)$ sont définis et on pose :

$$S_{\mathfrak{B}}(t) = S_{\mathfrak{B}}(t_1) \otimes_\omega id(S_{\mathfrak{B}}(x_1))$$

$$(\text{resp. } S_{\mathfrak{B}}(t) = id(S_{\mathfrak{B}}(x_1)) \otimes_\omega S_{\mathfrak{B}}(t_2)) \;.$$

La construction montre que, pour toute transformation élémentaire t, le morphisme fonctoriel $S_{\mathfrak{B}}(t)$ est une extension, au sens de 2 3, d'un des morphismes d'association $a(\varphi, \iota_1, \iota_2, \iota_3)$.

4. 4. 3. Le diagramme de schéma T_o à valeurs dans $\mathcal{I}(a)$, défini par $x \rightsquigarrow S_{\mathfrak{B}}(x)$, $t \rightsquigarrow S_{\mathfrak{B}}(t)$ se prolonge canoniquement en un foncteur $\mathfrak{L}(T_o) \to \mathcal{I}(a)$, qui transforme tout diagramme $D(\omega, t_1, t_2)$ en un diagramme commutatif, donc se factorise à travers $\mathfrak{A}$. On note encore (*) $S_{\mathfrak{B}} : \mathfrak{A} \to \mathcal{I}(a)$ le « foncteur quotient» . Les images par $S_{\mathfrak{B}}$ des flèches de $\mathfrak{A}$ sont dites *associations canoniques*.

REMARQUE 4.4.4. L'application $S_{\mathfrak{B}}$ n'étant pas injective sur les objets, il peut exister deux transformations admissibles λ et λ' non composables dans $\mathfrak{A}$, telles que $S_{\mathfrak{B}}(\lambda) \circ S_{\mathfrak{B}}(\lambda')$ soit défini dans $\mathcal{I}(a)$. C'est-à- dire que les associations canoniques ne forment pas une sous-catégorie de $\mathcal{I}(a)$ (cf. 3.9.3). Par contre, si $S_{\mathfrak{B}}(\lambda) \circ S_{\mathfrak{B}}(\lambda')$ est défini pour toute g-famille, alors $\lambda \circ \lambda'$ est défini dans $\mathfrak{A}$, et $S_{\mathfrak{B}}(\lambda) \circ S_{\mathfrak{B}}(\lambda') = S_{\mathfrak{B}}(\lambda \circ \lambda')$. (En effet on peut, comme dans 3.9.3, construire une g-famille pour laquelle $S_{\mathfrak{B}}$ est un isomorphisme).

5. COHERENCE DES MORPHISMES D'ASSOCIATION.

5.1. Notions de cohérence. Soit $\Gamma = (\mathcal{C}, B)$ un g-schéma. On définit une relation de préordre sur l'ensemble $X = X(B)$ des expressions calculables dans B par :

$$(5.1.1) \qquad x \leq x' \Longleftrightarrow Hom_{\mathfrak{L}(T_o)}(x, x') \neq \emptyset .$$

Soit $\mathcal{K}(T_o)$ la catégorie associée à l'ensemble préordonné X et

$$K : \mathfrak{L}(T_o) \to \mathcal{K}(T_o)$$

le foncteur canonique. Il est clair que K se factorise en un foncteur $K' : \mathfrak{A} \to \mathcal{K}(T_o)$.

DEFINITION 5.1.2. *Soit* $\mathcal{G} = (\Gamma, \mathfrak{X}, \otimes, a)$ *une g-famille. On dit que* $\mathcal{G}$ *est une famille* formellement cohérente *si le foncteur* $S_{\mathfrak{B}} : \mathfrak{A} \to \underline{It}(a)$ *admet une factorisation en :*

(*) Le diagramme $T_o \to \mathfrak{A}$, $x \rightsquigarrow x$, $t \rightsquigarrow t$ est une injection; on peut donc, sans ambiguité, noter $S_{\mathfrak{B}}$ le « prolongement» du diagramme $S_{\mathfrak{B}} : T_o \to \mathcal{I}$, à $\mathfrak{A}$.

$$S_{\mathfrak{B}} : \mathfrak{A} \xrightarrow{K'} \mathcal{K}(T_o) \xrightarrow{S'_{\mathfrak{B}}} \underline{It}(a).$$

Le foncteur K' étant surjectif (sur les objets et sur les flèches), $S'_{\mathfrak{B}}$ est alors unique.

En revenant aux définitions, la cohérence formelle s'exprime de la façon suivante : Soient S_o et S_1 deux foncteurs $\otimes$-itérés et $\sigma : S_o \to S_1$ une association canonique. Choisissons arbitrairement une façon d'écrire σ, c'est-à-dire une transformation admissible $\lambda : x_o \to x_1 \in \mathfrak{A}$ telle que $S_{\mathfrak{B}}(\lambda) = \sigma$. Si $\lambda' : x_o \to x_1$ est une autre transformation admissible, on a $S_{\mathfrak{B}}(\lambda') = S_{\mathfrak{B}}(\lambda) = \sigma$. Cela n'implique pas, pour S_o et S_1 donnés, l'unicité de σ. D'où la

DEFINITION 5.1.3. *Soit* $\mathcal{G}$ *une g-famille, on dit que* $\mathcal{G}$ *est* strictement cohérente *si la catégorie* $\underline{It}(a)$ *est associée à un ensemble préordonné, c'est-à-dire si, pour tout couple* S_o, S_1 *de foncteurs* $\otimes$*-itérés, il existe au plus une association itérée de source* S_o *et de but* S_1.

Il est clair que la cohérence stricte implique la cohérence formelle. Dans la plupart des exemples « concrets » la réciproque est vraie. En effet, quand on prend pour foncteurs $\otimes$ des produits tensoriels de modules, des produits ou produits fibrés d'ensembles, d'espaces topologiques, de groupes, ou des sommes directes, ou toutes autres multiplications usuelles, chaque foncteur $\otimes$-itéré s'écrit de manière unique et la réciproque résulte de la

PROPOSITION 5.1.4. *Si l'application* $S_{\mathfrak{B}}$ *est injective sur les objets :*

(i) $S_{\mathfrak{B}}$ *est surjective sur les flèches (i. e. toute association itérée est canonique).*

(ii) Si $\mathcal{G}$ *est formellement cohérente, elle l'est aussi strictement.*

Vérification laissée au lecteur.

Nous allons donner des conditions qui entraînent la cohérence formelle.

Un *maillon* de $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}(T_o)$ est un diagramme D de la forme :

(5.1.5)
$$\begin{tikzcd}
 & x_1 \arrow[r, "t_2"] & x_2 \arrow[r, dashed, no head] & x_p \arrow[dr, "t_p"] & \\
x \arrow[ur, "t_1"] \arrow[dr, "t'_1"'] & & & & x' \\
 & x'_1 \arrow[r, "t'_2"'] & x'_2 \arrow[r, dashed, no head] & x'_{q-1} \arrow[ur, "t'_q"'] &
\end{tikzcd}$$

(t_j, t'_k élémentaires).

La source de D est x, son but est x', et les flèches composées $\lambda = t_p \ldots t_1$ et $\lambda' = t'_q \ldots t'_1$ sont les *bords* de D. Les transformations élémentaires préservant le degré, tous les sommets de D ont même degré, noté $d^o(D)$.

DEFINITION 5.1.6. *Soit n un entier ≥ 1. Une g-famille est n-*cohérente *si, pour tout maillon de degré n de $\mathfrak{L}$, $S_{\mathfrak{B}}(\lambda) = S_{\mathfrak{B}}(\lambda')$.*

5.2. Le théorème d'associativité. Il est clair que la cohérence formelle équivaut à la n-cohérence pour tout n. Le résultat essentiel (théorème 5.2.4) est que, sous une condition simple *qui ne porte que sur* Γ, toute g-famille de schéma Γ, cohérente en degrés 3 et 4, est formellement cohérente.

Soit $\mathcal{T} = (\Phi, \theta, \Omega)$ un schéma d'associations. On définit une relation binaire R dans Ω^2:

(5.2.1)
$$(\omega_1, \omega_2)\mathfrak{R}(\omega'_1, \omega'_2) \Longleftrightarrow \exists\, \varphi,$$
$$\varphi \in \Phi \quad \text{et} \quad \varphi : (\omega_1, \omega_2) \to (\omega'_1, \omega'_2).$$

Le graphe R de $\mathfrak{R}$ s'identifie canoniquement au sous-ensemble $\theta(\Phi)$ de Ω^4. On déduit de $\mathfrak{R}$ trois relations binaires $\mathfrak{R}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ dans Ω^3, définies par :

(5.2.2)
$$(\omega_1, \omega_2, \omega_3)\mathfrak{R}_i(\omega'_1, \omega'_2, \omega'_3) \Longleftrightarrow \omega_i = \omega'_i$$
$$\text{et} \quad (\omega_j, \omega_k)\mathfrak{R}(\omega'_j, \omega'_k) \quad \text{pour} \quad j \neq k \neq i \neq j.$$

DEFINITION 5.2.3. *On dit que $\mathcal{T}$ est un schéma* complet d'ordre *3 s'il vérifie les conditions (i) à (v) ci-dessous.*

$(i)\ \mathfrak{R}_1 \circ \mathfrak{R}_3 \Longleftrightarrow \mathfrak{R}_3 \circ \mathfrak{R}_2 \circ \mathfrak{R}_1$,

$(ii)\ \mathfrak{R}_3^{-1} \circ \mathfrak{R}_1 \Longrightarrow \mathfrak{R}_2 \circ \mathfrak{R}_1 \circ \mathfrak{R}_3^{-1}$,

$(iii)\ \mathfrak{R}_3^{-1} \circ \mathfrak{R}_3 \circ \mathfrak{R}_2 \Longrightarrow \mathfrak{R}_2$,

$(iv)\ \mathfrak{R}_2^{-1} \circ \mathfrak{R}_2 \circ \mathfrak{R}_1 \Longrightarrow \mathfrak{R}_1$,

$(v)\ \mathfrak{R}_1^{-1} \circ \mathfrak{R}_1 \circ \mathfrak{R}_3 \Longrightarrow \mathfrak{R}_3$,

où $\circ$ *désigne la composition des relations et* $\mathfrak{R}_k^{-1}$ *la relation symétrique de* $\mathfrak{R}_k$. *Cette condition sera interprétée au paragraphe 6.*

THEOREME 5.2.4. *Soit* $\Gamma = (\mathfrak{T}, B)$ *un g-système. Si* $\mathfrak{T}$ *est complet d'ordre 3, toute g-famille de catégories cohérente en degrés 3 et 4 est formellement cohérente.*

6. DEMONSTRATION DU « THEOREME D'ASSOCIATIVITE» 5.2.4.

De la démonstration, extrêmement longue, nous ne donnons ici qu'un très bref aperçu.

6.1. Etude des maillons de $\mathfrak{L}$. Soit $\Gamma = (\mathfrak{T}, B)$ un g-système (on ne le suppose pas complet d'ordre *3*). Soit $x \in X$ une expression calculable. Elle est déterminée par sa présentation canonique :

$$\pi(x) = (\tilde{p}(x),\ c(x),\ \mu(x)),$$

où $\tilde{p}(x) = \tilde{n} = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$, $c(x) = \omega_1 \ldots \omega_n$, $\mu(x) = \iota_1 \ldots \iota_n$. Le rang de $\tilde{n}$ est dit rang de x et noté $\rho(x)$. Il y a une manière unique de fermer les parenthèses de $\tilde{n}$, on peut donc associer à $(\nu_1, \ldots, \nu_n)$ la suite « opposée» $(\bar{\nu}_1, \ldots, \bar{\nu}_n)$, où $\bar{\nu}_k$ est le nombre de parenthèses fermées après le k-ième signe $\emptyset$.

6.1.1. Soit $\sigma = (y, k)$ un segment de x. Notons d le degré de y. Le couple (d, k) détermine σ . En effet $\pi(y) = (\tilde{p}(y), c(y), \mu(y))$ est donné par :

$$\tilde{p}(y) = \tilde{d} = (\delta_1, \ldots, \delta_d)$$

avec $\delta_j = \nu_{k+j-1}$ si $j > 1$ et $\delta_1 + \ldots + \delta_d = d-1$,

$$c(y) = \omega_k \dots \omega_{k+d-2}, \qquad \mu(y) = \iota_k \dots \iota_{k+d-1}.$$

En outre la suite $(\overline{\delta}_1, \dots, \overline{\delta}_d)$, opposée de $(\delta_1, \dots, \delta_d)$, est déterminée par :

$$\overline{\delta}_j = \overline{\nu}_{k+j-1} \text{ si } j < d \text{ et } \overline{\delta}_1 + \dots + \overline{\delta}_d = d-1.$$

Soit $\varphi \in \Phi$ telle que $\varphi(y) = y'$ est défini (cf. 4.3); il existe deux entiers p et q uniques tels que $y = (u \oplus_{\omega_p} v) \oplus_{\omega_q} w$. On a alors nécessairement $\varphi : (\omega_p, \omega_q) \to (\omega'_p, \omega'_q)$ et $y' = u \oplus_{\omega'_p} (v \oplus_{\omega'_q} w)$. La présentation de y' est donnée par :

$$\tilde{p}(y') = \tilde{\delta}' = (\delta'_1, \dots, \delta'_d) \text{ avec } \delta'_j = \delta_j \text{ si } j \neq 1 \text{ et } p-k+2,$$

$$\delta'_1 = \delta_1 - 1, \quad \delta'_{p-k+2} = \delta_{p-k+2} + 1,$$

$$c(y') = \omega'_k \dots \omega'_{k+d-2} \text{ avec } \omega'_{k+j} = \omega_{k+j} \text{ si } k+j \neq p \text{ et } q,$$

$$\mu(y') = \mu(y) = \iota_k \dots \iota_{k+d-1}.$$

En outre la suite opposée $(\overline{\delta}'_1, \dots, \overline{\delta}'_d)$ de $(\delta'_1, \dots, \delta'_d)$ est déterminée par :

$$\overline{\delta}'_j = \overline{\delta}_j \text{ si } j \neq d \text{ et } j \neq q-k+1, \quad \overline{\delta}'_d = \overline{\delta}_d + 1, \quad \overline{\delta}'_{q-k+1} = \overline{\delta}_{q-k+1} - 1.$$

Enfin $\rho(y) > \rho(y')$ et $r(y) = r(y')$.

6.1.2 Soient t la transformation élémentaire (x, σ, φ) et x' le but de t. On a :

(*i*) $\tilde{p}(x') = (\nu'_1, \dots, \nu'_n)$ avec $\nu'_j = \nu_j$ si $j \neq k$ et $p+1$, $\nu'_k = \nu_k - 1$, $\nu'_{p+1} = \nu_{p+1} + 1$.

(*ii*) $c(x') = \omega'_1 \dots \omega'_{n-1}$ avec $\omega'_j = \omega_j$ si $j \neq p$ et q et ω'_p et ω'_q sont déterminés par la condition que $\varphi : (\omega_p, \omega_q) \to (\omega'_p, \omega'_q)$.

(*iii*) $\mu(x') = \mu(x)$ et $r(x') = r(x)$.

(*iv*) $\rho(x') < \rho(x)$.

(*v*) Si $(\overline{\nu}'_1, \dots, \overline{\nu}'_n)$ est l'opposée de $(\nu'_1, \dots, \nu'_n)$ on a :

$$\overline{\nu}'_j = \overline{\nu}_j \text{ si } j \neq k+d-1 \text{ et } q, \quad \overline{\nu}'_{k+d-1} = \overline{\nu}_{k+d-1} + 1, \quad \overline{\nu}'_q = \overline{\nu}_q - 1.$$

Les entiers d, k, p, q sont dits *associés* à t (ou à σ). La connaissance de x, de k, et de l'un quelconque des nombres d, p, q détermine les deux autres.

6.1.3. Notons $\Delta(x)$ l'ensemble des couples d'entiers (i, j), $1 \leq i \leq j$, tels qu'il existe dans $\Sigma(x)$ un segment σ d'extrémités (i, j) (c'est-à-dire que σ est de la forme (i, z) avec $d^o(z) = (j-i+1)$). Comme $(k, u \oplus_{\omega_p} v) \in \Sigma(x) - \Sigma(x')$, on a $(k, q) \in \Delta(x) - \Delta(x')$. De même la considération de $(p+1, v \oplus_{\omega_q} w)$ montre que $(p+1, k+d-1) \in \Delta(x') - \Delta(x)$. Un calcul immédiat, utilisant 6.1.2(i), montre que, si $i \neq k$ et $p+1$, en posant $\gamma_i = j-1-\nu_{i+1} \dots -\nu_j$ et $\gamma'_i = j-1-\nu'_{i+1} \dots -\nu'_j$, on a :

$$(\gamma_i, \nu_{i+1}, \dots, \nu_j) \in \tilde{\mathbf{N}} \Longleftrightarrow (\gamma'_i, \nu'_{i+1}, \dots, \nu'_j) \in \tilde{\mathbf{N}},$$

c'est-à-dire :

$$(i, j) \in \Delta(x) \Longleftrightarrow (i, j) \in \Delta(x').$$

D'où :

(*i*) $\Delta(x) \cup \{(p+1, k+d-1)\} = \Delta(x') \cup \{(k, q)\}$, chacun des membres étant une réunion disjointe.

On a en outre :

(*ii*) Si $(i, j) \in \Delta(x)$, $(i, j') \in \Delta(x')$ et $j' \leq j$, alors $(i, j') \in \Delta(x)$.

En effet, si $i \neq p+1$, cela résulte de (*i*). Si $i = p+1$, le segment $(p+1, z) \in \Sigma(x)$ d'extrémités $(p+1, j)$ de x n'est pas disjoint du segment $(p+1, v) \in \Sigma(x)$, donc, d'après 3.8, est emboîté dedans; on a donc :

$$j' \leq j \leq q \leq k+d-1 \quad \text{et} \quad (i, j') \neq (p+1, k+d-1).$$

De la même manière (*) on montre que :

(*ii*)^d Si $(i', j') \in \Delta(x')$, $(i, j') \in \Delta(x)$ et $i' \leq i$, alors $(i, j') \in \Delta(x')$.

Il est clair que (ii) et (ii)^d sont « transitives », c'est-à-dire que :

(*) Le passage d'un schéma à son opposé (cf. 4.1.2) permet de remplacer les suites d'entiers associées aux parenthèses par les suites opposées et diminue « de moitié » les vérifications à effectuer. Les assertions qui résultent de cette « dualité » seront affectées de l'exposant d.

(iii) Soient x, $x' \in X$ tels que $x \geq x'$, cf. 5.1.1. Si $(i, j) \in \Delta(x)$, $(i, j') \in \Delta(x')$ et $j' \leq j$, alors $(i, j') \in \Delta(x)$. Par « dualité », on a de même :

$$(i', j') \in \Delta(x'), \quad (i, j') \in \Delta(x) \quad \text{et} \quad i' \leq i \Longrightarrow (i, j') \in \Delta(x').$$

De 6.1.2(iii) et (iv) on déduit immédiatement :

6.1.4. Pour tout maillon D (cf. 5.1.5), x, x', les x_k et les x'_k ont même résultat, noté $r(D)$, même multi-indice $\mu(D)$, donc même degré $d^o(D)$. Les bords de D sont de longueur $\leq \rho(x)$.

6.1.5. La relation de préordre définie dans 5.1.1 est une relation d'ordre sur x, en particulier $\mathfrak{L}$ n'a aucun « lacet» (maillon dont un bord est de longueur nulle). En outre l'ordre est *compatible avec les translations*, c'est-à-dire que, si $x \geq x'$ et $y \geq y'$, $x \oplus_\omega y$ est défini si et seulement si $x' \oplus_\omega y'$ est défini et alors $x \oplus_\omega y \geq x' \oplus_\omega y'$.

LEMME 6.1.6. *Soient* $\lambda = x_1 \xrightarrow{t_1} x_2 \cdots \xrightarrow{t_n} x_{n+1}$ *et* $\lambda' = x'_1 \xrightarrow{t'_1} x'_2 \cdots \xrightarrow{t'_n} x'_{n+1}$ *deux flèches composées de même longueur, où* $t_j = (x_j, \sigma_j, \varphi_j)$ *et* $t'_j = (x'_j, \sigma'_j, \varphi'_j)$ $(j = 1, \ldots, n)$. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) Pour tout j, $x_j = x'_j$.

(ii) Pour tout j, $\tilde{p}(x_j) = \tilde{p}(x'_j)$ *et* $\theta(\varphi_j) = \theta(\varphi'_j)$, *et il existe* $h \in \{1, \ldots, n+1\}$ *tel que* $x_h = x'_h$.

D'après 6.1.2 il est clair que (i) $\Longrightarrow$ (ii). Supposons que $x_h = x'_h$ avec $h \neq n+1$. On a $\mu(x_{h+1}) = \mu(x_h) = \mu(x'_h) = \mu(x'_{h+1})$. Notons k_j, d_j, p_j, q_j (resp. $k'_j, \ldots$) les entiers associés à t_j (resp. t'_j). D'après 6.1.2 (i), $\tilde{p}(x_{h+1}) = \tilde{p}(x'_{h+1})$ implique $(k_h, d_h, p_h, q_h) = (k'_h, d'_h, p'_h, q'_h)$. Comme $\theta(\varphi_h) = \theta(\varphi_h)$, on déduit de 6.1.2(ii) que $c(x_{h+1}) = c(x'_{h+1})$, et x_{h+1} et x'_{h+1}, ayant même présentation, sont égaux. On montre de même que, si $h \neq 1$, $x_{h-1} = x'_{h-1}$. ■

LEMME 6.1.7. *Soit* D *un maillon de la forme*

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{t = (x,\, \sigma,\, \varphi)} & x' \\ {\scriptstyle t^1 = (x,\, \sigma^1,\, \varphi^1)}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle t^h = (x^{h-1},\, \sigma^h,\, \varphi^h)} \\ x_1 \longrightarrow & \cdots\cdots & \longrightarrow x^{h-1} \end{array}$$

On a : $h = 1$, $\sigma^1 = \sigma$ *et* $\theta(\varphi^1) = \theta(\varphi)$.

Soient d, k, p, q les entiers associés à t dans 6. 1. 2 et d^1, k^1, p^1, q^1 leurs analogues pour t^1. D'après 6. 1. 3 (i),

$$(k^1,\ k^1 + d^1 - 1) \in \Delta(x^1) \quad \text{et} \quad (k^1,\ q^1) \notin \Delta(x^1).$$

Comme $q^1 \leq k^1 + d^1 - 1$ et $x' \leq x$, il résulte de 6. 1. 3 (ii) que

$$(k^1,\ q^1) \notin \Delta(x').$$

Mais $(k^1, q^1) \in \Delta(x)$, donc, d'après 6. 1. 3 (i), $(k^1, q^1) = (k, q)$. De manière symétrique on montre que $(p^1 + 1,\ k^1 + d^1 - 1) = (p + 1,\ k + d - 1)$. Il en résulte que $\sigma^1 = \sigma$, d'où $\tilde{p}(x^1) = \tilde{p}(x')$ et $\rho(x^1) = \rho(x')$. Comme le rang décroît strictement après une transformation élémentaire (6. 1. 2 (iv)), on a nécessairement $h = 1$ et $x^1 = x'$. Alors

$$\theta(\varphi) = (\omega_p,\ \omega_q,\ \omega'_p,\ \omega'_q) = (\omega_{p_1},\ \omega_{q_1},\ \omega'_{p_1},\ \omega'_{q_1}) = \theta(\varphi'). \ \blacksquare$$

Il en résulte que x' est successeur immédiat de x, pour l'ordre de X, si, et seulement si, il existe une transformation élémentaire $t = (x, \sigma, \varphi)$ de source x et de but x', et dans ce cas t est déterminée par φ, x et x' (et même, d'après 6. 1. 6, par φ, l'une des expressions x ou x' et le parenthésage de l'autre). On peut donc alléger les notations en notant les transformations élémentaires $\varphi\colon x \to x'$, ou même $\varphi\colon x \to \tilde{p}(x')$; par exemple, si $\varphi\colon (\omega_2, \omega_3) \to (\omega'_2, \omega'_3) \in \Phi$, la transformation élémentaire

$$x = \iota_1 \oplus_{\omega_1} ((\iota_2 \oplus_{\omega_2} \iota_3) \oplus_{\omega_3} \iota_4) \xrightarrow{(x,\, (\iota_2 \oplus_{\omega_2} \iota_3) \oplus_{\omega_3} \iota_4,\, \varphi)} \iota_1 \oplus_{\omega_1} (\iota_2 \oplus_{\omega'_2} (\iota_3 \oplus_{\omega'_3} \iota_4))$$

pourra être abrégée sans ambiguïté en :

$$\iota_1 \oplus_{\omega_1} ((\iota_2 \oplus_{\omega_2} \iota_3) \oplus_{\omega_3} \iota_4) \xrightarrow{\varphi} \tilde{1} + (\tilde{1} + (\tilde{1} + \tilde{1})).$$

6.2. Conditions de complétion. Soit $\Gamma = (\mathcal{T}, B)$ un g-schéma. Parmi les maillons de degré 4 de $\mathfrak{L}$, figurent les *pentagones* de la forme :

(6. 2 1)

$$\begin{tikzcd}
((\iota_1 \oplus_{\omega_1} \iota_2) \oplus_{\omega_2} \iota_3) \oplus_{\omega_3} \iota_4 \arrow[rr, "\varphi_3"] \arrow[d, "\bar{\varphi}_1"] & & (\iota_1 \oplus_{\omega_4} (\iota_2 \oplus_{\omega_5} \iota_3)) \oplus_{\omega_3} \iota_4 \arrow[d, "\varphi_2"] \\
(\iota_1 \oplus_{\omega_1} \iota_2) \oplus_{\omega_{10}} (\iota_3 \oplus_{\omega_9} \iota_4) \arrow[dr, "\bar{\varphi}_3"] & & \iota_1 \oplus_{\omega_6} ((\iota_2 \oplus_{\omega_5} \iota_3) \oplus_{\omega_7} \iota_4) \arrow[dl, "\varphi_1"'] \\
& \iota_1 \oplus_{\omega_6} (\iota_2 \oplus_{\omega_8} (\iota_3 \oplus_{\omega_9} \iota_4)) . &
\end{tikzcd}$$

Les conditions de complétion (5. 2 3) (i) et (ii) assurent essentiellement l'existence de « suffisamment » de ces pentagones. De façon précise $\mathfrak{R}_1 \circ \mathfrak{R}_3 \Longleftrightarrow \mathfrak{R}_3 \circ \mathfrak{R}_2 \circ \mathfrak{R}_1$ permet d'affirmer que *si l'un des bords du pentagone existe, on peut trouver des* $\omega \in \Omega$ *et des* $\varphi \in \Phi$ *permettant de compléter le pentagone (6. 2. 1)*. De même $\mathfrak{R}_3^{-1} \circ \mathfrak{R}_1 \Longrightarrow \mathfrak{R}_2 \circ \mathfrak{R}_1 \circ \mathfrak{R}_3^{-1}$ permet de *compléter (6.2. 1) si les flèches* φ_3 *et* $\bar{\varphi}_1$ *existent.*

6. 2. 2. Les autres conditions de complétion expriment des propriétés de « symétrie » de $\mathfrak{L}$. De façon précise : Soit D un maillon dont les bords,

$$\lambda : x \xrightarrow{\varphi_1} x_1 \cdots x_{n-1} \xrightarrow{\varphi_n} x' \quad \text{et} \quad \lambda' : x \xrightarrow{\varphi'_1} x'_1 \cdots x'_{n-1} \xrightarrow{\varphi'_n} x',$$

ont même longueur n. Si, pour $j = 1, \ldots, n-1$, $\tilde{p}(x_j) = \tilde{p}(x'_j)$, on dit que D est *symétrique*. D'après 6. 1. 6 et 6. 1. 7, D est déterminé par x et par les suites $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$, $(\varphi'_1, \ldots, \varphi'_n)$ et $(\tilde{p}(x_1), \ldots, \tilde{p}(x_{n-1}), \tilde{p}(x'))$.

Parmi les maillons symétriques de degré 4 figurent les carrés de la forme :

(Q.32)

$$\begin{tikzcd}
((\iota_1 \oplus_{\omega_1} \iota_2) \oplus_{\omega_2} \iota_3) \oplus_{\omega_3} \iota_4 \arrow[r, "\varphi_3"] \arrow[d, "\varphi'_3"] & (\iota_1 \oplus_{\omega_4} (\iota_2 \oplus_{\omega_5} \iota_3)) \oplus_{\omega_3} \iota_4 \arrow[d, "\varphi_2"] \\
(\iota_1 \oplus_{\omega_4} (\iota_2 \oplus_{\omega_5} \iota_3)) \oplus_{\omega_3} \iota_4 \arrow[r, "\varphi'_2"] & \iota_1 \oplus_{\omega_6} ((\iota_2 \oplus_{\omega_5} \iota_3) \oplus_{\omega_7} \iota_4)
\end{tikzcd}$$

$$(Q.21)\qquad \begin{tikzcd} (\iota_1 \oplus_{\omega_1} (\iota_2 \oplus_{\omega_2} \iota_3)) \oplus_{\omega_3} \iota_4 \arrow[r, "\varphi_2"] \arrow[d, "\varphi_2'"'] & \tilde{1} + ((\tilde{1} + \tilde{1}) + \tilde{1}) \arrow[d, "\varphi_1"] \\ \tilde{1} + ((\tilde{1} + \tilde{1}) + \tilde{1}) \arrow[r, "\varphi_1'"] & \tilde{1} + (\tilde{1} + (\tilde{1} + \tilde{1})) \end{tikzcd}$$

(avec la notation abrégée) et enfin

$$(Q.13)\qquad \begin{tikzcd} ((\iota_1 \oplus_{\omega_1} \iota_2) \oplus_{\omega_2} \iota_3) \oplus_{\omega_3} \iota_4 \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[d, "\varphi_1'"] & (\tilde{1} + \tilde{1}) + (\tilde{1} + \tilde{1}) \arrow[d, "\varphi_3"] \\ (\tilde{1} + \tilde{1}) + (\tilde{1} + \tilde{1}) \arrow[r, "\varphi_3'"] & \tilde{1} + (\tilde{1} + (\tilde{1} + \tilde{1})) \end{tikzcd}$$

La condition $\mathfrak{R}_j^{-1} \circ \mathfrak{R}_j \circ \mathfrak{R}_k \Longrightarrow \mathfrak{R}_k$ permet d'affirmer que, si les flèches φ_j, φ_k et φ_j' existent, on peut trouver une flèche φ_k' pour compléter le carré symétrique $(Q.\ j\ k)$.

6. 2. 3. La vérification complète du théorème d'associativité est extrêmement longue. Le principe de la démonstration est le suivant : Si D est un maillon de degré quelconque, de source x et de but x', pour montrer que les deux bords ont même image, on procède par récurrence en montrant qu'il existe un minorant commun y de x_1 et x_1', qui majore encore x', tel que le maillon intermédiaire, de source x et de but y ait une image commutative.

$$\begin{tikzcd} & x_1' \arrow[rr, dashed] \arrow[dr, dashed] & & x_n \arrow[dr] & \\ x \arrow[ur] \arrow[dr] & & y \arrow[rr, dashed] & & x' \\ & x_1 \arrow[ur, dashed] \arrow[rr, dashed] & & x_p' \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Les conditions de complétion permettent de démontrer l'existence de tels maillons intermédiaires. Leur commutativité résulte alors soit d'arguments de fonctorialité, soit des conditions de cohérence de degrés 3 et 4.

BIBLIOGRAPHIE

ARTIN [1], Grothendieck topologies. Harvard 1962.

BENABOU [1], Catégories avec multiplications. C. R. Acad. Sc. Paris (1963).

BENABOU [2], Critères de représentabilité des foncteurs. C.R. Acad. Sc. Paris (1965).

BENABOU [3], Algèbre élémentaire dans les catégories avec multiplication. C. R. Acad. Sc. Paris (1964).

BENABOU [4], Catégories Relatives. C. R. Acad. Sc. Paris (1965).

BOURBAKI [1], Théorie des Ensembles.

CHEVALLEY [1], Notes manuscrites.

COHN [1], Universal Algebra. Harper and Row, New-York (1965).

ECKMANN-HILTON [1], Group-like structures in general categories. Mat. Ann. 145, (1962), 227 - 225 .

EHRESMANN [1], Catégories et structures. Dunod, Paris (1965).

EPSTEIN [1], Notes multigraphiées.

GABRIEL-ZISMAN [1], Séminaire Homotopique. Strasbourg (1964).

GODEMENT [1], Théorie des Faisceaux. Hermann, Paris (1957).

GROTHENDIECK [1], Sur quelques points d'Algèbre Homologique. Tôhoku Mat. J. 2 9, (1957), 119 - 221 .

GROTHENDIECK [1], Fondements de la géométrie algébrique. Paris, (1961).

HELLER [1], Math.Reviews, (Feb. 1965).

HIGGINS [1], Algebras with a scheme of operators. Mat. Nach. (1963), 115 - 132 .

LAWVERE [1], Functorial Semantics of algebraic theories. P. N. A. S. Vol. 50, n° 5.

LAZARD [1], Lois de groupes et analyseurs. Ann. E.N.S. (1955), 299 - 400 .

MAC-LANE [1], Natural associativity and commutativity. Rice University Studies 49, (1963), p. 28 - 46.

MAC-LANE [2], Categorical Algebra. Bull. Amer. Math.Soc. 71 (1965) 40 - 106.

TABLE DES MATIERES